PROVA TEÓRICA 3

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **4 questões**, cada uma valendo 10 pontos.
   - Questões Médias - **4 questões**, sendo uma valendo 20 pontos, uma valendo 25 pontos, uma valendo 30 pontos e uma valendo 35 pontos.
   - Questões Longas - **2 questões**, cada uma valendo 75 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

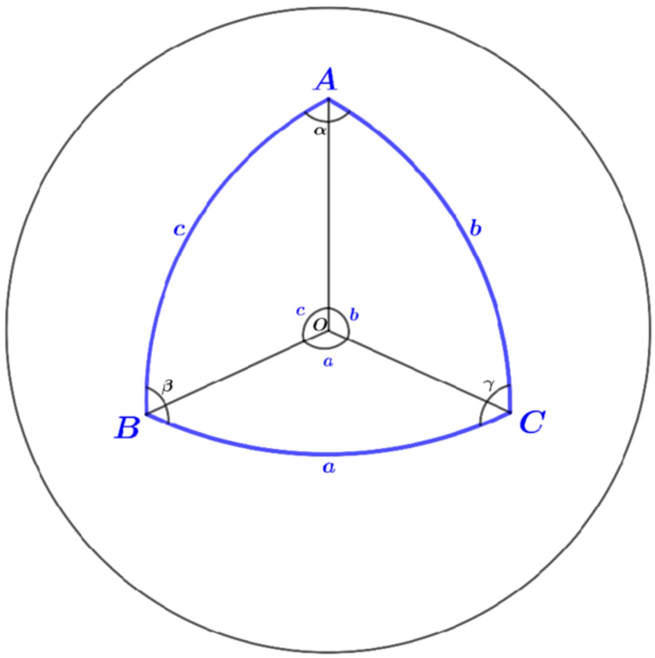
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74\ mag$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}\ W$	
Temperatura ($T_\odot$)	$5778\ K$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938{,}27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\alpha)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(\beta)\cdot\operatorname{sen}(\gamma) + \cos(a)\cdot\cos(\gamma) = \cot(b)\cdot\operatorname{sen}(a)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cdot\cos(\theta)}$$

- Forma Polar da parábola :

$$r(\theta) = \frac{2r_p}{1+\cos(\theta)}$$

- Primeira Equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

- Equação dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Onde $R > 0$ para faces convexas e $R < 0$ para faces côncavas, n_L é o índice de refração da lente e n_m é o índice de refração do meio.

Questões Curtas

1. **(Nebulosa Planetária - 10 pontos)** Uma nebulosa planetária antiga, com uma anã branca em seu centro, está localizada a 50 pc da Terra. Exatamente na mesma direção, mas atrás da nebulosa, está outra anã branca, idêntica à primeira, mas distante 150 pc de nós. Considere que as duas anãs brancas possuem magnitude bolométrica absoluta +14,2 e índices de cor intrínsecos $B - V = 0{,}300$ e $U - V = 0{,}330$. Há extinção no meio interestelar e na nebulosa planetária.

   Quando medimos os índices de cor para a anã branca mais próxima (aquela no centro da nebulosa planetária), encontramos os valores $B - V = 0{,}327$ e $U - B = 0{,}038$. Nesta parte da Galáxia, as taxas de extinção interestelar são 1,50, 1,23 e 1,00 magnitudes por kiloparsec para os filtros U, B e V, respectivamente. Calcule os índices de cor que seriam medidos para a segunda anã branca.

2. **(A Grande Nuvem de Magalhães em Phuket - 10 pontos)** As coordenadas da Grande Nuvem de Magalhães (LMC) são R.A. = 5h 24min e Dec = $-70°00'$. A latitude e longitude de Phuket são $7°53'$ N e $98°24'$ E, respectivamente. Em que data a LMC culmina às 21h em um determinado ano em Phuket? O Tempo Sideral em Greenwich (GST) às 00h de 1º de Janeiro é cerca de 6h 43min. Phuket está na zona horária UT+7.

3. **(Tully-Fisher - 10 pontos)** A equação de Tully-Fisher é uma correlação empírica entre a espessura da linha de hidrogênio de 21 cm e a luminosidade para cada tipo de galáxia. Esse resultado é equivalente a uma correlação geral entre a massa bariônica e a velocidade terminal, chamada de Relação Bariônica de Tully-Fisher (BTFR). O resultado abre margem à discussão sobre a existência de matéria escura. Segundo uma corrente chamada Dinâmica Newtoniana Modificada (MOND), não existe matéria escura, e, para longas distâncias as centro galáctico, a aceleração gravitacional efetiva assume a forma:

$$g_{MOND} \approx \sqrt{g_N \cdot a_0}$$

   Em que g_N é a gravidade newtoniana comum, e a_0 é uma constante determinada empiricamente. Observe o gráfico a seguir, com base nele, **justifique, com cálculos, se a MOND é condizente com a BTFR**:

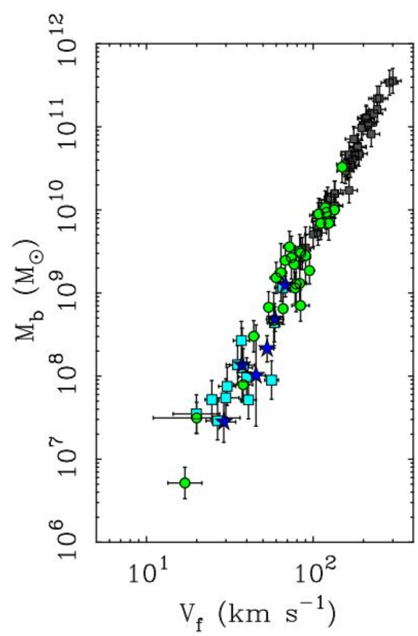
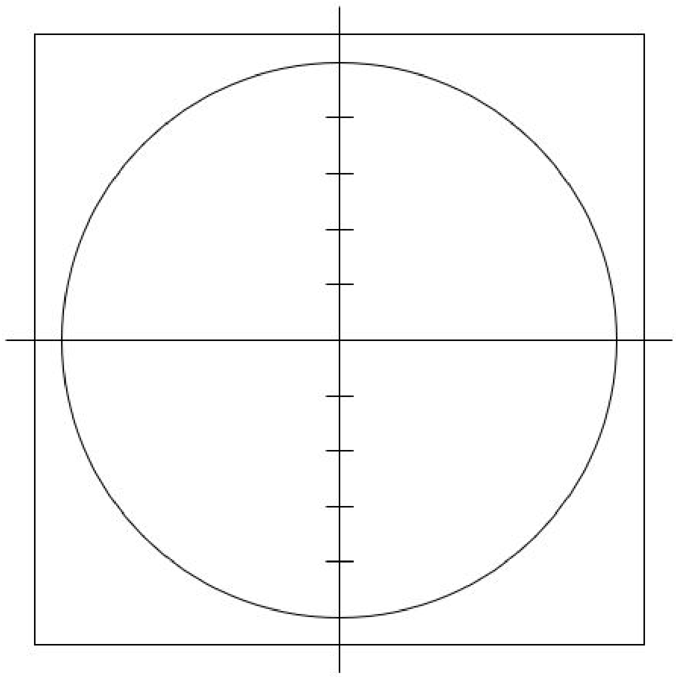


Figura 1: massa bariônica (M_b) *versus* velocidade terminal (V_f). Retirado de *The Baryonic Tully-Fisher Relation of gas rich galaxies as a test of* Λ*CDM and MOND*, de Stacy S. McGaugh

4. **(Vendo pela ocular - 10 pontos)** Durante sua estadia em Vinhedo (latitude $\varphi_V = 23°01'47"S$; longitude $\lambda_V = 46°58'28"O$), Ian deseja utilizar seu telescópio para observar a estrela *alpha* da constelação de *Eupho*, Kotoko (declinação $\delta_K = 36°40'14"N$; ascensão reta $\alpha_K = 5h15min37s$).

   Para isso, ele se utiliza de um telescópio de distância focal $f_{tel} = 600mm$, e uma ocular de distância focal $f_{ocu} = 12mm$ e campo visual $C_0 = 50°$; ambas objetiva e ocular são lentes convergentes. Ian aponta o telescópio de forma que sua projeção esteja sobre a direção norte-sul, e sua altura seja de $h_{tel} = 30°$.

   A figura a seguir representa a visão de Ian pela ocular do telescópio. Sobre ela, **(i)** esboce a trajetória da estrela, marcando com uma seta a direção aparente de movimento e **(ii)** indique, na imagem, os sentidos norte (N), sul (S), leste (L) e oeste (O) da forma vista através do telescópio. Justifique seu gabarito na folha de respostas. Se seus rascunhos tornarem o desenho incompreensível, você pode reproduzi-lo na folha de respostas.



Questões Médias

5. **(Magnetosfera - 20 pontos)** Uma estrela de nêutrons em acreção tem uma luminosidade $L = 10^{30}$ W e uma massa $M = 1{,}4\ M_\odot$ e raio $R = 10$ km. Medições do espectro da estrela mostraram a presença de uma linha de ciclotron com uma energia de fóton $E = 30$ keV (a frequência de radiação corresponde à frequência de rotação do elétron em um campo magnético), com o redshift gravitacional já levado em consideração. Sabe-se que, no limite da magnetosfera, a pressão dinâmica da matéria em queda é equilibrada pressão do campo magnético. Assumindo que a acreção é esfericamente simétrica e levando em conta que a linha do ciclotron é formada perto da superfície da estrela, e que a intensidade do campo magnético depende da distância ao centro da estrela como $B \propto r^{-3}$, estime o raio (em km) da magnetosfera para esta estrela. A pressão do campo magnético pode ser encontrada pela fórmula $p = \kappa B^2$, com $\kappa = 4 \cdot 10^5$ Pa/T^2.

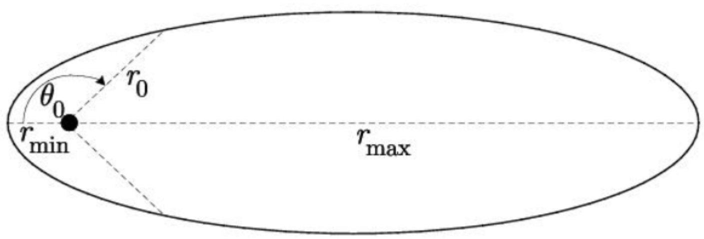
OBS: No processo de acreção, as partículas vêm do infinito com velocidade nula. Ademais, considere que a acreção é o único mecanismo responsável por sustentar a luminosidade da estrela.

6. **(Galáxia se expandindo - 25 pontos)** Ualype, um grande cosmólogo, está observando a galáxia Andrémeda. Segundo seus cálculos, essa galáxia possui magnitude superficial de 23,7 $mag/arcsec^2$ e diâmetro de 5,1" quando vista a partir da Terra. Para os itens abaixo, considere um universo plano que contém apenas matéria não relativística:

   (a) **(7 pontos)** Caso fosse desconsiderado os efeitos de expansão cosmológica, Ualype sabe que a galáxia teria uma magnitude superficial de 19,4 $mag/arcsec^2$. Sendo assim, calcule o redshift da galáxia.

   (b) **(18 pontos)** Ualype descobriu uma estranha propriedade da galáxia: quando observada no presente tempo t_0, seu diâmetro se mantém inalterado, isto é: $\frac{d\theta}{dt_0} = 0$, onde θ é o diâmetro angular da galáxia. Calcule a velocidade na qual o raio da galáxia R cresce para que tal fenômeno ocorra.

7. **(Cometa derretendo - 30 pontos)** O Cometa *Hale-Bopp*, orbitando o sol em uma trajetória elíptica, tem periélio $r_{min} = 0{,}914\ UA$ e afélio $r_{max} = 370{,}8\ UA$. Seu núcleo é composto majoritariamente por gelo. O valor do albedo do cometa é $A = 0.1$. Quando o cometa se encontra a uma distância de $r_0 = 3{,}0\ UA$ do Sol, o gelo presente neste começa a sublimar de forma não desprezível. Estima-se que o núcleo é uma esfera de raio de cerca de 10 km.



   (a) **(7,5 pontos)** Encontre o ângulo θ_0, em graus.

   (b) **(20 pontos)** Encontre a variação de raio do cometa δR, em metros, após uma órbita completa. Considere que há sublimação do gelo apenas para distâncias menores que r_0.

   (c) **(2,5 pontos)** Após quanto tempo, em anos, o cometa desaparecerá?

   Dados para o problema:

   - Calor latente de vaporização do cometa *Hale-Bopp*: $\zeta_{vap} = 2 \cdot 10^6\ J/kg$
   - Densidade do cometa *Hale-Bopp*: $\rho = 1\ g/cm^3$
   - Período orbital do cometa *Hale-Bopp*: $P = 2520\ anos$

8. **(Bismarckchote - 35 pontos)** Inspirado pelos romances europeus, Bismarck um dia enlouquece e pensa ser um grande conquistador do além-mar. Em sua morada em São José dos Campos (latitude: 23°10′44" S; longitude: 45°53′13" O), Bismarck observa o pôr-do-Sol em um dia de solstício de inverno (Equação do Tempo: -6,5 min). O Sol nunca se põe no Império Bismânicko! Nosso astrônomo começa a caminhar com o intuito de que o Sol permaneça sempre no horizonte. Considere que o pôr-do-Sol se inicia quando a altura do centro de seu disco é nula e despreze efeitos do movimento anual aparente do Sol.

   (a) **(6 pontos)** A que horas, no horário civil, Bismarck começará sua caminhada? Considere que São José dos Campos segue o horário de Brasília (UTC-3).

(b) **(9 pontos)** Como primeira alternativa, Bismarck considera correr em direção a um dos polos geográficos. **(i)** Especifique para qual Polo será seu movimento, e **(ii)** calcule com qual velocidade Bismarck deve se locomover inicialmente.

Dica: Se preciso for, considere as derivadas a seguir.

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(c) **(20 pontos)** Após ponderar sobre o problema, Bismarck decide subir uma montanha inclinada 5° com o horizonte. Sabendo-se que ele consegue correr, no máximo, até 5 $m.s^{-1}$, por quanto tempo será possível manter o Sol no horizonte?

Questões Longas

9. (Expedição... em um Planeta Anão! - 75 pontos) Em um futuro não tão próximo, a humanidade evoluiu ao ponto de conseguir colonizar outros mundos! Em específico, expedições à planetas anões - com o objetivo de limpar o terreno e promover a criação de colônias humanas - tornaram-se empreendimentos comuns. Uma dessas expedições de escavação é liderada pelo exímio Dr. Totávio, uma das maiores referências no ramo de engenharia interplanetária. O planeta alvo da expedição é o recém-descoberto JUVENTUS-3022, o qual possui densidade uniforme, raio R, e massa M. Durante a operação, diversos pedregulhos acabaram sendo lançados do sítio de escavação. Totávio, distraído pelo movimento dos fragmentos, abandona seu posto de forma imprudente e resolve estudar a trajetória dos objetos. Considere que uma dessas pedras de massa $m \ll M$ é lançada da superfície do planeta, do ponto I na figura 2, com uma velocidade inicial $\vec{u}$, a qual forma um ângulo θ com a vertical local.

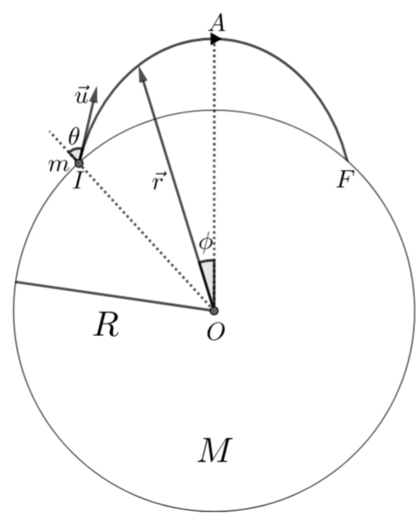


Figura 2: Ilustração da situação apresentada

A trajetória do pedregulho é uma elipse, e sua posição, em qualquer momento, pode ser caracterizada em termos de $\vec{r}$ - a sua distância ao centro O do planeta - e do ângulo ϕ, definido na figura. Note que $\phi = 0$ corresponde ao ponto na órbita mais distante do planeta (A), e também que ϕ cresce no sentido anti-horário. Seja G a constante gravitacional universal, e a excentricidade da órbita, a o semi-eixo maior da órbita, e L o módulo do momento angular da pedra relativo ao centro do planeta. Agora, ajude Totávio em sua aventura!

(a) **(3 pontos)** Defina $h = L/m$ como o momento angular específico do pedregulho. Determine h em função de R, u, e θ.

(b) **(4 pontos)** Determine a em função de G, M, R, e u.

(c) **(3 pontos)** Encontre e em função de h, G, M, u, e R.

(d) **(10 pontos)** Após ser lançado, o pedregulho eventualmente choca-se com a superfície do planeta no ponto F, que verifica-se ser diametralmente oposto a I. Sabendo que a velocidade de lançamento vale $u = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{GM}{R}}$, calcule o ângulo θ.

Para calcular o tempo de voo da pedra, é interessante utilizarmos o conceito de anomalia excêntrica. Acompanhe o diagrama na figura 3.

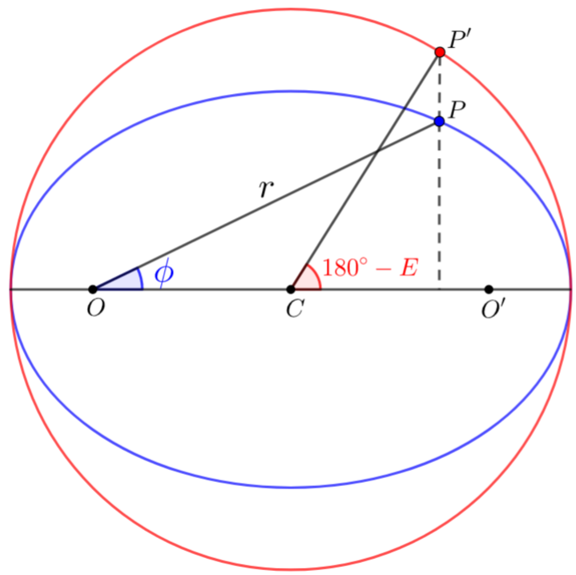


Figura 3: Geometria da órbita, com as construções necessárias para a definição da anomalia excêntrica

A órbita em azul representa a trajetória elíptica completa do objeto (isto é, a trajetória da partícula caso ela orbitasse uma massa M fixa em O sem barreiras em seu caminho), centrada em C e de focos primário e secundário O e O', respectivamente. Trace agora, em vermelho, a circunferência de diâmetro igual ao eixo-maior da elipse, e que a tangencia em dois pontos (apoastro e periastro). Trace a vertical passando por um ponto qualquer P da órbita, e tome o seu ponto de intersecção com a circunferência mais próxima de P (P' na figura). A definição da anomalia excêntrica E pode ser, então, extraída da figura. Considere que E é contado no sentido anti-horário a partir do periastro (onde $E = 0$).

(e) **(8 pontos)** Escreva a distância r, em termos de a, e e E.

(f) **(14 pontos)** É possível mostrar que

$$(1 - e\cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt}\right)^2 = \frac{kGM}{a^3},$$

em que k é um número real. Determine k.

Dica: Escreva a energia mecânica total do pedregulho. O resultado do item passado pode ser bastante útil.

(g) **(18 pontos)** Determine T, o tempo total de voo da pedra; i.e., o tempo transcorrido entre seu lançamento em I e posterior impacto em F. Deixe sua resposta em função de G, M, e a.

Dica: Se precisar, use que $\int_{x_1}^{x_2} \cos(x)dx = \sin(x_2) - \sin(x_1)$

Findado o seu estudo do movimento balístico dos pedregulhos, Dr. Totávio retorna ao local de escavação. Felizmente, os escavadores fizeram um bom trabalho, cavando um buraco retilíneo de comprimento R e largura muito fina, que se estende da superfície até o centro O do planeta. Assuma que o buraco não interfere na distribuição de massa do planeta. Totávio, que não consegue esconder o seu amor por pedras, resolve estudar o movimento de um pedregulho no buraco.

(h) **(7 pontos)** Sendo $0 < x < R$ a coordenada que representa a distância ao centro do planeta, determine o módulo da aceleração gravitacional, $g(x)$. A sua resposta deve ficar em função de G, M, e x.

(i) **(8 pontos)** Determine o tempo necessário para o pedregulho impactar o centro do planeta, em função de G, M, e R.

10. (Sequência Principal - 75 pontos) A sequência principal representa o estágio evolutivo em que as estrelas geram energia pela fusão de átomos de hidrogênio em hélio em seu núcleo. A geração de energia por fusão mantém a estrela em equilíbrio hidrostático, contrabalanceando a pressão gravitacional das camadas externas. Nesse problema, serão exploradas algumas das propriedades das estrelas da sequência principal.

Parte A - Tempo de vida do Sol

(a) **(5 pontos)** O Sol mantém sua temperatura graças às reações de fusão nuclear que ocorrem em seu núcleo, que podem ser descritas por:
$4\,\mathrm{p}^+ \longrightarrow \mathrm{He}^{2+} + 2\mathrm{e}^+ + 2\,\nu_\mathrm{e}$
Onde p^+ denota um próton, He^{2+} um núcleo de hélio, e^+ um positron e ν_e um neutrino de elétron de massa de repouso desprezível. Mostre que a energia liberada pela fusão de 4 prótons é dada por $W_0 = 25\ MeV$.

(b) **(5 pontos)** Antimatéria não pode coexistir com matéria: ao se encontrarem, um pósitron e um elétron desaparecem produzindo dois fótons. Quanta energia W_1 deixa o Sol para cada fusão de quatro prótons em um núcleo de hélio considerando aqui também o efeito de aniquilação matéria-antimatéria?

(c) **(13 pontos)** Supondo que apenas o núcleo do Sol - que possui $\frac{1}{8}$ da massa total do Sol - é quente o suficiente para que a reação de fusão ocorra, e desprezando a energia transportada pelos neutrinos, estime o tempo de vida total do Sol. Observe que não há convecção nas partes centrais do Sol e, portanto, as partículas dentro do núcleo do Sol permanecem presas nele. Com base no seu resultado, comente a idade atual do Sol, $\tau = 5 \cdot 10^9\ anos$.

Parte B - Relação Massa - Luminosidade

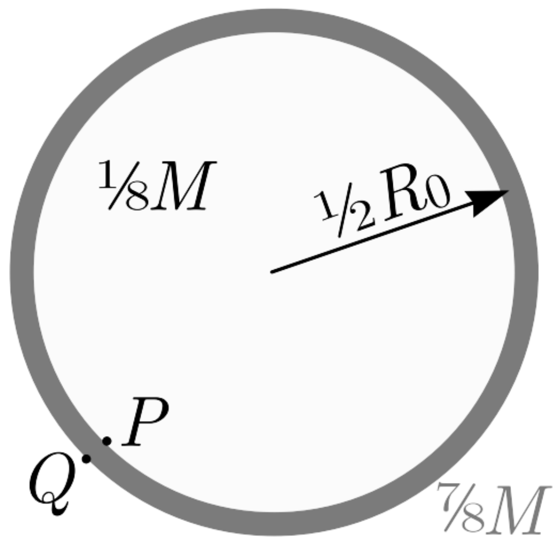
Dentro dos núcleos das chamadas estrelas da sequência principal (como nosso Sol), a reação de fusão ocorre em regime estável: se as flutuações aumentassem ligeiramente a velocidade das reações de fusão, o aumento da produção térmica levaria a um aumento da pressão, a uma expansão térmica do plasma de fusão e, como resultado, a uma diminuição da velocidade da reação. A velocidade de reação cresce muito rapidamente com a temperatura e, por causa disso, mesmo se as taxas de reação em diferentes estrelas de diferentes massas difiram consideravelmente, as temperaturas interiores permanecem bastante semelhantes. Sendo assim, você pode supor que a temperatura dos núcleos das estrelas é independente da massa estelar e igual a

$$T_c = 1{,}8 \cdot 10^6\ K$$

Esta aproximação funciona particularmente bem para estrelas maiores que o Sol.

Para tornar os próximos cálculos matematicamente mais fáceis, faça as seguintes aproximações adicionais:

- A massa do núcleo estelar é de $\frac{M}{8}$ e seu raio é $\frac{R_0}{2}$, onde M é a massa total da estrela e R_0 seu raio.
- A densidade de massa ρ_c, a pressão p_c e a temperatura T_c dentro do núcleo estelar podem ser aproximadamente tomadas como constante em todo o seu volume.
- **Para os itens d) até o g)**, assuma também que o restante da massa da estrela $\frac{7M}{8}$ está concentrada em uma estreita camada esférica de raio $\frac{R_0}{2}$ ao redor do núcleo, como na figura abaixo. Na realidade, isso certamente não é verdade - a camada não é estreita. No entanto, esta aproximação terá apenas um pequeno efeito na expressão para a pressão (no item h).



(d) **(5 pontos)** Expresse a aceleração gravitacional imediatamente acima da camada esférica estreita (ponto Q na figura) em termos de M e R_0.

(e) **(5 pontos)** Expresse a aceleração gravitacional imediatamente abaixo da estreita camada esférica (ponto P na figura) em termos de M e R_0.

(f) **(5 pontos)** Expresse a força da gravidade agindo em um pequeno pedaço da camada esférica estreita em termos de sua área de superfície A, M e R_0.

(g) **(5 pontos)** Expresse a pressão p_c em termos do raio R_0 e da massa M da estrela.

(h) **(10 pontos)** Derive outra expressão para a pressão p_c, dessa vez em termos de R_0, M e a temperatura central T_c. Assuma que o núcleo de uma estrela é composto de hidrogênio totalmente ionizado, ou seja, existem prótons livres e elétrons livres, ambos os quais podem ser descritos como gás ideal.

(i) **(5 pontos)** Com base em seus resultados anteriores, expresse o raio R_0 de uma estrela em termos de sua massa M e a temperatura do núcleo T_c.

(j) **(17 pontos)** O poder radiativo de uma estrela é limitado pela taxa que o calor produzido pode viajar através das camadas externas da estrela até chegar a sua superfície. A condutividade térmica κ é definida como sendo o coeficiente de proporcionalidade entre a densidade de fluxo de calor (potência térmica por unidade de área) e o gradiente de temperatura $\frac{dT}{dr}$, onde r é a distância até o centro da estrela. Para plasma, a condutividade térmica é inversamente proporcional à sua densidade, $\kappa = f(T)/\rho$. Assuma que κ é constante em todo o volume da estrela, até para regiões próximas à superfície em $r = R_0$ onde $T \ll T_c$, e é igual a $\kappa = f(T_c)/\rho_c$. Mostre que a potência radiativa total L (luminosidade) é proporcional a M^γ, e encontre o expoente γ.