

## Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 9 questões (totalizando 250 pontos), divididas nas seguintes categorias:
  - Questões Curtas - **4 questões**, com 2 valendo 10 pontos, 1 valendo 12 pontos e 1 valendo 13 pontos.
  - Questões Médias - **3 questões**, com 1 valendo 20 pontos, 1 valendo 30 pontos e 1 valendo 40 pontos.
  - Questões Longas - **2 questões**, com 1 valendo 50 pontos e 1 valendo 65 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

## Instruções Específicas

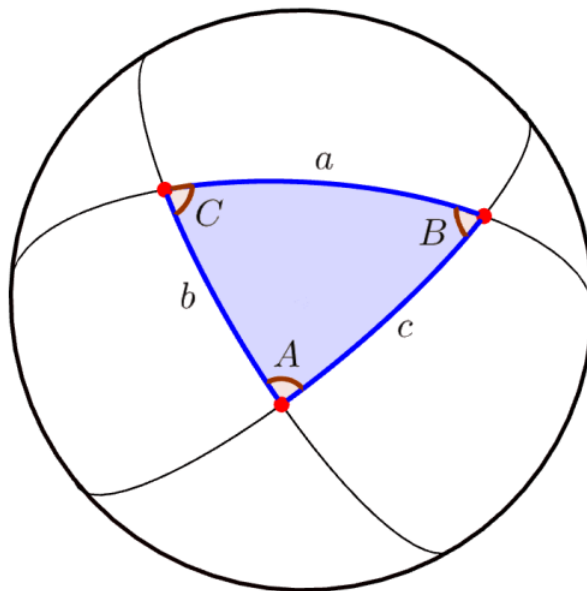
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Lei de Gauss para a Gravitação:

$$\sum \vec{g} \cdot \Delta \vec{A} = -4\pi G M_{in}$$

em que  $M_{in}$  é a massa interna à superfície fechada dita “gaussiana”.

- Regras básicas de derivação e integração para uma função do tipo  $y(x) = x^n$ :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

em que  $C$  é uma constante.

## Questões Curtas (45 pontos)

### 1. Fulano Astronomias (10 pontos)

Observações de uma estrela hipotética da classe M, pertencente à sequência principal e localizada a  $d = 1,3$  pc de distância mostram que seu fluxo tem quedas periódicas regulares a cada 11 dias, o que indicaria a possibilidade de um exoplaneta em órbita da estrela. Sabendo que a magnitude aparente dessa estrela vista da Terra é  $m = 7,87$  e que estrelas da sequência principal obedecem à relação  $L \propto M^3$  de massa-luminosidade, encontre o semi-eixo maior da órbita do possível exoplaneta. Despreze quaisquer efeitos de extinção.

### 2. Encontrando Penang (10 pontos)

Em Itabaiana (PB) ( $\Phi_{ita} = 7^\circ 19' 46''$  S,  $\lambda_{ita} = 35^\circ 19' 59''$  O), um observador localiza o Sol com altura  $h = 43^\circ 45' 26''$  e azimute  $A = 82^\circ 24' 40''$ , medido a partir do Norte em sentido Leste. No mesmo instante, um observador em Penang ( $\phi_{pen} = 5^\circ 17' 7''$  N) visualiza o Sol no horizonte durante o ocaso. Com isso, calcule a longitude da cidade para que a localizemos no globo. Considere que as observações ocorram no equinócio de outono do hemisfério norte.

### 3. Nédra e Zapiza (12 pontos)

Duas estrelas fictícias, Nédra e Zapiza, se formaram simultaneamente no mesmo local do espaço. Uma vez criadas, considere, por simplicidade, que as estrelas partiram com velocidades de mesmo módulo em sentidos opostos, e se mantiveram em movimento retilíneo e uniforme. Atualmente, ambas são observadas sobre o mesmo meridiano, com as seguintes propriedades astrométricas:

- Declinação de Nédra:  $\delta_1 = +34,3^\circ$
- Movimento próprio de Nédra:  $\mu_1 = 44,7$  mas/ano (milissegundos de arco por ano)
- Declinação de Zapiza:  $\delta_2 = -32,3^\circ$
- Movimento próprio de Zapiza:  $\mu_2 = 22,2$  mas/ano (milissegundos de arco por ano)

Determine, em milhões de anos, o tempo transcorrido desde a formação das estrelas.

### 4. Pulsações em um sistema binário (13 pontos)

Considere um sistema binário composto por duas estrelas de nêutrons de massas idênticas e iguais a  $1,5 M_\odot$ . Uma das estrelas é um pulsar com um período de 2 s. Devido ao efeito Doppler, contudo, existe uma variação aparente no período mensurado aqui na Terra. Calcule a diferença entre os períodos aparentes máximo e mínimo.

**Dados:** O sistema é *edge-on*, e as órbitas são circulares, demorando 8 h para completar uma revolução.

## Questões Médias (90 pontos)

### 5. Extinção interestelar (20 pontos)

Considere uma estrela  $B$ , de magnitude absoluta visual  $M_{V,B} = -3,18$  e correção bolométrica  $BC = -1,6$ , além de outra estrela  $A$ , que fica no caminho entre a Terra e  $B$ . Astrônomos na Terra coletam os seguintes dados fotométricos:

- Magnitude aparente bolométrica de  $B$ :  $m_{bol,B/T} = 17,6$
- Índice de cor de  $B$ :  $(B - V)_{B/T} = 2,24$
- Índice de cor de  $A$ :  $(B - V)_{A/T} = 1,85$

Em que o sub-índice X/Y indica que a medição do astro X foi feita a partir do astro Y. Já astrônomos nas vizinhanças da estrela  $A$  coletaram os seguintes dados:

- Magnitude aparente visual do Sol:  $V_{\odot/A} = 21,1$
- Índice de cor de  $B$ :  $(B - V)_{B/A} = 1,15$

Quais são os índices de cor  $(B - V)_{A,0}$  e  $(B - V)_{B,0}$  intrínsecos das estrelas  $A$  e  $B$ ? Qual estrela é mais quente?

**Dica:** Considere que o excesso de cor,  $E_{B-V}$ , e a extinção na banda visual,  $A_V$ , se relacionam como tal:

$$E_{B-V} = \frac{A_V}{3,1}$$

**6. (Pôr do Sol em Dubai - 30 pontos)**

O Burj Khalifa é a mais alta estrutura já erguida pela humanidade. O edifício, localizado em Dubai ( $\phi = 25^\circ 3' 56''$  N), nos Emirados Árabes Unidos, possui um deck de observação a 452 m do solo. Durante sua curta visita a Dubai, o time da IOAA 2022 se espantou com a grandiosidade da construção. Eles, então, decidiram verificar a esfericidade do nosso planeta. Considere que a observação ocorra no equinócio de outono do hemisfério norte.

- (10 pontos) Primeiramente, o time decidiu averiguar a possibilidade de observar dois ocasos no mesmo dia. Considere que o time parta do solo em um dos elevadores quando a borda **superior** do Sol se esconde no horizonte. Calcule a velocidade média mínima de subida para que a equipe chegue ao deck a tempo de ver a borda **inferior** do Sol tocar o horizonte novamente.
- (20 pontos) Uma vez no deck, um segundo teste a ser feito é fotografar o horizonte, averiguando se existe alguma curvatura aparente. Considere que se fotografa com uma câmera como a da **Figura 2**, que projeta a imagem em um retângulo de dimensões  $120^\circ$  (horizontal) por  $90^\circ$  (vertical). Na **Figura 3**, vemos uma representação esquemática (exagerada) da foto. Encontre a razão entre as distâncias  $w$  (entre o ponto mais alto e o mais baixo da curvatura do horizonte) e  $y$  (altura da imagem), marcados na **Figura 3**.

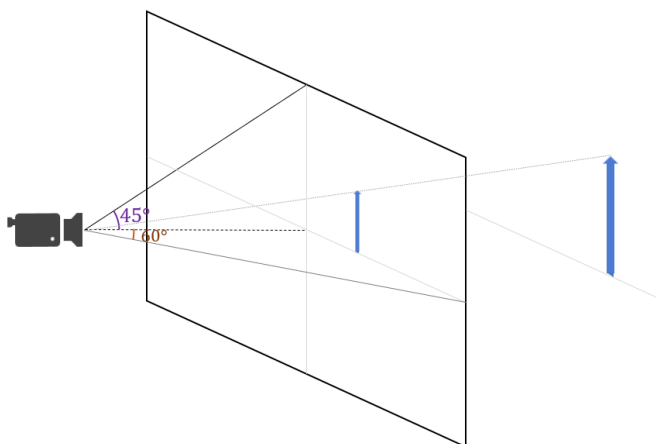


Figura 2: Esquema da projeção simples

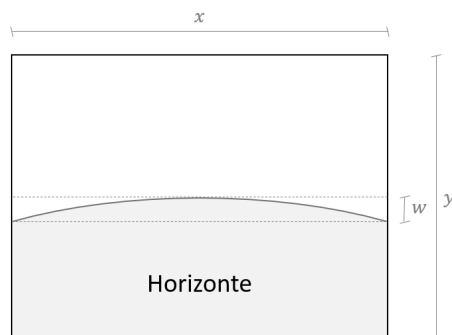


Figura 3: Representação da foto

**7. Ambiente de microgravidade (40 pontos)**

Ao se planejar uma missão de satélite, um dos fatores a se considerar são as perturbações associadas ao ambiente de microgravidade. Dentre elas, uma das mais relevantes é aquela relacionada ao fato de a Terra não ser perfeitamente esférica. Uma boa aproximação é considerar nosso planeta com um formato de elipsoide de revolução. Assim, o potencial gravitacional é dado pela expressão:

$$U_g = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r} \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 (3 \sin^2 \phi - 1)$$

sendo  $M$  a massa da Terra,  $R_e = 6378$  km o raio equatorial terrestre,  $r$  a distância ao centro de nosso planeta,  $\phi$  a latitude geocêntrica e  $J_2 = 1082 \cdot 10^{-6}$  um coeficiente relacionado ao achatamento da Terra.

Para os dois itens a seguir, considere um satélite em uma órbita equatorial circular, de altura  $h = 750$  km em relação à superfície terrestre.

**Dica:** Para os próximos itens, se necessário, use que  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , se  $|x| \ll 1$ .

- (a) **(10 pontos)** Demonstre que a variação na aceleração radial  $\Delta\ddot{r}$  do satélite quando comparada à aceleração  $\ddot{r}$  de um objeto em uma órbita idêntica, mas ao redor de uma “Terra esférica” de raio  $R_e$ , é dada pela expressão a seguir:

$$\Delta\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \frac{3 J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2$$

Em seguida, calcule seu valor numérico. Expresse sua resposta em mg (mili-g, isto é, milésimos da aceleração da gravidade na superfície da Terra; não confunda com miligrama!) e assuma massas iguais para ambos os modelos de Terra. O módulo da aceleração radial do satélite é maior para o modelo de Terra esférico ou elipsoidal?

**Dica:** Use, se necessário, que  $m\ddot{r} = -\frac{dU_g}{dr}$ .

- (b) **(6 pontos)** Analogamente, calcule a variação da velocidade tangencial  $\Delta v$  do satélite quando comparada à de um que orbita uma “Terra esférica”. Expresse sua resposta em m/s.
- (c) **(16 pontos)** Com base nas informações expostas, calcule a diferença  $\Delta R$  entre os raios polar e equatorial da Terra. Dê sua resposta em km. O raio equatorial é maior ou menor que o polar?
- (d) **(8 pontos)** Justifique, **sucintamente**, por que a aceleração radial é maior/menor no modelo elipsoidal, conforme sua resposta do item (a). Use como base o fato de o raio equatorial ser maior/menor que o polar, conforme sua resposta do item (c).

## Questões Longas (115 pontos)

### 8. Salsichaverso (50 pontos)

Após estudar o brilho de estrelas variáveis e o núcleo solar, o extraterrestre Koo Tam retorna à Terra, e resolve finalmente revelar a sua origem. Koo Tam advém de um universo com densidade de matéria homogênea e simetria cilíndrica, cujas leis físicas são felizmente idênticas às nossas. Hoje, você é o escolhido para modelar simplificadamente o universo de nosso querido alienígena.

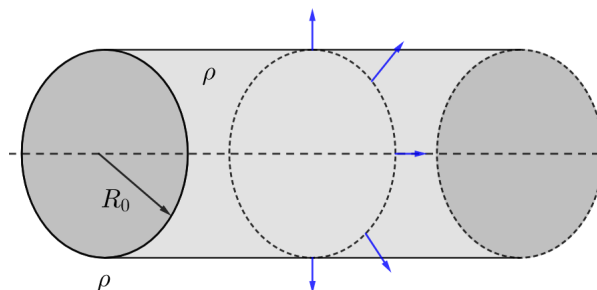


Figura 4: Esquema do modelo simplificado para o universo de Koo Tam. A linha pontilhada representa o eixo do cilindro e as setas indicam o sentido de expansão.

Considere um cilindro de densidade uniforme  $\rho$ , raio atual  $R_0$ , e comprimento arbitrário, se expandindo somente de forma radial. O cilindro está contido em outro cilindro muito maior de comprimento  $L$  tendendo ao infinito e de mesma densidade (na prática, estamos estudando uma porção do universo isoladamente). A dependência temporal do raio do cilindro menor  $R = R(t)$  pode ser escrita em termos do fator de escala  $a = a(t)$ , i.e.,  $R(t) = a(t) \cdot R_0$ , sendo o fator de escala atual  $a_0 = 1$ .

- (a) **(20 pontos)** Partindo de uma análise Newtoniana para o movimento de uma partícula-teste na borda do cilindro menor, mostre a seguinte expressão e encontre a constante  $C_1$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = C_1 \cdot \rho \cdot \ln(a) + \frac{C_2}{a^2}$$

Em que  $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$  é a taxa de variação do fator de escala.  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Se necessário, use:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{x_2}{x_1} \right|$$

- (b) **(15 pontos)** Considere que a expansão do cilindro é adiabática, e que a pressão nele possa ser escrita da forma  $P = w \cdot \rho c^2$ , em que  $w$  é um fator numérico. A partir da Primeira Lei da Termodinâmica, mostre que:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + C_3 (w + 1) \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Em que  $\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt}$  é a taxa de variação temporal da densidade. Encontre a constante  $C_3$ . Determine, então,  $w$  para um universo composto somente por (i) matéria bariônica; (ii) radiação; (iii) energia escura. Considere que os fótons nesse universo não possuam componente de velocidade no eixo do cilindro.

Considere, a partir de agora, que o universo é inteiramente composto de matéria bariônica. Seja definido o parâmetro de Koo Tam como  $K(a) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ . O alienígena informa os cientistas de que o parâmetro  $K$  obedece às relações  $K(a_0) = K_0$  e  $K(e) = \frac{K_0}{e\sqrt{2}}$ , sendo  $e$  o número de Euler.

- (c) **(15 pontos)** Determine, em função de  $K_0$ , o tempo total de vida deste universo, ou seja, o tempo transcorrido desde a sua origem (*Big Bang*) até o seu eventual colapso (*Big Crunch*). Considere que o parâmetro de Hubble atual seja igual à constante de Hubble do nosso universo (i.e.,  $K_0 = H_0$ ) e expresse esse tempo em bilhões de anos.

Use:

$$\int_0^{e^2} \frac{dx}{\sqrt{2 - \ln(x)}} = e^2 \sqrt{\pi}$$

### 9. Stellae (65 pontos)

Neste problema, celebraremos os mecanismos por trás do funcionamento de um dos principais corpos celestes presentes em nosso universo: estrelas!

O colapso de uma nuvem de gás é um processo fundamental na formação de estrelas. Seja  $U$  a energia potencial gravitacional de uma nuvem, e  $K$  a sua energia cinética interna (associada ao movimento das partículas que a compõem). Podemos escrever a condição de colapso como:

$$2K + U < 0$$

Aqui, consideraremos uma nuvem esférica de raio  $R$  e massa  $M$  homogeneamente distribuída. Nessa situação,  $U$  será dado por:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- (a) **(8 pontos)** Determine a massa mínima  $M_J$  (Massa de Jeans) para que uma nuvem de gás esférica e homogênea colapse. Responda em função da temperatura  $T$ , do raio  $R$  e da massa  $m$  das partículas do gás que a compõe, suposto diatômico. Com isso, responda se é provável o colapso de nuvem feita de gás hidrogênio, à temperatura 10 K, de massa  $100 M_\odot$  e de raio 10 pc.

Durante a maioria da vida de uma estrela, a força gravitacional balanceia a pressão gasosa devido à produção de energia no núcleo, promovendo o equilíbrio hidrostático.

- (b) **(7 pontos)** Considere uma estrela esférica, na qual a densidade depende da distância  $r$  ao centro da forma  $\rho(r)$ . Sendo  $m(r)$  a massa englobada por uma esfera de raio  $r$  concêntrica à e contida na estrela, mostre que, em um regime de equilíbrio hidrostático, o gradiente de pressão  $\Delta P/\Delta r$  é dado por:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Em uma estrela, o transporte de energia do núcleo à superfície pode ser mediado por radiação, convecção, ou condução; aqui, trataremos somente do primeiro, o qual é dominante em muitas estrelas.

- (c) **(6 pontos)** No regime radiativo, o gradiente de temperatura no interior da estrela segue uma expressão do tipo:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = a \cdot \kappa^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot L^\gamma \cdot r^{\alpha+\gamma} \cdot T^\gamma \cdot \sigma^\delta$$

Em que  $a$  é uma constante adimensional,  $\kappa$  é a opacidade,  $\rho$  a densidade,  $L$  a luminosidade,  $T$  a temperatura e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann. Encontre os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ .

**Observação:** No SI, a opacidade possui dimensões de  $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^2$ .

A solução exata dos sistemas de equações diferenciais resultantes do estudo da estrutura estelar só pode ser feita computacionalmente. Todavia, é possível derivar algumas relações entre propriedades físicas por meio de uma análise extremamente simplificada.

- (d) **(18 pontos)** Utilizando as equações obtidas nos itens (c) e (d) e a lei dos gases ideais, obtenha uma dependência aproximada da luminosidade  $L$  de uma estrela com sua massa e raio, isto é, se  $L \propto M^\theta R^\varepsilon$ , encontre  $\theta$  e  $\varepsilon$  para:
- (i) estrelas pouco massivas, nas quais a opacidade segue a lei de opacidade de Kramers:

$$\kappa \propto \rho T^{-3,5}$$

- (ii) estrelas muito massivas, nas quais a opacidade é dominada por espalhamento de elétrons, e portanto

$$\kappa \approx \text{constante}$$

**Observação:** Não utilize a equação de Stefan-Boltzmann. Para fins de estimativa, considere que os gradientes de temperatura e pressão no interior estelar seguem uma relação linear, de forma que:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \approx \frac{T}{R} \qquad \frac{\Delta P}{\Delta r} \approx \frac{P}{R}$$

- (e) **(4 pontos)** Baseando-se nos resultados do item anterior, responda: por que estrelas mais massivas possuem menor tempo de vida?

Outra forma de entender melhor sobre a evolução e estrutura estelar é analisando as escalas de tempo nas quais diferentes processos físicos ocorrem.

- (f) **(4 pontos)** Surpreendentemente, apenas uma pequena fração da massa total de uma estrela está disponível para a geração de energia, aproximadamente 0,8%. Sabendo disso, estime, em bilhões de anos, o período  $t_N$  (tempo nuclear) pelo qual o Sol consegue sustentar sua luminosidade, assumida constante.

**Comentário pós-aplicação:** nesse item, faltou ser fornecida a fração do Sol no qual ocorre a nucleossíntese, algo entorno de 7%.

- (g) **(10 pontos)** Um meio alternativo de geração de energia e muito importante na fase inicial da vida de uma estrela é o mecanismo de Kelvin-Helmholtz, no qual a contração da estrela diminui sua energia interna, eventualmente emitindo essa diferença de energia na forma de radiação. Estime, em milhões de anos, o período  $t_T$  (tempo térmico) pelo qual o Sol conseguiria sustentar sua luminosidade, assumida constante, caso essa fosse sua única fonte de energia.

**Dica:** A expressão fornecida de  $U$  para uma esfera homogênea pode ser útil.

- (h) **(8 pontos)** Na gênese estelar, a pressão contrapondo o peso das camadas superiores é praticamente nula, e a estrela contrai. Estime o período  $t_D$  (tempo dinâmico), em horas, para que o Sol colapsasse caso estivesse nesse regime.

Dos seus últimos resultados, você deve conseguir notar a seguinte relação hierárquica:

$$t_N \gg t_T \gg t_D$$

Essa disparidade entre escalas de tempo é a grande razão pela qual a estrutura e evolução estelar são quantitativamente previsíveis. Ao analisarmos processos associados a uma dessas escalas temporais, podemos ignorar processos mais lentos e assumir que os mais rápidos estão em equilíbrio. Muitos problemas em aberto na astrofísica estelar lidam com a quebra dessas suposições: por exemplo, convecção e perda de massa por vento estelar são desvios do equilíbrio dinâmico, com consequências térmicas e nucleares.