



**PROVA TEÓRICA P2**  
**SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS**  
**OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024**

---

## Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 4 questões (totalizando 300 pontos) e tem peso 4 na composição da média final;
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requerem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Questões

### 1. Extremely Large Telescope (75 pontos)

Planejado para captar sua primeira luz em 2028, o ELT (Extremely Large Telescope) será o maior telescópio em operação no visível, contando com um espelho primário de aproximadamente 39,3 m e uma distância focal de 743,4 m, fazendo os telescópios UT, que compõem o VLT (Very Large Telescope), parecerem pequenos com seus 8,2 m de diâmetro de abertura por telescópio.

Planejando suas futuras pesquisas sobre a Galáxia do Sombreiro ( $\delta = -11^\circ 37' 23''$ ;  $\alpha = 12^h 40^m$ ), Rojas vai até as obras do ELT no Chile ( $\phi = 24^\circ 35' S$ ;  $\lambda = 70^\circ 12' W$ ;  $h = 3.046$  m).

- (a) Determine a razão focal do espelho primário do ELT.
- (b) Rojas sabe que M104 possui um brilho superficial no visível de  $m_{sup.} = 4,29$  mag/arcmin<sup>2</sup>. Com essa informação, qual será a magnitude aparente de M104 quando calculada por Rojas? Considere que M104 possui dimensões angulares de 8,6 arcmin por 4,2 arcmin no céu.  
**Dica:** o brilho superficial é a magnitude que o objeto apresenta por unidade de área no céu.
- (c) Determine o fluxo de fótons no visível provenientes da Galáxia do Sombreiro.  
**Dado:** comprimento de onda no visível  $\lambda = 550$  nm.

Durante o imageamento fotométrico de um objeto celeste, estamos expostos a uma ampla gama de interferências externas, os chamados ruídos. Definimos *signal* como a quantidade de fótons advindos do objeto coletados em um determinado intervalo de tempo (supondo uma eficiência de 100%), enquanto o *ruído* consiste em qualquer tipo de interferência nessa contagem - ruído do objeto, do céu, térmico e de leitura.

Para melhor estudar os efeitos do ruído na imagem final, definimos a razão sinal ruído  $S/R$ , onde  $R$  (ruído total) é dado por  $\sqrt{\sum R_i^2}$  (a raiz quadrada da soma dos quadrados dos ruídos individuais).

Em seus arquivos, Rojas encontrou uma imagem de M104 feita em um UT, com 8 minutos de exposição total, e uma razão sinal ruído igual a 98, predominando os ruídos de objeto e céu.

**Observação:** o ruído de objeto mensura as flutuações aleatórias do fluxo de fótons do objeto e pode ser calculado por  $R_{obj.} = \sqrt{S}$ .

- (d) Calcule o sinal de M104 durante o imageamento que Rojas fez no UT.
- (e) Determine o ruído de céu no momento de captura da imagem encontrada por Rojas em seus arquivos.
- (f) Em um suposto imageamento fotométrico de M104 no ELT, com um número de fótons captados análogo ao de fótons captados na imagem feita no UT, determine o tempo total do imageamento, supondo as mesmas condições de observação e medição.
- (g) Explorando os resultados, Rojas decide calcular a razão sinal ruído de uma imagem de M104 feita no ELT nas mesmas condições de observação que a realizada no UT, ou seja, o ruído de céu é o mesmo e os demais ruídos são desprezíveis, considerando o mesmo tempo de exposição de 8 minutos. Qual foi o valor encontrado? O valor real será provavelmente próximo ao encontrado? Por quê?
- (h) Comparando seu imageamento teórico de 8 minutos no ELT com a imagem feita no UT, qual imagem terá melhor resolução? Argumente com base nos valores das razões sinal ruídos desenvolvidos ao longo da questão.

### 2. Estrela de Barnard (85 pontos)

Entre os maiores movimentos próprios estelares, a Estrela de Barnard ( $\delta, \alpha = (4^\circ 41' 36'', 17^h 58^m)$ ) se destaca por ter movimento próprio  $\mu \approx 10,3$  arcsec/ano. Dados espectroscópicos indicam que

o  $\lambda_{H_\alpha}$  da estrela está deslocado para  $\lambda = 656,5 \text{ nm}$ , e que sua magnitude absoluta é  $M = 13,2$ . Além disso, podemos notar que, atualmente, sua paralaxe é de  $0,547 \text{ arcsec}$ .

- (a) Qual é a magnitude aparente da estrela de Barnard?

Definimos a velocidade espacial de uma estrela como sendo o módulo de seu vetor velocidade. Para os próximos itens, considere que a estrela de Barnard apresenta um movimento retilíneo e uniforme no espaço em relação a nós.

- (b) Determine  $V$ , o módulo da velocidade espacial (em km/s) da estrela de Barnard, e o menor ângulo que ela faz com a nossa linha de visada,  $\theta_0$  (em graus).  
 (c) Assumindo condições ideais de observação, será possível algum dia ver a Estrela de Barnard no céu, a olho nu? Responda SIM ou NÃO, e justifique com cálculos.

**Dica:** Analise o momento de máxima aproximação da Estrela.

- (d) Encontre uma expressão analítica (ou seja, sem substituição numérica) para a distância entre nós e a estrela de Barnard em função do tempo. Considere que em  $t = 0$  (momento atual) a Estrela de Barnard está a uma distância  $d_0$ .  
 Deixe sua resposta em termos de  $V$ ,  $d_0$  e  $\theta_0$ .

Em pleno solstício de inverno do hemisfério norte, interessada em estudar a Estrela de Barnard, uma equipe de astrônomos se prepara para uma longa noite de observação em um local de coordenadas  $(\phi; \lambda) = (41,8^\circ \text{ N}; 87,6^\circ \text{ W})$ , portando um telescópio newtoniano de  $120 \text{ mm}$  de diâmetro para realizar a tarefa.

- (e) Em condições ideais, por quanto tempo a Estrela de Barnard estará visível nesse dia (em minutos)?  
 (f) É possível observar a Estrela de Barnard com esse telescópio newtoniano? Justifique.  
 (g) Se, começando hoje, nossos astrônomos fossem capazes de passar um tempo indefinido observando a Estrela de Barnard com o referido telescópio newtoniano, por quanto tempo (em anos) eles conseguiriam observá-la?

### 3. Prevendo Imprevistos (85 pontos)

No exoplaneta H9095, com semi-eixo maior  $a_1 = 7 \text{ UA}$ , Hugão estuda as crateras do planeta P9095. Todavia, ele esquece de limpar as antenas de seu equipamento, acabando por inutilizar todos os dados que coletou.

Considere que os planetas orbitam a mesma estrela (semelhante ao Sol), em órbitas circulares e coplanares.

- (a) Preocupado com o futuro de sua pesquisa, Hugão precisa saber quando será o próximo trânsito entre H9095 e P9095. Sabendo que o trânsito acabou de ocorrer, encontre as possíveis expressões para o tempo que Hugão deverá esperar até que outro trânsito ocorra, em função dos períodos orbitais dos planetas.

**Dica:** não assuma nada a respeito do sentido de translação dos planetas.

- (b) Pelas expressões dos itens anteriores, Hugão calcula que terá de esperar 27 anos. Insatisfeito, ele quer ir pessoalmente estudar a superfície de P9095. Para facilitar seus cálculos, Hugão decide ter de antemão o valor do semi-eixo maior (UA) e período (anos) dos planetas. Encontre esses valores.  
 (c) Hugão decide tentar usar a transferência de Hohmann para visitar P9095, mas antes da viagem ele precisa saber se terá combustível suficiente para realizar as manobras da transferência, sendo que a massa de seu foguete, totalmente abastecido, é de  $5000 \text{ toneladas}$ . Para evitar futuros transtornos, encontre a quantidade (em kg) de propelente que será usado durante a transferência, considerando apenas a atração gravitacional da estrela.

**Dica:** a equação do foguete nos diz que

$$|\Delta v| = g \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

em que  $m_0$  e  $m$  são, respectivamente, a massa antes e depois do impulso, enquanto  $g$  é uma constante que assumiremos igual a  $700 \text{ m/s}$ .

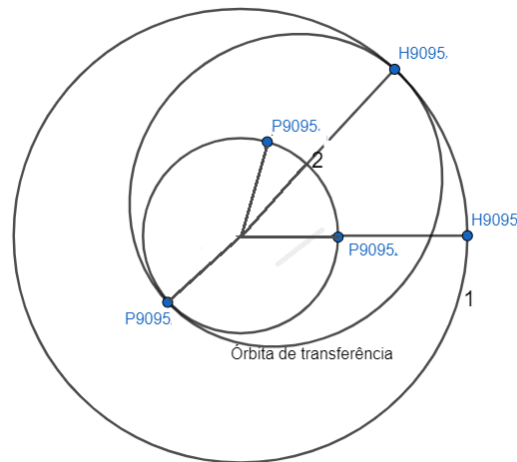


Figura 2: Esquemática da transferência de Hohmann

- (d) Querendo partir o quanto antes, Hugão tenta calcular o tempo que deverá esperar após a conjunção ( $t_1$ ) para que possa iniciar a transferência e colidir em P9095 em sua primeira passagem por sua órbita, partindo de H9095 antes da próxima oposição entre os dois planetas. Hugão está usando a esquematização do item acima em seus cálculos, mas está encontrando algumas dificuldades em obter uma conclusão ...

É possível realizar a transferência nessas condições? Justifique com cálculos.

- (e) Assim que passou a conjunção inicial, Hugão cogita alterar a órbita de seu planeta para uma órbita elíptica com periastro na órbita de P9095. Apressado, Hugão decide iniciar a transferência na primeira oportunidade que tiver. Sendo assim, quanto tempo ele deverá esperar até a colisão? Suponha que o impulso que altera a órbita de H9095 é instantâneo e despreze a gravidade dos planetas.

**4. Tacoclina (55 pontos)** Uma das técnicas experimentais mais fascinantes na astronomia é a de ouvir estrelas. Analisando o dopplergrama de uma estrela, os astrônomos conseguem obter informações suficientes sobre os modos de oscilação e, assim, descobrir diversas características sobre o interior estelar. Essa área da astronomia é chamada de asterosismologia, ou heliosismologia, para o caso específico do Sol.

- (a) Pesquisas heliosismológicas concluem que podemos dividir o Sol em duas camadas: a mais interna (radioativa), que gira como uma bola rígida, e a mais externa (convectiva), que possui rotação diferencial, isto é, com velocidades angulares irregulares. O coeficiente  $c_3$  de Clebsch-Gordon possui relação direta com o valor dessa rotação. Considerando essas informações e a tabela abaixo, estime um intervalo (com tamanho de, no máximo,  $0.25 R_{\odot}$ ), o qual capture a região de transição entre as duas camadas. Forneça uma breve justificativa para o intervalo escolhido.

distância ( $R_{\odot}$ )	$c_3$ (nHz)
0.39	-13.32
0.45	-13.73
0.51	-14.09
0.55	-14.36
0.61	-15.05
0.65	-16.30
0.70	-19.15
0.75	-19.94
0.81	-20.09
0.85	-20.40
0.90	-20.48
0.95	-20.18

Tabela 1: Coeficientes  $c_3$  em função da distância ao centro do Sol.

- (b) Essa região de transição é chamada de tacoclina, e muitos estudos são conduzidos para investigar suas propriedades (mais especificamente, a posição, espessura e a diferença entre as velocidades de rotação). Atualmente, também há estudos que buscam relacionar essa região com a atividade magnética do Sol, relacionando como esses parâmetros variam em função da atividade solar. Portanto, ela é de suma importância para entender a dinâmica interna do Sol. Um modelo teórico bastante utilizado para achar a velocidade de rotação do sol na região de rotação diferencial é o seguinte:

$$\Omega(r) = \frac{\delta\Omega}{1 + \exp((r_d - r)/w)}$$

Nessa equação,  $\delta\Omega = \Omega_{sur} - \Omega_c$ , onde  $\Omega_{sur}$  representa a velocidade de rotação perto da superfície, e  $\Omega_c$  a velocidade no interior (a qual assumimos ser bem pequena),  $w$  representa a espessura da tacoclina, e  $r_d$  representa a distância do meio dessa zona de transição até o centro do Sol. A tabela abaixo mostra valores de  $\Omega(r)$  em função de  $r$  para diversas posições. Note que, apesar de todos os valores estarem corretos matematicamente, a equação só é válida fisicamente quando  $r \geq r_d$ .

r ( $R_{\odot}$ )	$\Omega$ (nHz)
0.39	0.032
0.45	0.108
0.51	0.353
0.55	0.768
0.61	2.342
0.65	4.559
0.70	8.904
0.75	13.714
0.81	17.574
0.85	18.832
0.90	19.554
0.95	19.833

Tabela 2: Velocidade de rotação em função da distância ao centro do Sol.

Com base na tabela e nas informações fornecidas no enunciado, ache o valor de  $\delta\Omega$  aproximado ao inteiro mais próximo,  $w$ , e  $r_d$ . O seu valor de  $r_d$  está de acordo com o intervalo do item (a)?