



**PROVA TEÓRICA TREINAMENTO 3**  
**SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS**  
**OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2023**

---

## Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. **NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.**
4. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos).
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

## Instruções Específicas

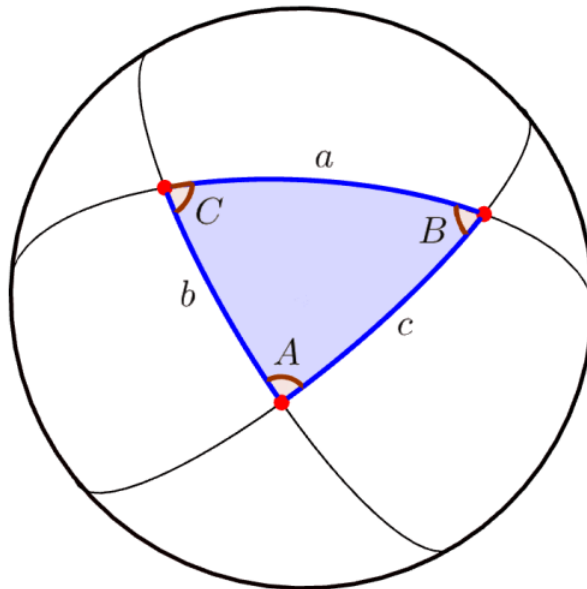
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Regras básicas de derivação e integração para uma função do tipo  $y(x) = x^n$ :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

em que  $C$  é uma constante.

**1. Óptica de Telescópios (10 pontos)**

Num telescópio refrator ideal de razão focal  $f/5$ , a distância focal da objetiva é de 100 cm, e a da ocular 1 cm.

- (a) **(3 pontos)** Qual é o aumento  $A$  do telescópio? Qual é o comprimento focal do telescópio  $L_0$ , ou seja, a distância entre a objetiva e a ocular?

A introdução de uma lente côncava (Barlow) entre a objetiva e o foco primário é uma técnica comum para se obter um maior aumento sem ter que se aumentar o comprimento focal do telescópio. Uma lente Barlow, de distância focal 1 cm, é então colocada no telescópio e dobra sua ampliação.

- (b) **(7 pontos)** A que distância  $d_B$  do foco primário a lente Barlow deve ser colocada para se conseguir o dobro do aumento? Determine, nesse caso, o incremento  $\Delta L$  no comprimento do telescópio.

**2. Retorno à Polônia (15 pontos)**

As distâncias interestelares são grandes em comparação com os tamanhos das estrelas. Assim, aglomerados estelares e galáxias que não contêm matéria difusa essencialmente não obscurecem os objetos atrás deles. Estime a fração do céu que é obscurecida por estrelas quando olhamos na direção de uma galáxia com brilho superficial de  $\mu = 18,0 \text{ mag arcsec}^{-2}$ . Suponha que a galáxia consiste em estrelas semelhantes ao Sol.

**3. Estrela Politrópica (15 pontos)**

- (a) **(9 pontos)** Considere uma estrela de massa  $M$  e raio  $R$  que possua uma relação politrópica entre a sua pressão e densidade da forma  $P = K\rho^{1+1/n}$ . Utilizando-se algumas técnicas de integração, conclui-se que a energia potencial gravitacional  $\Omega$  de uma estrela politrópica pode ser representada da seguinte forma:

$$\Omega \equiv - \int_c^s \frac{GM_r dM_r}{r} = -\frac{GM^2}{2R} - \left[ \frac{n+1}{2} \frac{4\pi}{3} P r^3 \right]_c^s + \frac{n+1}{6} \int_c^s 4\pi r^3 dP$$

onde  $M_r$  representa a massa contida até uma distância  $r$  do centro, e os índices  $s$  e  $c$  na integral representam, respectivamente, os valores apropriados dos limites de integração na superfície e centro da estrela. Assim, calcule o valor de  $\alpha$  na equação  $\Omega = \alpha \frac{GM^2}{R}$  em função de  $n$ . Considere que a pressão tende a zero na superfície.

- (b) **(6 pontos)** Estime a relação massa-raio dessa estrela com base na relação politrópica fornecida no item anterior, i.e., ache o valor de  $\beta$  na relação  $M \propto R^\beta$  em função de  $n$ .

**4. Chuva de Meteoros (20 pontos)**

Considere um radar que detecta meteoros apenas quando a trilha de ionização é perpendicular à linha entre o radar e o meteoro. Esse radar está a uma latitude de  $52,0^\circ N$ . No dia 2 de julho, às 11:02 no horário local, meteoros provenientes de uma chuva foram detectados no horizonte exatamente na direção leste. O radar foi girado em  $40,0^\circ$  ao longo do horizonte em direção ao sul. Em sua nova posição, começou a detectar meteoros da mesma chuva às 12:42. Encontre as coordenadas equatoriais do radiante dessa chuva de meteoros.

Considere que a ascensão reta do Sol nesse dia era de aproximadamente 6h43min. Ignore a equação do tempo e a diferença entre o horário solar e o horário civil. Além disso, considere que o radiante estava acima do horizonte durante as duas observações.

**5. Wi-Fi Polar (25 pontos)**

A fabricante estadunidense de foguetes SpaceX começou a colocar satélites *Starlink* em órbita polar em setembro de 2021, com seu primeiro lançamento do tipo na Base da Força Aérea de Vandenberg,

Califórnia. Considere um satélite *Starlink* que se move em uma órbita polar geocêntrica de semi-eixo maior  $a = 15.400$  km, excentricidade  $e = 0,55$  e argumento do periastro  $\omega = 270^\circ$ . Imagine um observador no Polo Norte terrestre. O satélite emite um sinal com frequência de 2,4 GHz. Em algum momento, o satélite é observado no horizonte. Encontre:

- (a) (12 pontos) A distância do observador ao satélite.  
 (b) (13 pontos) A mudança na frequência do sinal captado.

### 6. Polônia 2022 (30 pontos)

O gráfico abaixo representa um trecho da curva de luminosidade de uma binária eclipsante. Assumindo que as componentes desse binário são estrelas de sequência principal de idade zero, que suas órbitas são circulares e que são coplanares ao observador, encontre qual dos mínimos de brilho (primário ou secundário) está representado no gráfico.

**Observação:** Na solução, utilize apenas os dados fornecidos no enunciado ou na folha de constantes.

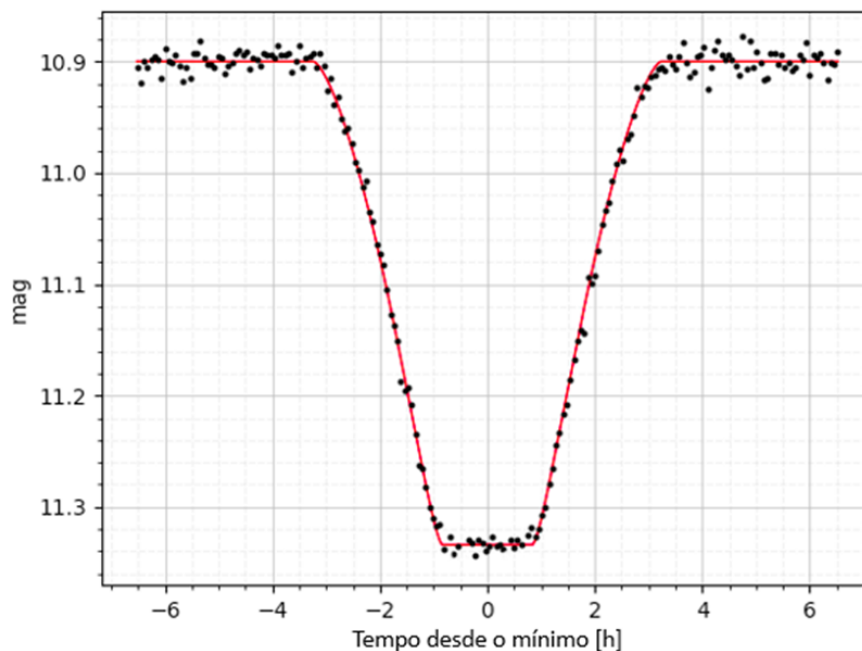


Figura 1: Trecho de curva de luz de uma binária eclipsante.

### 7. Eclipse Solar (30 pontos)

Um certo eclipse solar total ocorre no dia do equinócio de março de tal maneira que o caminho da totalidade passa pelo Equador terrestre formando um ângulo  $\alpha = 15,0^\circ$  com o mesmo. Durante o eclipse, a Lua está situada perto do nodo ascendente da órbita. Qual o valor da altura máxima sobre o horizonte que o eclipse central poderá ser observado? Em que latitude na Terra o eclipse central será observado nessa máxima altura?

### 8. Emissão Síncrotron: Explorando a Radiação de Alta Energia (45 pontos)

A *emissão síncrotron* é um fenômeno que ocorre quando partículas carregadas, como elétrons, são aceleradas em campos magnéticos intensos. Essas partículas em movimento curvilíneo emitem radiação eletromagnética de alta energia, que pode ser observada em diversas regiões do espectro

eletromagnético, desde rádio até raios gama. Esse fenômeno é observado em diversos contextos astronômicos, como em jatos ultrarrelativísticos em nuvens de gás que orbitam buracos negros.

Quando alguma partícula está eletricamente carregada e é acelerada, ela emitirá energia na forma de ondas eletromagnéticas. A fórmula de Larmor quantifica essa energia por unidade de tempo, no referencial do elétron, da seguinte forma:

$$P' = \frac{2}{3} \frac{(e)^2 (a'_{\perp})^2}{c^3}$$

Em que  $P'$  é a potência emitida,  $e$  é a carga elétrica e  $a'_{\perp}$  a aceleração perpendicular ao raio de rotação, todos no referencial de repouso, ou seja, do elétron.

- (a) **(4 pontos)** Primeiramente, faremos um estudo da dinâmica relativista, com o apoio da visão cinemática do tema. Com isso em vista, use o fato de que  $a = \frac{dv}{dt}$  para mostrar que  $a = \frac{a'}{\gamma^2}$ , em que  $\gamma$  é o fator de Lorentz.
- (b) **(6 pontos)** No referencial do laboratório, podemos escrever a potência emitida por  $P = \frac{dE}{dt}$ . Demonstre que a potência é uma invariante.
- (c) **(10 pontos)** Sabendo que o vetor velocidade do elétron,  $\vec{v}$  e o vetor campo magnético,  $\vec{B}$ , fazem um ângulo  $\alpha$  entre si, mostre que a potência emitida, também conhecida por *Emissão Síncrotron*, é dada por:

$$P = \frac{2e^4 B^2 \sin^2(\alpha)}{3c^3 m_o^2} \left( \frac{E}{m_o c^2} \right)^2$$

Em que  $E$  é a energia total do elétron.

Ao longo de um pulso de emissão síncrotron, um elétron ultrarrelativístico ( $\gamma \gg 1$ ) percorre um ângulo  $\Delta\theta = \frac{2}{\gamma}$  em sua órbita. Considere, por simplificação, que o elétron está se movendo na direção de observador muito distante no momento da emissão.

- (d) **(15 pontos)** Utilize dessas informações para encontrar a duração de um pulso de energia do elétron. Disso, conclua que a frequência característica da emissão é:

$$\nu_c = \frac{eB}{m_o} \sin(\alpha) \left( \frac{E}{m_o c^2} \right)^2$$

- (e) **(10 pontos)** Considere um elétron ultrarrelativístico que emitiu, inicialmente, um pulso de frequência característica  $\nu_o$ . Mostre que o tempo para o elétron resfriar por radiação síncrotron, levando em consideração que ele emite energia de forma ininterrupta, é escrito da forma abaixo.

$$t = \frac{3m_o^3 c^3}{2e^4 B^2 \sin^2(\alpha)} \sqrt{\frac{eB \sin(\alpha)}{\nu_o m_o}}$$

## 9. O Retorno de Dr. Totávio (50 pontos)

Considere um estranho corpo celeste esférico de raio  $R$  e massa  $M$  e densidade uniforme, inteiramente composto por um fluido misterioso, o qual não oferece resistência alguma ao movimento de qualquer objeto através dele. O exímio engenheiro interplanetário Dr. Totávio, instigado pela natureza do corpo celeste, resolve embarcar em sua pedra espacial artificial para estudá-lo mais de perto. A pedra, de massa  $m \ll M$ , estava inicialmente a uma distância muito grande da estrela, se aproximando dela com velocidade inicial  $v_0$  e parâmetro de impacto  $b$ .

- (a) **(5 pontos)** Encontre a condição para que a pedra não colida com o corpo, em termos de  $R$ ,  $M$ ,  $v_0$  e  $b$ .
- (b) **(10 pontos)** Assumindo que a condição encontrada no item passado é satisfeita, obtenha, em termos de  $R$ ,  $M$ ,  $v_0$  e  $b$ , o ângulo de desvio  $\varphi$  da trajetória da pedra, ou seja, o ângulo formado entre os vetores velocidades inicial e final (após muito tempo).

- (c) **(10 pontos)** Neste item, suponha que a condição não é satisfeita e a pedra acaba colidindo com o corpo. Obtenha o novo ângulo de desvio  $\varphi'$  na trajetória da pedra, bem como o módulo de sua velocidade final após muito tempo, em termos das quantidades já introduzidas.
- (d) **(5 pontos)** A partir de agora, suponha que a pedra encontra-se em uma órbita elíptica em torno do corpo estranho, de energia mecânica total  $E$  e momento angular  $L$ . Encontre a condição para que a pedra colida com o corpo em algum ponto de sua órbita, em termos de  $E$ ,  $L$ ,  $m$ ,  $M$  e  $R$ .
- (e) **(15 pontos)** Se a condição do item passado for satisfeita, é evidente que parte da órbita da pedra estará localizada no interior do corpo. Devido a isso, a cada período (órbita completa), o periastro da órbita elíptica precessiona um certo ângulo  $\Delta\varphi$ . Determine  $\Delta\varphi$ , em termos de  $E$ ,  $L$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $R$ .
- (f) **(5 pontos)** Encontre uma condição, em termos de  $E$ ,  $L$ ,  $m$ ,  $M$  e  $R$ , para que um observador externo ao corpo estranho não consiga observar qualquer movimento aparente de precessão do periastro da órbita da pedra.