OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

PROVA TEÓRICA P2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XIV IOAA e XII OLAA de 2020

Escreva aqui a sua identificação: [ ]

PROVA TEÓRICA P2 – FOLHA DE RESPOSTAS
GABARITO

Instruções

1. A duração da prova é de **4 (quatro) horas**;
2. Essa prova vale **10 pontos** e tem **peso 4** para a média final;
3. A prova é individual e sem consultas;
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada. Não a rabisque, pois ela poderá ser reutilizada;
7. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Se necessário, use o verso da folha de resposta para o cáculo;
8. Folhas de rascunho serão disponibilizadas e devem ser entregues junto com a prova e as folhas de respostas;
9. Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles podem ser feitos a lápis, mas a resposta final deverá ser a caneta. Escreva suas respostas nos locais apropriados para cada questão nas folhas de respostas. Às respostas ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, serão associadas à nota zero.
10. Ao final da prova devolva o caderno de questões, as folhas de respostas e as folhas de rascunho.

Questão 1	(Utilize a imagem abaixo)

Nota:

Estrela	Declinação	Ascensão Reta
α Vir (Spica)	-11°12’	13^h26^m
β Vir (Zavijava)	+01°48’	11^h51^m
γ Vir (Porrima)	-01°36’	12^h42^m
ι Vir (Syrma)	-06°00’	14^h16^m

Questão 1 – espaço para o cálculo

Esta constelação foi escolhida por ficar numa área do céu com a Grade Equatorial pouco distorcida, facilitando o uso de uma régua comum e de uma simples regra de três.

A tabela abaixo traz a comparação entre as coordenadas, segundo o Stellarium, e as medidas com uma régua comum e regra de três:

Cada Declinação e Ascensão Reta valem 1,25 ponto, cada.

Estrela	Stellarium	régua
α Vir	-11°16’ e 13^h26^m	-11°12’ e 13^h26^m
β Vir	+01°39’ e 11^h51^m	+01°48’ e 11^h51^m
γ Vir	-01°33’ e 12^h42^m	-01°36’ e 12^h42^m
ι Vir	-06°05’ e 14^h17^m	-06°00’ e 14^h16^m

Pequenas variações em torno destes valores serão consideradas corretas.

Sua identificação:

Questão 2	magnitude limite	$\cong 13{,}6 \approx 14$
	distância focal	$= 0{,}84\ m = 84\ cm$
	escala de placa	$4{,}8\,''/pix$
	campo angular	$\cong 1{,}36° \approx 1{,}4°$

Nota:

espaço para o cálculo

a) Com os dados referentes ao olho humano é possível deduzir a expressão da magnitude limite de um telescópio:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2{,}5\log\left(\frac{F_{lim}}{F_{olho}}\right)$$

$$F \propto \frac{1}{área} \rightarrow F \propto \frac{1}{D^2} \rightarrow m_{lim} - m_{olho} = -2{,}5\log\left(\frac{D_{olho}}{D_{telescópio}}\right)^2 \quad (1\ pt)$$

$$\therefore m_{lim} - m_{olho} = -5\left(\log D_{olho} - \log D_{telescópio}\right)$$

Podemos calcular o diâmetro da objetiva (ou espelho) do telescópio a partir do poder de resolução:

$$\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda_{visível}}{D_{telescópio}}$$

$$\theta_R = 0{,}69'' \rightarrow \theta_R = \frac{0{,}69'' \times \pi}{180° \times 60' \times 60''} \cong 3{,}35 \times 10^{-6}\ rad$$

Substituindo-se os valores:

$$D_{telescópio} = 1{,}22\frac{550 \times 10^{-9}}{3{,}35 \times 10^{-6}} \rightarrow D_{telescópio} \cong 0{,}20\ m \quad (1\ pt)$$

A magnitude limite do telescópio será:

$$m_{lim} - 6 = -5\log(6) + 5\log(200) \rightarrow m_{lim} \cong 13{,}6 \approx 14 \quad (1\ pt)$$

Para encontrar a distância focal, utiliza-se a razão focar e o diâmetro encontrado anteriormente:

$$razão\ focal\ (R) = \frac{f}{D_{telescópio}} \leftrightarrow f = RD_{telescópio} = 4{,}2 \times 0{,}2 \rightarrow f = 0{,}84\ m = 84\ cm \quad (1\ pt)$$

b) A escala de placa é dada por:

$$\theta_p = \frac{L_p}{f}$$

Onde L_p é o lado do pixel:

$$L_p = \frac{2{,}0 \times 10^{-2}\ m}{1024\ pix} \cong 1{,}95 \times 10^{-5}\ \frac{m}{pix} \quad (1\ pt)$$

$$\therefore \theta_p = \frac{1{,}95 \times 10^{-5}}{0{,}84} \rightarrow \theta_p \cong 2{,}32 \times 10^{-5}\ \frac{rad}{pix} = \frac{2{,}32 \times 10^{-5} \times 180° \times 60' \times 60''}{\pi} \cong 4{,}8\frac{''}{pix} \quad (2\ pt)$$

c) O campo angular da matriz será, então, o n° de pixels de um lado da matriz vezes a escala de placa:

$$C = n\theta_p \quad (1\ pt)$$

$$C = 1024 \times 4{,}8 = 4915{,}2'' = \frac{4915{,}2''}{3600\,''/°} \rightarrow C \cong 1{,}36° \approx 1{,}4° \quad (2\ pt)$$

Observações:

- No item b) será aceita uma pequena variação em torno do valor da resposta, em função dos arredondamentos. O estudante perderá 1 ponto se der a resposta em outra unidade.
- No item c) O estudante perderá 1 ponto se der a resposta em outra unidade.

Sua identificação:

Questão 3		
	R_1/R_2	$\cong 0{,}89$
	R_1	$\cong 4{,}40 \times 10^{10}\ m$
	R_2	$\cong 4{,}95 \times 10^{10}\ m$
	F_2	$\cong 6{,}63 \times 10^{-10}\ W/m^2$
	D	$\cong 2{,}96 \times 10^{2}\ pc = 296\ pc$

Nota:

espaço para o cálculo

a) Primeiro encontramos a razão entre os fluxos:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$\therefore \frac{F_1}{F_2} = 10^{-0{,}4(m_1 - m_2)} = 10^{-0{,}4(3{,}46-4{,}08)} \cong 1{,}77 \quad (0{,}5\ pt)$$

Da Lei de Stefan-Boltzmann, temos que a luminosidade L da estrela:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

Como

$$F = \frac{L}{4\pi D^2}$$

Então:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\left(\frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi D^2}\right)}{\left(\frac{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}{4\pi D^2}\right)} \rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \times \frac{T_1^4}{T_2^4} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2} \times \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2} \quad (0{,}5\ pt)$$

Da Lei de Wien, temos:

$$T_1 \lambda_1 = T_2 \lambda_2 \leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2} \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1{,}77 \times \left(\frac{531{,}0}{649{,}1}\right)^2} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} \cong 0{,}89 \quad (1{,}5\ pt)$$

b) O tempo que a estrela leva para ir de R_1 a R_2 corresponde à metade do período de pulsação P. Podemos escrever, então, que a distância percorrida por um ponto em sua "superfície" será:

$$R_2 - R_1 = v \times \frac{P}{2} \quad (0{,}5\ pt)$$

Substituindo-se os valores:

$$R_2 - R_1 = \left(12{,}80 \times 10^3\ \frac{m}{s}\right) \times \left(\frac{9{,}84}{2}\ dias \times 86400\ \frac{s}{dia}\right) \cong 5{,}44 \times 10^9\ m$$

Como $R_1 = 0{,}89\ R_2$, temos:

$$R_2(1 - 0{,}89) = 5{,}44 \times 10^9\ m \rightarrow R_2 \cong 4{,}95 \times 10^{10}\ m \quad (1\ pt)$$
$$\rightarrow R_1 \cong 4{,}40 \times 10^{10}\ m \quad (1\ pt)$$

c) Para obter o valor absoluto de F2, temos que compará-lo ao fluxo do Sol:

$$m_2 - m_{Sol} = -2{,}5 \log\left(\frac{F_2}{F_{Sol}}\right)$$

Sua identificação:

$$\therefore F_2 = F_{Sol} 10^{-0,4(m_2 - m_{Sol})}$$

O fluxo do Sol observado da Terra vale:

$$F_{Sol} = \frac{L_{Sol}}{4\pi a_{Terra}^2} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{4\pi(149,6 \times 10^9)^2} \rightarrow F_{Sol} \cong 1,36 \times 10^3 \ \frac{W}{m^2} \quad (1\,pt)$$

$$\therefore F_2 = 1,36 \times 10^3 \times 10^{-0,4(4,08+26,7)} \rightarrow F_2 \cong 6,63 \times 10^{-10} \ \frac{W}{m^2} \quad (1,5\,pt)$$

d)

$$F_2 = \frac{L_2}{4\pi D^2} \rightarrow D = \sqrt{\frac{L_2}{4\pi F_2}} = \sqrt{\frac{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}{4\pi F_2}} \rightarrow D = R_2 T_2^2 \sqrt{\frac{\sigma}{F_2}} \quad (1\,pt)$$

Novamente, da Lei de Wien, temos:

$$T_2 = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{\lambda_2}$$

Substituindo-se os valores:

$$D = 4,95 \times 10^{10} \times \left(\frac{2,898 \times 10^{-3}}{649,10 \times 10^{-9}}\right)^2 \sqrt{\frac{5,67 \times 10^{-8}}{6,63 \times 10^{-10}}} \rightarrow D \cong 9,12 \times 10^{18}\ m$$

$$D = \frac{9,12 \times 10^{18}\ m}{3,08 \times 10^{16}\ m/pc} \rightarrow D \cong 2,96 \times 10^2\ pc = 296\ pc \quad (1,5\,pt)$$

Observações:

- No item a), razão é adimensional. O estudante perderá 1 ponto se responder com alguma dimensão;
- No item b) é pedido o raio em metros. O estudante perderá 1 ponto se responder em outra unidade;
- No item c), se o estudante esquecer a unidade (W/m^2) perderá 1 ponto;

No item d) a distância é pedida em parsec. O estudante perderá 1 ponto se responder em outra unidade;

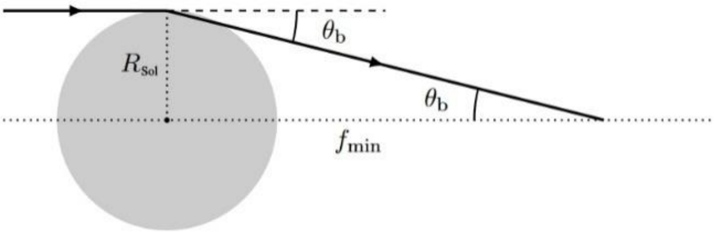
Sua identificação:

Questão 4	f_{min}	$\cong 548{,}90\ UA$
	A_m	$\approx R_{Sol}/a$

Nota:

espaço para o cálculo

a) Os raios que passam mais perto do corpo gravitacional se curvarão mais. Assim, obtemos o ponto de convergência mais curto, onde os raios que passam "de raspão" na superfície solar se encontram.



(1 pt)

Vemos pelo esquema acima que tan $\theta_b = R_{Sol}/f_{min}$. Como o ângulo θ é muito pequeno, podemos fazer a aproximação de tan $\theta_b \approx \theta_b$. Sendo assim, podemos escrever:

$$\theta_b = \frac{2R_{Sch}}{R_{Sol}} \approx \frac{R_{Sol}}{f_{min}} \rightarrow f_{min} = \frac{R_{Sol}^2}{2R_{Sch}} = \frac{R_{Sol}^2 c^2}{4GM_{Sol}} \quad (1\ pt)$$

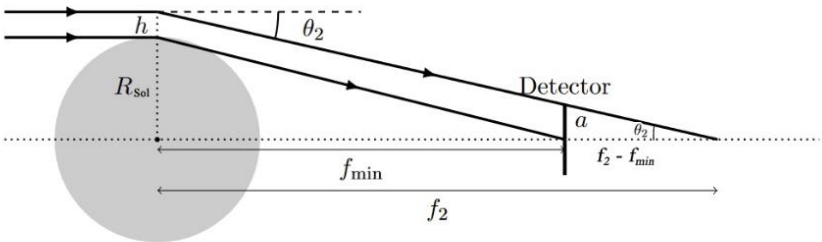
Substituindo-se os valores:

$$f_{min} = \frac{(6{,}96 \times 10^8 \times 3{,}00 \times 10^8)^2}{4 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}\ m \rightarrow f_{min} \cong 8{,}21 \times 10^{13}\ m$$

Transformando em unidades astronômicas, temos:

$$\frac{8{,}21 \times 10^{13}\ m}{149{,}6 \times 10^9\ m/ua} \rightarrow f_{min} \cong 548{,}90\ UA \quad (3\ pt)$$

b)



(1 pt)

A luz curvada pela superfície do Sol ($r = R_{Sol}$) irá interceptar o detector no seu centro, uma vez que ele é mantido em f_{min}. A borda do detector irá ser interceptada pela luz curvada em $r = R_{Sol} + h$. Esta luz irá interceptar o eixo-x a uma distância f_2:

$$f_2 = \frac{(R_{Sol} + h)^2}{2R_{Sch}} \quad (0{,}5\ pt)$$

Do pequeno triângulo, vemos que tan $\theta_2 = a/(f_2 - f_{min})$. Como o ângulo θ_2 é muito pequeno, podemos fazer a aproximação de tan $\theta_2 \approx \theta_2$. Sendo assim, podemos escrever:

$$a = (f_2 - f_{min})\theta_2$$

$$a = \left[\frac{(R_{Sol} + h)^2}{2R_{Sch}} - \frac{R_{Sol}^2}{2R_{Sch}}\right] \frac{2R_{Sch}}{(R_{Sol} + h)} = \frac{(R_{Sol} + h)^2 - R_{Sol}^2}{(R_{Sol} + h)} \quad (0{,}5\ pt)$$

Sua identificação:

A área do anel em torno do Sol vale:

$$\pi\left[(R_{Sol}+h)^2-R_{Sol}^2\right]=\pi a(R_{Sol}+h)$$

O fluxo no detector na presença do Sol será:

$$\Phi_{Sol}=I_0\pi a(R_{Sol}+h)$$

O fluxo no detector na presença do Sol será:

$$\Phi_0=I_0\pi a^2$$

Podemos escrever, então, a amplificação A_m como:

$$A_m=\frac{\Phi_{Sol}}{\Phi_0}=\frac{I_0\pi a(R_{Sol}+h)}{I_0\pi a^2}\rightarrow A_m=\frac{(R_{Sol}+h)}{a}$$

Como $h << R_{Sol}$, então:

$$A_m\approx\frac{R_{Sol}}{a}\quad (3\,pt)$$

Observações:

- O item a) pede a distância focal em ua. O estudante perderá 1 ponto se responder em outra unidade;
- No item b) será considerada correta a resposta contendo a largura h do anel.

Questão 5	dia	31 de março
	hora	~8h
	Antes ou depois?	antes do nascer do Sol
	Justificativa	(no espaço abaixo)
	(Faça o gráfico no gabarito milimetrado disponível)	

Nota:

espaço para o cálculo

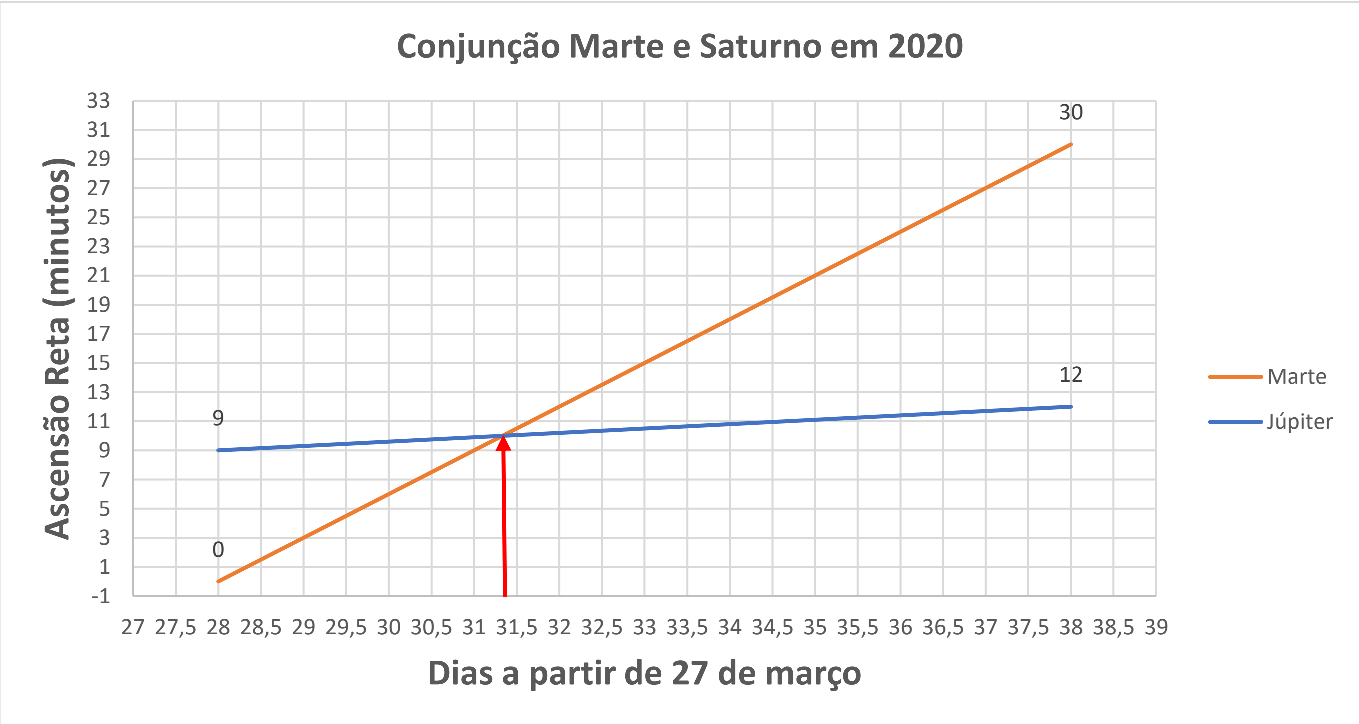
a) **(8 pontos)** Pelo Stellarium a conjunção ocorrerá no dia 31 de março às ~8h. Serão aceitos valores da hora próximos a este, contanto que tenham sido tirados de gráficos bem montados.

- O estudante deverá saber que o instante de maior aproximação será quando a Marte e Saturno tiverem **a mesma Ascensão Reta**;
- O estudante deverá construir um gráfico **A.R. *versus* dia**, com os pontos de Marte e de Saturno. Ligar estes pontos e encontrar o instante do cruzamento das retas referentes aos planetas.
- O gráfico obrigatoriamente deverá:
    - ocupar, no mínimo, 50% da área da folha milimetrada (se não, - 1 ponto);
    - ter os eixos nominados (Dia e Ascensão Reta) (se não, - 1 ponto pra cada omissão);
    - ter a escala dos eixos (se não, - 1 ponto pra cada omissão);
    - ter as retas identificadas (qual é de Marte e qual é de Saturno) (se não, - 1 ponto pra cada omissão);
    - ter um título (se não, - 1 ponto);

Segue um exemplo do gráfico esperado.

Para as duas retas, precisamos apenas de dois pontos por planeta (dias 28 de março e 7 de abril) e para maior precisão, basta utilizar apenas os minutos da Ascensão Reta, já que as horas são iguais.

No gráfico, vemos que o cruzamento acontece antes do meio-dia (31,5) do dia 31 de março, por volta das 8h.



Sua identificação:

b) **(2 pontos)** A maior aproximação acontece de manhã, de modo que Marte e Saturno estarão no céu com o Sol. Então, para serem vistos juntos, terá que ser, ou antes do nascer do Sol, ou depois do pôr do Sol.

Para o dia 31 de março, a Ascensão Reta do Sol está à frente da Ascensão Reta dos planetas. Portanto os planetas estão a Oeste do Sol e só poderão ser vistos juntos antes do nascer do Sol.

Sua identificação:

Questão 6	R^{max}	$\cong 3{,}00\ UA$
	R^{min}	$\cong 3{,}68\ UA$
	T^{max}	$\cong 2857\ K$
	T^{min}	$\cong 1100\ K$
	λ_{max}^{max}	$\cong 1{,}015 \times 10^{-6}\ m = 1015\ nm$
	λ_{max}^{min}	$\cong 2{,}636 \times 10^{-6}\ m = 2636\ nm$
	Δt (modelo linear)	$= 44.000\ anos$
	Δt (modelo exponencial)	$\cong 36.464\ anos$

Nota:

espaço para o cálculo

a) Vamos inicialmente calcular a que distância esta variável está de nós:

$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{(0{,}30 \times 10^{-3})''} \rightarrow d \cong 3{,}33 \times 10^{3}\ pc \cong 1{,}03 \times 10^{20}\ m \quad (0{,}2\ pt)$$

O diâmetro físico da variável será dado pelo seu diâmetro angular (em radianos) multiplicado pela distância até nós:

$$\emptyset^{max} = \left(\frac{1{,}80 \times 10^{-3} \times \pi}{180 \times 60 \times 60}\right) \times (1{,}03 \times 10^{20}\ m) \cong 8{,}96 \times 10^{11}\ m \rightarrow R^{max} = 4{,}48 \times 10^{11}\ m$$

Em unidades astronômicas:

$$R^{max} = \frac{4{,}48 \times 10^{11}\ m}{149{,}6 \times 10^{9}\ m} \rightarrow R^{max} \cong 3{,}00\ UA \quad (0{,}9\ pt)$$

$$\emptyset^{min} = \left(\frac{2{,}20 \times 10^{-3} \times \pi}{180 \times 60 \times 60}\right) \times (1{,}03 \times 10^{20}\ m) \cong 1{,}10 \times 10^{12}\ m \rightarrow R^{min} = 5{,}50 \times 10^{11}\ m$$

Em unidades astronômicas:

$$R^{min} = \frac{5{,}50 \times 10^{11}\ m}{149{,}6 \times 10^{9}\ m} \rightarrow R^{min} \cong 3{,}68\ UA \quad (0{,}9\ pt)$$

b) Para conhecermos as temperaturas efetivas durante os extremos de brilho da variável, primeiro teremos que calcular os Fluxos que medimos aqui e depois igualar com a Luminosidade total da variável.

O Fluxo do Sol, ou Constante Solar, vale:

$$F_{Sol} = \frac{3{,}83 \times 10^{26}\ W}{4\pi(149{,}6 \times 10^{9}\ m)^2} \rightarrow F_{Sol} \cong 1361{,}83\ \ W/m^2$$

Pela equação de Pogson, temos:

$$m^{max(min)} - m_{Sol} = -2{,}5 \log\left(\frac{F^{max(min)}}{F_{Sol}}\right) \quad (0{,}1\ pt)$$

Substituindo-se os valores:

$$6{,}50 - (-26{,}7) = -2{,}5 \log\left(\frac{F^{max}}{1361{,}83}\right) \rightarrow \log\left(\frac{F^{max}}{1361{,}83}\right) = -13{,}28 \rightarrow F^{max} \cong 7{,}15 \times 10^{-11}\ \ W/m^2 \quad (0{,}1\ pt)$$

$$10{,}20 - (-26{,}7) = -2{,}5 \log\left(\frac{F^{min}}{1361{,}83}\right) \rightarrow \log\left(\frac{F^{min}}{1361{,}83}\right) = -14{,}76 \rightarrow F^{min} \cong 2{,}37 \times 10^{-12}\ \ W/m^2 \quad (0{,}1\ pt)$$

Sua identificação:

Se multiplicarmos por toda a área da esfera centrada na variável, poderemos igualar com sua luminosidade intrínseca:

$$F \times (4\pi d^2) = L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{Fd^2}{R^2\sigma}} \ (0{,}1\ pt)$$

Substituindo-se os valores:

$$T^{max} = \sqrt[4]{\frac{(7{,}15 \times 10^{-11})(1{,}03 \times 10^{20})^2}{(4{,}48 \times 10^{11})^2(5{,}67 \times 10^{-8})}} \rightarrow T^{max} \cong 2857\ K \quad (0{,}8\ pt)$$

$$T^{min} = \sqrt[4]{\frac{(2{,}37 \times 10^{-12})(1{,}03 \times 10^{20})^2}{(5{,}50 \times 10^{11})^2(5{,}67 \times 10^{-8})}} \rightarrow T^{min} \cong 1100\ K \quad (0{,}8\ pt)$$

c) Pela Lei de Wien o comprimento da onda de máxima emissão vale: $\lambda_{max} = b/T$, onde b é uma constante.

$$\lambda_{max}^{max} = \frac{2{,}90 \times 10^{-3}}{2857} \rightarrow \lambda_{max}^{max} \cong 1{,}015 \times 10^{-6}\ m = 1015\ nm \quad (1\ pt)$$

$$\lambda_{max}^{min} = \frac{2{,}90 \times 10^{-3}}{1100} \rightarrow \lambda_{max}^{min} \cong 2{,}636 \times 10^{-6}\ m = 2636\ nm \quad (1\ pt)$$

d) (2 pontos) Pelo modelo de acreção linear, temos:

$$\Delta m = taxa \times \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m}{taxa} \ (0{,}5\ ponto)$$

Substituindo-se os valores, temos:

$$\Delta t = \frac{0{,}44 M_{Sol}}{1{,}00 \times 10^{-5}\ M_{sol}/ano} \rightarrow \Delta t = 44.000\ anos \ (1{,}5\ ponto)$$

e) Pelo modelo de acreção exponencial, temos:

$$M(t) = M_0 e^{1{,}00 \times 10^{-5} \Delta t/ano} \rightarrow \Delta t = \frac{\ln\left(\frac{M}{M_0}\right)}{1{,}00 \times 10^{-5}/ano} \quad (0{,}5\ pt)$$

Substituindo-se os valores, temos:

$$\Delta t = \frac{\ln\left(\frac{1{,}44}{1}\right)}{1{,}00 \times 10^{-5}} \rightarrow \Delta t \cong 36.464\ anos \quad (1{,}5\ pt)$$

Observações:

- O item a) pede a resposta em UA. O estudante perderá 1 ponto se outra unidade for usada;
- O item c) pede a resposta em nm. O estudante perderá 1 ponto se outra unidade for usada;
- Os itens d) e e) pedem a resposta em anos. O estudante perderá 1 ponto se outra unidade for usada;

Sua identificação: