



PROVA TEÓRICA P1
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

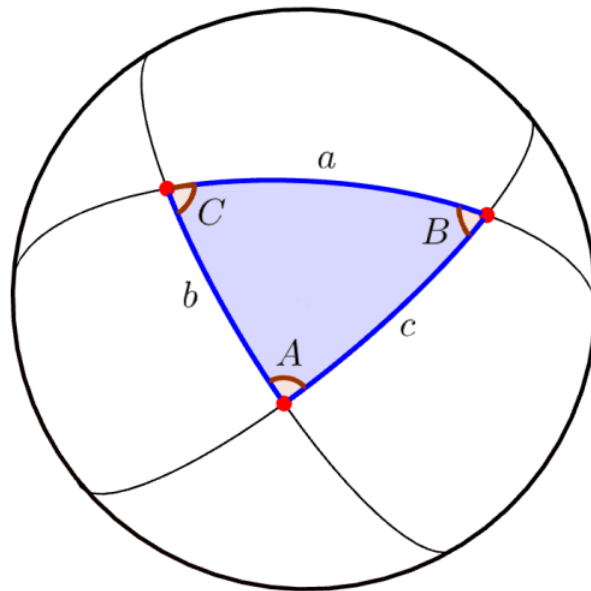
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 19 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Equação dos gases ideais:

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

Questões

1. Mecânica Celeste (Classe C1) Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito à mecânica celeste. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

(1.) A descrição completa de um corpo numa órbita kepleriana exige seis parâmetros orbitais: a inclinação e a longitude do nodo ascendente orientam o plano de órbita; a excentricidade define o formato da órbita; o semi-eixo maior define a escala da órbita; o argumento do periastro orienta a órbita dentro de seu plano; e a anomalia localiza a posição do corpo na órbita.

(2.) A órbita osculadora é a órbita assumida por um corpo quando consideramos perturbações a partir do primeiro termo numa série de expansão. Ou seja, ao invés de considerar o potencial caindo com A/r (situação ideal), consideramos que ele cai com $A/r + B/r^2$ (em que o B/r^2 é o primeiro termo de uma expansão em série).

(4.) Os pontos de Lagrange L4 e L5 são regiões estáveis e favoráveis a fenômenos de ressonância orbital 1:1. Um exemplo notório desse efeito são os asteroides troianos na órbita de Júpiter.

(8.) Em um sistema de dois corpos, as deformações de uma componente devido à atração gravitacional da companheira geram atritos internos, os quais tendem o sistema à sua configuração de menor energia, caracterizada por órbitas síncronas e circulares.

(16.) A Precessão dos Equinócios é um exemplo de atuação de torque sobre um sistema em rotação prévia, modificando a direção de seu momento angular. Se a variação local do campo gravitacional externo for desprezada, ainda existe torque resultante no referencial do centro de massa terrestre. Sendo assim, mesmo que sacrifique alguma precisão, é possível explicar a Precessão dos Equinócios independentemente de efeitos de maré.

(32.) A esfera de Hill (ou esfera de influência) da Terra é o lugar geométrico dos pontos nos quais existe pelo menos uma órbita estável ao redor do planeta. Fora dessa esfera, qualquer satélite terrestre será eventualmente capturado pelo Sol.

Dezena 0 1 2 3 4 5 6

Unidade 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Óptica (Classe C1) Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito a equipamentos ópticos. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

(1.) Os espelhos parabólicos são amplamente utilizados na construção de telescópios, em razão da luz que vier paralela ao eixo ser projetada em um foco único e bem definido.

(2.) Redes de interferometria são particularmente importantes na astronomia de baixas energias, nas quais o comprimento de onda da radiação detectada é comparativamente maior, diminuindo a resolução de telescópios individuais.

(4.) O aumento útil de um telescópio doméstico é principalmente determinado pela sua resolução angular, de modo que aumentos excessivos resultam em imagens pouco nítidas.

(8.) O foco efetivo F de um telescópio é tal que, quando aplicada uma ocular de foco f , o aumento do sistema será $A = f/F$.

(16.) A aberração cromática é um efeito inevitável de qualquer sistema óptico. O que normalmente tentamos é minimizá-la, mas conhecendo uma limitação física de sua existência.

(32.) A montagem germânica é a única montagem equatorial facilmente executável no Hemisfério Sul, pois é a única que não exige precisar a posição do polo elevado, o que é particularmente difícil devido à ausência de uma estrela polar.

Dezena 0 1 2 3 4 5 6
 Unidade 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Orientação de Sistemas (Classe C1) Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito à orientação de giro (dextrorrotatório ou levorrotatório) de sistemas e objetos astronômicos. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

- (1.) No decorrer de um dia, o Sol aparenta se movimentar mais lentamente do que as estrelas fixas na esfera celeste.
- (2.) No Hemisfério Sul, o céu aparenta girar em sentido anti-horário.
- (4.) A definição de um Tempo Sideral Local igual ao ângulo horário mais a ascensão reta, válida para qualquer estrela de referência, só é possível porque ambos (ângulo horário e ascensão reta) têm o mesmo Polo Fundamental e crescem em sentido leste.
- (8.) O Polo Norte Eclíptico (PNE) é aproximadamente antiparalelo (mesma direção, mas sentido oposto) ao momento angular do sistema solar.
- (16.) A Precessão dos Equinócios avança em orientação de mão esquerda (levorrotatório) se o Polo Fundamental for o PNE. **Dica:** por que se chama ponto de *Aries* se fica em Peixes?
- (32.) O movimento aparente de Vênus em relação às estrelas fixas altera sua orientação ao longo do tempo, sendo que Vênus passa um período maior em sentido de mão esquerda (levorrotatório) se o Polo Fundamental for o PNE.

Dezena 0 1 2 3 4 5 6
 Unidade 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Fotometria (Classe C1) Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito à teoria de radiação. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

- (1.) A expressão $v = \lambda \cdot f$ para o cálculo da velocidade de uma onda é apenas uma aproximação para baixas amplitudes. A abordagem mais rigorosa seria considerar o perímetro da senoide.

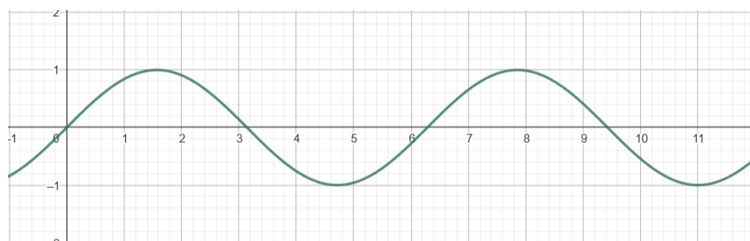


Figura 1: Representação de uma onda. Feito com Geogebra.

- (2.) A consideração do Sol como um corpo negro é antagônica à sua visível tonalidade amarelada. Usamos essa aproximação porque ela não carrega muito erro na maioria das frequências de interesse, mas evita modelos matemáticos muito mais trabalhosos.
- (4.) Considere o imageamento de uma fonte astronômica de baixo brilho, utilizando uma matriz CCD. A média temporal de detecção de fótons é bem definida, sendo calculada por parâmetros como o fluxo aparente da fonte, a energia do fóton e o ganho do aparato óptico. Contudo, os instantes específicos nos quais cada detecção ocorre são consideravelmente aleatórios e independentes. Sendo assim, podemos

modelar a imagem como uma distribuição de Poisson, na qual o ruído (desvio padrão) associado à quantidade de fótons detectada é inversamente proporcional à raiz do tempo de coleta.

(8.) A lei de Wien pode ser obtida derivando a lei de Planck com respeito à temperatura e igualando a derivada a zero. Já a lei de Stefan-Boltzmann pode ser obtida integrando a lei de Planck com respeito à frequência, em todo o espectro eletromagnético, depois corrigindo a dependência pela área e pelo ângulo sólido por meio de um fator multiplicativo.

(16.) O excesso de cor é uma medida do avermelhamento de uma fonte emissora após passar por um meio com extinção. Para duas fontes iguais passando por meios distintos, quanto maior o excesso de cor, maior o índice de cor aparente, portanto mais avermelhada aparenta ser a fonte.

(32.) As linhas de absorção em um espectro estelar revelam a composição química da estrela. Por exemplo, as fortes linhas de hidrogênio no espectro de estrelas do tipo A comprovam a concentração apreciável desse elemento na composição química desse tipo estelar. Por outro lado, a ausência de linhas de hidrogênio no espectro de estrelas do tipo K revela que o elemento não é tão abundante nesse outro tipo.

Dezena 0 1 2 3 4 5 6

Unidade 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Vaca Roxa (Classe C1) Ephilia, a famosa vaca roxa de Williamstown, decidiu se mudar para Porto Alegre ($\varphi = -30^\circ$) para observar o céu noturno. Para realizar as suas observações, ela comprou um telescópio de razão focal $f/5$. Sabendo que Ephilia deixou o instrumento apontado fixamente para o zênite durante um ano, assinale a soma das alternativas verdadeiras.

(1.) Ephilia conseguia observar a todo momento as estrelas de declinação $\delta = -60^\circ$ pelo seu telescópio.

(2.) Se Ephilia visse uma estrela a cinco graus norte do zênite em sua culminação superior, ela teria declinação $\delta = -25^\circ$.

(4.) Ephilia conseguirá ver apenas as estrelas de declinação $-60^\circ \leq \delta \leq -40^\circ$ pelo seu telescópio.

(8.) O ângulo sólido visível pelo telescópio de Ephilia é $\Omega \approx 1,08$ sr.

(16.) Ao longo do ano, Ephilia consegue enxergar apenas 0,25% do número total de estrelas espalhadas por toda a esfera celeste pelo seu telescópio.

(32.) O campo de visão do telescópio de Ephilia é de aproximadamente $11,40^\circ$

Dezena 0 1 2 3 4 5 6

Unidade 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Perdido em Marte (Classe C2) Após um intenso treinamento para a OLAA na construção de foguetes, Hugo e Tia Mi decidiram aprimorar seu projeto e desenvolver um foguete de garrafa PET. Com um design inovador, eles conseguiram um feito extraordinário: o foguete não apenas escapou da órbita terrestre, como também alcançou Marte. Entretanto, durante o processo de pouso, a estrutura da nave se separou, resultando em aterrissagens em diferentes regiões do planeta.

Apesar da separação, Hugo e Tia Mi utilizaram a observação astronômica para determinar suas posições. Medindo o ângulo horário do Sol em seus respectivos locais, encontraram os valores de $8 h$ e $2 h$, respectivamente. Sabe-se que, no momento do pouso, Marte estava em conjunção com o Sol, visto da Terra, e que a aterrissagem ocorreu no dia 21 de março. Além disso, a longitude de Hugo, em relação a um meridiano de referência equivalente ao de Greenwich na Terra, é $+45^\circ$.

Com base nessas informações, determine a longitude de Tia Mi em relação ao mesmo meridiano de referência e seu tempo sideral local.

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| (a) $-135^\circ; 2 h$ | (e) $-45^\circ; 2 h$ |
| (b) $+135^\circ; 2 h$ | (f) $+45^\circ; 2 h$ |
| (c) $-135^\circ; 14 h$ | (g) $-45^\circ; 14 h$ |
| (d) $+135^\circ; 14 h$ | (h) n.d.a. |

7. Eu consigo ver o céu? (Classe C2)

Maxbom, em seus esforços para ser aprovado no ITA (Instituto de Tecnologia dos Astrônomos), localizado na cidade de São José dos Campos ($\phi = 23,2^\circ S; \lambda = 45,9^\circ O$), decidiu visitar a instituição para conhecer o seu observatório. Para isso, ele pediu para seu colega Dudu, astrônomo profissional, mostrar o observatório.

Durante a visita, o motor da cúpula, em formato de uma semiesfera, travou. No momento da falha, a cúpula possuía um ângulo de abertura de 30° e seu centro estava a uma altura de 40° , apontando na direção do ponto cardeal sul.

Mesmo com esse problema, eles resolveram esperar o dia inteiro ali para fazer suas observações do céu. Qual a porcentagem total do céu que eles conseguiram ver durante o dia?

- | | |
|-----------|------------|
| (a) 7,5% | (e) 18,9% |
| (b) 9,5% | (f) 31,6% |
| (c) 15,0% | (g) 43,7% |
| (d) 15,8% | (h) n.d.a. |

LIGOS fora de fase O texto a seguir refere-se às questões 8 e 9.

Os observatórios LIGO (Observatório de ondas gravitacionais por interferômetro laser) estão entre os mais impressionantes e promissores detectores da modernidade. Com uma precisão que satura princípios quânticos de incerteza, estes já são capazes de detectar eventos dinâmicos supermassivos e prometem muito mais. Os observatórios constituem de dois interferômetros de Michelson localizados em Livingston, Louisiana ($30^\circ 33' 47'' N, 90^\circ 46' 27'' O$) e em Richland, Washington ($46^\circ 27' 19'' N, 119^\circ 24' 28'' O$), e fazem forte uso da correlação estatística dos dados coletados para a busca de sinais (eventos) entre os dados medidos. Um tipo simples de correlação que podemos estudar é a diferença de fase entre sinais periódicos.

8. (Classe C2) Considere uma fonte de ondas gravitacionais com uma frequência bem definida $\nu = 200$ Hz, localizada em $\delta = -22^\circ 28' 12''$ e $\alpha = 17^h 03^m 15^s$ e seja P o ponto da Terra no qual a onda fez seu primeiro contato. Se o tempo sidereal de Greenwich no momento da detecção é $TSG = 14^h 7^m 57^s$, determine as distâncias angulares θ_L e θ_W entre o ponto P e os observatórios de Louisiana e Washington, respectivamente.

- | | |
|---|---|
| (a) $\theta_L = 69^\circ 35' 02''$; $\theta_W = 96^\circ 48' 25''$ | (e) $\theta_L = 67^\circ 41' 01''$; $\theta_W = 79^\circ 29' 55''$ |
| (b) $\theta_L = 138^\circ 51' 15''$; $\theta_W = 152^\circ 26' 49''$ | (f) $\theta_L = 115^\circ 56' 59''$; $\theta_W = 118^\circ 08' 28''$ |
| (c) $\theta_L = 161^\circ 32' 56''$; $\theta_W = 135^\circ 11' 43''$ | (g) $\theta_L = 23^\circ 42' 05''$; $\theta_W = 37^\circ 18' 26''$ |
| (d) $\theta_L = 55^\circ 29' 41''$; $\theta_W = 69^\circ 43' 22''$ | (h) n.d.a. |

9. (Classe C2) Considere agora uma nova fonte de sinal, com a mesma frequência, e cujo sinal atinge a Terra em P' , formando ângulos $\theta'_L = 23^\circ 12' 56''$ e $\theta'_W = 82^\circ 47' 33''$. Encontre a diferença de fase $\Delta\phi$ (em radianos) com a qual os observatórios detectam este sinal.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\Delta\phi = 1,71$ rad | (e) $\Delta\phi = 3,41$ rad |
| (b) $\Delta\phi = 0,11$ rad | (f) $\Delta\phi = 2,66$ rad |
| (c) $\Delta\phi = 2,36$ rad | (g) $\Delta\phi = 5,08$ rad |
| (d) $\Delta\phi = 4,05$ rad | (h) n.d.a. |

Betelgeuse O texto a seguir refere-se às questões 10 e 11.

A estrela Betelgeuse (α Ori) é uma supergigante vermelha pertencente à constelação de Órion, e uma das mais brilhantes do céu. Estudos indicam que ela irá explodir após o colapso de seu núcleo em um futuro próximo de até cem mil anos, gerando uma supernova (SN). Após a SN, o núcleo de Betelgeuse se tornará uma estrela de nêutrons.

A energia liberada durante a explosão é essencialmente a energia de ligação gravitacional da estrela de nêutrons formada, estimada como

$$E = \frac{3}{5} \frac{GM_N^2}{R_N}$$

Em que M_N é sua massa e R_N o seu raio.

Considere que o núcleo de Betelgeuse, na iminência do colapso, possa ser modelado como uma esfera **homogênea** de **gás ideal**, composta por Ferro-56 (${}^{56}_{26}\text{Fe}$) e com pressão P dada por:

$$P = \frac{3}{8\pi} \frac{GM_c^2}{R_c^4}$$

Em que M_c é a massa do núcleo e R_c o raio do núcleo. Por fim, assuma que a massa da estrela de nêutrons formada é essencialmente a mesma do núcleo de Betelgeuse pré-colapso. Para as questões a seguir, suponha que astrônomos do futuro observam a SN gerada pela explosão de Betelgeuse e verificam que a variação de magnitude bolométrica de Betelgeuse é de $\Delta m = -12,6$, e a SN dura um período $\Delta t = 100$ dias, sendo o brilho da SN essencialmente o mesmo em toda a sua duração.

Dados de Betelgeuse:

- Raio: $R = 760 R_\odot$
- Temperatura efetiva: $T_{ef} = 3600$ K
- Densidade média do núcleo (pré-colapso): $\rho_c = 1 \times 10^8$ g/cm³
- Temperatura do núcleo (pré-colapso): $T_c = 4 \times 10^{11}$ K
- Raio da Estrela de nêutrons: $R_N = 10$ km

10. (Classe C2) Determine a massa M_N da estrela de nêutrons resultante.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| (a) $8,54 \times 10^{29}$ kg | (e) $2,15 \times 10^{31}$ kg |
| (b) $3,67 \times 10^{30}$ kg | (f) $5,36 \times 10^{31}$ kg |
| (c) $6,89 \times 10^{30}$ kg | (g) $7,44 \times 10^{31}$ kg |
| (d) $9,47 \times 10^{30}$ kg | (h) n.d.a. |

11. (Classe C2) A energia luminosa emitida corresponde à qual fração da energia total liberada pela supernova, em porcentagem?

- | | |
|-----------|------------|
| (a) 0,01% | (e) 0,08% |
| (b) 0,02% | (f) 0,1% |
| (c) 0,04% | (g) 0,2% |
| (d) 0,06% | (h) n.d.a. |

Pula Pula gravitacional O texto a seguir se refere às questões 12 e 13.

A bordo da nave Galileu IV, a tripulação se prepara para explorar o planeta Titanus, um exoplaneta rochoso com o mesmo raio da Terra, R_{\oplus} , porém muito mais massivo, com uma massa $M_T = nM_{\oplus}$, onde $n > 1$.

Tendo pousado em Titanus, o astronauta Lucas, especialista em testes de gravidade, decide realizar um experimento. Ele prende um elástico de constante elástica k em um suporte a uma altura h (muito maior que o comprimento natural do elástico) acima da superfície do planeta. Depois, se pendura na outra extremidade livre do elástico para sentir a gravidade local com seus pés na superfície do planeta.

Na questão, considere:

- A massa do astronauta como m .
- O elástico segue a **Lei de Hooke** e pode ser tratado como um sistema conservativo.
- $h_1 \ll R_{\oplus}$ e $h_2 \ll R_{\oplus}$
- Se preciso, use a aproximação binomial para x pequeno $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

12. (Classe C2) Qual deve ser a altura h_1 para que, ao se pendurar no elástico, a gravidade efetiva sentida por Lucas seja igual à gravidade na Terra?

- | | |
|--|---|
| (a) $\frac{GMnmR_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$ | (e) $\frac{GM(n-1)mR_{\oplus}}{nGM_{\oplus}m - 2k \cdot R_{\oplus}^3}$ |
| (b) $\frac{GM(n-1)mR_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$ | (f) $\frac{GnMmR_{\oplus}}{2(n-1)GM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$ |
| (c) $\frac{GM(n-1)R_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}}$ | (g) $\frac{GM^2(n-1)R_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$ |
| (d) $\frac{GM(n-1)mR_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$ | (h) n.d.a |

13. (Classe C2) Considere a altura mínima h_2 para que, ao ser impulsionado pelo elástico, ele alcance a velocidade de escape do planeta e nunca mais retorne. Determine a equação de segundo grau que fornece h_2 como raiz.

- | | |
|--|---|
| (a) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus}^2m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus}^2m}{R_{\oplus}} = 0$ | (e) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = 0$ |
| (b) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = 0$ | (f) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^3} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} = 0$ |
| (c) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGm}{R_{\oplus}} = 0$ | (g) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = 0$ |
| (d) $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \left(\frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} - \frac{nGM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \right) \cdot h = 0$ | (h) n.d.a |

Neo-Universe O texto a seguir refere-se às questões 14 e 15.

Obazs Rotieh, nosso cientista maluco favorito, e seu mais novo ajudante Ualypinho estavam desenvolvendo sua mais recente invenção, uma máquina que transporta o usuário para outros universos. Em um de seus testes, Ualypinho foi levado para um universo onde os planetas e estrelas podiam assumir diversos formatos. Como um astrônomo curioso e atrapalhado que ele é, resolveu encontrar a temperatura de alguns tipos de planeta que ele encontrou. No entanto, Ualypinho não sabia como fazer isso. Ajude-o nessa missão:

14. **(Classe C2)** O primeiro sistema planetário que nosso amiguinho encontrou foi um igual ao do nosso universo, ou seja, em que tanto o planeta quanto a estrela eram esferas. Ele resolveu nomear a estrela como M0m0, enquanto o planeta ele chamou-o de M0n0. Então, encontre a temperatura T_n de M0n0 que possui emissividade ϵ , albedo α e dista r de M0m0, a qual possui raio R_m e temperatura T_m . Considere que o planeta possui rotação rápida.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m \alpha}{4r\epsilon}} & \text{(e)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2 \alpha}{4r^2(1-\epsilon)}} \\ \text{(b)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^3(1-\alpha)}{4r^3\epsilon}} & \text{(f)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^3 \alpha}{4r^3\epsilon}} \\ \text{(c)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^3 \alpha}{4r^3\epsilon}} & \text{(g)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2(1-\alpha)}{4r^2\epsilon}} \\ \text{(d)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m(1-\alpha)}{4r(1-\epsilon)}} & \text{(h)} \quad T_n &= T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2(1-\alpha)}{4r^2(1-\epsilon)}} \end{aligned}$$

15. **(Classe C2)** Então, vagando por esse novo universo, Ualypinho encontrou um sistema interessante. Esse novo sistema planetário era formado por cilindros, ou seja, tanto a estrela quanto o planeta eram cilíndricos! Então, ele decidiu dar nome ao planeta e a estrela também, sendo a estrela chamada de J3ss3 Llum1 e o planeta, Sh0gun. Assim, encontre a temperatura T_s de Sh0gun, sabendo que possui mesma emissividade ϵ e albedo α de M0n0, e dista r de J3ss3 Llum1, que possui raio R_j e temperatura T_j . Considere que Sh0gun possui rápida rotação e que o fluxo de objetos cilíndricos é apenas radial.

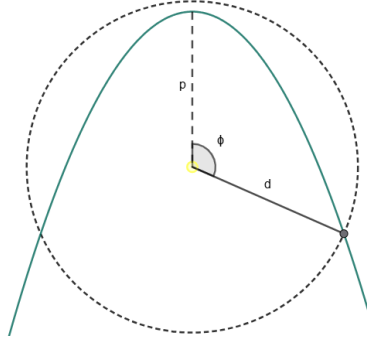
Dica: A radiação se propaga numa frente cilíndrica com área $A = 2\pi r h_j$, em que r é a distância ao eixo da estrela cilíndrica e h_j é a altura da estrela cilíndrica. Perceba também que a projeção de um cilindro, de um ponto de vista em que a linha de visada seja perpendicular ao eixo do cilindro, é um retângulo.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j \alpha}{\pi r \epsilon}} & \text{(e)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^2 \alpha}{\pi r^2(1-\epsilon)}} \\ \text{(b)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^3(1-\alpha)}{\pi r^3 \epsilon}} & \text{(f)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^3 \alpha}{2r^3 \epsilon}} \\ \text{(c)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^3 \alpha}{\pi r^3 \epsilon}} & \text{(g)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j(1-\alpha)}{\pi r \epsilon}} \\ \text{(d)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j(1-\alpha)}{2r(1-\epsilon)}} & \text{(h)} \quad T_n &= T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^2(1-\alpha)}{2r^2(1-\epsilon)}} \end{aligned}$$

16. **UALL-E π (Classe C2)** O programa via-lácteo de vida extraterrestre é uma iniciativa fundada pela OBA em 2053 com o intuito de investigar sistemas com potenciais planetas habitáveis. Após se aproximar de uma estrela interessante, a nave mãe ejeta uma sonda UALL-E π para coleta de dados próximo às órbitas dos planetas interiores, efetuando nesse processo uma órbita aproximadamente parabólica.

Considere uma dessas sondas de massa m se direcionando a uma estrela de massa M , que passará alguns dias estudando um planeta rochoso enquanto está no interior de sua órbita (circular de raio d). Seja p a

distância de periastro da sonda, e supondo $p < d$, encontre o ângulo ϕ entre a sonda e o periastro, com vértice na estrela, no momento em que ela cruza com a órbita do planeta.



- | | |
|---|--|
| (a) $\phi = \cos^{-1} \left(\frac{4p^2}{d^2} - \frac{3p}{d} - 1 \right)$ | (e) $\phi = \cot^{-1} \left(\frac{2dp-d^2}{p(d-p)} \right)$ |
| (b) $\phi = \text{sen}^{-1} \left(\frac{4p^2}{d^2} - \frac{3p}{d} - 1 \right)$ | (f) $\phi = \sec^{-1} \left(\frac{d^3}{(2p-d)^3} \right)$ |
| (c) $\phi = \cos^{-1} \left(\frac{2p-d}{d} \right)$ | (g) $\phi = 90^\circ$ |
| (d) $\phi = \text{sen}^{-1} \left(\frac{2p-d}{d} \right)$ | (h) n.d.a. |

17. Black Hole Sun (Classe C3) O Sol, estrela de classe G2 e massa M_\odot , por sorte não tem chance alguma de se tornar um buraco negro, mas isso nunca nos impediu de imaginar como seria a vida se este fosse o caso. Considere que no lugar de nossa estrela, esteja um buraco negro de mesma massa e um disco de acreção muito maior que o raio de Schwarzschild, que desacelera viscosamente a matéria orbitante tornando-a aproximadamente inerte ao adentrar o horizonte de eventos, sendo sua energia dissipada em radiação térmica. Encontre qual deveria ser a taxa de absorção η (massa por unidade de tempo) do buraco negro para que este possuísse a mesma luminosidade do Sol L_\odot . Ignore o limite de Eddington.

- | | |
|--|---|
| (a) $\eta = \frac{R_\odot L_\odot}{GM_\odot}$ | (e) $\eta = 4\sqrt{\frac{R_\odot}{c^3 GM_\odot}} L_\odot$ |
| (b) $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_\odot}{c^3 GM_\odot}} L_\odot$ | (f) $\eta = \frac{4}{3} \frac{R_\odot}{GM_\odot c} L_\odot$ |
| (c) $\eta = \frac{4\pi}{3} \frac{R_\odot}{GM_\odot c} L_\odot$ | (g) $\eta = 2 \frac{L_\odot}{c^2}$ |
| (d) $\eta = \frac{1}{8} \frac{R_\odot L_\odot}{GM_\odot}$ | (h) $\eta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_\odot^2 c}{G^2 M_\odot^2} \right)^2 L_\odot$ |

Foi Por Pouco! O texto a seguir se refere às questões 19 e 20.

Em 2012 quando vocês eram recém nascidos, havia uma suposta previsão que o fim do mundo era iminente. Nessa realidade um meteoro devastador extinguiria a vida na Terra. Considere um asteroide distante se deslocando em relação à Terra com velocidade \vec{v} ; a reta tangente ao seu movimento fazendo uma distância b do planeta (parâmetro de impacto), vide figura. Quando primeiro foi observado, o objeto estava sobre o meridiano local do Observatório Abrahão de Moraes, ($23^\circ 00' 23''$ S, $46^\circ 57' 49''$ O). E foi calculado que a partir deste momento demoraria 7 dias 8 horas, 24 minutos e 12,4 segundos para sua maior aproximação à Terra.

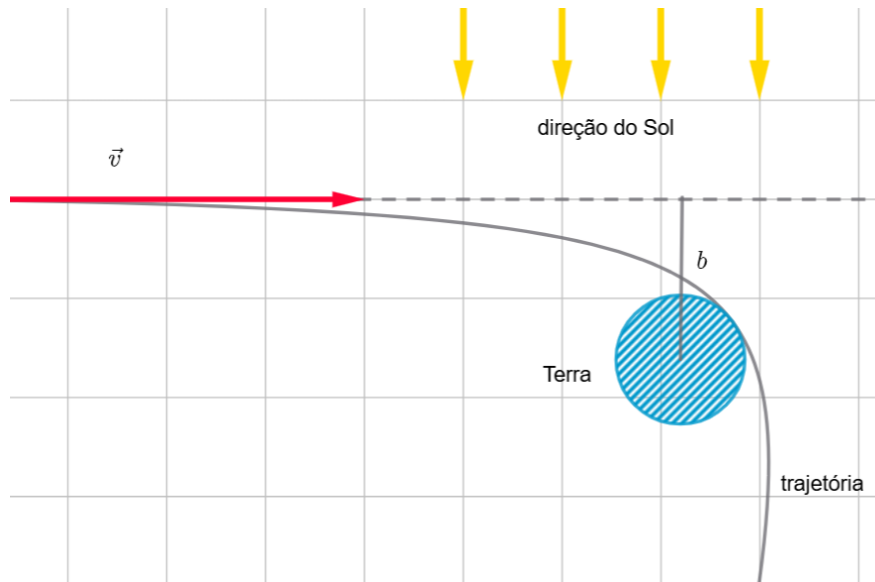


Figura 2: Visão esquemática da situação física. O desenho deve ser interpretado como situado no plano do equador, exibindo o hemisfério Norte.

18. (Classe C3) Determine qual é o menor parâmetro de impacto b para o qual o asteroide passará de raspão sem atingir o planeta.

Dica: Utilize as condições iniciais para determinar o valor das grandezas conservadas do problema.

(a) $b = \sqrt{\frac{GM R_{\oplus}}{v^2} - R_{\oplus}^2}$

(e) $b = \sqrt{\frac{2GM R_{\oplus}}{v^2} + R_{\oplus}^2}$

(b) $b = \frac{v^2 R_{\oplus}^2}{GM} + R_{\oplus}$

(f) $b = \frac{v^2 R_{\oplus}^2}{2GM} + R_{\oplus}$

(c) $b = \sqrt{\left(\frac{GM}{v^2}\right)^2 + R_{\oplus}^2}$

(g) $b = \sqrt{\left(\frac{2GM}{v^2}\right)^2 + R_{\oplus}^2}$

(d) $b = \frac{2GM}{v^2} + \frac{R_{\oplus}}{4}$

(h) $b = \frac{GM}{v^2} + \frac{R_{\oplus}}{2}$

19. (Classe C3) Assuma que a excentricidade da órbita do asteroide seja $\epsilon = 1,4$, se movendo sobre o plano equatorial. Encontre as coordenadas de sua maior aproximação à Terra.

Dica: Considere que o asteroide venha do infinito, de modo que seu ângulo inicial em relação ao perigeu seja àquele em que $r \rightarrow \infty$.

(a) $0^\circ \text{ N}, 135^\circ 50' 51'' \text{ O}$

(e) $0^\circ \text{ N}, 135^\circ 50' 51'' \text{ L}$

(b) $0^\circ \text{ N}, 88^\circ 53' 2'' \text{ O}$

(f) $0^\circ \text{ N}, 88^\circ 53' 2'' \text{ L}$

(c) $0^\circ \text{ N}, 179^\circ 44' 14'' \text{ O}$

(g) $0^\circ \text{ N}, 179^\circ 44' 14'' \text{ L}$

(d) $0^\circ \text{ N}, 133^\circ 17' 57'' \text{ O}$

(h) $0^\circ \text{ N}, 133^\circ 17' 57'' \text{ L}$