



PROVA TEÓRICA P1
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

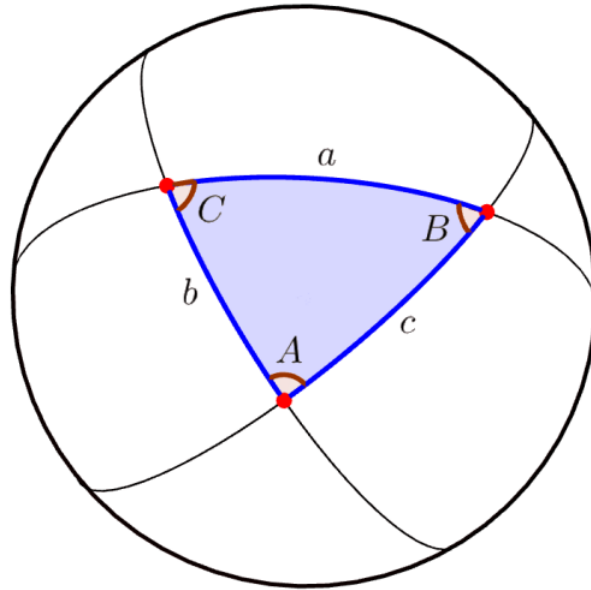
1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

Questões

- 1. Que calor! (5 pontos)** Qual seria o valor da constante solar se o Sol estivesse à mesma temperatura, mas com o dobro de seu raio e à metade de sua distância atual até a Terra? Deixe sua resposta em W/m^2 .
- 2. Que frio! (10 pontos)** No natal do ano passado, Arthurzinho se revoltou por não ter ganhado seu presente e foi tirar satisfação lá na Escandinávia. Seu voo pousou em Svalbard durante a noite. Para não acordar o bom velhinho, Arthurzinho decidiu esperar o amanhecer antes de bater na porta, e esperou... Esperou... Esperou... Esperou... Passou o dia esperando sem ver o nascer do Sol!
 - (5 pontos)** Qual a menor latitude no Hemisfério Norte para a qual é possível passar um dia inteiro sem o Sol estar acima do horizonte? Desconsidere efeitos atmosféricos.
 - (5 pontos)** Arthurzinho passou aquela noite inteira observando as estrelas, e percebeu que Regulus (α Leo, $\alpha = 10^{\text{h}}09^{\text{m}}44^{\text{s}}$, $\delta = 11^{\circ}50'33''$) parecia girar no céu: começou no alto, desceu, passou praticamente rente ao horizonte e depois voltou a subir. Determine a latitude de Arthurzinho.
- 3. Paralaxe (10 pontos)** A primeira medição de uma paralaxe estelar ocorreu no início do século XIX por Friedrich Wilhelm Bessel. O astrônomo mediu a paralaxe da binária 61 Cyg, a uma distância de 11,3 anos luz da Terra. Estime **(i)** a paralaxe de 61 Cyg (em segundos de arco), e **(ii)** o diâmetro mínimo (em cm) de um telescópio capaz de resolver a máxima distância angular entre duas posições aparentes da estrela, em relação ao céu de fundo. Desconsidere efeitos atmosféricos e considere o comprimento de onda da luz visível centrado em 500 nm.
- 4. Calendário Tembé (20 pontos)** “O Céu dos Índios Tembé” é uma cartilha produzida pelo Planetário do Pará, a qual retrata percepções astronômicas e cosmológicas da cultura Tembé, no Alto Rio Guamá (próximo à linha do Equador).
 A divisão das estações do ano no calendário Tembé é bem diferente da nossa; são apenas duas: *kwarahy* (a estação da seca) e *aman* (a estação da chuva), cada uma ocupando aproximadamente metade do ano. Além disso, o conceito de constelação na cultura Tembé pode diferir do nosso. As constelações Tembé estão localizadas no *Tapi'ir Rape* (o Caminho da Anta, designação para a Via Láctea) e são formadas por regiões claras e escuras, além das estrelas. A cabeça de *Wiranu* (a Ema), por exemplo, é desenhada por uma região escura conhecida como Nebulosa do Saco de Carvão.



Figura 1: Representação esquemática de *Wiranu*, Retirado de *O Céu dos Índios Tembé*.

Quando os Tembê percebem *Wiranu* inteiramente visível no lado leste logo após o anoitecer, é sabida a chegada de *kwahary*. Estime a época do ano em que ocorre cada troca de estação (de estação da chuva para estação da seca, e de estação da seca para estação da chuva), justificando sua resposta.

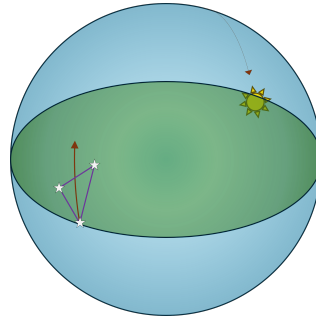


Figura 2: Representação esquemática do nascimento de um asterismo no lado leste logo após o anoitecer.

5. Uma tríade especial (30 pontos) Muito distantes do nosso mundo, existem três fascinantes estrelas, apelidadas de D4V1, HU60 e M4U1. Essa tríade é especial porque apresenta as seguintes propriedades:

- A estrela HU60, vista da estrela D4V1, está no limiar da visão humana a olho nu;
- A estrela D4V1, vista da estrela M4U1, está no limiar da visão humana a olho nu;
- A estrela M4U1, vista da estrela HU60, está no limiar da visão humana a olho nu.

Com base nessas informações e sabendo que as magnitudes absolutas de HU60 e D4V1 são $M_H = 3,6$ mag e $M_D = 4,7$ mag, respectivamente, faça o que se pede:

- (15 pontos)** Determine o intervalo numérico, em mag, ao qual a magnitude absoluta de M4U1 deve pertencer.
- (15 pontos)** Em uma situação arbitrária em que a magnitude absoluta de M4U1 tem um certo valor M_M (dentro do intervalo calculado no item anterior), o triângulo formado pelas estrelas apresenta os ângulos α , β e γ . Imagine agora que a magnitude absoluta de M4U1 aumentou para $M_M + 0,2$ (também dentro do intervalo). Se, hipoteticamente, as três estrelas pudessem se reposicionar de forma que todas as propriedades sempre fossem válidas, calcule quais deveriam ser os valores de M_H e M_D para que o novo triângulo formado possuísse os mesmos ângulos α , β e γ .

6. Mudança Orbital (30 pontos) Os satélites geoestacionários “Starlype” são de muita importância para o fornecimento de conexão à Internet em lugares remotos. O bilionário excêntrico Ualype não está satisfeito com a posição de um desses satélites, projetado exatamente sobre o meridiano de Greenwich e sobre a linha do Equador. Ele decide então mudar a sua posição de um jeito inusitado:

- (18 pontos)** Considere que o satélite geoestacionário em questão sofra um impulso, de modo a entrar numa órbita elíptica. Qual deve ser o ΔV do impulso para que o satélite chegue ao seu afélio com 86% da velocidade que ele tinha antes do impulso?

Dado: equação vis-viva para cálculo de velocidade orbital

$$v^2 = GM \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

- (12 pontos)** Após realizar uma volta, o satélite sofre um impulso de novo, de modo a retornar à órbita geoestacionária. Qual será a longitude da projeção do satélite após essa manobra ?

7. **Analema (30 pontos)** A seguir, está representada a imagem do analema do Sol, sobreposta durante um ano em determinada cidade. A partir da figura e de seus conhecimentos, indique cada alternativa como verdadeira (V) ou falsa (F), justificando brevemente suas respostas:

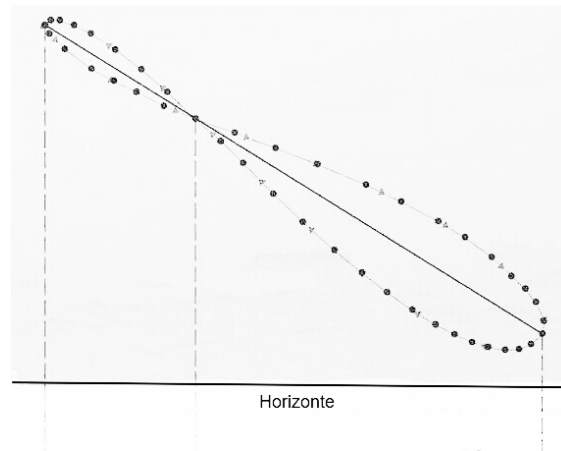


Figura 3: Representação do analema. Retirado do Acervo Wikipedia.

- (a) **(5 pontos)** A imagem foi tirada com a câmera apontada, aproximadamente, para o ponto cardinal leste.
- (b) **(5 pontos)** A linha menor, à direita, aponta para a posição do Sol no solstício de junho.
- (c) **(5 pontos)** O analema é resultado de dois fatores: a obliquidade da eclíptica e a precessão dos equinócios.
- (d) **(5 pontos)** O nó do analema (o encontro das “barrigas” maior e menor) ocorre durante os equinócios de outono e inverno.
- (e) **(5 pontos)** A linha sólida que cruza o analema é paralela à eclíptica.
- (f) **(5 pontos)** Se a obliquidade da eclíptica fosse nula, o analema seria colinear e contido no Equador.
8. **Sistema Binário (40 pontos)** Um astrônomo amador observou ao longo de anos um sistema binário *edge-on* e com os semi-eixos maior das órbitas perpendiculares à linha de visada. Ele conseguiu concluir que a razão entre as massas era de $M_2/M_1 = 4,9$, em que M_1 e M_2 são as massas das estrelas 1 e 2, respectivamente. Foi observado que o menor intervalo de tempo entre o periastro e o apoastro é de 1,7 ano. Ele fotografou esses dois momentos (veja figura abaixo): em $t = 0$ ocorreu o apoastro e a separação entre as estrelas era de $\theta_a = 1,45''$. Em $t = 1,7$ ano ocorreu o periastro e a separação era de $\theta_p = 0,22''$.

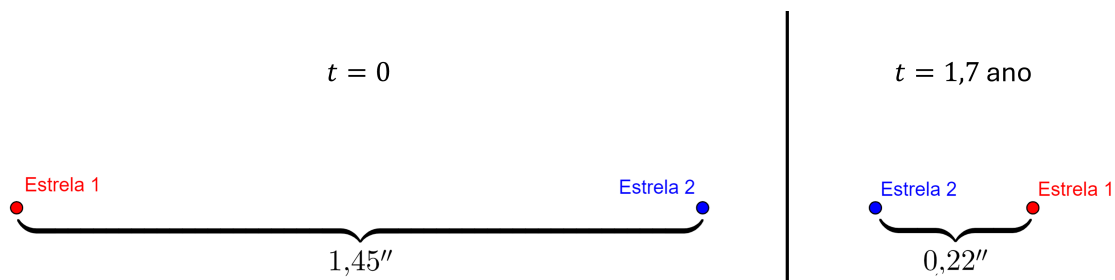


Figura 4: Ilustração das fotografias das estrelas nos momentos de apoastro e periastro, respectivamente (fora de escala).

- (a) **(16 pontos)** Encontre a excentricidade e das órbitas.
 (b) **(24 pontos)** Sabendo que o sistema estava a uma distância $d = 8,5$ pc da Terra, encontre as massas M_1 e M_2 , assim como os semi-eixos maiores a_1 e a_2 .

Dado: terceira lei de Kepler para sistemas binários

$$\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)}$$

9. Gira-gira Planetário (50 pontos) Durante muitos séculos, modelos geocêntricos foram creditados como descrições precisas das dinâmicas planetárias. No entanto, mesmo as modelagens geocêntricas, como a de Ptolomeu, admitiam a órbita de Vênus e Mercúrio ao redor do Sol. Nessa questão, vamos estudar previsões obtidas se essa consideração não for realizada, ou seja, previsões de um modelo puramente geocêntrico.

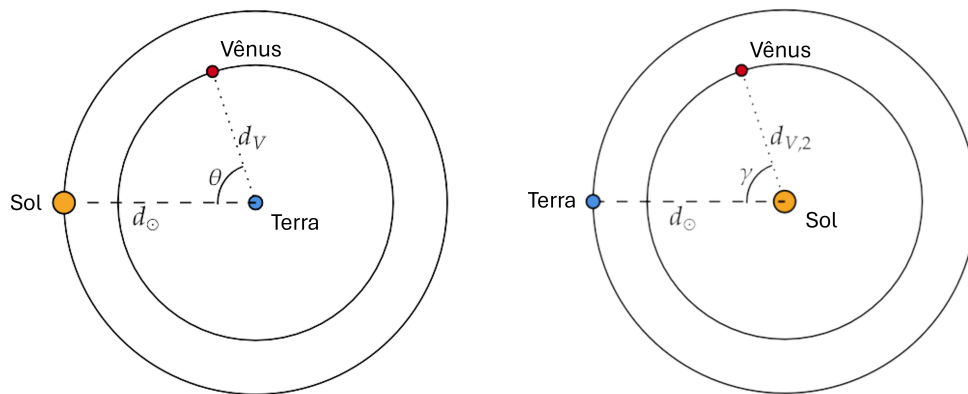


Figura 5: Representação de um modelo puramente geocêntrico (à esquerda) e um modelo heliocêntrico (à direita).

- a) **(20 pontos)** Determine a fração iluminada de Vênus, $A_{iluminada}/A_{visível}$, em função do ângulo ϵ entre o Sol e a Terra, com vértice em Vênus. Considere a área **plana** da projeção para um observador na Terra.

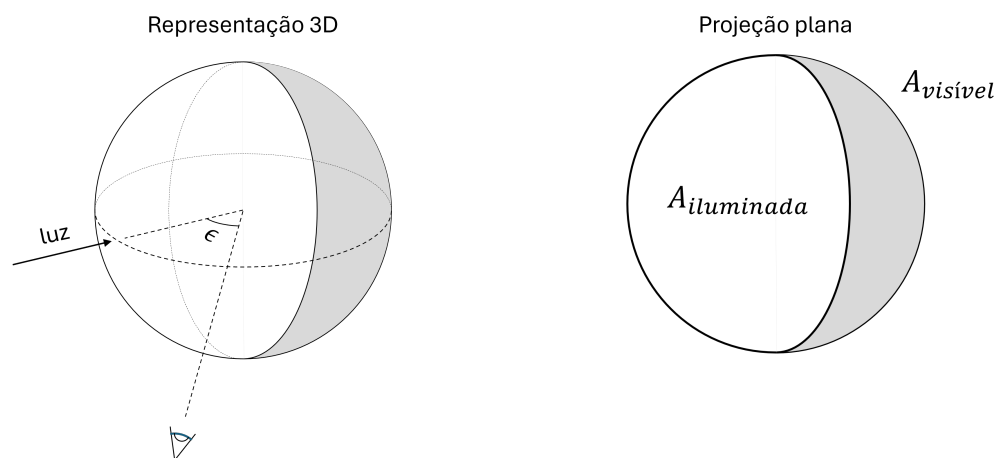


Figura 6: Representação do terminador tanto tridimensional (à esquerda), quanto sua projeção plana (à direita). As indicações de área se referem às áreas das figuras planas na projeção.

- b) **(12 pontos)** Considerando o modelo puramente geocêntrico, i.e., em que Vênus orbita ao redor da Terra, expresse a fração iluminada do planeta em função dos parâmetros geométricos apresentados na figura.
- c) **(12 pontos)** Considerando o modelo heliocêntrico, expresse a fração iluminada de Vênus em função dos parâmetros geométricos apresentados na figura.
- d) **(6 pontos)** A imagem a seguir mostra Vênus em sua fase cheia. Para cada um dos modelos, encontre o valor do respectivo ângulo (θ ou γ) em que Vênus precisa estar para ser visto nessa fase.



Figura 7: Fotografia de Vênus pela missão Mariner 10. Tratamento das imagens por NASA/JPL-Caltech.

- 10. 2024 YR4 (75 pontos)** O recém-descoberto asteroide 2024 YR4 tem chamado muita atenção pela sua probabilidade de colisão com a Terra em 22 de Dezembro de 2032, atualmente estimada ao redor de 3% segundo a NASA. Apesar da chance pequena, cientistas ao redor do mundo têm estudado o asteroide e monitorado com atenção a sua órbita de forma a entender melhor as reais chances de impacto e suas consequências.

Considere que o asteroide encontra-se em uma órbita elíptica heliocêntrica de distância periélica 0,85 UA. Despreze a inclinação da órbita em relação ao plano da eclíptica e saiba que o asteroide orbita no mesmo sentido da Terra. O intervalo de tempo entre as duas próximas aproximações da Terra é de $\Delta t = 4$ anos. Considere a órbita da Terra circular de raio 1 UA.

- (a) **(10 pontos)** Calcule a excentricidade (e) e o semi-eixo maior (a) em UA da órbita de 2024 YR4.
- (b) **(10 pontos)** Calcule a velocidade do asteroide em sua aproximação da Terra, em km/s.
- (c) **(18 pontos)** Determine o menor ângulo, em graus, entre a órbita da Terra e a órbita do Asteroide no momento de aproximação da Terra.
- (d) **(12 pontos)** Calcule, em km/s, a velocidade do asteroide no referencial da Terra no momento da aproximação.
- (e) **(25 pontos)** Agora, analisaremos o movimento do asteroide durante a aproximação da Terra—isto é, nas redondezas do planeta, onde a influência gravitacional da Terra torna-se mais relevante que a do Sol. Considere que o asteroide, no referencial geocêntrico, se aproxima da Terra do infinito com a velocidade calculada no item anterior e parâmetro de impacto b . Se o parâmetro de impacto estiver no intervalo

$$0 \leq b \leq b_{max}$$

o asteroide colidirá com a superfície da Terra. Considerando apenas a atração gravitacional terrestre e utilizando conservação de energia e momento angular, encontre b_{max} , em km.

OBS: O parâmetro de impacto é a distância mínima que o asteroide passaria da Terra caso ele se movesse em movimento retilíneo e uniforme, na ausência de atração gravitacional.