



PROVA TEÓRICA P2
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

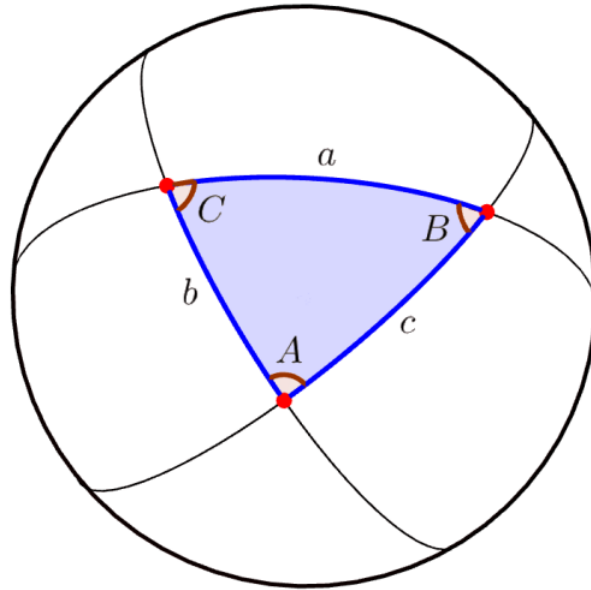
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

Questões

1. **A Terra numa casca de noz (5 pontos)** Seu Isaiás Nilson foi uma das grandes mentes brasileiras apagadas na memória do tempo. No início do século XVIII, o cientista desenvolveu a teoria clássica da gravitação, e explorou um modelo de óptica física no qual a luz é composta de pequenas partículas de baixa massa. Desse modo, pensou na possibilidade de um corpo a partir de cuja superfície a luz não poderia escapar. Utilizando o modelo proposto, determine qual deveria ser o raio da Terra para que ela fosse um objeto desse tipo. Considere uma partícula de luz saindo da superfície com a velocidade c presente na tabela de constantes.

Solução:

Utilizando o modelo apresentado, basta igualar a velocidade de escape da Terra à velocidade da luz:

$$c^2 = 2 \cdot \frac{GM_{\oplus}}{R}$$

$$R = 2 \cdot \frac{GM_{\oplus}}{c^2}$$

$$R \approx 9 \text{ mm}$$

Grade de Correção

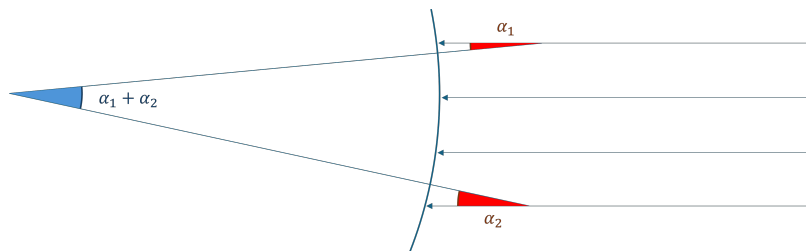
- + 2 Expressão para a velocidade de escape da Terra
- + 2 Igualar a velocidade de escape com a velocidade da luz
- + 1 Valor numérico correto

2. **A Terra um pouco maior que uma casca de noz (10 pontos)** Em 2022, um artigo da Universidade Federal do Rio de Janeiro e da Secretaria de Educação do Estado do Piauí revisitou o antigo experimento de Erastóstenes. Em resumo, aproveitando-se que as cidades do Rio de Janeiro e de Teresina estão praticamente à mesma longitude, as instituições mediram, simultaneamente, a inclinação dos raios solares durante a culminação superior do Sol.

No Rio de Janeiro, um gnômon vertical de 5,1 cm produziu uma sombra de 1,1 cm para o sul. Já em Teresina, um gnômon vertical de 8,5 cm produziu uma sombra de 0,8 cm para o norte. Sabendo que a distância entre as cidades é próxima de 2000 km, estime o raio da Terra. Utilize somente as informações do enunciado, i.e., não consulte a folha de constantes nessa questão. Respostas sem justificativa não serão pontuadas.

Solução:

Podemos representar o problema a partir da figura:



Os ângulos α_1 e α_2 podem ser calculados pelas informações do gnômon::

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{0,8}{8,5} \right) \approx 5,4^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{1,1}{5,1} \right) \approx 12,2^\circ$$

$$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 \approx 17,6^\circ \approx 0,31 \text{ rad}$$

Desse modo, o raio terrestre pode ser calculado como:

$$R_{\oplus} \approx \frac{2.000}{0,31} \text{ km} \approx 6.500 \text{ km}$$

Grade de Correção

+ 2 Desenho da situação, mostrando que as sombras estão em direções opostas

+ 2 $\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{0,8}{8,5} \right) \approx 5,4^\circ$

+ 2 $\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{1,1}{5,1} \right) \approx 12,2^\circ$

+ 1 Considerar $\alpha_1 + \alpha_2$

+ 2 $R_{\oplus} = \frac{d}{\Delta\alpha_{[rad]}}$

- 1 Considerou a divisão anterior sem converter para radianos

+ 1 Valor final correto, dentro do intervalo $[6,3; 6,7] \cdot 10^3 \text{ km}$

- 0.5 Resposta final com mais de 4 algarismos significativos

3. Galáxia de Bode (10 pontos)

A Galáxia de Bode (M81) é uma galáxia espiral na constelação da Ursa Maior. Observações espectroscópicas indicam que o comprimento de onda da sua linha de absorção $H\alpha$ é de $6565,6 \text{ \AA}$. Sabendo disso, responda:

- (a) **(5 pontos)** Qual a distância até a galáxia, em Mpc (megaparsecs)?
- (b) **(5 pontos)** Se a galáxia possui um diâmetro angular de $26,9$ minutos de arco, qual o seu diâmetro físico, em anos-luz?

Solução:

(a) O seu redshift é:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{H\alpha}}{\lambda_{H\alpha}} = \frac{6565,3 - 6560}{6560} = 8,5366 \times 10^{-4}$$

Em que utilizamos o valor de repouso do comprimento de onda da linha $H\alpha$ da folha de constantes. Agora, pela Lei de Hubble, a velocidade de recessão da galáxia é dada por

$$v = H_0 d$$

Mas a velocidade pode ser encontrada por meio do redshift calculado como $v = cz$. Assim:

$$cz = H_0 d \rightarrow d = \frac{cz}{H_0}$$

$$d = \frac{3 \times 10^5 \times 8,5366 \times 10^{-4}}{67,8} \text{ Mpc} \approx \boxed{3,78 \text{ Mpc}}$$

(b) Sabendo o seu diâmetro angular θ e a distância d até a galáxia, o seu diâmetro físico D será

$$D = d\theta$$

Para obtermos o diâmetro em anos-luz, convertamos a distância para anos-luz (sabendo que $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ anos-luz}$):

$$d = 3,78 \times 10^6 \times 3,26 = 1,23 \times 10^7 \text{ anos-luz}$$

E o ângulo para radianos, utilizando que $1 \text{ rad} = 206265''$. Note, ademais, que o diâmetro angular foi dado em minutos de arco, e não segundos; lembre-se que $1' = 60''$. Assim:

$$\theta = \frac{26,9 \times 60}{206265} = 7,825 \times 10^{-3}$$

Por fim:

$$D = 1,23 \times 10^7 \times 7,825 \times 10^{-3} \approx \boxed{96\,000 \text{ anos-luz}}$$

Grade de Correção

Item a (5 pontos)

- + 2 fórmula correta para redshift
- + 2,5 Lei de Hubble
- + 1,5 $v=cz$
- + 1 Valor numérico correto da distância.

Item b (5 pontos)

- + 0,5 θ em radianos
- + 0,5 distância em anos-luz
- + 1 $D = d \cdot \theta$
- + 1 Valor numérico correto do diâmetro físico
- 0,5 Ajuste do número de Alg sig errado por uma diferença maior que 1 do numero correto de algo sig

4. **De Olho no Sombreiro (20 pontos)** Larissa acaba de adquirir seu mais novo telescópio, um dobsoniano f/4 de 200 mm de diâmetro, equipado com uma ocular de distância focal 10 mm.
- (a) **(15 pontos)** Larissa tenta apontar para M104 ($\delta = -11^{\circ}37'23''$; $\alpha = 12^h39^m59,4^s$), mas inicialmente observa apenas uma região escura. Eventualmente, sem mover o telescópio, a galáxia começa a aparecer, até atravessar o campo de visão (passando pelo seu centro) e desaparecer. O tamanho angular de M104 é de $8,7'$, e o tempo decorrido (desde que M104 começa a aparecer até o último momento em que alguma parte dela é visível) foi $\Delta t = 3 \text{ min } 13 \text{ s}$. Determine o campo de visão utilizado.
- (b) **(5 pontos)** Larissa começa a se arrepender de suas escolhas quando percebe que 3 minutos é pouco tempo para uma observação. Dê um exemplo de montagem que ela poderia ter preferido a fim de manter o campo visual, mas sem sofrer com esse problema. Seja específico em seu exemplo, ao invés de recorrer a uma classificação geral.

Solução:

- (a) Primeiramente, vamos calcular a velocidade angular da galáxia com relação ao eixo polar. Para isso, precisamos utilizar o dia sideral:

$$\omega_{polar} = \frac{21600'}{86164 \text{ s}} \approx 0,25'/\text{s}$$

A rigor, precisamos utilizar a velocidade angular com relação ao observador, o que inclui considerar a declinação. Como a estrela está próxima ao Equador, é possível argumentar que essa etapa não interfere consideravelmente no resultado final. Contudo, caso esse argumento não apareça explicitamente na resolução, é necessário realizar o cálculo:

$$\omega_{obs} = \omega_{polar} \cdot \cos(\delta) \approx 0,24'/\text{s}$$

A distância angular percorrida pela galáxia, portanto, é $\omega_{obs} \cdot \Delta t \approx 47,3'$. Por fim, é necessário considerar que a galáxia percorreu seu tamanho angular até ficar inteiramente visível, depois o campo de visível, até desaparecer completamente. Portanto, o campo de visão é $FOV = 47,3' - 8,7' = 38,6'$.

- (b) Qualquer tipo de montagem equatorial será aceita como resposta desse item. Uma possibilidade é a montagem germânica.

Grade de Correção**Item a (15 pontos)**

- + 3 Cálculo da velocidade angular da galáxia em relação ao eixo polar.
- 1 Utilizou 86400 s (24 h) em vez da duração do dia sideral, que consta na Tabela de Constantes.
- + 5 Cálculo da velocidade angular da galáxia em relação ao observador / Argumento utilizando o fato de que a galáxia está próxima do equador celeste.
- + 2 Cálculo da distância angular percorrida pela galáxia para atravessar o campo de visão.
- + 5 Cálculo do campo de visão.

Item b (5 pontos)

- + 2,5 Montagem equatorial.
- + 2,5 Exemplo de montagem equatorial.

5. **LL Aqr (30 pontos)** Um binário é chamado eclipsante quando, na perspectiva de um observador na Terra, as estrelas passam uma em frente da outra (eclipsando uma a outra), de modo a barrar parcial ou integralmente a luz da companheira por alguns instantes. A seguir, está representada a curva de luz do sistema binário eclipsante LL Aquarii. Quando não há eclipse, a magnitude aparente de LL Aqr é $m_0 = 9,23$ mag.

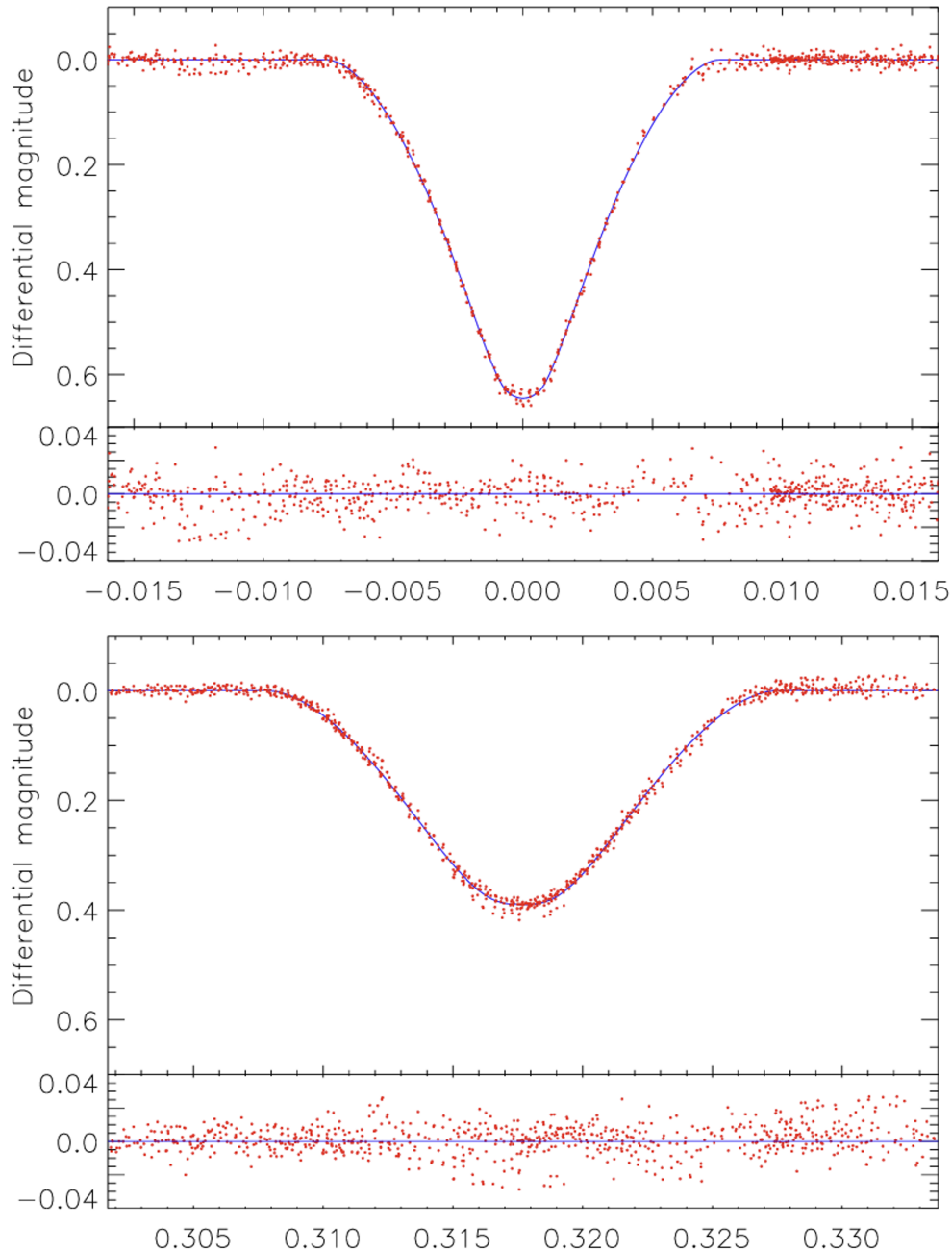


Figura 1: Curva de luz de LL Aqr nos momentos de eclipse (SOUTHWORTH, J. 2013)

(a) **(10 pontos)** Seja m_1 a magnitude de uma das componentes do binário, determine a magnitude m_2 da outra componente em função de m_1 e m_0 .

Determine a magnitude de cada componente do binário para cada uma das hipóteses:

- (b) **(10 pontos)** A estrela de menor temperatura também é a de menor raio.
(c) **(10 pontos)** A estrela de maior temperatura é a de menor raio.

Solução:

- (a) Seja F_1 o fluxo da primeira componente e F_2 o fluxo da segunda. Pela equação de Pogson, escrevemos:

$$m_0 - m_1 = -2,5 \cdot \log \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \right)$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 10^{(m_1 - m_0)/2,5} - 1$$

Novamente, pela equação de Pogson:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_2}{F_1} \right)$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 10^{(m_1 - m_2)/2,5}$$

Comparando as equações, obtemos:

$$10^{(m_1 - m_0)/2,5} - 1 = 10^{(m_1 - m_2)/2,5}$$

$$m_2 = m_1 - 2,5 \cdot \log \left(10^{(m_1 - m_0)/2,5} - 1 \right)$$

- (b) Nesse caso, a ocultação da menor estrela ocorre na menor variação de magnitude, i.e., em $\Delta m'_1 = 0,40$ mag. A maior estrela, portanto, tem magnitude $m'_1 = m_0 + \Delta m'_1 = 9,63$ mag. Já a magnitude da menor estrela é descoberta pela expressão anteriormente obtida:

$$m'_2 = m'_1 - 2,5 \cdot \log \left(10^{(m'_1 - m_0)/2,5} - 1 \right) = 10,5 \text{ mag}$$

- (c) Nesse caso, a ocultação da menor estrela ocorre na maior variação de magnitude, i.e., em $\Delta m_1 = 0,65$ mag. A maior estrela, portanto, tem magnitude $m_1 = m_0 + \Delta m_1 = 9,88$ mag. Já a magnitude da menor estrela é descoberta pela expressão anteriormente obtida:

$$m_2 = m_1 - 2,5 \cdot \log \left(10^{(m_1 - m_0)/2,5} - 1 \right) = 10,1 \text{ mag}$$

Grade de Correção

Item a (10 pontos)

+ 2 Escrever que $m_0 - m_1 = -2,5 \log \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \right)$

+ 2 Escrever que $m_2 - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{F_2}{F_1} \right)$

+ 3,5 Concluir que $10^{(m_1 - m_0)/2,5} - 1 = 10^{(m_1 - m_2)/2,5}$

+ 2,5 Chegar em $m_2 = m_1 - 2,5 \log (10^{(m_1 - m_0)/2,5} - 1)$

Item b (10 pontos)

+ 4 Argumentar que, nesse caso, a ocultação da menor estrela ocorre na menor variação de magnitude ou que $\Delta m'_1 = 0,40 \text{ mag}$

+ 2 Chegar em $m'_1 = 9,63 \text{ mag}$

+ 4 Chegar em $m_2 = 10,5 \text{ mag}$

Item c (10 pontos)

+ 4 Argumentar que, nesse caso, a ocultação da menor estrela ocorre na maior variação de magnitude ou que $\Delta m'_1 = 0,65 \text{ mag}$

+ 2 Chegar em $m'_1 = 9,88 \text{ mag}$

+ 4 Chegar em $m_2 = 10,1 \text{ mag}$

-1,5 Erro algébrico simples no desenvolvimento das equações.

6. **Elon Mosca e sua Lua (30 pontos)** Preocupado com a chegada alheia na Lua, Elon Mosca decide ejetá-la radialmente de sua órbita em torno da Terra, o que será feito por meio de uma colisão com um projétil com o menor momento linear p possível, desde que atendendo às condições propostas. Qual será o módulo de \vec{p} (em kg m s^{-1}) e o valor absoluto (em graus) do ângulo θ entre a direção radial terrestre e o vetor velocidade do projétil? Considere que a colisão é perfeitamente inelástica e que as únicas interações gravitacionais ocorrem entre a Terra e a Lua, cuja órbita é suposta circular.

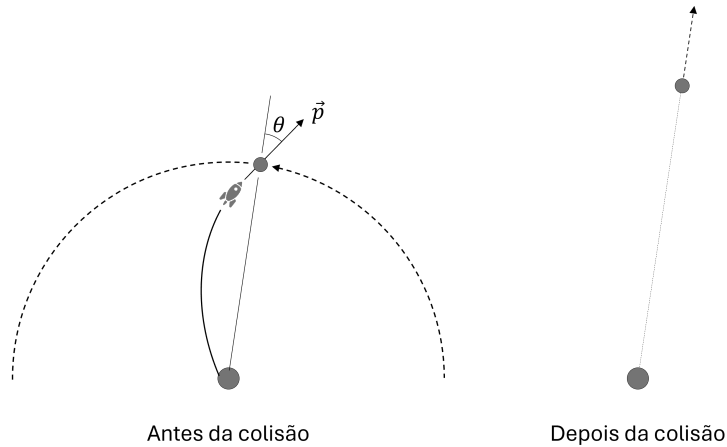


Figura 2: Representação da colisão do projétil com a Lua (à esquerda) e da ejeção radial da Lua (à direita).

Solução:

Para cumprir com a condição enunciada, é necessário, primeiramente, anular o momento linear tangencial da Lua:

$$p \cdot \cos(\theta) = M_L \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{d_{T-L}}} \approx 7.49 \cdot 10^{25} \text{ kg m s}^{-1}$$

Além disso, é necessário fornecer um momento linear radial suficiente para o escape da Lua:

$$p \cdot \sin(\theta) = M_L \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{d_{T-L}}} \approx 1.06 \cdot 10^{26} \text{ kg m s}^{-1}$$

Assim, determinamos o módulo de p :

$$p^2 = (p \cdot \cos(\theta))^2 + (p \cdot \sin(\theta))^2$$

$$p^2 = M_L \frac{3GM}{d_{T-L}}$$

$$\therefore p \approx 1.3 \cdot 10^{26} \text{ kg m s}^{-1}$$

Por fim, calculamos o ângulo θ :

$$\tan \theta = \frac{p \cdot \sin(\theta)}{p \cdot \cos(\theta)}$$

$$\therefore \theta \approx 35.3^\circ$$

Grade de Correção

- + 3 Velocidade orbital da Lua.
- + 3 Expressão correta para o momento tangencial.
- + 2 Valor correto do momento tangencial.
- + 3 Velocidade de escape.
- + 3 Expressão correta para o momento radial.
- + 2 Valor correto do momento radial.
- + 4 Identificar corretamente a tangente do ângulo pedido.
- + 4 Valor correto do ângulo pedido.
- + 4 Expressão para o módulo do momento.
- + 2 Valor correto do módulo do momento.

- 7. Supernovas Super-luminosas (40 pontos)** Em 2019, uma pesquisa detectou e estudou uma amostra de Supernovas Super-luminosas, em especial as de tipo I (SLSNe I), com dados da missão *Dark Energy Survey* (DES). Como os valores de redshift são consideráveis, a lei de Hubble já não é uma boa aproximação para as distâncias luminosas. Para três dos eventos estudados, as distâncias, calculadas pelo modelo Λ CDM, são entregues na tabela a seguir.

Índice	Nome	z	Distância Luminosa (Gpc)
1	DES15C3hav	0,390	2,11
2	DES16C3dmp	0,565	3,28
3	DES14C1rhg	0,481	2,73

Para esses mesmos três eventos, seguem (na próxima página) as curvas de luz na banda r , i.e., a magnitude aparente em função do tempo (em dias) nesse filtro. A linha tracejada só indica quando o evento foi classificado como SLSN I.

- (a) **(10 pontos)** Determine a magnitude absoluta de pico para as SLSNe I em questão.
- (b) **(10 pontos)** A título de comparação, estime a magnitude absoluta bolométrica da Via Láctea, supondo que ela abrigue 500 bilhões de estrelas, e que a estrela média tenha um décimo da luminosidade solar.
- (c) **(10 pontos)** Os histogramas a seguir (na próxima página) comparam a quantidade de SLSNe I em função da magnitude absoluta do pico, utilizando dessa vez a banda 4000. À esquerda, estão representados os eventos encontrados com os dados do DES; à direita, os eventos que já estavam presentes na literatura antes do estudo. Estime a magnitude absoluta média das SLSNe I para cada uma das amostras, ou seja, as encontradas com dados do DES e as pré-existentes na literatura.

Dado: Uma das formas de estimar o valor médio de um histograma é encontrando a linha vertical que divide o gráfico em duas figuras de áreas iguais.

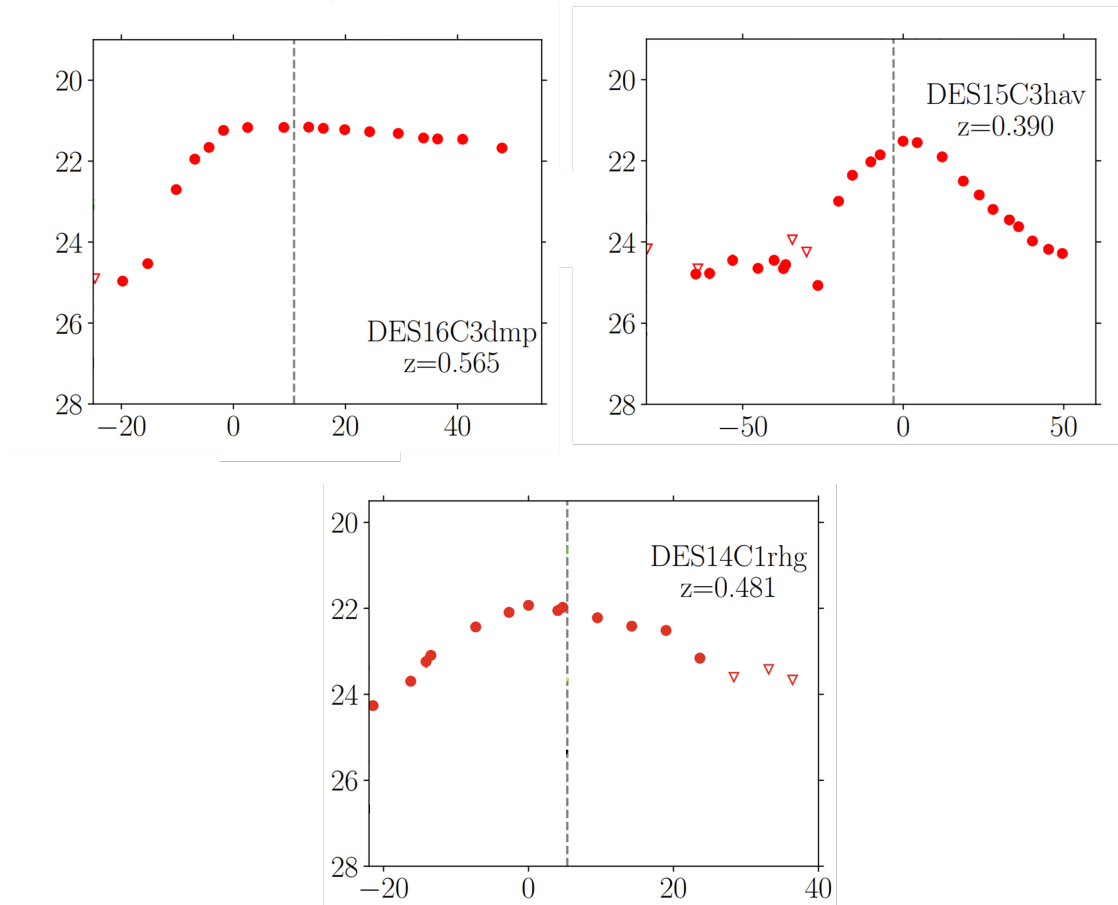


Figura 3: Gráficos de magnitude, na banda r, em função do tempo, para os eventos descritos (ANGUS, C. R., et al. 2019).

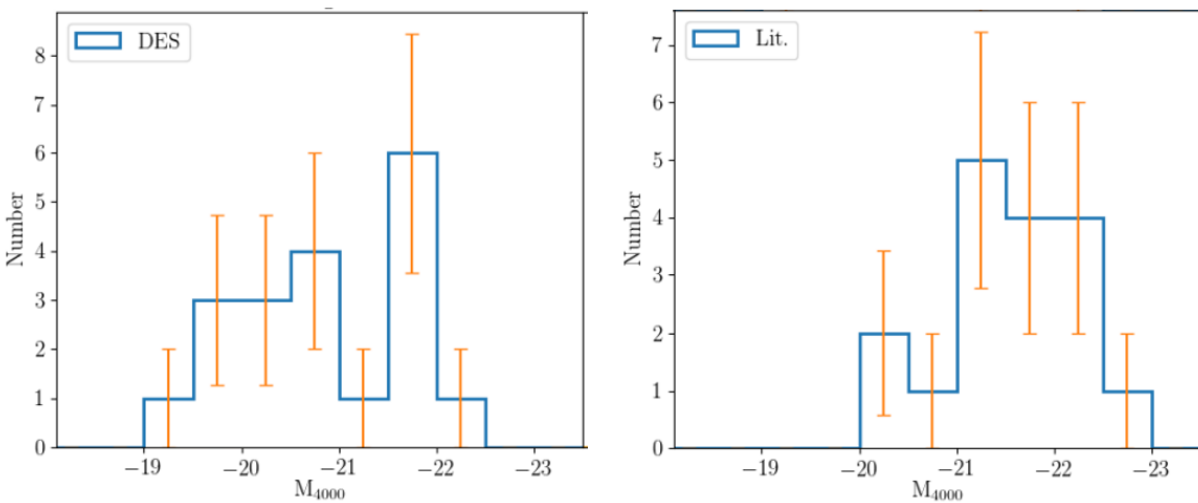


Figura 4: Distribuição numérica das SLSNe I em função da magnitude absoluta da banda sintética 4000. À esquerda, as amostras detectadas com dados do programa DES. À direita, as amostras de SLSNe I anteriores na literatura (ANGUS, C. R., et al. 2019).

- (d) **(10 pontos)** Tanto visualmente quanto pelo resultado do item anterior, observamos que as amostras têm distribuições distintas. Contudo, magnitudes absolutas são características intrínsecas dos eventos (ou seja, independem do instrumento óptico). Sendo assim, elenque um motivo que poderia explicar por que as amostras coletadas com o DES se distinguem daquelas na literatura anterior. Justificativas por ruídos estatísticos não serão pontuadas.

Solução:

(a) Aplicando a equação do módulo de distância:

$$m_r - M_r = 5 \cdot \log(d) - 5$$

$$M_r = m_r + 5 - 5 \cdot \log(d)$$

Seguem as magnitudes de pico medidas nos gráficos fornecidos

$$m_{r,1} = 21,5 \pm 0,2 \text{ mag}$$

$$m_{r,2} = 21,2 \pm 0,2 \text{ mag}$$

$$m_{r,3} = 21,9 \pm 0,2 \text{ mag}$$

Assim:

$$M_{r,1} = -20,1 \pm 0,2 \text{ mag}$$

$$M_{r,2} = -21,4 \pm 0,2 \text{ mag}$$

$$M_{r,3} = -20,3 \pm 0,2 \text{ mag}$$

(b) A luminosidade da Via Láctea pode ser calculada:

$$L = 500 \cdot 10^9 \text{ estrelas} \cdot 0,1 L_{\odot} / \text{estrela}$$

$$L = 50 \cdot 10^9 L_{\odot}$$

Podemos comparar sua magnitude com a do Sol, pela equação de Pogson:

$$M = M_{\odot} - 2,5 \cdot \log(L/L_{\odot})$$

$$M = 4,83 - 2,5 \cdot \log(50 \cdot 10^9)$$

$$M = -21,9 \text{ mag}$$

Percebemos que a magnitude de uma Supernova Super-luminosa de tipo I pode ser comparável à magnitude de uma galáxia do tamanho da nossa.

- (c) Para estimar a magnitude média de uma amostra, podemos fazer a média das magnitudes centrais dos intervalos, ponderadas pela quantidade de eventos no intervalo. Isso seria equivalente a determinar a reta vertical que divide o histograma em duas figuras de áreas iguais.

$$\bar{M}_{4000,DES} = \frac{-19,25 - 19,75 \cdot 3 - 20,25 \cdot 3 - 20,75 \cdot 4 - 21,25 - 21,75 \cdot 6 - 22,25}{1 + 3 + 3 + 4 + 1 + 6 + 1}$$

$$\boxed{\bar{M}_{4000,DES} = -20,9 \text{ mag}}$$

$$\bar{M}_{4000,LIT} = \frac{-20,25 \cdot 2 - 20,75 - 21,25 \cdot 5 - 21,75 \cdot 4 - 22,25 \cdot 4 - 22,75}{2 + 1 + 5 + 4 + 4 + 1}$$

$$\boxed{\bar{M}_{4000,LIT} = -21,5 \text{ mag}}$$

- (d) O desenvolvimento de novas tecnologias, de fato, não altera a física ao nosso redor, mas nos permite observá-la com melhor profundidade. Para a resposta desse item, qualquer uma entre duas respostas é válida: (i) as SLSNe I de menor luminosidade sempre existiram em maior predominância no nosso campo de visão, porém era mais difícil de detectá-las com a tecnologia disponível, ou (ii) com a melhoria tecnológica, foi possível observar um Universo mais distante, portanto mais antigo, no qual circunstâncias como a evolução química, por exemplo, interferiram no mecanismo das SLSNe I.

Grade de Correção

Item a) (10 pontos):

- + 1.5 Obter pelo gráfico $m_{r,1} = 21,5 \pm 0,2 \text{ mag}$
- + 1.5 Obter pelo gráfico $m_{r,2} = 21,2 \pm 0,2 \text{ mag}$
- + 1.5 Obter pelo gráfico $m_{r,3} = 21,9 \pm 0,2 \text{ mag}$
- + 2.5 Equação do módulo de distância $M_r = m_r + 5 - 5 \cdot \log(d)$
- + 1 Valor final $M_{r,1} = -20,1 \pm 0,2 \text{ mag}$
- + 1 Valor final $M_{r,2} = -21,4 \pm 0,2 \text{ mag}$
- + 1 Valor final $M_{r,3} = -20,3 \pm 0,2 \text{ mag}$

Item b) (10 pontos):

- +3 $L = 500 \cdot 10^9 \text{ estrelas} \cdot 0,1 L_{\odot} / \text{estrela}$
- +4 $M = M_{\odot} - 2,5 \cdot \log(L/L_{\odot})$
- +3 $M = -21,9 \pm 0,2 \text{ mag}$

Item c) (10 pontos):

- + 3 Traçar reta que divide histograma DES em 2 áreas iguais, ($M \approx -21 \text{ mag}$) ou conta da média
- + 3 Traçar reta que divide histograma Lit em 2 áreas iguais, ($M \approx -21,5 \text{ mag}$) ou conta da média
- + 2 Valor final correto $\bar{M}_{4000,DES} = -20,9 \pm 0,2 \text{ mag}$
- + 2 Valor final correto $\bar{M}_{4000,LIT} = -21,5 \pm 0,2 \text{ mag}$

Item d) (10 pontos):

- + 10 Justificativa plausível
- + 5 (Pontuação parcial) Justificativa plausível

8. Arrancando elétrons (40 pontos) Investigaremos nessa questão um importante efeito atômico com grandes consequências no perfil químico de estruturas astronômicas: a ionização. Mais especificamente, utilizaremos o He como exemplo para entender sua ionização dentro de um contexto termodinâmico, e algumas consequências para a espectroscopia.

A energia de ionização, χ_1 , é definida pela energia necessária para expelir um elétron e^- de certo átomo A_I , tornando-o um íon $A_{II} = A_I^+$. De modo geral, chamamos de χ_i a energia necessária para provocar a i -ésima ionização, isto é: $A_i \rightarrow A_{i+I} + e^-$. A principal equação teórica para o tratamento da ionização no contexto de equilíbrio térmico é a denominada equação de Saha. Podemos usar essa equação para traçar a curva de abundância de cada íon do He, isto é, a curva de N_i/N_{total} :

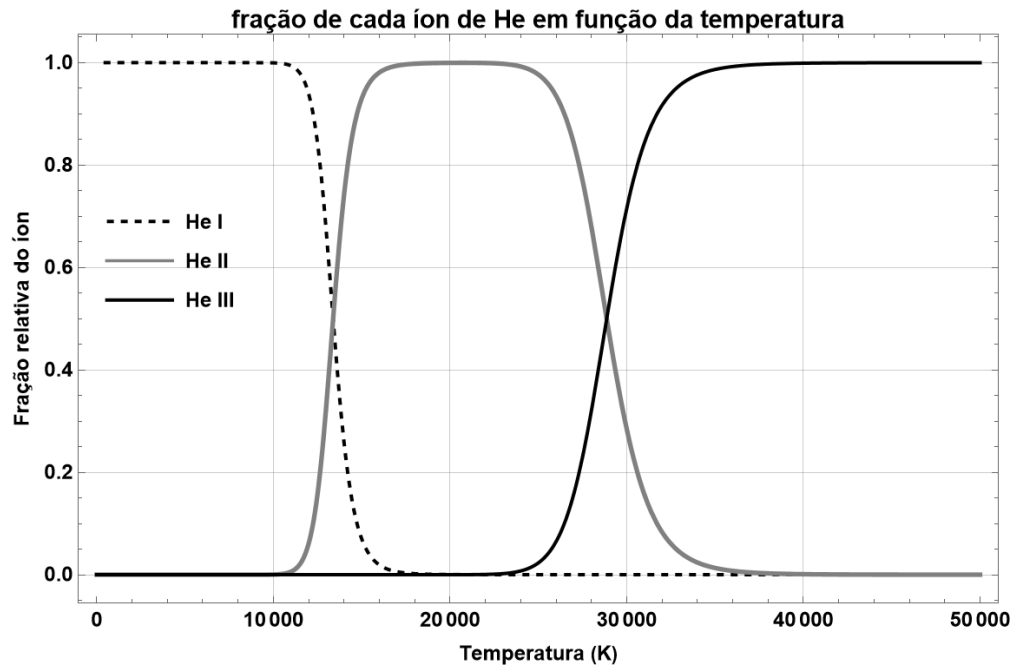


Figura 5: Concentração das espécies no plasma em função da temperatura. A simulação utilizou uma pressão de $P_e = 20 \text{ N/m}^2$, energias de ionização $\chi_1 = 24,6 \text{ eV}$ e $\chi_2 = 54,4 \text{ eV}$ ($1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), e pesos estatísticos $g_1 = 1$, $g_2 = 2$ e $g_3 = 1$.

Assinale aos seguintes itens **V** ou **F** se as afirmações forem verdadeiras ou falsas, respectivamente (justifique brevemente sua resposta):

- (5 pontos)** Na temperatura de 30.000 K, as três espécies apresentam aproximadamente a mesma abundância no plasma.
- (5 pontos)** A partir de 20.000 K basicamente todo átomo se encontra de alguma forma ionizado.
- (5 pontos)** Em alguma temperatura consideravelmente maior que 50.000 K, é esperada a queda da fração do íon He III e dominância do íon He IV.
- (5 pontos)** Existe uma temperatura na qual se observam as três espécies em quantidades significativas (acima de 0,5%).
- (5 pontos)** Existem duas temperaturas nas quais metade das partículas no plasma são íons He II.
- (5 pontos)** No núcleo de uma estrela (onde a pressão eletrônica é maior), esperamos que a ionização aconteça a temperaturas maiores que na superfície.
- (5 pontos)** Quanto maior a temperatura de um corpo celeste, mais intensas são as linhas de emissão do íon He II.

(h) (5 pontos) Nebulosas com fortes linhas de He II são tipicamente nebulosas planetárias.

Dado: Esse tipo de nebulosa atinge em seu centro temperaturas entre 16.000 K e 25.000 K, ao contrário de nebulosas de reflexão ou absorção ($T \lesssim 10.000$ K) ou do meio interestelar morno ($T \sim 10^5$ K).

Solução:

- a) **F** O gráfico de He I indica que a esta temperatura a abundância deste é praticamente nula.
- b) **V** A fração de íons He II e He III dominam sobre o átomo He I a partir dessa temperatura.
- c) **F** O He é um elemento com apenas dois elétrons, tornando impossível sua ionização a partir de He III.
- d) **F** Em todo valor da abscissa do gráfico, existe ao menos uma espécie com fração abaixo de 0,5%.
- e) **V** Nos pontos onde o gráfico de He II cruza He I e He III, a fração desse íon é aproximadamente 1/2 do plasma.

f) **V** A uma dada temperatura, o aumento da pressão eletrônica implica uma maior taxa de recombinação elétron-íon, aumentando a fração de espécies menos ionizadas, deslocando as temperaturas de ionização para valores mais altos.

Alternativamente, podemos formular a resposta em termos de cinética química. Quando o sistema está em equilíbrio: $A_i \rightleftharpoons A_{i+1} + e^-$, o aumento da pressão parcial de elétrons desloca o equilíbrio para o estado menos ionizado: A_i , fazendo com que a igualdade das frações de A_i e A_{i+1} ocorra à temperaturas mais altas.

- g) **F** A princípio o aumento de temperatura colabora com a intensidade das linhas do íon, mas quando esta é alta o suficiente para anular a população de He II, não existem fontes para a produção dessas linhas no espectro
- h) **V** As nebulosas de reflexão e absorção são frias demais para apresentar fortes linhas do íon He II, enquanto o meio interestelar morno atinge temperaturas muito maiores que a ionização completa dessa espécie. Assim, uma fonte de emissão de He II provavelmente é uma nebulosa planetária, com temperaturas em torno do pico de abundância do íon.

Grade de Correção

+ 5 pontos a cada resposta e justificativa corretas. Pontuações não foram atribuídas na ausência de justificativa ou sobre justificativas erradas.

9. **Dueto (40 pontos)** Ao olhar para o céu noturno, Raul notou que as estrelas Hamal (α Ari, $\delta = 23^\circ 34' 56,7''$, $\alpha = 2\text{h}08\text{m}35,02\text{s}$) e Mirach (β And, $\delta = 35^\circ 45' 18,0''$, $\alpha = 1\text{h}11\text{m}07,58\text{s}$) estavam se pondo exatamente no mesmo instante.

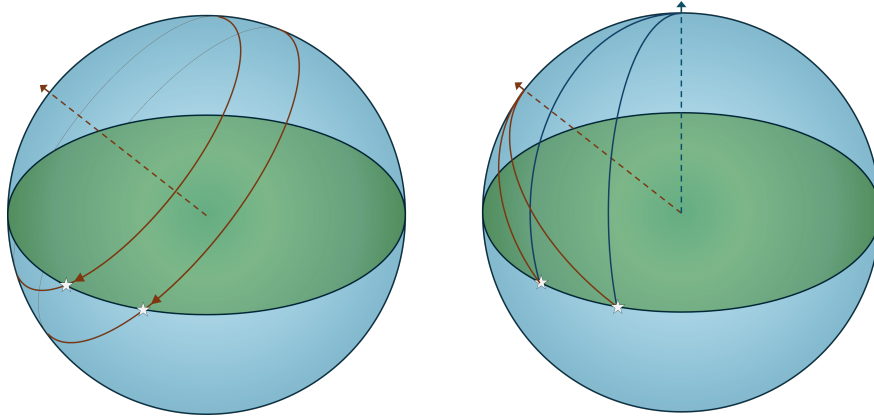


Figura 6: Representação esquemática da situação (fora da escala). À esquerda, o ocaso simultâneo das estrelas. À direita, os arcos que conectam as estrelas ao polo elevado e ao zênite.

- (10 pontos) Determine a diferença entre os azimutes de Mirach e Hamal no momento dessa observação.
- (24 pontos) Determine o ângulo horário de cada uma dessas estrelas.
- (6 pontos) Determine a latitude de Raul.

Solução:

- (a) Nas expressões a seguir, δ_H corresponde à declinação de Hamal, δ_M corresponde à declinação de Mirach, H_H corresponde ao ângulo horário de Hamal, H_M corresponde ao ângulo horário de Mirach, $\Delta\alpha = \alpha_H - \alpha_M$ corresponde à diferença entre as ascensões retas de Mirach e Hamal e $\Delta A = A_M - A_H$ corresponde à diferença entre os azimutes de Hamal e Mirach.

Como as estrelas estão no horizonte, a diferença entre os azimutes corresponde simplesmente à separação angular entre as estrelas:

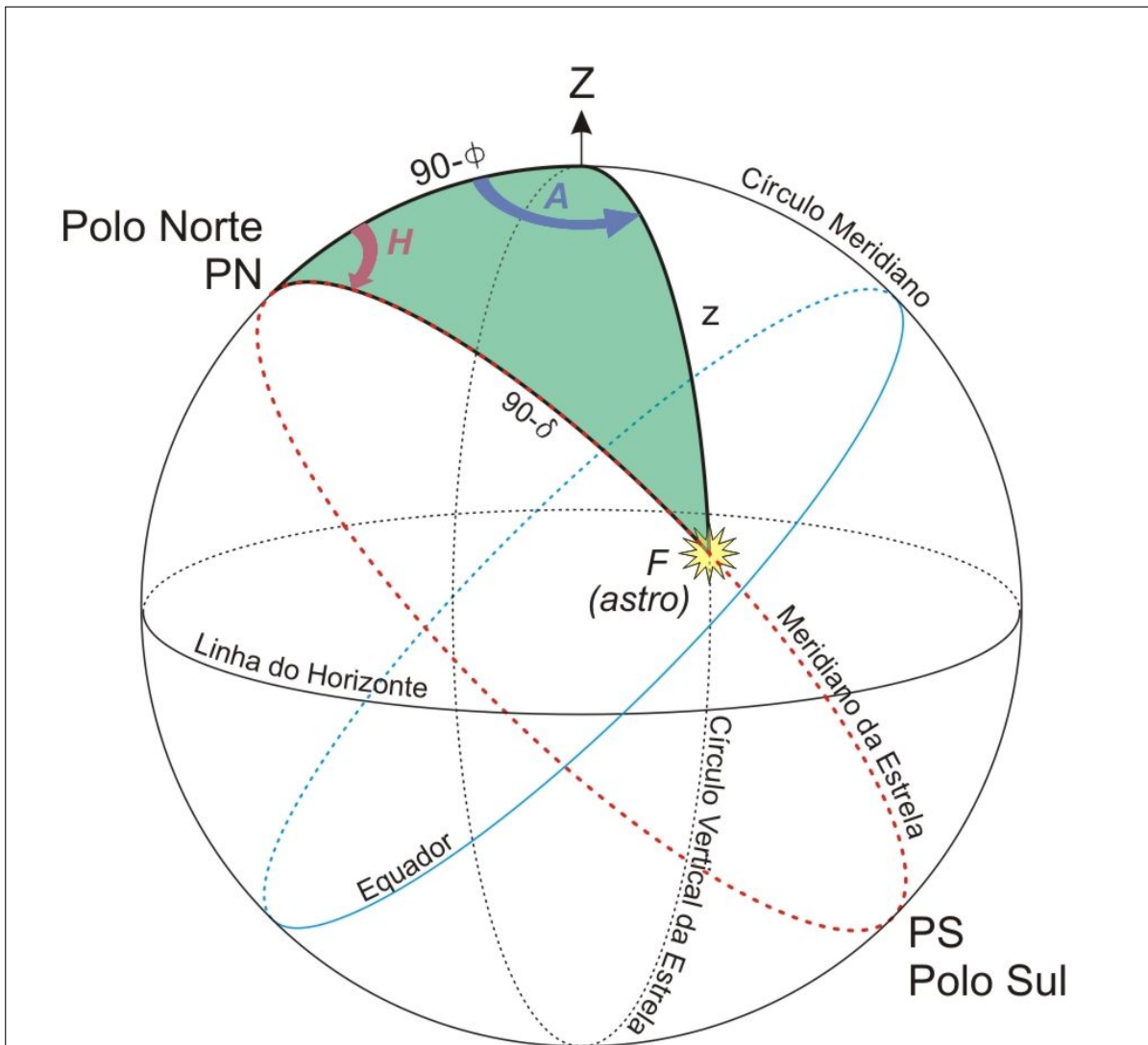
$$\cos(\Delta A) = \cos(90^\circ - \delta_H) \cos(90^\circ - \delta_M) + \sin(90^\circ - \delta_H) \sin(90^\circ - \delta_M) \cos(\Delta\alpha)$$

$$\cos(\Delta A) = \sin(\delta_H) \sin(\delta_M) + \cos(\delta_H) \cos(\delta_M) \cos(\Delta\alpha)$$

$$\cos(\Delta A) = 0,9543$$

$$\Delta A = 17^\circ 23' 42,5''$$

- (b) Utilizando o triângulo de posição, que está representado na figura a seguir, é possível derivar uma fórmula para o ângulo horário no ocaso.



Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>. Acesso em 17/02/2025.

Utilizando a lei dos cossenos:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \phi) \cos(H)$$

$$\cos(z) = \sin(\delta) \sin(\phi) + \cos(\delta) \cos(\phi) \cos(H)$$

Como $z = 90^\circ$ no ocaso:

$$0 = \sin(\delta) \sin(\phi) + \cos(\delta) \cos(\phi) \cos(H)$$

$$\cos(H) = -\tan(\delta)\tan(\phi)$$

Essa fórmula é válida tanto para o nascer de um astro quanto para o ocaso porque em ambos os casos $z = 90^\circ$.

Observação: a dedução da fórmula do ângulo horário no ocaso foi mostrada nesse gabarito apenas para tornar a solução mais clara. Contudo, estudantes que escreverem essa fórmula sem deduzi-la não serão penalizados por isso.

Com a fórmula do ângulo horário no ocaso, é possível obter a seguinte expressão:

$$\tan(\phi) = -\frac{\cos(H_H)}{\tan(\delta_H)} = -\frac{\cos(H_M)}{\tan(\delta_M)} \longrightarrow \cos(H_H) = \frac{\tan(\delta_H)}{\tan(\delta_M)} \cos(H_M)$$

É importante lembrar que tanto o ângulo horário quanto a ascensão reta são definidos com base no Equador, mas em sentidos opostos. Isso implica que $H_H = H_M - \Delta\alpha$. Dessa forma, é possível reescrever a expressão da seguinte maneira:

$$\cos(H_M - \Delta\alpha) = \frac{\tan(\delta_H)}{\tan(\delta_M)} \cos(H_M)$$

Utilizando a fórmula do cosseno da diferença:

$$\cos(H_M) \cos(\Delta\alpha) + \sin(H_M) \sin(\Delta\alpha) = \frac{\tan(\delta_H)}{\tan(\delta_M)} \cos(H_M)$$

$$\frac{\frac{\tan(\delta_H)}{\tan(\delta_M)} - \cos(\Delta\alpha)}{\sin(\Delta\alpha)} \cos(H_M) = \sin(H_M)$$

$$\tan(H_M) = \frac{\frac{\tan(\delta_H)}{\tan(\delta_M)} - \cos(\Delta\alpha)}{\sin(\Delta\alpha)}$$

$$\tan(H_M) = -1,4611$$

É importante notar que existem duas soluções possíveis entre -12h e 12h para a equação acima. Como o ocaso deve ocorrer em um ângulo horário entre 0h e 12h (ou seja, a oeste do meridiano local), a única solução viável nesse contexto é a seguinte:

$$H_M = 8h17m33,2s$$

O ângulo horário de Hamal é o seguinte:

$$H_H = H_M - \Delta\alpha$$

$$H_H = 8h17m33,2s - (2h08m35,02s - 1h11m07,58s)$$

$$H_H = 7h20m05,8s$$

(c) Utilizando a fórmula do ângulo horário no ocaso:

$$\tan(\phi) = -\frac{\cos(H_M)}{\tan(\delta_M)}$$

$$\tan(\phi) = -\frac{\cos(8h17m33,2s)}{\tan(35^\circ 45' 18,0'')}$$

$$\phi = \arctan(0,7844)$$

$$\phi = +38^\circ 06' 39,8''$$

Grade de Correção

Item a (10 pontos)

- + 4 Uso correto da lei dos cossenos para calcular a distância entre as estrelas
- + 4 Perceber que a distância angular entre as estrelas é igual ΔA
- + 2 Calcular ΔA de forma correta
- 1 Desenho incorreto da situação

Item b (24 pontos)

- + 7 Fórmula do ângulo horário no ocaso
- + 8 Usou que $H + \alpha$ é igual para as duas estrelas
- + 7 Achar corretamente o valor de H de alguma das estrelas
- + 2 Encontrar o H da outra estrela

Item c (6 pontos)

- + 6 Valor numérico correto.

10. Erro de perspectiva (75 pontos) Trevisan reside no planeta DV-41, que orbita uma estrela de massa $M = 4M_{\odot}$ e magnitude aparente $m_e = -27$ mag a uma distância 3 UA. Ele procurava asteroides troianos do seu planeta, os quais se localizam no ponto de estabilidade L4 (à frente do planeta DV-41). Analisando atentamente, Trevisan identificou um asteroide na mesma linha de visada de L4, mas que se movimentava de forma diferente dos demais. Pesquisando em sua base de dados, descobriu que o asteroide se chamava PL-01 e possuía uma órbita circular, porém de raio maior que a do planeta DV-41. Na base de dados, ele também descobriu que a última vez que essa configuração de alinhamento entre o planeta e o asteroide ocorreu foi a 4,55 UA

Dica: Trevisan não gosta de números, apenas de contas literais! para evitar descontos de dupla penalização entre os itens, desenvolva todo o raciocínio de cada item sem substituir valores numéricos, e apenas no final substitua os valores para a resposta final. Uma quantidade pequena da pontuação é atribuída ao valor numérico correto, enquanto que a maior parte da pontuação é dada ao chegar nas expressões literais corretas.

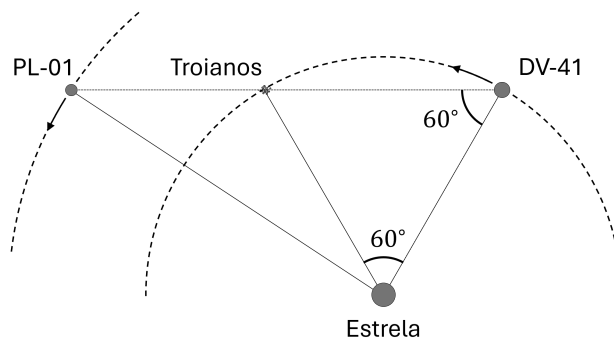


Figura 7: Representação da situação da órbita. Os troianos ocupam o ponto chamado L4, um dos quais forma um triângulo equilátero com DV-41 e a estrela. A outra possibilidade de formação de um triângulo equilátero é chamada L5. Para distinguir entre os pontos, perceba que L4 está “à frente” da órbita, enquanto L5 estaria “atrás”.

- (4 pontos)** Determine o período orbital de PL-01.
- (20 pontos)** Determine a distância do asteroide até o planeta DV-41.
- (9 pontos)** Determine o ângulo de separação, centrado na estrela, entre o planeta e o asteroide na situação de alinhamento com L4.
- (14 pontos)** Determine o tempo necessário para que o asteroide se alinhe com L4 novamente.
- (6 pontos)** Determine o tempo desde o alinhamento do asteroide com L4 até seu alinhamento com L5.

Trevisan quis tirar uma foto do asteroide em seu ponto de maior aproximação. Para isso, ele decidiu utilizar um telescópio de 500 mm de foco, acoplado a uma CCD com pixels de $10 \mu\text{m}$ e a um motor que corrige a rotação de DV-41 (ou seja, para os itens a seguir, desconsidere os efeitos de rotação do planeta).

- (16 pontos)** Determine a velocidade angular de PL-01 em relação ao céu de fundo, visto de DV-41, no ponto de maior aproximação.
- (6 pontos)** Determine o maior tempo de exposição para que o asteroide não se mova o equivalente a um pixel na imagem do CCD.

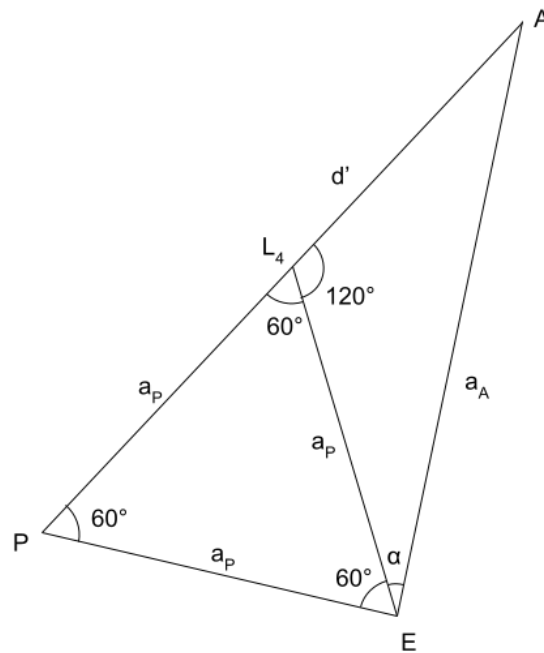
Solução:

(a) o asteroide possui semi-eixo maior $a_A = 4,55$ UA. Aplicando a terceira lei de Kepler,

$$\frac{T_A^2}{a_A^3} = \frac{1M_\odot \text{ ano}^2 \text{ UA}^{-3}}{M}$$

$$T_A = 4,85 \text{ anos}$$

(b) Sabendo que o asteroide está na mesma linha de visada do ponto lagrangiano L4, e que este está a 60° a frente na órbita do planeta, é possível desenhar a seguinte situação, dando ênfase para o angulo suplementar no ponto L4



Aplicando a lei dos cossenos para determinar d' ,

$$a_A^2 = a_P^2 + d'^2 - 2d'a_P \cos(120^\circ) \Rightarrow 0 = d'^2 + d'a_P + a_P^2 - a_A^2$$

Resolvendo a equação de segundo grau,

$$d' = \frac{-a_P \pm \sqrt{a_P^2 - 4(a_P^2 - a_A^2)}}{2}$$

$$d' = \frac{-a_P \pm \sqrt{4a_A^2 - 3a_P^3}}{2},$$

sabendo que $d' > 0$ e que a distância até o asteroide é $d = d' + a_P$

$$d = \frac{a_P + \sqrt{4a_A^2 - 3a_P^3}}{2} = 5,24 \text{ UA}$$

(c) Aplicando a lei dos senos para determinar α ,

$$\frac{\sin \alpha}{d'} = \frac{\sin(120^\circ)}{a_A}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d'}{a_A} = 25,2^\circ$$

O ângulo de separação entre o PL-01 e DV-41 é $\beta = \alpha + 60^\circ = 85,2^\circ$

(d) O período para que isso volte a ocorrer é o período sinódico, dado por

$$T_S^{-1} = T_P^{-1} - T_A^{-1}$$

Aplicando a terceira Lei de Kepler para os dois períodos,

$$T_P = \sqrt{\frac{(a_P/\text{UA})^3}{M/M_\odot}} \text{ ano}$$

$$T_A = \sqrt{\frac{(a_A/\text{UA})^3}{M/M_\odot}} \text{ ano}$$

$$T_S^{-1} = \sqrt{M/M_\odot} \left((a_P/\text{UA})^{-3/2} - (a_A/\text{UA})^{-3/2} \right) \text{ ano}^{-1}$$

$$T_S = 5,6 \text{ anos}$$

(e) Considerando o referencial girante do planeta, o asteroide terá que percorrer 2β para sair do alinhamento com L4 e entrar no alinhamento com L5. Perceba que, como o movimento relativo do asteroide em relação ao planeta já é na direção de L4 para L5, o asteroide terá realmente que percorrer apenas 2β , e não $360^\circ - 2\beta$. Assim, a sabendo velocidade angular relativa, dada a partir do período sinódico:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s},$$

o tempo será dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta^{[\text{rad}]}}{\omega_s}$$

$$\Delta t = T_s \frac{\beta^{[^\circ]}}{180^\circ} = 2,65 \text{ anos}$$

(f) a velocidade angular é dada por

$$\omega = \frac{v}{d}$$

A velocidade é velocidade relativa entre o planeta e o asteroide. Assim,

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a_P}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{a_A}}$$

$$v = \sqrt{GM} \left(a_P^{-1/2} - a_A^{-1/2} \right)$$

Já a distância será

$$d = a_A - a_P$$

Assim, a velocidade angular será

$$\omega = \sqrt{GM} \frac{(a_P^{-1/2} - a_A^{-1/2})}{a_A - a_P}$$

Lembrando que $\frac{4\pi^2}{G} = 1M_\odot \text{ ano}^2 \text{ UA}^{-3}$ e assim a equação fica com a velocidade angular em ano^{-1}

$$\omega = 2\pi\sqrt{M/M_\odot} \frac{((a_P/\text{UA})^{-1/2} - (a_A/\text{UA})^{-1/2})}{(a_A/\text{UA}) - (a_P/\text{UA})} \text{ ano}^{-1}$$

$$\omega = 0,880 \text{ rad/ano} = 2,79 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$$

(g) A escala de placa do telescópio é dada por:

$$s = \frac{1}{500 \text{ mm}} = 0,002 \text{ rad/mm} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}/\mu\text{m}$$

Para percorrer o equivalente a um pixel, i.e., $10 \mu\text{m}$, é necessário um deslocamento angular de $2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$. Para tal, é necessário um tempo:

$$t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}}{2,79 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}} = 717 \text{ s} = 11,9 \text{ min}$$

Grade de Correção

Item a) (4 pontos):

- + 3 Terceira lei de Kepler aplicada ao asteroide
- + 1 Valor correto para Período do asteroide, dentro do intervalo (4,70; 5,00) Anos ($\pm 3\%$)

Item b) (20 pontos):

- + 7 Desenho que explicita a relação (presença de 2 triângulos, sendo um deles equilátero). Caso não haja desenho, mas relações matemáticas que advêm do desenho estejam presentes, a pontuação é dada. (Item passível de atribuição de pontuação parcial)
- + 7 Lei dos cossenos ou similar para obter d' ou similar
- + 2 relação $d = d' + a_P$ ou similar
- + 3 Expressão final para d (caso não haja expressão explícita mas valor numérico está correto, a pontuação é atribuída)
- + 1 Valor correto para d , dentro do intervalo (5,08; 5,40) UA ($\pm 3\%$)

Item c) (9 pontos):

- + 4 Lei dos senos ou similar para obter α ou similar
- + 4 relação $\beta = \alpha + 60^\circ$ ou similar
- + 1 Valor correto para β , dentro do intervalo ($82,6^\circ$; $87,8^\circ$) ($\pm 3\%$)

Item d) (14 pontos):

- + 1 Identificar que o período de ocorrência do fenômeno é igual ao período sinódico do sistema
- + 4 Relação do período sinódico ou equivalente
- + 4 Terceira lei de Kepler aplicada aos corpos
- + 4 Expressão final para o período sinódico (caso não haja expressão explícita mas valor numérico está correto, a pontuação é atribuída)
- + 1 Valor correto para o período sinódico, dentro do intervalo (5,43; 5,77) Anos ($\pm 3\%$)

Item e) (6 pontos):

- + 2 $\Delta\theta = 2\beta$
- + 3 $\omega_s = 2\pi/T_s$ ou relação de proporcionalidade com período sinódico
- + 1 Valor correto para Δt , dentro do intervalo (2,54; 2,70) Anos ($\pm 3\%$)

Item f) (16 pontos):

- + 2 $\omega = v/r$
- + 3 Entender que v é a velocidade relativa entre os astros
- + 2 Expressão para v_A
- + 2 Expressão para v_P
- + 2 $d = a_A - a_P$
- + 3 Expressão final para ω (caso não haja expressão explícita mas valor numérico está correto, a pontuação é atribuída)
- + 1 conversão de unidades de G ou de M , a_P e a_A
- + 1 Valor correto para ω , dentro do intervalo $(2,65; 2,93) \cdot 10^{-8}$ rad/s ou $(0,854; 0,906)$ rad/ano ($\pm 5\%$) (a conversão de unidades é descontada no item anterior)

Item g) (6 pontos):

- + 2 Escala de placa do telescópio inversamente proporcional ao foco
- + 1 Ângulo percorrido pelo asteroide igual à escala de placa vezes o lado do pixel
- + 2 Tempo de exposição igual ao ângulo dividido pela velocidade angular
- + 1 Valor correto para t , dentro do intervalo (695; 738) s ou (11,6; 12,3) min ($\pm 3\%$)