

Instruções Gerais

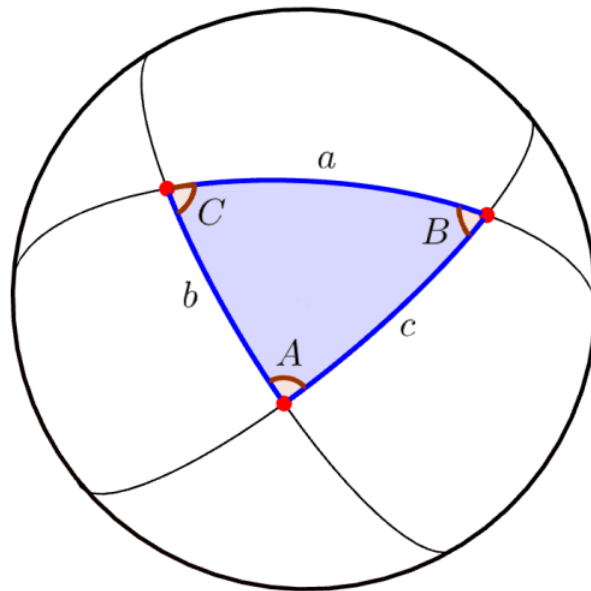
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

Tal que l é o semi-latus rectum

- Equação dos gases ideais:

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

Questões Curtas

1. **Gurjão no gurjiverso (5 pontos)** Em um dia normal para o padrão das seletivas, Gurjão vai ao mercado e acaba caindo em um universo paralelo onde as constantes cosmológicas assumem valores diferentes do universo em que vivemos. Intrigado, ele decide reviver um experimento clássico: Gurjão observa algumas galáxias e constrói o gráfico de sua velocidade radial em função da distância, conforme a figura abaixo. Determine a constante de Hubble para esse universo e explique **brevemente** seu método de estimativa.

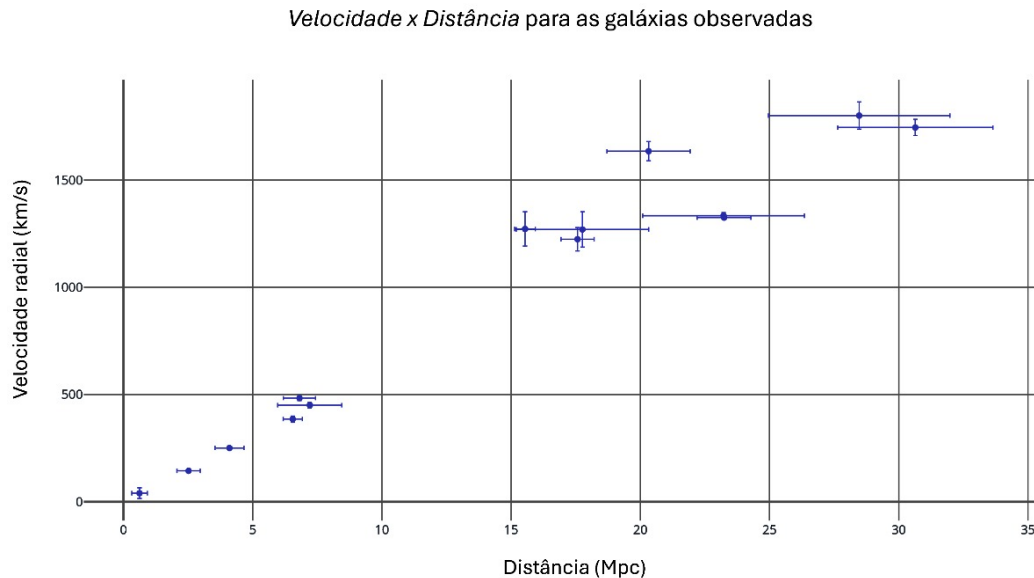
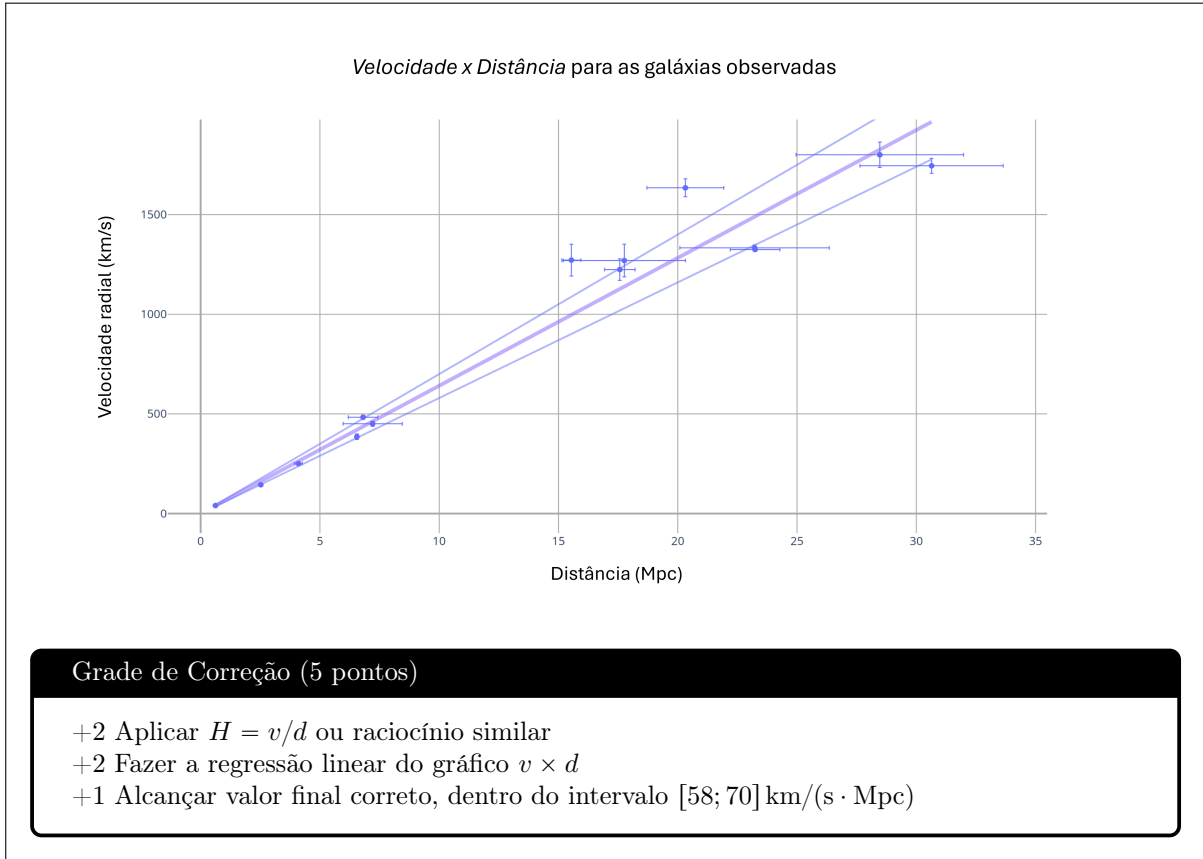


Figura 1: Dispersão de velocidade radial em função da distância para diferentes galáxias. Os dados são fictícios e específicos para o contexto da questão.

Solução:

A constante de Hubble é o coeficiente angular da reta de melhor ajuste. A resolução esperada é o ajuste da reta em alguma posição que passe pela origem e divida os pontos experimentais na metade. Seguem a reta de melhor ajuste $H = 64 \text{ km/sMpc}$, junto aos limites aceitos, o que corresponde à faixa de valores $58 \text{ km/sMpc} < H < 70 \text{ km/sMpc}$.



2. De olho no tucano (10 pontos) Depois de frustrações com um dobsoniano, Larissa decidiu investir em seu novo telescópio: um newtoniano $f/7$ de 15cm de abertura, no qual acoplou uma matriz CCD com $4 \mu\text{m}$ de largura de pixel e eficiência quântica de $\eta = 0,80$.

- (a) **(5 pontos)** Estime a contagem de fótons lidos ao se apontar o telescópio para 47 Tucanae ($m = 4,91$ mag) por um tempo $\Delta t = 60$ s. Considere o visível centrado em 500 nm.
- (b) **(5 pontos)** Estime a quantidade de pixels ocupados pelo aglomerado, sabendo que seu diâmetro angular é de $43,8'$.

Solução:

(a) Encontramos o fluxo do objeto ao compará-lo com o Sol:

$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \cdot 10^{(m_{\odot} - m)/2,5} = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

A energia, portanto, é dada por:

$$E = F \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \Delta t = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

A energia do fóton é calculada por:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

A contagem estimada de fótons, portanto:

$$N = \frac{E}{\varepsilon} \cdot \eta = 7,3 \cdot 10^8$$

- (b) Se o telescópio é f/7 com 15cm, então sua distância focal é 1,05 m. O diâmetro do objeto no CCD, portanto, é:

$$L = \theta \cdot f = 0,013m$$

A estimativa da quantidade de pixels é encontrada pela área da projeção sobre a área de um pixel:

$$M = \pi \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1}{l^2} = 8,3 \cdot 10^6$$

Grade de Correção – “De olho no tucano” (10 pontos)

Item (a) (5 pontos)

+ 1 Cálculo do fluxo F a partir da magnitude $m = 4,91$, comparando com m_{\odot} .

+ 1 Cálculo da energia total coletada: $E = F \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta t$

+ 1 Cálculo da energia por fóton: $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$.

+ 1 Conversão para número de fótons $N = \frac{E}{\varepsilon} \eta$.

+ 1 Valor final correto dentro do intervalo $[7,08; 7,52] \cdot 10^8$

Item (b) (5 pontos)

+ 1 distância focal $f = 1,05$ m

+ 1 $L = \theta f$

+ 0,5 área do pixel l^2

+ 0,5 área de 47 Tucanae projetada no CCD $\pi \frac{L^2}{4}$

+ 1 número de pixels pela razão das áreas

+ 1 valor final correto dentro do intervalo $[8,0; 8,5] \cdot 10^6$

- 3. Cosmologia Bantu (15 pontos)** Ao longo da história, diferentes povos construíram cada qual sua forma particular de enxergar o universo. A cosmologia tradicional dos povos bantu é particularmente interessante pois apresenta uma série de paralelos com entendimentos de cosmologia física modernos. Para os bantu, o universo é resultado de uma força de fogo primordial [*Kalûnga*], a qual emergiu do vazio e originou toda a matéria num estado de magma e gás. O processo de resfriamento [*nghodolo*] deixa para trás estruturas sólidas e coesas, como planetas e luas. Ainda, a força primordial é responsável pela expansão contínua do universo [*dingodingo dia mpiaya yayalanga*].

Vamos tentar modelar um universo cuja expansão é causada pelo efeito de uma chama. Considere que o universo tenha uma certa densidade de energia $\rho(t)$ em um instante t , manifestada na forma de radiação. Depois de um intervalo Δt , a chama terá emitido uma energia $\Delta \varepsilon$ conforme a radiação de um corpo negro, ou seja, proporcional a um fator de área e a um fator de temperatura à quarta, $\Delta \varepsilon_{emitida} \propto a^{-2}$. A densidade de energia, portanto, segue $\Delta \rho_{emitida} \propto a^{-5}$.

$$\Delta \rho_{emitida} = A \cdot \frac{\Delta t}{a^5}$$

Determine o valor de A a partir do qual o universo está em expansão acelerada, em função de ρ , a e G

Dado: Equação de Friedmann-Lemaître em função da densidade de energia

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

Solução: A variação de densidade de energia deve considerar tanto a variação de energia da radiação pré-existente quanto a energia emitida:

$$\Delta\rho = \rho \cdot \frac{a^4}{(a + \Delta a)^4} - \rho + A \cdot \frac{\Delta t}{a^5}$$

$$\Delta\rho \approx -4 \cdot \rho \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{A \cdot \Delta t}{a^5}$$

Para que a expansão seja acelerada, $\Delta\rho > 0$:

$$\frac{A \cdot \Delta t}{a^5} > 4 \cdot \rho \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

$$A > 4 \cdot \rho \cdot a^5 \cdot \left(\frac{\Delta a}{\Delta t} \cdot \frac{1}{a} \right)$$

$$A > 4 \cdot \rho \cdot a^5 \cdot \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$$

Grade de Correção (15 pontos)

- + 2 considerar que $\rho \propto_{rad} a^{-4}$
- + 1 considerar que $\Delta\rho_{emitida} \propto a^{-5}$
- + 1 esquematizar $\Delta\rho = \Delta\rho_{rad} + \Delta\rho_{emitida}$
- + 3 Fazer a aproximação binomial para $\Delta\rho_{rad}$.
- + 2 condição para expansão acelerada $\Delta\rho > 0$
- + 4 identificar que

$$\left(\frac{\Delta a}{\Delta t} \cdot \frac{1}{a} \right) = H$$

- + 2 expressão final

$$A > 4 \cdot \rho \cdot a^5 \cdot \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$$

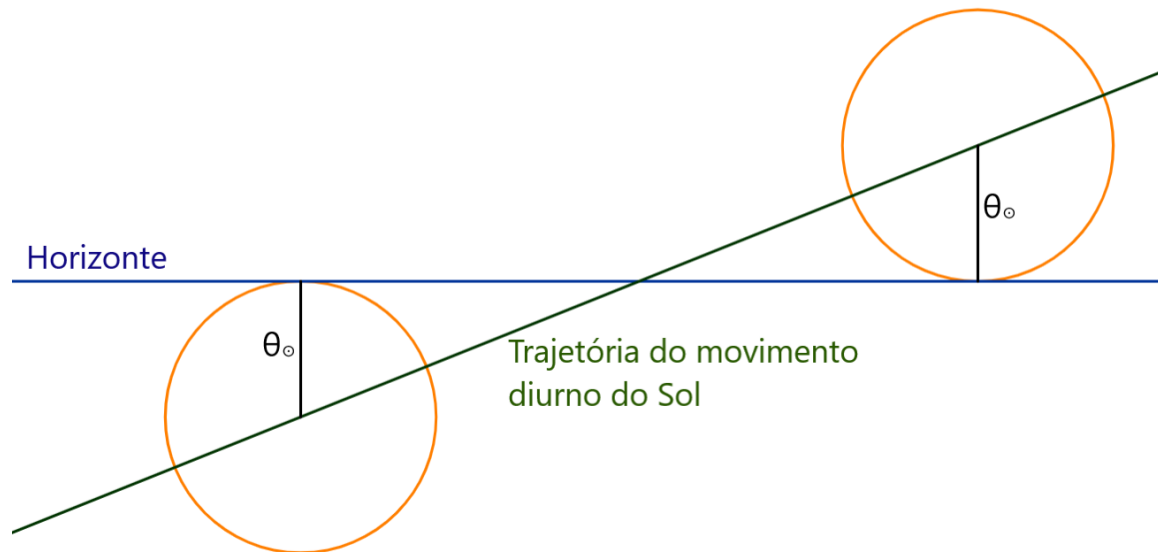
4. Chicago (15 pontos)

Ualype mora na cidade de Chicago ($\phi = 41^\circ 52' \text{ N}$, $85^\circ 40' \text{ O}$) e adora assistir ao nascer do Sol todos os dias.

Estime a razão entre a duração do nascer do Sol mais longo e do nascer do Sol mais curto que Ualype pode observar ao longo do ano. Considere que o nascer do Sol começa quando o primeiro ponto do disco do Sol toca o horizonte e termina no instante em que todos os pontos do Sol deixam de tocar o horizonte. Ignore a refração atmosférica e fique à vontade para realizar aproximações coerentes.

Solução:

(a) A figura a seguir corresponde a uma representação geométrica do problema.



O raio angular do disco do Sol na esfera celeste pode ser representado por θ_{\odot} . O nascer do Sol começa quando a altura do centro do Sol corresponde a $-\theta_{\odot}$ e termina quando o centro do Sol atinge uma altura de θ_{\odot} .

A seguinte expressão relaciona a altura h , o ângulo horário H , a declinação do Sol δ e a latitude ϕ :

$$\text{sen } h = \text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Considerando o Sol na posição logo após seu nascer, $h = \theta_{\odot}$ e $H = H_{nsc} + \Delta H$, sendo ΔH a variação do ângulo horário do Sol com respeito ao ângulo horário do nascimento do Sol (H_{nsc}), obtém-se

$$\text{sen } \theta_{\odot} = \text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \cos \phi \cos \delta (\cos H_{nsc} \cos \Delta H - \text{sen } H_{nsc} \text{ sen } \Delta H)$$

como θ_{\odot} é muito pequeno, $\text{sen } h \approx h$. Como ΔH é muito pequeno, $\cos \Delta H \approx 1$ e $\text{sen } \Delta H \approx \Delta H$

$$\theta_{\odot} = \text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \cos \phi \cos \delta (\cos H_{nsc} - \text{sen } H_{nsc} \Delta H)$$

De forma semelhante, considerando o sol na posição logo antes de seu nascer, $h = -\theta_{\odot}$ e $H = H_{nsc} - \Delta H$, e obtém-se de forma semelhante

$$-\theta_{\odot} = \text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \cos \phi \cos \delta (\cos H_{nsc} + \text{sen } H_{nsc} \Delta H)$$

subtraindo as duas equações obtidas e dividindo ambos os lados por 2,

$$\theta_{\odot} = -\cos \phi \cos \delta \text{ sen } H_{nsc} \Delta H.$$

Além disso, a seguinte relação é válida para o nascer do Sol e para o pôr do Sol:

$$\cos H_{nsc} = -\tan \phi \tan \delta$$

Utilizando a identidade fundamental da trigonometria e considerando que o Sol nasce a leste do meridiano local e portanto o ângulo horário nesse momento é negativo:

$$\text{sen } H = -\sqrt{1 - \tan^2 \phi \tan^2 \delta}$$

Dessa forma, é possível obter a seguinte expressão:

$$\theta_{\odot} = \Delta H \cos \phi \cos \delta \sqrt{1 - \tan^2 \phi \tan^2 \delta}$$

$$\Delta H = \frac{\theta_{\odot}}{\cos \phi \cos \delta \sqrt{1 - \tan^2 \phi \tan^2 \delta}}$$

Sabendo que o tempo de ocaso será $\Delta t \approx 2\Delta H/\omega$ (em que ω corresponde à velocidade angular do Sol no círculo do seu movimento diurno)

$$\Delta t = \frac{2\theta_{\odot}}{\omega \cos \phi \cos \delta \sqrt{1 - \tan^2 \phi \tan^2 \delta}}$$

$$\Delta t = \frac{2\theta_{\odot}}{\omega \cos \phi \sqrt{1 - \text{sen}^2 \delta - \tan^2 \phi \text{sen}^2 \delta}}$$

$$\Delta t = \frac{2\theta_{\odot}}{\omega \cos \phi \sqrt{1 - \text{sec}^2 \phi \text{sen}^2 \delta}}$$

Note que $\delta = 0^\circ$ corresponde ao menor valor possível para o termo $\text{sen}^2 \delta$. Dessa forma, essa declinação resulta no maior valor possível no denominador e conseqüentemente no nascer do Sol mais curto. Da mesma forma, as declinações de $\delta = \pm 23^\circ 27'$ correspondem ao maior valor possível para o termo $\text{sen}^2 \delta$ dentro do intervalo das possíveis declinações do Sol. Nesse caso, o denominador é o menor possível e portanto o nascer do Sol é o mais longo nesse caso.

A razão entre a duração do nascer do Sol mais longo e do nascer do Sol mais curto é a seguinte:

$$\frac{\Delta t_{max}}{\Delta t_{min}} = \frac{\left[\frac{2\theta_{\odot}}{\omega \cos \phi \sqrt{1 - \text{sec}^2 \phi \text{sen}^2 23^\circ 27'}} \right]}{\left[\frac{2\theta_{\odot}}{\omega \cos \phi \sqrt{1 - \text{sec}^2 \phi \text{sen}^2 0^\circ}} \right]}$$

$$\frac{\Delta t_{max}}{\Delta t_{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sec}^2 \phi \text{sen}^2 23^\circ 27'}} = \boxed{1,183}$$

Grade de Correção (15 pontos)

- + 2 considerar que o nascer do sol se inicia a $h = -\theta_{\odot}$ e termina em $h = \theta_{\odot}$
- + 1 relação $\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$
- + 1 substituir $H = H_{nsc} \pm \Delta H$ e $h = \pm \theta_{\odot}$
- + 2 aproximação de pequenos ângulos para ΔH e θ_{\odot}
- + 2 chegar na seguinte relação, ou similar

$$\theta_{\odot} = -\cos \phi \cos \delta \sin H_{nsc} \Delta H.$$

- + 1 usar a relação

$$\cos H_{nsc} = -\tan \phi \tan \delta$$

- + 1 transformar a relação em

$$\sin H = -\sqrt{1 - \tan^2 \phi \tan^2 \delta}$$

- + 1 duração do nascer é $\Delta t \approx 2\Delta H/\omega$
- + 2 chegar que o Δt_{min} se dá em $\delta = 0$ e que Δt_{max} se dá em $\delta = \pm 23^{\circ}27'$
- + 1 relação final correta

$$\frac{\Delta t_{max}}{\Delta t_{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sec^2 \phi \sin^2 23^{\circ}27'}}$$

- + 1 valor final correto, dentro do intervalo [1,15 ; 1,22]

Questões Médias

5. Fulano Fotometrias (20 pontos)

Uma certa estrela de magnitude bolométrica absoluta $M_{bol,1} = -1,45$ e correção bolométrica $BC_V = -1,05$ apresenta as seguintes magnitudes aparentes no sistema fotométrico UBV: $B_1 = 7,11$ e $V_1 = 7,14$. Você sabe que ambas as magnitudes já foram corrigidas pelo seu assistente, Carrit, para a extinção atmosférica. Além disso, com base em sua classe espectral (B7V), você tem a informação de que os índices de cor intrínsecos dessa estrela têm os seguintes valores: $(U-B)_{0,1} = -0,46$ e $(U-V)_{0,1} = -0,59$.

Ao observar a sua estrela de estudo em um momento em que ela está a uma altura de 82° , você nota a existência de uma outra estrela na mesma direção que a primeira. Você logo mede o brilho da estrela 2 e obtém uma magnitude aparente $V_2 = 7,94$. Por outro lado, Carrit, muito proativo, põe-se a trabalhar em seu observatório e logo volta trazendo uma surpreendente informação sobre a nova estrela: ela apresenta um espectro muito semelhante ao da estrela 1! Sabendo que a magnitude bolométrica absoluta da segunda estrela é $M_{bol,2} = -1,21$ e tendo posse de todas as outras informações, você dá continuidade ao seu estudo resolvendo as primeiras pendências da sua *to-do list*:

- (a) **(7 pontos)** Determine as magnitudes aparentes intrínsecas (corrigidas para a extinção interestelar) $U_{0,1}$, $B_{0,1}$ e $V_{0,1}$ da estrela 1.
- (b) **(5 pontos)** Faça o trabalho de Carrit e corrija V_2 para a extinção atmosférica.
- (c) **(8 pontos)** Determine a distância à estrela 2, em pc.

Dados:

- Profundidade óptica da atmosfera no zênite (filtro V): $\tau_0 = 0,13$;

- A poeira no espaço entre a Terra e a estrela mais distante é uniformemente distribuída e possui a mesma composição, portanto a extinção por distância a_V e a razão entre a extinção total e o excesso de cor, $A_V/E_{(B-V)} = R_V = 3,1$, valem para ambas as estrelas.

Dicas:

- Para pequenos valores de distâncias zenitais, é possível aproximar que a atmosfera é plana.
- Após a luz da estrela passar por uma massa de ar de comprimento d , sua luminosidade é dada por $L = L_0 e^{-\tau d}$

Solução:

- (a) Em posse das informações do enunciado, é possível calcular, de maneira bem direta, o índice de cor $(B - V)_1$ da estrela 1

$$(B - V)_1 = 7,11 - 7,14 \Rightarrow (B - V)_1 = -0,03$$

assim como seu índice de cor intrínseco $(B - V)_{0,1}$:

$$(B - V)_{0,1} = (U - V)_{0,1} - (U - B)_{0,1} = -0,59 - (-0,46) \Rightarrow (B - V)_{0,1} = -0,13$$

Com isso, determinamos o excesso de cor $E_{(B-V)_1}$:

$$E_{(B-V)_1} = (B - V)_1 - (B - V)_{0,1} = -0,03 - (-0,13) \Rightarrow E_{(B-V)_1} = 0,10$$

E, sabendo que $R_V = 3,1$, temos:

$$A_{V,1} = R_V E_{(B-V)_1} = 3,1 \cdot 0,1 \Rightarrow A_{V,1} = 0,31$$

Com a extinção $A_{V,1}$, podemos então calcular as magnitudes intrínsecas da estrela 1 nas bandas V, U e B.

$$V_{0,1} = V_1 - A_{V,1} \Rightarrow V_{0,1} = 7,14 - 0,31$$

$$\boxed{V_{0,1} = 6,83}$$

$$U_{0,1} = (U - V)_{0,1} + V_{0,1} \Rightarrow U_{0,1} = -0,59 + 6,83$$

$$\boxed{U_{0,1} = 6,24}$$

$$B_{0,1} = (B - V)_{0,1} + V_{0,1} \Rightarrow B_{0,1} = -0,13 + 6,83$$

$$\boxed{B_{0,1} = 6,70}$$

- (b) Sendo $z = 90^\circ - 82^\circ = 8^\circ$ a distância zenital da estrela no momento da observação, a aproximação de atmosfera plana nos dá, sendo H_0 a massa de ar no zênite e H a massa de ar na direção de visada,

$$H = H_0 \sec z$$

assim, sabendo da proporcionalidade

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\tau}{\tau_0}$$

$$\tau = \tau_0 \sec z.$$

Assim, pela dica do enunciado, tomando $d = H$,

$$L = L_0 e^{-\tau_0 \sec z}$$

substituindo na equação de Pogson,

$$V_2 - V'_2 = -2,5 \log (e^{-\tau \sec z})$$

$$\Rightarrow V'_2 = V_2 - 2,5 \tau \sec z \log e \Rightarrow V'_2 = 7,80$$

- (c) Como as estrelas 1 e 2 estão na mesma linha de visada e o espaço entre elas tem distribuição de poeira uniforme, podemos usar a extinção por distância para essa linha de visada, a_V , para calcular a distância à estrela 2. Para calcularmos a_V , devemos determinar primeiro a distância à estrela 1, uma vez que

$$A_{V,1} = a_V d_1 \Rightarrow a_V = \frac{A_{V,1}}{d_1}$$

A magnitude absoluta da estrela 1 na banda V é $M_{V,1} = M_{bol,1} - BC_V = -0,4$. Assim, aplicando o módulo de distância para a estrela 1, temos:

$$V_1 - M_{V,1} = 5 \log d_1 - 5 + A_{V,1} \Rightarrow d_1 = 10^{(V_1 - M_{V,1} - A_{V,1} + 5)/5}$$

$$\Rightarrow a_V = \frac{A_{V,1}}{10^{(V_1 - M_{V,1} - A_{V,1} + 5)/5}} \approx 1,10 \times 10^{-3} \text{ mag/pc}$$

Sabendo que a magnitude absoluta dessa estrela no visível é $M_{V,2} = M_{bol,2} - BC_V = -0,16$ — é plausível aplicar a mesma correção bolométrica da estrela 1, pois as estrelas têm espectros muito semelhantes, o que significa que a fração de luz emitida fora da banda V é praticamente igual para as duas estrelas —, podemos finalmente aplicar o módulo de distância para a estrela 2:

$$V'_2 - M_{V,2} = 5 \log d_2 - 5 + a_V d_2$$

$$\Rightarrow d_2 = 10^{(V'_2 - M_{V,2} - a_V d_2 + 5)/5}$$

Por iteração, obtemos:

$$d_2 \approx 331 \text{ pc}$$

Grade de Correção (20 pontos)

Item (a) (7 pontos)

- + 1 Calcular o índice de cor observado $(B - V)_1$ da estrela 1.
- + 2 Calcular o índice de cor intrínseco $(B - V)_{0,1}$ da estrela 1.
- + 2 Calcular o excesso de cor $E_{(B-V)_1}$ da estrela 1.
- + 0.5 Calcular a extinção total A_V da estrela 1.
- + 0.5 Valor correto de $V_{0,1}$.
- + 0.5 Valor correto de $U_{0,1}$.
- + 0.5 Valor correto de $B_{0,1}$.

Item (b) 5 pontos

- + 1 $H = H_o \sec z$
- + 1 $\tau \propto H$
- + 2 $V'_2 = V_2 - 2,5\tau \sec z \log e$
- + 1 valor final correto $V'_2 = 7,80$

Item (c) 8 pontos

- + 1 entender que a_V é igual para ambas as estrelas
- + 1 calcular $M_{V,1}$ pela correção bolométrica
- + 1.5 Calcular a distância à estrela 1
- + 1 Calcular a extinção por distância a_V
- + 1 Calcular a magnitude absoluta da estrela 2 usando BC_V .
- + 1 relação isolada para iteração da distância à estrela 2.
- + 1.5 Valor correto da distância à estrela 2, no intervalo [300; 360] pc.

6. Modelo de Comprimento de Mistura (20 pontos)

Nessa questão, vamos estudar o Modelo de Comprimento de Mistura (em inglês, *Mixing Length Theory*, MLT), que é uma teoria para modelar a convecção estelar. Nesse modelo, considera-se que a convecção se dá pelo movimento de pacotes de matéria do interior estelar que possuem temperatura T' próxima a temperatura ambiente T do meio em que está situada. Dessa forma, o pacote de fluido, que está mais quente que o meio, se desloca um comprimento para cima devido apenas à força de empuxo, e após um deslocamento vertical l característico, esse pacote se mistura com o meio externo. Nesse modelo, considera-se que as constantes físicas do problema são aproximadamente constantes, uma vez que o deslocamento l é muito menor que os comprimentos característicos da estrela.

Esse modelo, apesar de aproximado, é capaz de explicar a predominância do transporte de calor por radiação ou convecção em determinadas regiões da estrela

- (a) **(6 pontos)** A constante \mathcal{Q} representa como o material do meio varia de densidade com mudanças pequenas de temperatura, e é definida como

$$\mathcal{Q} = -\frac{T}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}.$$

Expresse a aceleração a do pacote de matéria de temperatura T' envolto em um meio de temperatura T utilizando a constante \mathcal{Q} e a aceleração da gravidade g no local de formação desse pacote de matéria.

Dica:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad \text{quando } |x| \ll 1$$

- (b) **(4 pontos)** Nos casos de maior eficiência de convecção no MLT, a troca de calor entre o meio e o pacote ao longo de sua subida é mínima, de forma que o processo de subida pode ser considerado adiabático. Assim, com respeito, respectivamente, ao meio e ao pacote, define-se as constantes β e β' , que representam as variações de temperatura ao longo da subida do pacote na atmosfera (na direção z), como

$$\beta = -\frac{\Delta T}{\Delta z}$$

$$\beta' = -\left(\frac{\Delta T'}{\Delta z}\right)_{\text{adiabático}}.$$

Expresse como a diferença $(T' - T)$ varia conforme o tempo $\left(\frac{\Delta(T'-T)}{\Delta t}\right)$, em função da velocidade de subida do pacote, $v = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, e das constantes β e β' .

- (c) **(6 pontos)** Unindo as equações dos itens anteriores, é possível chegar na seguinte expressão. Determine a constante C .

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = C \cdot v$$

onde

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ e } v = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

- (d) **(4 pontos)** Para que haja convecção, é esperado que o pacote de massa possa subir indefinidamente (até que se atinja o comprimento l), sem ficar preso em um movimento oscilatório. Determine os valores de C para que haja convecção, em seguida, determine a relação entre β e β' para isso ocorrer.

Solução:

- (a) A força de empuxo, somada à força peso é dada por

$$F = \rho V g - mg$$

a aceleração é dada então por

$$a = \frac{F}{m} = \rho \frac{V}{m} g - g$$

$$a = \left(\frac{\rho}{\rho'} - 1 \right) g = \frac{\rho - \rho'}{\rho'} g.$$

Para transformar a relação que depende de ρ e ρ' em uma que depende de T e T' , usamos a constante

$$\mathcal{Q} = -\frac{T'}{\rho'} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \Rightarrow \Delta\rho = -\rho' \mathcal{Q} \frac{\Delta T}{T'}.$$

Sendo $\Delta\rho$ e ΔT duas variações pequenas quaisquer de suas variáveis. Assim, tomando $\Delta\rho = \rho - \rho'$ e $\Delta T = T - T'$, substituímos na equação para aceleração e obtemos

$$a = \mathcal{Q} \frac{T' - T}{T'} g$$

Sabendo também que T e T' são muito próximos, podemos fazer que

$$\frac{T' - T}{T'} = \left(1 + \frac{T' - T}{T'} \right) - 1 \approx \left(1 - \frac{T' - T}{T'} \right)^{-1} - 1$$

A última passagem dada pela aproximação binomial, visto que $T' \approx T \Rightarrow \frac{T' - T}{T'} \ll 1$. Assim,

$$\frac{T' - T}{T'} \approx \left(1 - \frac{T' - T}{T'} \right)^{-1} - 1 = \frac{T'}{T} - 1 = \frac{T' - T}{T}.$$

Dessa forma, também é válido, e até mais útil, que

$$a = \mathcal{Q} \frac{T' - T}{T} g$$

(b) Queremos determinar

$$\frac{\Delta(T' - T)}{\Delta t}.$$

Pelas definições apresentadas, temos que

$$\beta - \beta' = -\frac{\Delta(T - T')}{\Delta z},$$

multiplicando ambos os lados pela velocidade $v = \frac{\Delta z}{\Delta t}$

$$v(\beta - \beta') = -\frac{\Delta(T - T')}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t} = -\frac{\Delta(T - T')}{\Delta t}$$

Assim chegamos em

$$\frac{\Delta(T' - T)}{\Delta t} = -v(\beta' - \beta).$$

(c) Tomando a expressão final do item a, podemos fazer sua diferença em respeito ao tempo, chegando em

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\mathcal{Q}g}{\Delta t} \left(\frac{T'_1 - T_1}{T_1} - \frac{T'_o - T_o}{T_o} \right)$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\mathcal{Q}g}{T_o \Delta t} \left(\frac{T_o}{T_1} (T'_1 - T_1) - (T'_o - T_o) \right)$$

Aproximando $T_o/T_1 \approx 1$, temos

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{Qg}{T} \frac{\Delta(T' - T)}{\Delta t}$$

Substituindo a equação final do item b), temos

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = -\frac{Qg}{T}(\beta' - \beta)v$$

e portanto

$$C = -\frac{Qg}{T}(\beta' - \beta)$$

- (d) Analisando a equação do item anterior, percebemos que esta possui caráter de um MHS para v , caso $C < 0$. Dessa forma, como pelo MLT é necessário que o pacote possa subir indefinidamente até se atingir o comprimento de mistura l , o movimento não pode ser um MHS. De fato, se $C > 0$, isso não ocorrerá, e assim haverá convecção (e ainda a função $v(t)$ terá caráter exponencial). Ademais, sabendo que $g > 0$ e $Q > 0$ (uma vez que $\Delta\rho/\Delta T < 0$ para gases), chegamos que a única forma de $C > 0$ é se $(\beta' - \beta) < 0 \Rightarrow \beta' < \beta$.

Grade de Correção (20 pontos)

Item a) (6 pontos):

- + 2 Força de empuxo + peso corretas (passível de ponto parcial)
- + 1 Relação para aceleração
- + 2 Relação de proporcionalidade entre $\Delta\rho$ e ΔT
- + 1 Expressão final correta

$$a = Q \frac{T' - T}{T'} g$$

ou

$$a = Q \frac{T' - T}{T} g$$

Item b) (4 pontos):

- + 1 Usar a definição de β e β'
- + 2 Perceber que $\Delta(T - T')/\Delta t = v \cdot \Delta(T - T')/\Delta z$
- + 1 Expressão final correta

Item c) (6 pontos):

- + 3 relação de

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{Qg}{T} \frac{\Delta(T' - T)}{\Delta t}$$

ou

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{Qg}{T'} \frac{\Delta(T' - T)}{\Delta t}$$

- + 2 substituir $-v(\beta' - \beta)$
- + 1 Resultado final correto,

$$C = -\frac{Qg}{T} (\beta' - \beta)$$

ou

$$C = -\frac{Qg}{T'} (\beta' - \beta)$$

Item d) (4 pontos):

- + 2 Justificar de forma plausível que $C > 0$, tanto por identificação do MHS, por lógica de crescimento exponencial ou qualquer outro raciocínio lógico. (caso o candidato chegue que $C > 0$ sem justificativa plausível, não é passível atribuição de pontuação parcial.)
- + 1 Justificar que $Q > 0$
- + 1 Chegar que $\beta' < \beta$

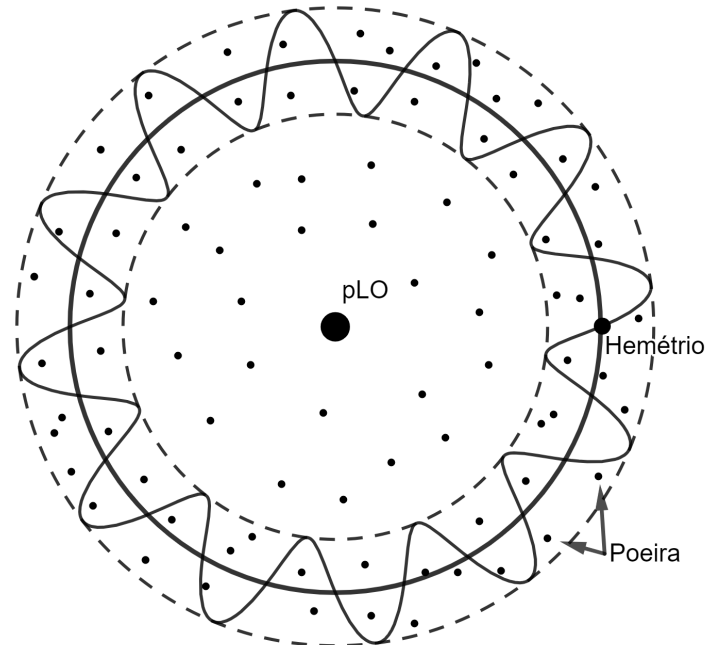
Observação: Apesar do gabarito tratar todas as diferenças das variáveis como finitas, raciocínios coerentes que utilizem que $\frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{dX}{dY}$, e assim utilizando as propriedades correspondentes do cálculo diferencial, devem ser aceitas.

7. Poeira no Alto Espaço (25 pontos)

Hemétrio está em uma aventura no espaço! Em um sistema bem distante permeado por poeira, ele descreve uma órbita circular de raio R em torno do buraco negro pLO-11 de massa M e de raio bem pequeno. Repentinamente, sua tecnologia dá uma pane e um estouro faz com que a nave se distancie ligeiramente do buraco negro. Hemétrio percebe que a nave começa a fazer um Movimento Harmônico Simples na direção radial (tomando pLO-11 como origem). Qual é o período desse movimento, sabendo que a poeira remanescente da formação do sistema tem densidade ρ ? A imagem é apenas ilustrativa.

Dica 1: Use a aproximação binomial para $|\alpha| \ll 1$, $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$.

Dica 2: Suponha uma massa pontual m girando em torno de um ponto P com velocidade angular ω e distância r . Ao ir para o referencial girante da massa, surge uma força $mr\omega^2$ na mesma direção e sentido do vetor que vai de P para m .



Solução: Seja r a distância da espaçonave ao centro do planeta em um instante qualquer. pLO-11 sentirá uma força gravitacional equivalente à feita pelo planeta e pela poeira que está dentro da superfície gaussiana (imaginária) esférica de raio r . Sabemos que toda camada esférica de poeira com raio maior do que r não fará força resultante. Uma vez que o raio do buraco negro é pequeno, a massa de poeira que faz força resultante será $M_{poeira} = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$. Logo, podemos calcular a força gravitacional como:

$$F = -\frac{Gm(M + M_{poeira})}{r^2}$$

$$F = -\frac{Gm\left(M + \frac{4\pi\rho r^3}{3}\right)}{r^2}$$

$$F = -\frac{GmM}{r^2} - \frac{4\pi\rho Gmr}{3}$$

Onde o sinal de menos é apenas para dizer que a força é para dentro. Uma vez que a nave se distanciou apenas um pouco do buraco negro, é lícito utilizar o fato de que $r = R + x$ sempre, onde $|x| \ll R$. Daí:

$$F = -\frac{GmM}{(R+x)^2} - \frac{4\pi\rho Gm(R+x)}{3}$$

$$F = -\frac{GmM}{R^2\left(1+\frac{x}{R}\right)^2} - \frac{4\pi\rho Gm(R+x)}{3}$$

$$F = -\frac{GmM}{R^2}\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2} - \frac{4\pi\rho Gm(R+x)}{3}$$

$$F = -\frac{GmM}{R^2}\left(1-\frac{2x}{R}\right) - \frac{4\pi\rho Gm(R+x)}{3}$$

$$F = -\frac{GmM}{R^2} - \frac{4\pi\rho GmR}{3} + x\left(\frac{2GmM}{R^3} - \frac{4\pi\rho Gm}{3}\right)$$

Perceba que F , que está na direção radial, será a soma da força centrípeta $-mr\omega^2$ (que está para dentro) com a componente que faz o raio da órbita variar ma , onde $a = \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$ e Δt é bem pequeno. O mesmo resultado é alcançado ao olharmos para o referencial não-inercial de Hemétrio, onde teríamos a centrífuga $mr\omega^2$. Aplicando a Segunda Lei de Newton no referencial inercial de pLO-11:

$$ma - mr\omega^2 = -\frac{GmM}{R^2} - \frac{4\pi\rho GmR}{3} + x\left(\frac{2GmM}{R^3} - \frac{4\pi\rho Gm}{3}\right)$$

$$a - (R+x)\omega^2 = -\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi\rho GR}{3} + x\left(\frac{2GM}{R^3} - \frac{4\pi\rho G}{3}\right)$$

Perceba que não sabemos quem é ω . No início, a velocidade era $v_0 = \sqrt{\frac{G(3M + 4\pi\rho R^3)}{3R}}$. Logo, a velocidade angular era $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3}}$. Usando a conservação do momento angular, já que a força resultante é radial e não há torque, podemos facilmente achar ω_0 :

$$L = m\omega r^2$$

$$L = mR^2\omega_0 = m(R+x)^2\omega$$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-4}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3}\right)\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-4}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3}\right)\left(1-\frac{4x}{R}\right)$$

Substituindo o ω^2 na expressão que encontramos a partir da Segunda Lei de Newton, temos:

$$a - (R+x)\left(\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3}\right)\left(1-\frac{4x}{R}\right) = -\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi\rho GR}{3} + x\left(\frac{2GM}{R^3} - \frac{4\pi\rho G}{3}\right)$$

$$a - \left(\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3}\right)\left(R-3x-\frac{4x^2}{R}\right) = -\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi\rho GR}{3} + x\left(\frac{2GM}{R^3} - \frac{4\pi\rho G}{3}\right)$$

Uma vez que x é pequeno em comparação com R , podemos desprezar o termo com x^2 .

$$a + 3x \left(\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3} \right) = x \left(\frac{2GM}{R^3} - \frac{4\pi\rho G}{3} \right)$$

$$F = -mx \left(\frac{GM}{R^3} + \frac{16\pi\rho G}{3} \right)$$

O que é justamente a equação de um MHS: $a = -\omega^2 x$. Daí:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{GM}{R^3} + \frac{16\pi\rho G}{3} \right)}}$$

Grade de Correção (25 pontos)

- + 2 Encontrar a expressão para a força gravitacional $F(r)$
- + 2 Aplicar $r = R + x$, com $|x| \ll R$
- + 3 Substituir $r = R + x$ na expressão de $F(r)$ e utilizar a aproximação binomial para chegar em uma força na forma linear $ax + b$ corretamente
- + 2 Chegar em $F = ma - mr\omega^2$
- + 4 Perceber que $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3} + \frac{4\pi\rho G}{3}}$
- + 5 Aplicar a conservação do momento angular e aproximação binomial, chegando em uma expressão linear para ω
- + 5 Substituir ω na equação $F = ma - mr\omega^2$, desprezando termos com x em ordem maior que 1 para chegar em $F = -kx$

+ 2 Encontrar o período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3} + \frac{16\pi\rho G}{3}}}$

8. Jan e o Caminho de Leite (40 pontos)

Ao longo de mais ou menos oito décadas, diversos astrônomos se dedicam ao estudo das características de nossa própria galáxia. Em especial, à determinação da massa da Via Láctea, que foi um problema que trouxe reflexões a respeito de sua morfologia e composição, impulsionando pesquisas em nossa vizinhança cósmica. Em 1927, o astrônomo Jan Oort foi o pioneiro na formulação de um modelo para descrição da dinâmica galáctica, provando não apenas que nossa galáxia rotaciona, mas que seu movimento é diferencial, ou seja, análogo ao de um fluido rotacionando.

Ao longo desta questão, iremos explorar de maneira intuitiva e divertida algumas ideias por trás do trabalho de Oort. Para isso, iremos considerar que as camadas paralelas ao plano da Via Láctea estão em equilíbrio hidrostático e que o Sol e sua vizinhança ($d \ll r_0$) estão em órbita circular em torno do centro galáctico.

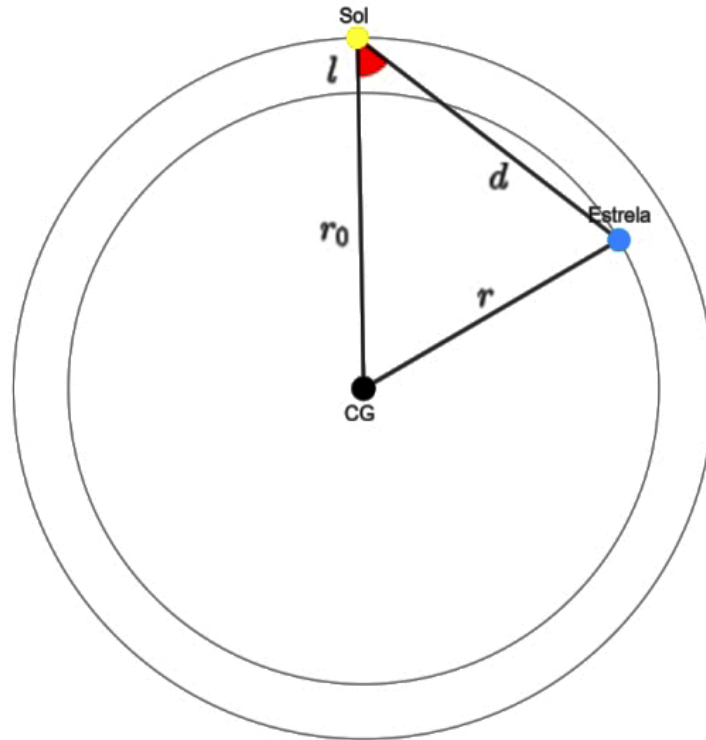


Figura 2: Esquematização fora de escala da geometria proposta.

- (a) **(10 pontos)** Escreva a velocidade relativa de uma estrela qualquer da vizinhança solar em relação ao Sol (componentes radial, v_{rad} e tangencial v_{tan}), em função da velocidade angular da estrela (ω) e do Sol (ω_0), das distâncias do Sol (r_0) e ao centro galáctico (CG), da estrela ao Sol e da longitude galáctica da estrela (l).
- (b) Agora, vamos determinar as constantes de Oort A e B , relacionadas à velocidade radial e tangencial da estrela observada no referencial do Sol, respectivamente. Dessa forma, considere pequenas variações na distância da estrela ao centro galáctico, Δr , e que a velocidade angular das estrelas da vizinhança solar varie linearmente com r em em torno dos parâmetros solares (r_0, ω_0) até (r, ω) , onde ω_0 é a velocidade angular do Sol em relação ao CG.
- I. **(5 pontos)** Mostre que a velocidade radial da estrela em relação ao Sol pode ser escrita como $v_r = A d \sin 2l$ e, a partir disso, determine A .
 - II. **(5 pontos)** Mostre que a velocidade tangencial em relação ao Sol pode ser escrita como $v_\theta = v_r \cot 2l + B d$ e, a partir disso, determine B .
- (c) **(10 pontos)** Com o modelo desenvolvido até aqui, mostre que:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} - \frac{\Delta v}{\Delta r} \right) \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} + \frac{\Delta v}{\Delta r} \right)$$

- (d) **(5 pontos)** Com base nas ideias trabalhadas, responda verdadeiro (V) ou falso (F) para as sentenças abaixo. Justifique.
- I. A e B podem ser definidos em qualquer estrela da galáxia.
 - II. A descreve um efeito de vorticidade, enquanto B descreve o cisalhamento no disco galáctico nas proximidades do Sol.
 - III. As constantes de Oort podem ser trabalhadas com diferentes modelos orbitais de gases e estrelas em torno do CG.

- IV. O método desenvolvido até aqui pode definir globalmente as constantes de Oort dada uma estrela de referência.
- V. Os efeitos de braços espirais e barras da galáxia são desprezados ao não assumirmos um potencial gravitacional axissimétrico.
- (e) **(5 pontos)** O desenvolvimento cauteloso do modelo de Oort nos permite encontrar a densidade do disco galático. Contudo, regimentos hierárquicos levam esse importantíssimo desenvolvimento para fora do nosso escopo. Então, escreva a densidade do disco galático e as constantes de Oort em função da velocidade angular do Sol ω_0 . Para isso, considere o resultado encontrado por Jan Oort:

$$\rho_0 = \frac{A^2 - B^2}{2\pi G}.$$

Solução:

(a) Inicialmente, atente-se para geometria da situação proposta.

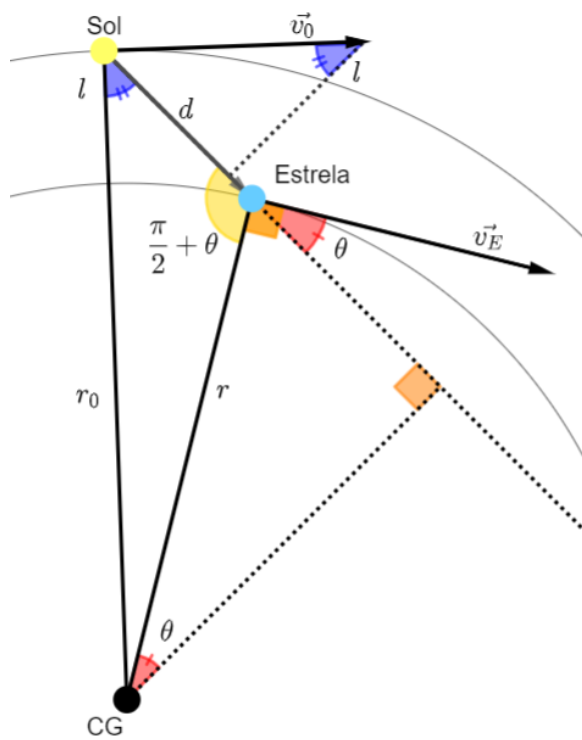


Figura 3: Diagrama do Sol e uma estrela de sua vizinhança em órbitas circulares em torno do centro galáctico.

De imediato, podemos escrever a velocidade em termos das componentes em relação à linha de visada do Sol, que é paralela à distância Sol - Estrela.

$$\vec{v} = \vec{v}_E - \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = (v_{E,r} - v_{0,r})\hat{r} + (v_{E,\theta} - v_{0,\theta})\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = (v_E \cos \theta - v_0 \sin l)\hat{r} + (v_E \sin \theta - v_0 \cos l)\hat{\theta} \quad \text{I}$$

Para eliminar o ângulo entre a linha de visada e \vec{v}_E , basta aplicarmos a lei dos senos e observarmos o triângulo formado entre o pé da projeção do CG no campo de visão, a Estrela e o Sol.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{r_0} = \frac{\sin l}{r}$$

$$r \sin \theta = r_0 \cos l - d$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{r_0}{r} \sin l \quad \text{II}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{r_0 \cos l - d}{r} \quad \text{III}$$

Substituindo II e III na expressão I e escrevendo em termos de ω , ω_0 , r , r_0 e l .

$$\vec{v} = \left(v_E \frac{r_0}{r} \sin l - v_0 \sin l \right) \hat{r} + \left(v_E \frac{r_0 \cos l - d}{r} - v_0 \cos l \right) \hat{\theta}$$

$$\vec{v} = (\omega r_0 \sin l - \omega_0 r_0 \sin l) \hat{r} + [\omega(r_0 \cos l - d) - \omega_0 r_0 \cos l] \hat{\theta}$$

$$\therefore \vec{v} = [(\omega - \omega_0)r_0 \sin l] \hat{r} + [(\omega - \omega_0)r_0 \cos l - \omega d] \hat{\theta} \quad \text{IV}$$

(b) I. Com a expressão obtida no item anterior (IV), temos:

$$v_r = (\omega - \omega_0)r_0 \sin l.$$

Usando o fato de ω ser linear e que nas vizinhanças solares $d \ll r_0$.

$$\omega - \omega_0 = \frac{\Delta\omega}{\Delta r}(r - r_0)$$

$$r - r_0 \approx -d \cos l \quad (d \ll r_0) \quad \text{V}$$

$$\omega - \omega_0 = -\frac{\Delta\omega}{\Delta r} d \cos l$$

$$v_r = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0 d \sin 2l \quad \text{VI}$$

De imediato, $A = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0$ VII.

$$\therefore v_r = Ad \sin 2l \quad \text{Q.E.D.}$$

II. Com a expressão obtida no item anterior (V), temos:

$$v_\theta = (\omega - \omega_0)r_0 \cos l - \omega d$$

Usando o fato de ω ser linear e que nas vizinhanças solares $d \ll r_0$, aplicamos os mesmos resultados para velocidade radial.

$$v_\theta = -\frac{\Delta w}{\Delta r} r_0 d \cos^2(l) - \omega d$$

$$v_\theta = -\frac{\Delta w}{\Delta r} r_0 d \left(\frac{1 + \cos(2l)}{2} \right) - \omega d$$

$$v_\theta = -\frac{1}{2} \frac{\Delta w}{\Delta r} r_0 d \cos(2l) - \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta w}{\Delta r} r_0 d + \omega \right) d$$

De imediato, $B = -\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta w}{\Delta r} r_0 + \omega \right)$ VIII.

$$\therefore v_\theta = Ad \cos(2l) + Bd \quad \text{Q.E.D.}$$

(c) Para obtermos A e B em função de Δv , podemos olhar para o modelo linear,

$$\omega - \omega_0 = \frac{\Delta\omega}{\Delta r}(r - r_0),$$

e notar que $\omega' = \frac{v'}{r'}$.

Sendo assim, vamos manipular o coeficiente angular para escrevê-lo em função de $\frac{\Delta v}{\Delta r}$, v_0 e r_0 .

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{\frac{v}{r} - \frac{v_0}{r_0}}{r - r_0}$$

Considerando que $v = v_0 + \Delta v$ e $r = r_0 + \Delta r$, temos:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{\frac{v_0 + \Delta v}{r_0 + \Delta r} - \frac{v_0}{r_0}}{r_0 + \Delta r - r_0}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{r_0\Delta v - v_0\Delta r}{r_0^2\Delta r + r_0\Delta r^2}$$

Como Δr é muito pequeno, desprezamos o termo de segunda ordem.

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{r_0\Delta v - v_0\Delta r}{r_0^2\Delta r}$$

$$\therefore \frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{1}{r_0} \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{v_0}{r_0^2} \quad \text{IX}$$

Substituindo IX em VIII e VII.

$$A = -\frac{1}{2}r_0 \left(\frac{1}{r_0} \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{v_0}{r_0^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} - \frac{\Delta v}{\Delta r} \right)$$

Lembre que $\omega = \frac{\Delta\omega}{\Delta r}(r - r_0) + \omega_0$, logo:

$$B = - \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0 + \omega \right)$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0 - \omega_0 - (r - r_0) \frac{\Delta\omega}{\Delta r}$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0 - \omega_0 - r \frac{\Delta\omega}{\Delta r}$$

$$B = \left(\frac{1}{2} r_0 - r \right) \frac{\Delta\omega}{\Delta r} - \omega_0$$

$$B = \left(-\frac{1}{2} r_0 - \Delta r \right) \left(-\frac{v_0}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\Delta v}{\Delta r} \right) - \omega_0$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{v_0\Delta r - r_0\Delta v}{r_0^2}$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{v_0}{r_0} \left(\frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta r}{r} \right)$$

Como as variações são muito pequenas, $\frac{\Delta v}{v} \ll 1$ e $\frac{\Delta r}{r} \ll 1$, possibilitando chegar ao resultado desejado.

$$\therefore A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} - \frac{\Delta v}{\Delta r} \right) \quad e \quad B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} + \frac{\Delta v}{\Delta r} \right) \quad \text{Q.E.D}$$

- (d) I. Falso. Pois ambas as constantes foram definidas para estrelas no disco galático.
 II. Falso. O efeito é contrário, B descreve a vorticidade e A o cisalhamento do disco.
 III. Verdadeiro. O modelo desenvolvido por Oort é puramente cinético, ou seja, não assume nada a respeito da forma dinâmica de obter v . Além disso, no modelo desenvolvido na questão, outros modelos orbitais também podem ser descritos, pois os pontos da órbita podem ser tratados por órbitas virtuais circulares.

IV. Falso. O modelo de Oort se apoia em uma descrição local da galáxia.

V. Verdadeiro. Pois considerar uma distribuição de massa não homogênea que satisfaça tal condição demandaria uma maior quantidade de vínculos ao nosso problema.

(e) Para encontrar a densidade ρ no modelo descrito, começamos determinando A e B para órbitas circulares em torno de CG.

Pelo item c,

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_o}{r_0} - \frac{\Delta v}{\Delta r} \right)$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_o}{r_0} + \frac{\Delta v}{\Delta r} \right)$$

Vamos calcular $\frac{\Delta v}{\Delta r}$ na condição proposta.

$$v = \sqrt{\frac{GM_G}{r}}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\sqrt{\frac{GM_G}{r}} - \sqrt{\frac{GM_G}{r_0}}}{r - r_0}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{(\sqrt{r_0} - \sqrt{r})\sqrt{GM_G}}{(r - r_0)\sqrt{r_0 r}}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{(\sqrt{r_0} - \sqrt{r})\sqrt{GM_G}}{(\sqrt{r_0} - \sqrt{r})(\sqrt{r_0} + \sqrt{r})\sqrt{r_0 r}}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\sqrt{GM_G}}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{r})\sqrt{r_0 r}}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\sqrt{GM_G}}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_0 + \Delta r})\sqrt{r_0(r_0 + \Delta r)}}$$

Eliminando os termos muito pequenos, ou seja, que multiplicam Δr .

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\sqrt{GM_G}}{2r_0\sqrt{r_0}} \quad \text{X}$$

$$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{1}{2} \frac{v_0}{r_0} \quad \text{XI}$$

Substituindo nas expressões para A e B ,

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} - \frac{\Delta v}{\Delta r} \right) = \frac{3}{4} \frac{v_0}{r_0} \quad \text{XII}$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{r_0} + \frac{\Delta v}{\Delta r} \right) = -\frac{1}{4} \frac{v_0}{r_0} \quad \text{XIII.}$$

Substituindo na expressão fornecida para a densidade de matéria da galáxia,

$$\rho_0 = \frac{A^2 - B^2}{2\pi G} = \frac{\omega_0^2}{4\pi G}$$

Grade de Correção (40 pontos)

Item a) (10 pontos):

- + 3 desenho da geometria do problema
- + 1 $v_{rad} = v_E \cos \theta - v_0 \sin l$
- + 1 $v_{tan} = v_E \sin \theta - v_0 \cos l$
- + 1 geometria para chegar em $\cos \theta = \frac{r_0}{r} \sin l$
- + 1 geometria para chegar em $\sin \theta = \frac{r_0 \cos l - d}{r}$
- + 1 desenvolvimento matemático, fazendo as substituições $\omega = \frac{v}{r}$ e $\omega = \frac{v-0}{r_0}$
- + 1 expressão final correta $v_{rad} = (\omega - \omega_0)r_0 \sin l$
- + 1 expressão final correta $v_{tan} = (\omega - \omega_0)r_0 \cos l - \omega d$

Item b) (10 pontos):

- + 3 usar a relação $\omega - \omega_0 = \frac{\Delta\omega}{\delta r}(r - r_0)$
- + 3 usar a relação $r - r_0 \approx -d \cos l$ para $d \ll r_0$
- + 1 relação de ângulo duplo para seno
- + 1 relação de ângulo duplo para cotangente
- + 1 chegar em $A = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0$
- + 1 chegar em $B = -\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta r} r_0 + \omega\right)$

item c) (10 pontos):

- + 2 Expressar $\frac{\Delta\omega}{\delta r}$ em função de r , r_0 , v e v_0
- + 2 considerar $v = v_0 + \Delta v$ e $r = r_0 + \Delta r$, com $|\Delta v| < v_0$ e $|\Delta r| < r_0$
- + 2 chegar na expressão $\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{1}{r_0} \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{v_0}{r_0^2}$
- + 2 aproximações de que $\frac{\Delta v}{v} \ll 1$ e $\frac{\Delta r}{r} \ll 1$
- + 1 desenvolvimento matemático coerente para chegar na expressão de A .
- + 1 desenvolvimento matemático coerente para chegar na expressão de B .

item d) (5 pontos)

- + 1 afirmação I dita como falsa, com justificativa plausível
- + 1 afirmação II dita como falsa, com justificativa plausível
- + 1 afirmação III dita como verdadeira, com justificativa plausível
- + 1 afirmação IV dita como falsa, com justificativa plausível
- + 1 afirmação V dita como verdadeira, com justificativa plausível

item e) (5 pontos)

- + 0.5 expressar a velocidade da estrela como $v = \sqrt{\frac{GM_G}{r}}$
- + 1 adotar $r = r_0 + \Delta r$ para determinar $\frac{\Delta v}{\Delta r}$
- + 1 desenvolvimento algébrico e desprezar termos muito pequenos
- + 1 chegar em $\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{1}{2} \frac{v_0}{r_0}$
- + 0.5 chegar em $A = \frac{3}{4} \frac{v_0}{r_0}$
- + 0.5 chegar em $B = \frac{1}{4} \frac{v_0}{r_0}$
- + 0.5 substituir na expressão fornecida e determinar $\rho_0 = \frac{\omega_0^2}{4\pi G}$

Questões Longas

9. Davi e a Pipa Mágica (70 pontos)

Davi está amando seu tempo no curso de física da USP ($\varphi_D = 23,5614^\circ S$, $\lambda_D = 46,7308^\circ O$), principalmente as aulas de mecânica newtoniana. Andando perto do Conjunto Residencial da USP, Davi encontrou Gohu, que estava tentando vender uma suposta pipa mágica, estranhamente grande e pesada, capaz de fazer um movimento perpétuo que não é afetado por forças externas. Obviamente, Davi não acreditou em Gohu, mas propôs um experimento para garantir que a pipa mágica é uma farsa (ou falhar miseravelmente). Para isso, contou com seus amigos Jurgão, que está em São José dos Campos ($\varphi_J = 23,1688^\circ S$, $\lambda_J = 45,0711^\circ O$), e Odraude, que está na Unicamp ($\varphi_O = 22,8184^\circ S$, $\lambda_O = 47,0647^\circ O$). Ambos estão em seus quartos, a uma altura $h = 500$ m do solo. Para esta questão, considere:

- i) A terra é esférica (não plana), mas não gira;
- ii) Todos os personagens conseguem enxergar a pipa e medir sua posição a todo instante;
- iii) Para um observador na Terra, o azimute do ponto cardeal norte é $A = 0^\circ$ e cresce no sentido leste.

Parte A - Modelagem Matemática Ideal

Suponha que, a partir da posição de Gohu e Davi, a pipa mágica parta com uma velocidade constante $v = 25$ m/s e altura constante $h = 500$ m em relação ao solo, tendo destino final nas mesmas coordenadas do quarto de Odraude. Para chegar lá, a pipa deve fazer a sucessão de dois movimentos:

- i) Chegar no arco de círculo maior que liga Odraude e Jurgão no menor tempo possível $t = t_1$;
- ii) Se dirigir para onde Jurgão está.

Sabendo disso:

- a) **(15 pontos)** Encontre o valor de t_1 em minutos.
- b) **(10 pontos)** Encontre uma expressão que diga como Jurgão supostamente enxergará o azimute da pipa (em função apenas do tempo t), para $t > t_1$.
- c) **(20 pontos)** Encontre uma expressão que diga como Jurgão supostamente enxergará o azimute da pipa (em função apenas do tempo t), para $t < t_1$.

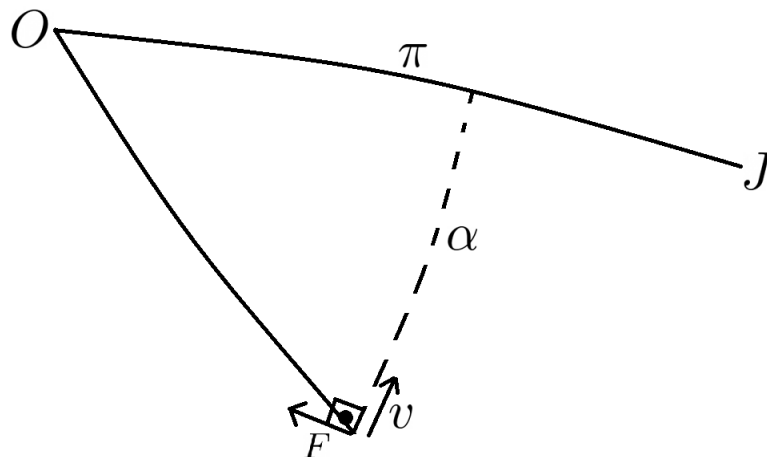
Parte B - Encarando a Realidade

Seja π o plano que contém o círculo maior em que estão Odraude e Jurgão e α o plano que contém a trajetória que a pipa faria idealmente enquanto $t < t_1$.

Quando o experimento foi iniciado, Davi escutou o barulho de motores, percebendo que a suposta pipa é, na verdade, um drone! Usando suas turbinas, o drone-pipa subiu para a altura $h = 500$ m. Ainda assim, logo quando começou a se mover com sua velocidade de módulo constante $v = 25$ m/s na direção prevista (sempre no plano α e perpendicular à vertical do drone), o drone-pipa começou a também ir para o lado por causa de um vento repentino!

Ele estava sendo empurrado pelo vento com uma força de módulo constante. Esta força sempre está paralela ao plano π e perpendicular à vertical do drone-pipa. Vale notar que ele manteve seu movimento com altura constante. Com a ação do vento, a pipa foi parar onde Odraude estava!

Na imagem abaixo, O representa Odraude, J representa Jurgão, D representa a posição de Davi, onde o drone-pipa inicia seu movimento. O círculo máximo pontilhado representa a trajetória que o drone-pipa faria em $t < t_1$ e a curva que liga D à O (que não é, necessariamente, um arco de círculo máximo) é a trajetória real do drone-pipa. Perceba a velocidade inicial $v = 25$ m/s e a força F do vento.

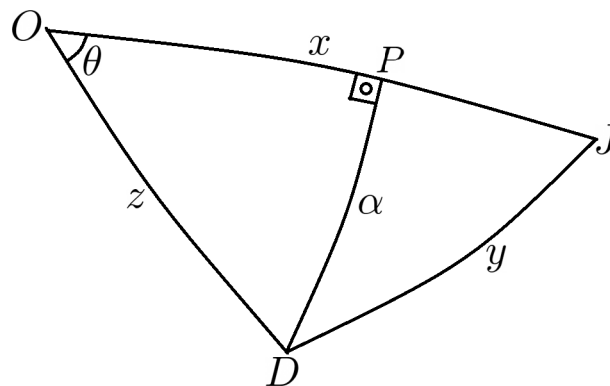


d) (25 pontos) Expresse como Jurgão aproximadamente enxergou o azimute da pipa em função apenas do tempo t .

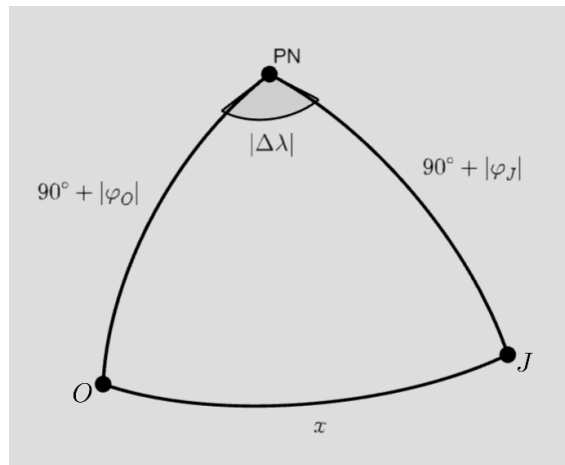
Dica: Se necessário, desenhe um diagrama de corpo livre para o drone-pipa, utilizando triângulos esféricos para descrever a direção e sentido das forças.

Solução:

a) Sejam O , D , J , P e PN pontos que representem, respectivamente, as posições de Odraude, Davi, Jurgão, da pipa quando $t = t_1$ e o Polo Norte. Daí, pode-se representar:



Perceba que α é a distância angular que a pipa deverá percorrer, com raio $R + h$, em que R é o raio da Terra. Pode-se prosseguir para encontrar-se as distâncias angulares x , y e z aplicando a lei dos cossenos no triângulo esférico que liga o polo norte e os respectivos pares de pontos. Por exemplo:



Com isso:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sin |\varphi_O| \sin |\varphi_J| + \cos |\varphi_O| \cos |\varphi_J| \cos(\lambda_O - \lambda_J) \\ \cos y &= \sin |\varphi_J| \sin |\varphi_D| + \cos |\varphi_J| \cos |\varphi_D| \cos(\lambda_J - \lambda_D) \\ \cos z &= \sin |\varphi_D| \sin |\varphi_O| + \cos |\varphi_D| \cos |\varphi_O| \cos(\lambda_D - \lambda_O)\end{aligned}$$

$$x = 1,8683^\circ$$

$$y = 1,5734^\circ$$

$$z = 0,8039^\circ$$

Logo, observando a figura 1, pode-se calcular θ com a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned}\cos y &= \cos x \cos z + \sin x \sin z \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{\cos y - \cos x \cos z}{\sin x \sin z} \\ \theta &= 56,429^\circ\end{aligned}$$

Por fim, aplicando a lei dos senos no triângulo esférico que liga O , D e o ponto em que a pipa estará quando $t = t_1$, tem-se:

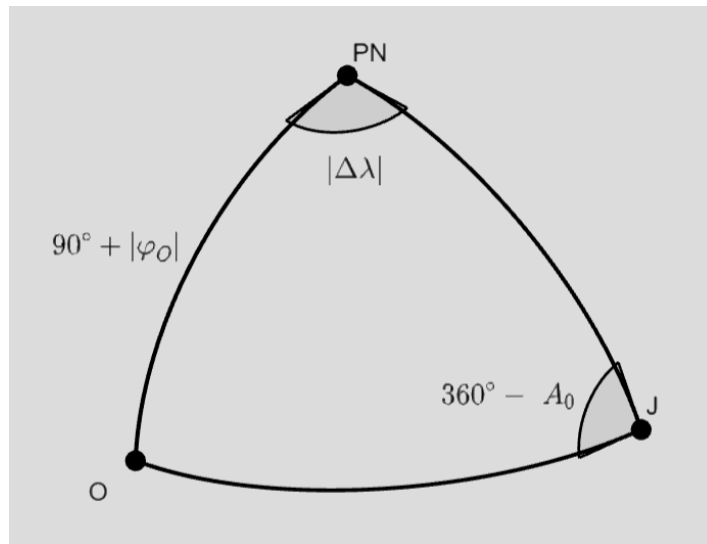
$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{\sin 90^\circ} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \\ \alpha &= 0,6698^\circ = 0,0117 \text{ rad}\end{aligned}$$

Daí, fica claro como calcular t_1 :

$$t_1 = \frac{(R + h)\alpha}{v}$$

$t_1 \approx 49,8 \text{ minutos}$

- b) Perceba que, naturalmente, o azimute da pipa será constante para Odraude, sendo $A = A_O$. Isso porque, quando $t > t_1$, a pipa se moverá num arco de circunferência que tem como ponto final a própria localização de Odraude. O triângulo abaixo evidencia isto bem:

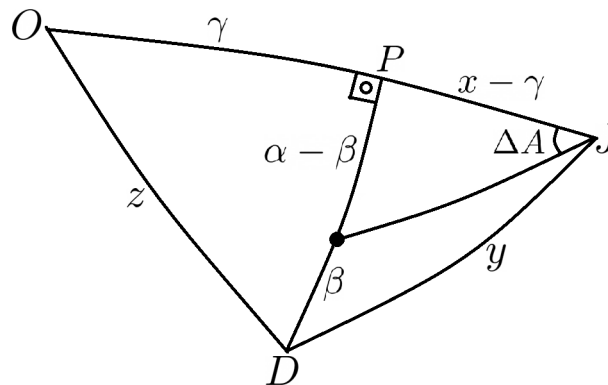


A partir disto, basta aplicar uma lei dos senos:

$$\sin A_0 = -\frac{\sin |\lambda_O - \lambda_J|}{\sin x} \cos |\varphi_J|$$

$$A_0 = 280,42^\circ$$

- c) Suponha que a pipa esteja em um ponto qualquer de sua trajetória que tenha uma distância angular β em relação à D , a posição de Davi e Gohu. Nesse instante, o azimute da pipa observado por Odraude será da forma $A = A_0 + \Delta A$, em que ΔA aparece na geometria abaixo:



Aplicando uma lei dos quatro elementos no triângulo PDO :

$$\cot \alpha \sin \gamma = \cot \theta \sin 90^\circ + \cos \gamma \cos 90^\circ$$

$$\cot \alpha \sin \gamma = \cot \theta$$

$$\gamma = 0,4446^\circ$$

Além disso, perceba que:

$$\beta = \frac{vt}{R+h}$$

$$\beta = 3,92 \cdot 10^{-6} \cdot t$$

Aplicando uma segunda lei dos quatro elementos no triângulo que tem por vértices J , P e a pipa:

$$\cot(\alpha - \beta) \sin(x - \gamma) = \cot \Delta A \sin 90^\circ + \cos(x - \gamma) \cos 90^\circ$$

$$\cot \Delta A = \cot(\alpha - \beta) \sin(x - \gamma)$$

$$\Delta A = \tan^{-1} \left(40,25 \tan \left(0,6698^\circ - \frac{3,92 \cdot 10^{-6} \cdot t \cdot 180^\circ}{\pi} \right) \right)$$

$$A = 280,42^\circ - \tan^{-1} (40,25 \tan (0,6698^\circ - 2,246 \cdot 10^{-4} \cdot t))$$

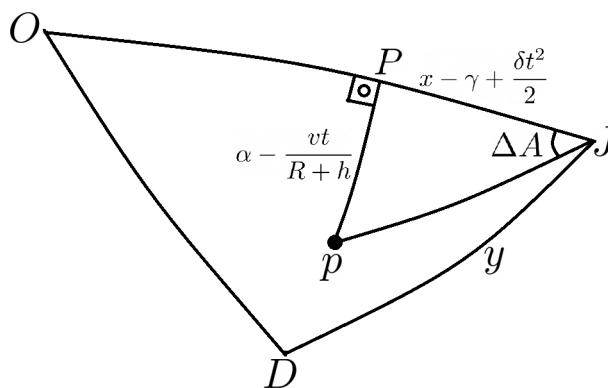
- d) Enxergue o plano que contém a trajetória ideal da pipa como sendo o plano α . Pela descrição da força do vento no enunciado, podemos enxergar o movimento da pipa como sendo a composição de um movimento circular uniforme de raio $R + h$ em α e de um movimento circular uniformemente variado de mesmo raio no plano π perpendicular a α que contém o arco que liga Odraude ao Jurgão. Daí, fica claro então que, para que a pipa chegue em Odraude no mesmo tempo t_1 , sendo δ a aceleração angular constante no movimento em π :

$$\gamma = \frac{\delta t_1^2}{2}$$

$$\delta = \frac{2\gamma}{t_1^2}$$

$$\delta = 9,959 \cdot 10^{-8} \text{ o/s}^2$$

Vejamos, então, a pipa representada pelo ponto p em um tempo t qualquer:



Aplicando a Lei dos Quatro Elementos:

$$\cot\left(\alpha - \frac{vt}{R+h}\right) \sin\left(x - \gamma + \frac{\delta t^2}{2}\right) = \cot \Delta A \sin 90^\circ + \cos 90^\circ \cos\left(x - \gamma + \frac{\delta t^2}{2}\right)$$

$$\Delta A = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\alpha - \frac{vt}{R+h}\right)}{\sin\left(x - \gamma + \frac{\delta t^2}{2}\right)}\right)$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\Delta A = \tan^{-1}\left(\frac{\tan(0,6698^\circ - 2,248^\circ \cdot 10^{-4} t)}{\sin(1,4237^\circ + 4,9795^\circ \cdot 10^{-8} t^2)}\right)$$

$$A = 280,42^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\tan(0,6698^\circ - 2,248^\circ \cdot 10^{-4} t)}{\sin(1,4237^\circ + 4,9795^\circ \cdot 10^{-8} t^2)}\right)$$

Grade de Correção

Item (a)

15 pontos

+ 3.6 Argumentar que, como t_1 deve ser mínimo, α deve ser mínimo e o ângulo no vértice P do triângulo OPD deve ser reto.

+ 1.2 Encontrar $x = 1,8683^\circ$

+ 1.2 Encontrar $y = 1,5734^\circ$

+ 1.2 Encontrar $z = 0,8039^\circ$

+ 1.8 Aplicar Lei dos Cossenos para encontrar θ

+ 1.2 Encontrar $\theta = 56,429^\circ$

+ 1.8 Aplicar Lei dos Senos para encontrar α

+ 1.2 Encontrar $\alpha = 0,6698^\circ$

+ 1.8 Encontrar $t = 49,8$ minutos

Item (b)

10 pontos

+ 5 Desenhar o triângulo esférico correto que contenha A_0

+ 2.5 Aplicar Lei dos Senos

+ 2.5 Encontrar $A_0 = 280,42^\circ$

Item (c)

20 pontos

+ 8 Fazer um desenho esquemático que contenha todos os elementos necessários: ΔA , β , γ

+ 3 Aplicar Lei dos Quatro Elementos para achar γ

+ 2 Encontrar $\gamma = 0,4446^\circ$

+ 1 Encontrar $\beta = 3,92 \cdot 10^{-6} \cdot t$

+ 6 Derivar expressão para ΔA usando Lei dos Quatro Elementos

Item (d)

25 pontos

+ 6 Enxergar a composição de um MCU no plano α e um MCUV no plano π

+ 3 Encontrar a aceleração angular $\delta = 9,959 \cdot 10^{-8} \text{ o/s}^2$

+ 6 Fazer um desenho completo da situação

+ 5 Aplicar Lei dos Quatro Elementos para encontrar ΔA

+ 5 Derivar expressão para A

10. Ruído Misterioso (80 pontos)

As Ejeções de Massa Coronal (EMC) são grandes erupções de plasma ocasionadas por alterações e perturbações locais no campo magnético coronal, caracterizadas pela ejeção de gases da coroa solar em altíssimas temperaturas. Quando essa matéria expelida se espalha pelo Sistema Solar, ela é chamada

de tempestade solar. Esse evento representa uma grande preocupação para nós, pois sua interação com o campo magnético terrestre pode ocasionar intensas tempestades geomagnéticas, o que seria extremamente prejudicial aos sistemas de comunicação e distribuição elétrica.

Visando prever esses eventos, a Heliofísica dispõe de diversos métodos de observação solar para prever a possibilidade de ocorrência de uma tempestade geomagnética. Dentre eles, temos a observação direta com sondas, como o STEREO A (Solar TERrestrial RELations Observatory), acoplado com diversos tipos de detectores CCD. Observe abaixo um registro de frames de uma EMC feito pelo detector da STEREO A.

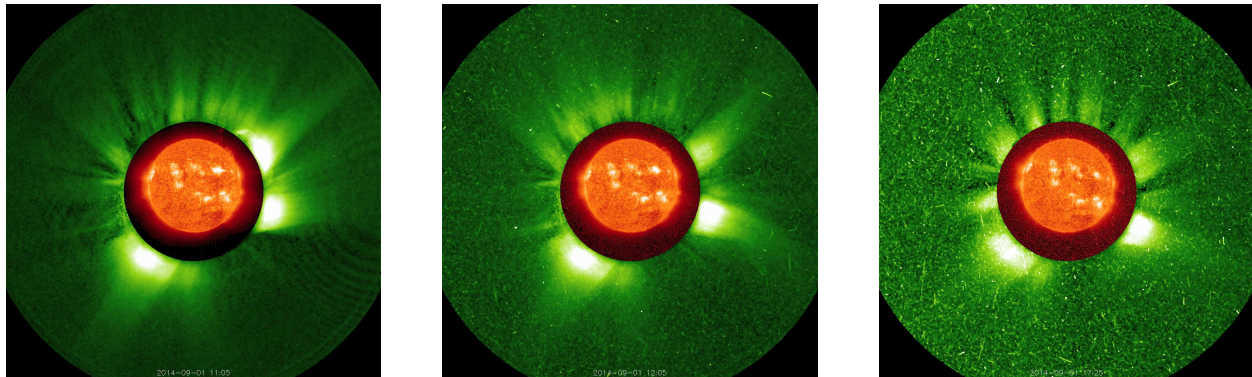
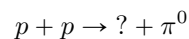


Figura 4: Frames de uma EMC registrada pela STEREO A no dia 1 de setembro de 2014. Partindo da esquerda, temos um frame do início da EMC, um obtido uma hora depois e outro de 6 horas depois. No decorrer do tempo, a imagem começa a ser preenchida por grânulos brancos, indicando regiões de pixels saturados.

Dados: $m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}/c^2$ e $m_p = 938,27 \text{ MeV}/c^2$

$$A_{max} = \arccos\left(-\frac{2p_{\pi^0}^2}{c^2 m_p^2}\right)$$

- (5 pontos)** Explique sucintamente por que os pixels está granulando com pixels saturados e qual o tipo de partícula predominantemente responsável por esse efeito.
- (10 pontos)** Em meio a tempestade de partículas ejetadas, diversas interações entre partículas ocorrem. Dentre elas, uma interação muito interessante, observada por um referencial inercial, é a de um próton de alta energia com um próton em repouso, criando um méson π^0 entre outras partículas, por interação nuclear forte. Suponha que o π^0 segue na mesma direção da velocidade inicial do próton e que a quantidade de partículas gerada é a mínima suficiente para obedecer às condições de contorno e as leis físicas que envolvem o problema.



Escreva a interação completa e a esquematize.

- (25 pontos)** Por mais que não seja uma partícula fundamental, o méson π^0 é extremamente importante para a física, em estudos como quebras espontâneas de simetria, simetrias isospin, decaimentos anômalos e outras coisas divertidíssimas. Sendo assim, vamos supor que a STEREO A fosse equipada com um detector na faixa dos raios γ de altas energias. Suponha a ocorrência de um decaimento anômalo no qual um méson π_0 gera dois fótons de mesma frequência, $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$, conhecido por anomalia de Adler-Bell-Jackiw. Determine a velocidade v_{π^0} do pión em função da frequência ν dos fótons em seu referencial, além de constantes físicas. Para isso suponha que os fótons são detectados radialmente e, portanto, apenas efeitos relativísticos radiais precisam ser considerados.

- (d) **(25 pontos)** A compreensão da natureza fundamental da matéria depende fortemente dos estudos em torno das interações entre partículas. Para a compreensão desses fenômenos em laboratório, feixes de partículas são acelerados em velocidade próximas da velocidade para gerar colisões semelhantes as que ocorrem no espaço. Sendo assim, determine a velocidade do próton do item anterior em termos da velocidade da luz c , do momento do pión p_{π^0} , da amplitude de espalhamento A (ângulo de abertura das partículas geradas), da frequência da radiação detectada ν e de constantes fundamentais.
- (e) **(15 pontos)** Mostre que a amplitude de espalhamento máxima A_{max} da colisão é dada pelo resultado abaixo e encontre a velocidade limite do π^0 associada a esse valor.

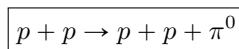
$$A_{max} = \arccos\left(-\frac{2p_{\pi^0}^2}{c^2 m_p^2}\right)$$

Solução:

- (a) Observando as imagens, é perceptível o aumento de pontos de saturação, causando um efeito de granulação na imagem. Esse efeito, conhecido por "tempestade de neve", é causado pela incidência de partículas de altas energias, em especial **prótons**, no detector da sonda. Essa tempestade satura as regiões de incidência no plano de leitura, porque os detectores não foram calibrados para detecções de tamanha energia.
- (b) Observe que o próton é um bárion carregado, enquanto o π^0 é um méson neutro. Logo, utilizaremos as leis de conservação ligadas aos números quânticos de bárion, carga elétrica e spin.

Partícula	Carga Elétrica	Número Bariônico	Spin
p	+1	+1	$\frac{1}{2}$
π^0	0	0	0

Então, perceba que o conjunto de partículas deve ter carga elétrica +2 e número bariônico +2. Sendo assim, ao menos dois bárions devem ser formados. Se cada bárion tiver carga +1 e se a geometria do problema for adequada para conservação de energia e momento, então duas partículas será o número mínimo. Nessa situação, as demais partículas são dois prótons.



Diante do exposto e as informações do enunciado, podemos esquematizar a colisão.

Curiosidade: a rigor, outras partículas podem satisfazer a condição, já que não foi predefinida a energia do próton em movimento. Conservando diretamente os números quânticos, vemos que os pares $\Sigma^+ + \Sigma^+$, $\Sigma^+ + \Xi^+$ ou $\Xi^+ + \Xi^+$, por exemplo, são possibilidades. Contudo, esses decaimentos estranhos são pouco prováveis ou proibidos por efeitos mais complexos da QCD.

- (c) Vamos escrever a conservação da energia depois do decaimento, fazendo $c = 1$. No referencial do pión, essa equação se torna:

$$2E_\gamma = m_{\pi^0}$$

Essa equação é válida no referencial do pión. Note que a energia do fóton utilizada na equação de conservação no referencial do pión precisa ser transformada no referencial do detector. Logo, com E sendo a energia no referencial do detector e E' no referencial do pión:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} E' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -v_{\pi^0} \gamma \\ -v_{\pi^0} \gamma & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma E(1 - v_{\pi^0}) \\ \gamma E(1 - v_{\pi^0}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Esse resultado poderia ter sido invocado diretamente pelo efeito Doppler, mas por boa prática, apresentamos a demonstração. Então, $E' = \gamma E(1 - v_{\pi^0})$. Manipulando esse resultado e substituindo na equação de conservação.

$$E'_\gamma = \frac{1 - v_{\pi^0}}{\sqrt{1 - v_{\pi^0}^2}} E_\gamma$$

$$E'_\gamma = \sqrt{\frac{1 - v_{\pi^0}}{1 + v_{\pi^0}}} E_\gamma$$

Então:

$$2E'_\gamma = m_{\pi^0}$$

$$2\sqrt{\frac{1 - v_{\pi^0}}{1 + v_{\pi^0}}} E_\gamma = m_{\pi^0}$$

$$\frac{1 - v_{\pi^0}}{1 + v_{\pi^0}} = \left(\frac{m_{\pi^0}}{2h\nu}\right)^2$$

$$\therefore v_{\pi^0} = \frac{(2h\nu)^2 - m_{\pi^0}^2}{(2h\nu)^2 + m_{\pi^0}^2} c$$

- (d) Para escrevermos a velocidade do próton em função da frequência da radiação detectada, usaremos a conservação da energia. Pela conservação da energia, derivada do 4-vetor momento-energia:

$$E_0^2 = E_f^2$$

$$p_{p,i}^2 + 2m_p^2 = 2(p_{p,f}^2 + m_p^2) + p_{\pi^0}^2 + m_{\pi^0}^2$$

Pela conservação do momento, temos:

$$p_{p,i} = 2p_{p,f} \cos(\phi) + p_{\pi^0}$$

Então,

$$\begin{aligned} (2p_{p,f} \cos(\phi) + p_{\pi^0})^2 &= 2p_{p,f}^2 + p_{\pi^0}^2 + m_{\pi^0}^2 \\ 4p_{p,f}^2 \cos^2(\phi) + 4p_{\pi^0} p_{p,f} \cos(\phi) + p_{\pi^0}^2 &= 2p_{p,f}^2 + p_{\pi^0}^2 + m_{\pi^0}^2 \\ 4p_{p,f}^2 \cos^2(\phi) + 4p_{\pi^0} p_{p,f} \cos(\phi) &= 2p_{p,f}^2 + m_{\pi^0}^2 \\ p_{p,f}^2 (4 \cos^2(\phi) - 2) + 4p_{\pi^0} p_{p,f} \cos(\phi) - m_{\pi^0}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo para $p_{p,f}$:

$$p_{p,f} = \frac{-4p_{\pi^0} \pm [16p_{\pi^0}^2 + 4(4 \cos(\phi)^2 - 2)m_p^2]^{\frac{1}{2}}}{2(4 \cos(\phi)^2 - 2)}$$

Lembre que $p_{p,f}$ é o módulo de um vetor e, portanto, um valor positivo e que pela conservação do momento temos a restrição $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Logo, escolhamos a raiz positiva.

$$p_{p,f} \equiv \frac{-4p_{\pi^0} + [16p_{\pi^0}^2 + 4(4 \cos(\phi)^2 - 2)m_p^2]^{\frac{1}{2}}}{2(4 \cos(\phi)^2 - 2)}$$

Agora, vamos usar a conservação da energia para relacionar a frequência da radiação detectada com a velocidade do próton. Para isso, perceba que o decaimento que sensibiliza o detector é o do π^0 , onde dois fótons são detectados.

Então, verificando a conservação da energia no decaimento $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$, temos:

$$E_{\pi_0} + T_{\pi^0} = 2E_{\gamma} = 2h\nu$$

Escrevendo a conservação da energia na primeira colisão $p + p$ e fazendo $c = 1$.

$$E_i = E_f$$

$$2m_p + T_{p,i} = 2m_p + m_{\pi^0} + 2T_{p,f} + T_{\pi^0}$$

$$T_{p,i} = 2T_{p,f} + 2h\nu$$

$$\frac{p_{p,i}^2}{m_p} = \frac{p_{p,f}^2}{m_p} + 2h\nu$$

Substituindo o resultado encontrado para $p_{p,f}$.

$$\frac{m_p v^2}{2} = \frac{1}{m_p} \left\{ \frac{-4p_{\pi^0} + [16p_{\pi^0}^2 + 4(4 \cos(\phi)^2 - 2)m_p^2]^{\frac{1}{2}}}{2(4 \cos(\phi)^2 - 2)} \right\}^2 + 2h\nu$$

Resolvendo para v_p com $2\phi = A$.

$$v_p = \left\{ \frac{2}{m_p^2} \left[\frac{-4p_{\pi^0} + \left[16p_{\pi^0}^2 + 4 \left(4 \cos \left(\frac{A}{2} \right)^2 - 2 \right) m_p^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{2 \left(4 \cos \left(\frac{A}{2} \right)^2 - 2 \right)} \right]^2 + \frac{4h\nu}{m_p} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- (e) Analisando a expressão do item anterior, é possível notar duas restrições, uma delas atrelada ao momento do π^0 . Pela coerência física da situação proposta, reinserindo o c , devemos ter:

$$16p_{\pi^0}^2 + 4(4 \cos(\phi)^2 - 2)c^2 m_p^2 \geq 0$$

$$4 \cos(\phi)^2 - 2 \geq -4 \frac{p_{\pi^0}^2}{m_p^2 c^2}$$

$$\cos(\phi)^2 \geq \frac{1}{2} - \frac{p_{\pi^0}^2}{m_p^2 c^2}$$

$$\frac{1 + \cos(2\phi)}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{p_{\pi^0}^2}{m_p^2 c^2}$$

Como ? são dois prótons seguindo a configuração descrita na figura, é perceptível que $A = 2\phi$.

$$\cos(A) \geq -\frac{2p_{\pi^0}^2}{c^2 m_p^2}$$

No caso limite de máxima abertura:

$$\therefore A_{max} = \arccos\left(-\frac{2p_{\pi^0}^2}{c^2 m_p^2}\right)$$

Por outro lado, sabemos pela conservação do momento que $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, então $A \leq \pi$. Isso nos possibilita verificar o caso limite de máxima abertura e obter o valor de p_{π^0} associado.

$$\arccos\left(-\frac{2p_{\pi^0}^2}{c^2 m_p^2}\right) \leq \pi$$

$$\frac{2p_{\pi^0}^2}{c^2 m_p^2} \geq 1$$

$$m_{\pi^0}^2 v_{\pi^0}^2 \gamma_{\pi^0}^2 \geq \frac{m_p^2 c^2}{2}$$

$$m_{\pi^0}^2 v_{\pi^0}^2 \left(1 - \frac{v_{\pi^0}^2}{c^2}\right)^{-1} \geq \frac{m_p^2 c^2}{2}$$

$$v \geq \frac{m_p}{\sqrt{2m_{\pi^0}^2 + m_p^2}} c$$

$$v_{\pi^0} \geq 0.98c$$

Portanto, conforme a demonstração, essa é a velocidade mínima que o π^0 deve ter, o que é razoável, já que o limite superior de velocidades é fixo em c .

$$\therefore v_{\pi^0} = 0.98c$$

Grade de Correção (80 pontos)**Item a) (5 pontos):**

- + 3 Identificação do próton como a partícula responsável pelo efeito
- + 2 Associação da granulação à energia do próton ser muito superior à sensibilidade do equipamento

Item b) (10 pontos):

- + 5 Identificação de um par de bárions positivamente carregados. O esperado é que seja um par de prótons.
- + 5 Esquematização correta. Deve incluir (i) A colisão inicial com um próton em repouso; (ii) A geração do méson π^0 com velocidade na mesma direção e sentido do próton original; (iii) O par de bárions gerados, respeitando a coplanaridade e a simetria do problema.

Item c) (25 pontos):

- + 5 Conservação de energia no referencial do pión
- + 10 Transformação da energia entre os referenciais ou uso imediato do Efeito Doppler Relativístico na frequência dos fótons.
- + 8 Conservação da energia no referencial do detector.
- + 2 Resposta final correta

Item d) (25 pontos):

- + 5 Conservação de energia no referencial do próton em repouso
- + 5 Conservação de momento no referencial do próton em repouso
- + 5 Expressão para o momento dos prótons formados após a colisão em função das variáveis enunciadas.
- 3 Se não justificou a escolha da raiz positiva.
- + 2.5 Conservação da energia no decaimento do pión.
- + 2.5 Substituir a energia do pión na equação de conservação da energia na colisão próton-próton.
- + 5 Resultado final correto.

Item e) (15 pontos):

- + 5 Identificar a restrição na equação da velocidade do próton.
- + 1.5 Concluir a expressão final para o ângulo de espalhamento máximo.
- + 2.5 Identificar o caso limite do ângulo de espalhamento.
- + 4 Expressão correta para velocidade do pión.
- + 2 Valor correto da velocidade do pión no caso limite.