



PROVA TEÓRICA P2
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

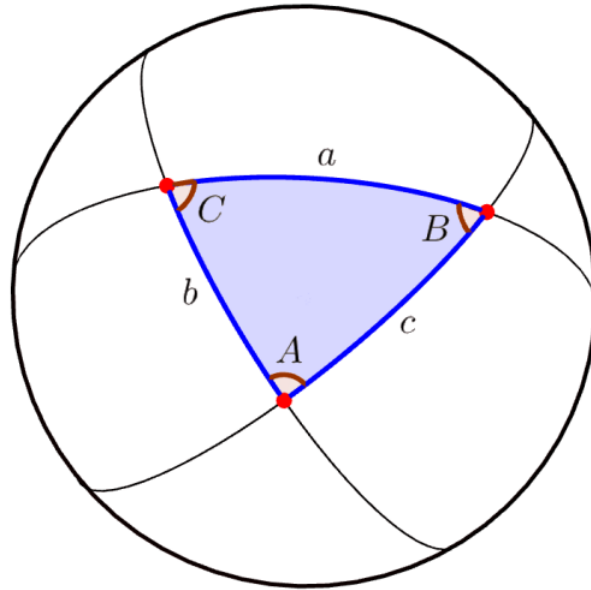
1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

Questões

1. A Terra numa casca de noz (5 pontos) Seu Isaías Nilson foi uma das grandes mentes brasileiras apagadas na memória do tempo. No início do século XVIII, o cientista desenvolveu a teoria clássica da gravitação, e explorou um modelo de óptica física no qual a luz é composta de pequenas partículas de baixa massa. Desse modo, pensou na possibilidade de um corpo a partir de cuja superfície a luz não poderia escapar. Utilizando o modelo proposto, determine qual deveria ser o raio da Terra para que ela fosse um objeto desse tipo. Considere uma partícula de luz saindo da superfície com a velocidade c presente na tabela de constantes.

2. A Terra um pouco maior que uma casca de noz (10 pontos) Em 2022, um artigo da Universidade Federal do Rio de Janeiro e da Secretaria de Educação do Estado do Piauí revisitou o antigo experimento de Erastóstenes. Em resumo, aproveitando-se que as cidades do Rio de Janeiro e de Teresina estão praticamente à mesma longitude, as instituições mediram, simultaneamente, a inclinação dos raios solares durante a culminação superior do Sol.

No Rio de Janeiro, um gnômon vertical de 5,1 cm produziu uma sombra de 1,1 cm para o sul. Já em Teresina, um gnômon vertical de 8,5 cm produziu uma sombra de 0,8 cm para o norte. Sabendo que a distância entre as cidades é próxima de 2000 km, estime o raio da Terra. Utilize somente as informações do enunciado, i.e., não consulte a folha de constantes nessa questão. Respostas sem justificativa não serão pontuadas.

3. Galáxia de Bode (10 pontos)

A Galáxia de Bode (M81) é uma galáxia espiral na constelação da Ursa Maior. Observações espectroscópicas indicam que o comprimento de onda da sua linha de absorção $H\alpha$ é de $6565,6 \text{ \AA}$. Sabendo disso, responda:

- (a) **(5 pontos)** Qual a distância até a galáxia, em Mpc (megaparsecs)?
- (b) **(5 pontos)** Se a galáxia possui um diâmetro angular de 26,9 minutos de arco, qual o seu diâmetro físico, em anos-luz?

4. De Olho no Sombreiro (20 pontos) Larissa acaba de adquirir seu mais novo telescópio, um dobsoniano $f/4$ de 200 mm de diâmetro, equipado com uma ocular de distância focal 10 mm.

- (a) **(15 pontos)** Larissa tenta apontar para M104 ($\delta = -11^\circ 37' 23''$; $\alpha = 12^h 39^m 59,4^s$), mas inicialmente observa apenas uma região escura. Eventualmente, sem mover o telescópio, a galáxia começa a aparecer, até atravessar o campo de visão (passando pelo seu centro) e desaparecer. O tamanho angular de M104 é de $8,7'$, e o tempo decorrido (desde que M104 começa a aparecer até o último momento em que alguma parte dela é visível) foi $\Delta t = 3 \text{ min } 13 \text{ s}$. Determine o campo de visão utilizado.
- (b) **(5 pontos)** Larissa começa a se arrepender de suas escolhas quando percebe que 3 minutos é pouco tempo para uma observação. Dê um exemplo de montagem que ela poderia ter preferido a fim de manter o campo visual, mas sem sofrer com esse problema. Seja específico em seu exemplo, ao invés de recorrer a uma classificação geral.

5. LL Aqr (30 pontos) Um binário é chamado eclipsante quando, na perspectiva de um observador na Terra, as estrelas passam uma em frente da outra (eclipsando uma a outra), de modo a barrar parcial ou integralmente a luz da companheira por alguns instantes. A seguir, está representada a curva de luz do sistema binário eclipsante LL Aquarii. Quando não há eclipse, a magnitude aparente de LL Aqr é $m_0 = 9,23 \text{ mag}$.

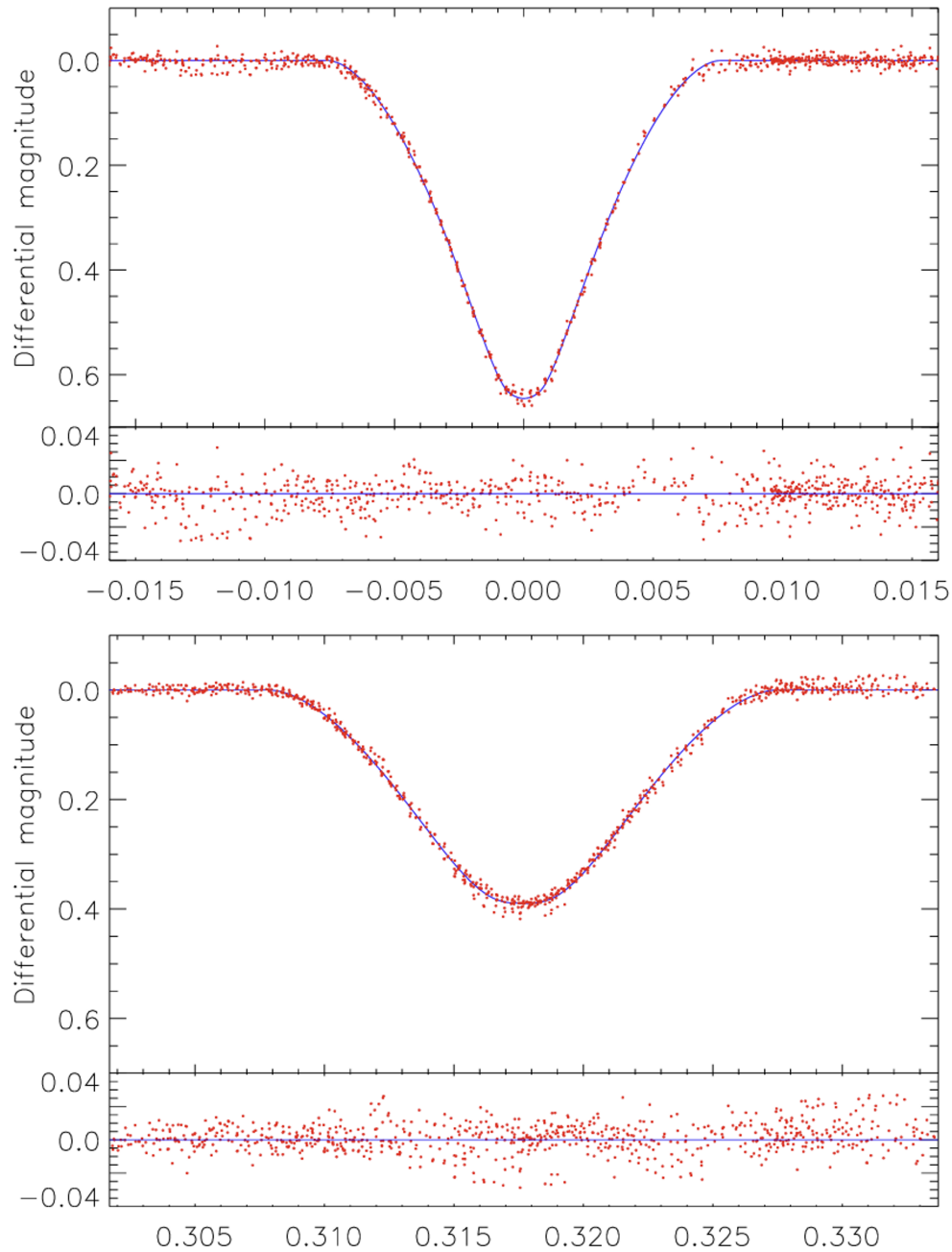


Figura 1: Curva de luz de LL Aqr nos momentos de eclipse (SOUTHWORTH, J. 2013)

- (a) **(10 pontos)** Seja m_1 a magnitude de uma das componentes do binário, determine a magnitude m_2 da outra componente em função de m_1 e m_0 .

Determine a magnitude de cada componente do binário para cada uma das hipóteses:

- (b) **(10 pontos)** A estrela de menor temperatura também é a de menor raio.
 (c) **(10 pontos)** A estrela de maior temperatura é a de menor raio.

6. Elon Mosca e sua Lua (30 pontos) Preocupado com a chegada alheia na Lua, Elon Mosca decide ejetá-la radialmente de sua órbita em torno da Terra, o que será feito por meio de uma colisão com um projétil com o menor momento linear p possível, desde que atendendo às condições propostas. Qual será o módulo de \vec{p} (em kg m s^{-1}) e o valor absoluto (em graus) do ângulo θ entre a direção radial terrestre e o vetor velocidade do projétil? Considere que a colisão é perfeitamente inelástica e que as únicas interações gravitacionais ocorrem entre a Terra e a Lua, cuja órbita é suposta circular.

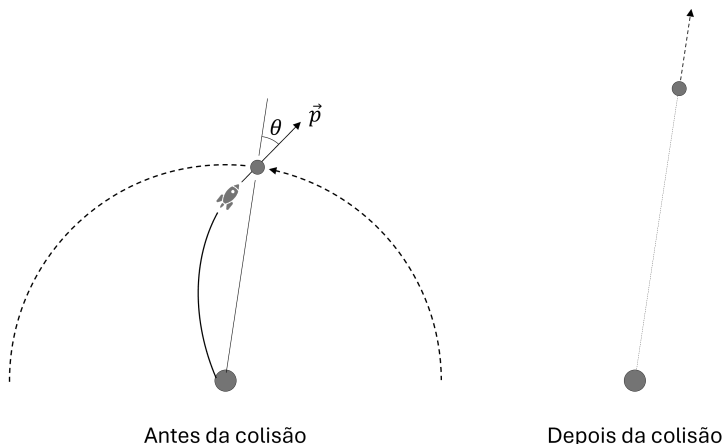


Figura 2: Representação da colisão do projétil com a Lua (à esquerda) e da ejeção radial da Lua (à direita).

7. Supernovas Super-luminosas (40 pontos) Em 2019, uma pesquisa detectou e estudou uma amostra de Supernovas Super-luminosas, em especial as de tipo I (SLSNe I), com dados da missão *Dark Energy Survey* (DES). Como os valores de redshift são consideráveis, a lei de Hubble já não é uma boa aproximação para as distâncias luminosas. Para três dos eventos estudados, as distâncias, calculadas pelo modelo Λ CDM, são entregues na tabela a seguir.

Índice	Nome	z	Distância Luminosa (Gpc)
1	DES15C3hav	0,390	2,11
2	DES16C3dmp	0,565	3,28
3	DES14C1rhg	0,481	2,73

Para esses mesmos três eventos, seguem (na próxima página) as curvas de luz na banda r , i.e., a magnitude aparente em função do tempo (em dias) nesse filtro. A linha tracejada só indica quando o evento foi classificado como SLSN I.

- (10 pontos)** Determine a magnitude absoluta de pico para as SLSNe I em questão.
- (10 pontos)** A título de comparação, estime a magnitude absoluta bolométrica da Via Láctea, supondo que ela abrigue 500 bilhões de estrelas, e que a estrela média tenha um décimo da luminosidade solar.
- (10 pontos)** Os histogramas a seguir (na próxima página) comparam a quantidade de SLSNe I em função da magnitude absoluta do pico, utilizando dessa vez a banda 4000. À esquerda, estão representados os eventos encontrados com os dados do DES; à direita, os eventos que já estavam presentes na literatura antes do estudo. Estime a magnitude absoluta média das SLSNe I para cada uma das amostras, ou seja, as encontradas com dados do DES e as pré-existentes na literatura.

Dado: Uma das formas de estimar o valor médio de um histograma é encontrando a linha vertical que divide o gráfico em duas figuras de áreas iguais.

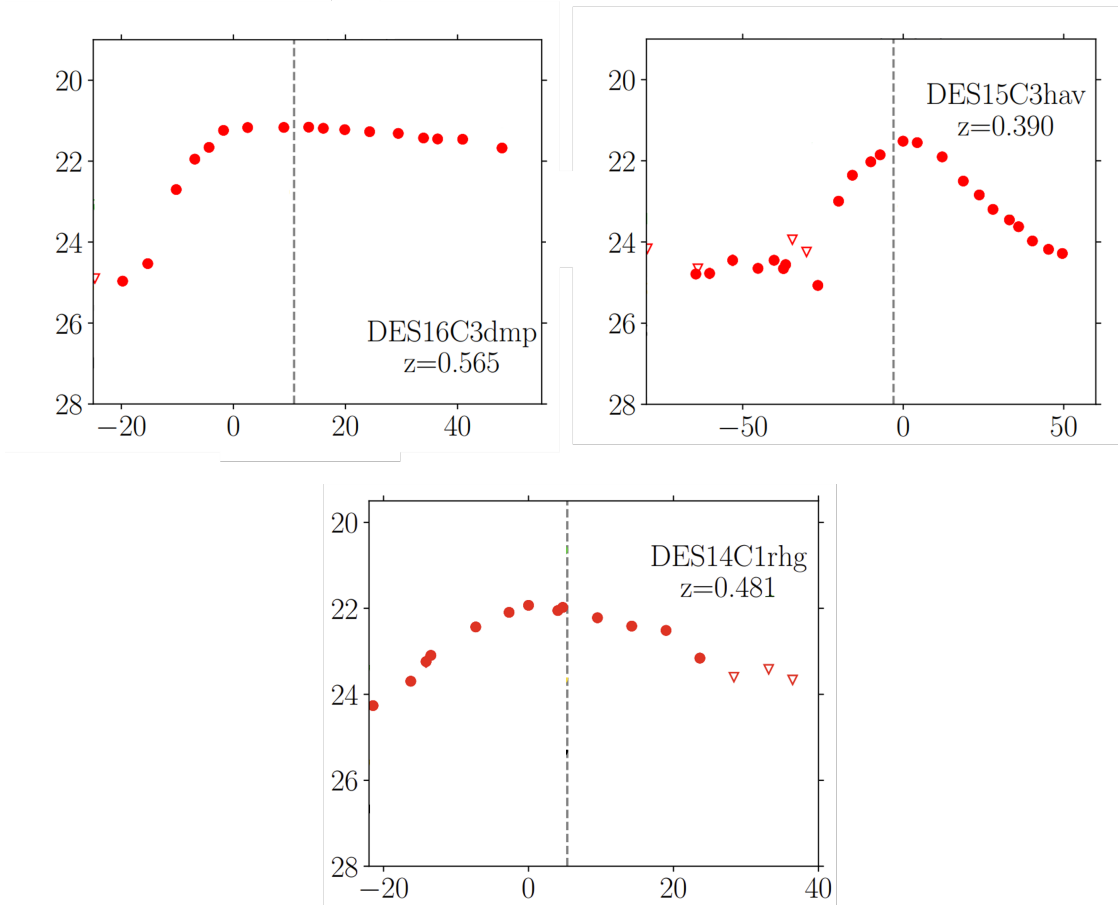


Figura 3: Gráficos de magnitude, na banda r, em função do tempo, para os eventos descritos (ANGUS, C. R., et al. 2019).

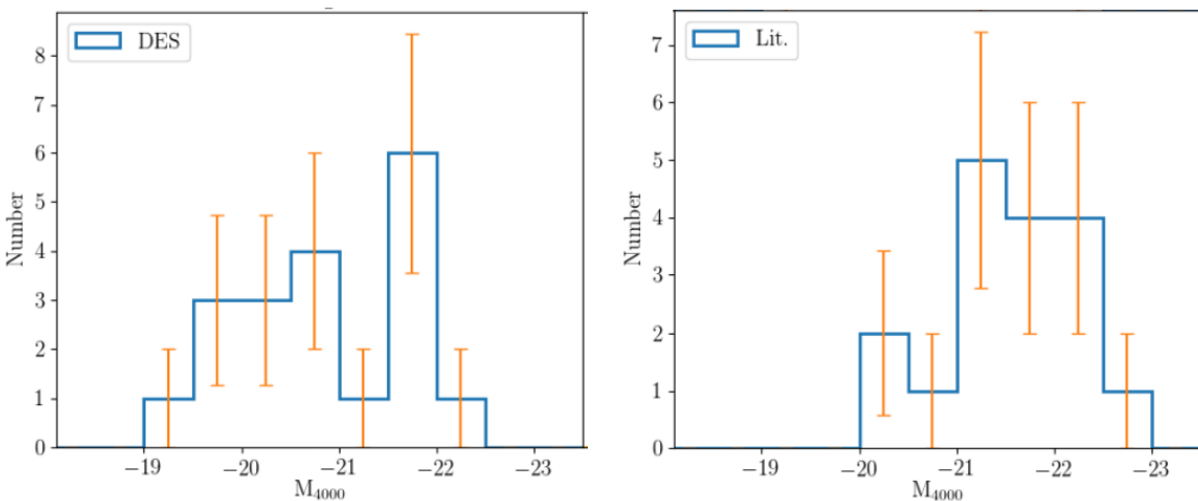


Figura 4: Distribuição numérica das SLSNe I em função da magnitude absoluta da banda sintética 4000. À esquerda, as amostras detectadas com dados do programa DES. À direita, as amostras de SLSNe I anteriores na literatura (ANGUS, C. R., et al. 2019).

- (d) **(10 pontos)** Tanto visualmente quanto pelo resultado do item anterior, observamos que as amostras têm distribuições distintas. Contudo, magnitudes absolutas são características intrínsecas dos eventos (ou seja, independentem do instrumento óptico). Sendo assim, elenque um motivo que poderia explicar por que as amostras coletadas com o DES se distinguem daquelas na literatura anterior. Justificativas por ruídos estatísticos não serão pontuadas.

8. Arrancando elétrons (40 pontos) Investigaremos nessa questão um importante efeito atômico com grandes consequências no perfil químico de estruturas astronômicas: a ionização. Mais especificamente, utilizaremos o He como exemplo para entender sua ionização dentro de um contexto termodinâmico, e algumas consequências para a espectroscopia.

A energia de ionização, χ_1 , é definida pela energia necessária para expelir um elétron e^- de certo átomo A_I , tornando-o um íon $A_{II} = A_I^+$. De modo geral, chamamos de χ_i a energia necessária para provocar a i -ésima ionização, isto é: $A_i \rightarrow A_{i+1} + e^-$. A principal equação teórica para o tratamento da ionização no contexto de equilíbrio térmico é a denominada equação de Saha. Podemos usar essa equação para traçar a curva de abundância de cada íon do He, isto é, a curva de N_i/N_{total} :

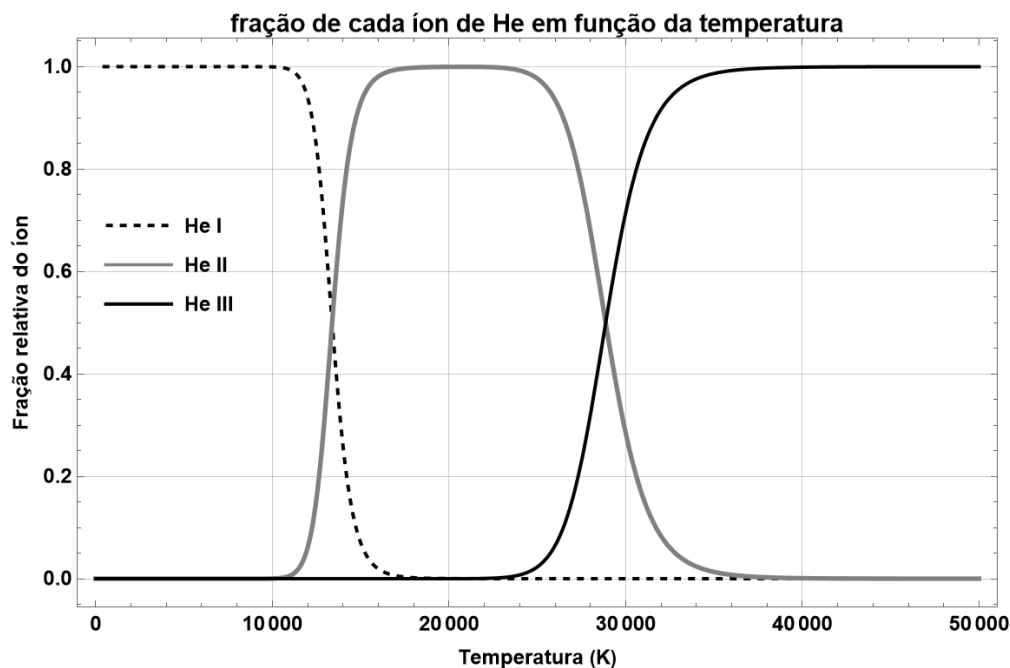


Figura 5: Concentração das espécies no plasma em função da temperatura. A simulação utilizou uma pressão de $P_e = 20 \text{ N/m}^2$, energias de ionização $\chi_1 = 24,6 \text{ eV}$ e $\chi_2 = 54,4 \text{ eV}$ ($1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), e pesos estatísticos $g_1 = 1$, $g_2 = 2$ e $g_3 = 1$.

Assinale aos seguintes itens **V** ou **F** se as afirmações forem verdadeiras ou falsas, respectivamente (justifique brevemente sua resposta):

- (a) **(5 pontos)** Na temperatura de 30.000 K, as três espécies apresentam aproximadamente a mesma abundância no plasma.
- (b) **(5 pontos)** A partir de 20.000 K basicamente todo átomo se encontra de alguma forma ionizado.
- (c) **(5 pontos)** Em alguma temperatura consideravelmente maior que 50.000 K, é esperada a queda da fração do íon He III e dominância do íon He IV.
- (d) **(5 pontos)** Existe uma temperatura na qual se observam as três espécies em quantidades significativas (acima de 0.5%).

- (e) **(5 pontos)** Existem duas temperaturas nas quais metade das partículas no plasma são íons He II.
- (f) **(5 pontos)** No núcleo de uma estrela (onde a pressão eletrônica é maior), esperamos que a ionização aconteça a temperaturas maiores que na superfície.
- (g) **(5 pontos)** Quanto maior a temperatura de um corpo celeste, mais intensas são as linhas de emissão do íon He II.
- (h) **(5 pontos)** Nebulosas com fortes linhas de He II são tipicamente nebulosas planetárias.
Dado: Esse tipo de nebulosa atinge em seu centro temperaturas entre 16.000 K e 25.000 K, ao contrário de nebulosas de reflexão ou absorção ($T \lesssim 10.000$ K) ou do meio interestelar morno ($T \sim 10^5$ K).

9. Dueto (40 pontos) Ao olhar para o céu noturno, Raul notou que as estrelas Hamal (α Ari, $\delta = 23^\circ 34' 56,7''$, $\alpha = 2^{\text{h}} 08^{\text{m}} 35,02^{\text{s}}$) e Mirach (β And, $\delta = 35^\circ 45' 18,0''$, $\alpha = 1^{\text{h}} 11^{\text{m}} 07,58^{\text{s}}$) estavam se pondo exatamente no mesmo instante.

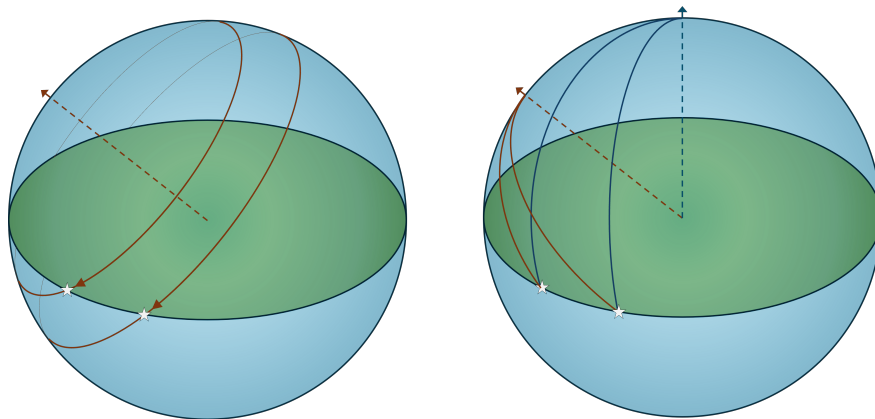


Figura 6: Representação esquemática da situação (fora da escala). À esquerda, o ocaso simultâneo das estrelas. À direita, os arcos que conectam as estrelas ao polo elevado e ao zênite.

- (a) **(10 pontos)** Determine a diferença entre os azimutes de Mirach e Hamal no momento dessa observação.
 - (b) **(24 pontos)** Determine o ângulo horário de cada uma dessas estrelas.
 - (c) **(6 pontos)** Determine a latitude de Raul.
- 10. Erro de perspectiva (75 pontos)** Trevisan reside no planeta DV-41, que orbita uma estrela de massa $M = 4M_\odot$ e magnitude aparente $m_e = -27$ mag a uma distância 3 UA. Ele procurava asteroides troianos do seu planeta, os quais se localizam no ponto de estabilidade L4 (à frente do planeta DV-41). Analisando atentamente, Trevisan identificou um asteroide na mesma linha de visada de L4, mas que se movimentava de forma diferente dos demais. Pesquisando em sua base de dados, descobriu que o asteroide se chamava PL-01 e possuía uma órbita circular, porém de raio maior que a do planeta DV-41. Na base de dados, ele também descobriu que a última vez que essa configuração de alinhamento entre o planeta e o asteroide ocorreu foi a 4,55 UA
- Dica:** Trevisan não gosta de números, apenas de contas literais! para evitar descontos de dupla penalização entre os itens, desenvolva todo o raciocínio de cada item sem substituir valores numéricos, e apenas no final substitua os valores para a resposta final. Uma quantidade pequena da pontuação é atribuída ao valor numérico correto, enquanto que a maior parte da pontuação é dada ao chegar nas expressões literais corretas.

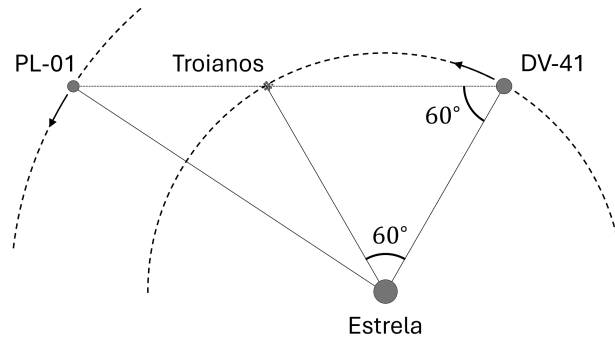


Figura 7: Representação da situação da órbita. Os troianos ocupam o ponto chamado L4, um dos quais forma um triângulo equilátero com DV-41 e a estrela. A outra possibilidade de formação de um triângulo equilátero é chamada L5. Para distinguir entre os pontos, perceba que L4 está “à frente” da órbita, enquanto L5 estaria “atrás”.

- (4 pontos) Determine o período orbital de PL-01.
- (20 pontos) Determine a distância do asteroide até o planeta DV-41.
- (9 pontos) Determine o ângulo de separação, centrado na estrela, entre o planeta e o asteroide na situação de alinhamento com L4.
- (14 pontos) Determine o tempo necessário para que o asteroide se alinhe com L4 novamente.
- (6 pontos) Determine o tempo desde o alinhamento do asteroide com L4 até seu alinhamento com L5.

Trevisan quis tirar uma foto do asteroide em seu ponto de maior aproximação. Para isso, ele decidiu utilizar um telescópio de 500 mm de foco, acoplado a uma CCD com pixels de $10 \mu\text{m}$ e a um motor que corrige a rotação de DV-41 (ou seja, para os itens a seguir, desconsidere os efeitos de rotação do planeta).

- (16 pontos) Determine a velocidade angular de PL-01 em relação ao céu de fundo, visto de DV-41, no ponto de maior aproximação.
- (6 pontos) Determine o maior tempo de exposição para que o asteroide não se mova o equivalente a um pixel na imagem do CCD.