



PROVA TEÓRICA P3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

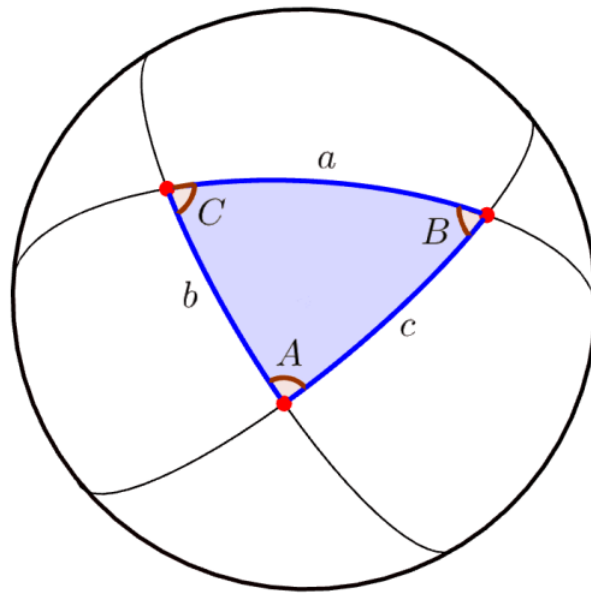
1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Equação dos gases ideais:

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

Questões Curtas

1. LSST (15 pontos)

O LSST, ou Legacy Survey of Space and Time (tradução livre: Levantamento para o Legado do Espaço e do Tempo), é um levantamento astronômico, ou seja, um estudo do céu como um todo. O LSST será feito no Observatório Vera C. Rubin, nomeado em homenagem à astrônoma estadunidense que determinou, além de outras coisas, que as curvas de rotação de galáxias não eram explicadas pela matéria observada. O Observatório Rubin ficará no Cerro Páchon, uma montanha no deserto do Atacama, no Chile.

Esse levantamento tem como objetivo principal entender a matéria e a energia escura, além de realizar um inventário de objetos do sistema solar, buscar por transientes e mapear a via láctea e a sua vizinhança. Para isso, o LSST observará cerca de metade do céu, ou 18,000 graus quadrados durante um período de 10 anos (2025-2035).

Para que seja possível realizar tamanha tarefa, foi necessário projetar um telescópio e uma câmera que esteja pronto para o desafio. Nessa questão, estudaremos um pouco sobre a instrumentação que torna o LSST possível, incluindo a maior câmera digital existente.

- (a) **(7 pontos)** Observe a imagem a seguir:

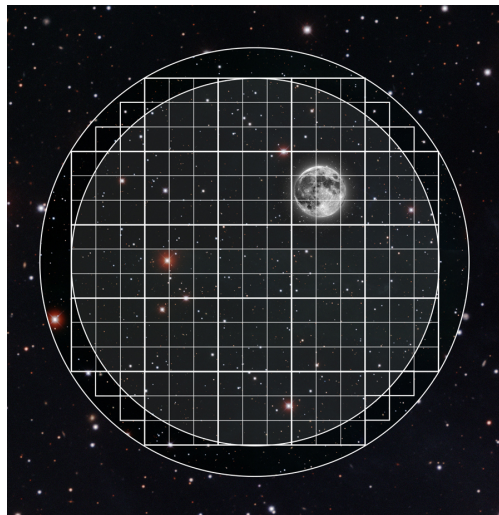


Figura 1: Plano focal do LSST (diâmetro de 64 cm, ilustrado pelo círculo maior), um mosaico que fornece 3.2 gigapixels por imagem; a Lua (30 minutos de arco) ilustra o tamanho do campo de visão. **Crédito:** Rubin Observatory/NSF/AURA.

A partir das informações dadas na legenda, determine o campo de visão em graus e a resolução angular do CCD em segundos de arco por pixel. Estime também o tamanho do pixel em μm e assim calcule a escala de placa. Sabendo que o seeing mediano no pico do Cerro Páchon, onde ficará o Observatório Rubin, é de 0.7 segundos de arco, determine se o LSST será limitado pelo seeing ou pela resolução do CCD.

- (b) **(8 pontos)** Leia as alternativas a seguir e marque verdadeiro ou falso, justificando em ambos os casos. Respostas sem uma justificativa correta não serão contabilizadas.
- Um telescópio grande como o LSST (8m) que precisa se mexer rapidamente entre cada observação precisa de uma grande razão focal para facilitar esses movimentos.
 - O uso da óptica adaptativa se torna mais fácil quanto maior o campo de visão.
 - A razão sinal-ruído de uma observação feita por um telescópio é proporcional ao tempo de exposição.
 - O seeing muda quando mudamos o filtro pelo qual fazemos a observação.

Solução:

- (a) Por inspeção, temos 7 luas de ponta a ponta do CCD, o que dá um campo de visão de 3.5° . Também por inspeção, temos um total de $21 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 201$ quadradinhos. Arredondando para 200, obtemos que um quadradinho tem $32 \cdot 10^8 / (2 \cdot 10^2) = 16 \cdot 10^6$ píxeis/quadradinho. Temos assim que o lado de um quadradinho tem $4 \cdot 10^3$ píxeis. De ponta a ponta, temos um comprimento de $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^4$ píxeis. Convertendo o campo de visão para segundos de arco, temos a resolução do CCD como $3.5 \cdot 60 \cdot 60 / (6 \cdot 10^4) \approx 0.2''/\text{píxel}$. Visto que a resolução do CCD é menor que o seeing, temos que o LSST será limitado por seeing.
- Sabendo que o plano focal tem 64cm de diâmetro, podemos estimar que um píxel tem $64 / (6 \cdot 10^4) \approx 10 \mu\text{m}$. Dessa forma, podemos estimar a escala de placa como $0.02''/\mu\text{m}$.
- (b) (a) Falso, uma razão focal menor implica um telescópio mais compacto, que exige menos torque para ser rotacionado.
- (b) Falso, se o campo de visão é muito grande, o seeing vai variar muito dentro do campo de visão do telescópio, e realizar óptica adaptativa se torna inviável.
- (c) Falso, a razão sinal-ruído de uma observação feita por um telescópio é proporcional à raiz quadrada do tempo de exposição.
- (d) Verdadeiro, o seeing acontece por conta de refração, que é dependente da frequência da luz observada.

2. Ano Bissexto(15 Pontos)

Você tem as seguintes informações:

- Duração do ano sideral em dias siderais: 366.256363
 - Período de precessão dos equinócios: 25780.00 anos siderais
- (a) **(3 pontos)** Utilizando-se apenas das informações dadas, qual é a duração do ano tropical em dias solares?
- (b) **(4,5 pontos)** Muitas pessoas pensam que um ano bissexto ocorre simplesmente em anos múltiplos de 4. No entanto, o calendário gregoriano (nosso atual calendário) possui regras adicionais para anos que são múltiplos de 100 e 400.
Explique quais são essas ações extras para os anos múltiplos de 100 e 400, e por que elas são necessárias. Para justificar numericamente, utilize a duração do ano, arredondando-a para a quarta casa decimal com o algarismo sendo 5 (Ex: XXX,XXX5) como foi acordado em nosso calendário.
- (c) **(3 pontos)** Se não fizéssemos a aproximação anterior, com base nas regras do calendário gregoriano, após quantos anos teríamos um desvio acumulado de um dia em relação às estações?
- (d) **(4,5 pontos)** Elchym deu um soco na Terra e o seu período de precessão diminuiu para 2340 anos siderais. Qual nova regra deve ser adotada para anos bissextos?

Solução:

- (a) Primeiro, convertamos a duração do ano sideral para dias solares, subtraindo 1 (a rotação "sideral" extra em relação aos dias solares):
- Ano sideral em dias solares = $366.256363 - 1 = 365.256363$ dias solares.
- Em seguida, calculamos o tempo que a Terra leva para percorrer o deslocamento angular devido à precessão em um ano. Esse tempo deve ser subtraído do ano sideral (em dias solares) para obter o ano tropical, já que o ponto vernal se desloca para oeste.

$$\text{Tempo de precessão por ano} = \frac{\text{Ano sideral em dias solares}}{\text{Período de precessão}}$$

$$\text{Tempo de precessão por ano} = \frac{365.256363}{25780.00} \approx 0.01416820648 \text{ dias solares.}$$

Assim, a duração do ano tropical é: $365.256363 - 0.01416820648 \approx 365.242195$ dias solares.

- (b) A duração real do ano tropical é de aproximadamente 365.2422 dias solares. Para fins de cálculo do calendário gregoriano, uma aproximação comum utilizada é de 365.2425 dias.

O calendário juliano, anterior ao gregoriano, adicionava um dia bissexto a cada 4 anos, resultando em uma duração média de 365.25 dias. Isso gerava um excesso de $365.25 - 365.2425 = 0.0075$ dias por ano. Ao longo de 100 anos, esse erro acumulava $0.0075 \times 100 = 0.75$ dias, ou seja, quase um dia a cada século.

Então, ficou definido que todo ano múltiplo de 100, apesar de ser múltiplo de 4, não receberia o bissexto.

Contudo, o excesso em 100 anos era de apenas 0.75, não de 1. O que significa que então a cada 400 anos, $(4 \times 0.75 = 3)$ o excesso era de 3 dias, portanto em anos múltiplos de 400, poderíamos ter o bissexto novamente.

As regras extras do calendário gregoriano para anos múltiplos de 100 e 400 são:

- Anos múltiplos de **100 não são bissextos**.
- Exceto se forem múltiplos de **400**, caso em que **são bissextos**.

- (c) Se usarmos a duração mais precisa do ano tropical calculada no item (a), 365.2422 dias, e a duração média do ano no calendário gregoriano, 365.2425 dias, o desvio anual é:

$$365.2425 - 365.2422 = 0.0003 \text{ dias por ano.}$$

Para que esse desvio acumulado atinja um dia, levaria:

$$\text{Anos para 1 dia de desvio} = \frac{1 \text{ dia}}{0.0003 \text{ dias/ano}} \approx \mathbf{3333.33} \text{ anos.}$$

- (d) Se o período de precessão fosse de 2340 anos, o deslocamento angular anual seria maior, impactando a duração do ano tropical.

A duração do ano sideral em dias solares permanece $366.256363 - 1 = \mathbf{365.256363}$ dias solares.

O tempo de precessão por ano, com este novo período, seria calculado dividindo a duração do ano sideral em dias solares pelo período de precessão:

$$\text{Tempo de precessão por ano} = \frac{365.256363}{2340} \approx \mathbf{0.15609246} \text{ dias solares.}$$

Este valor representa o deslocamento extra em dia solar, indicando o quanto o ano tropical é mais curto que o sideral devido à precessão.

Consequentemente, a duração do ano tropical seria:

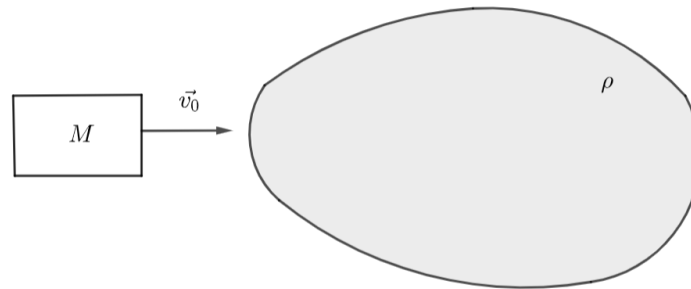
$$\text{Duração do ano tropical} = 365.256363 - 0.15609246 \approx \mathbf{365.10027} \text{ dias solares.}$$

Uma boa nova regra para bissexto, seria acrescentar um dia para anos múltiplos de 10.

3. Obstáculos dos Paulos (20 pontos)

Plo 1 e Plo 2 estavam navegando tranquilamente em um foguete pelo espaço, até que, subitamente encontraram uma nuvem composta por poeira de densidade ρ . Sabe-se que a massa inicial do sistema paulos-foguete é M_0 , que a seção-transversal do foguete é S , que as colisões com as partículas de poeira são elásticas e que o foguete ejeta massa à uma taxa constante μ e à uma velocidade de ejeção v_e para propulsão. Com base nisso, e de posse que a velocidade inicial do foguete é desprezível, determine a

equação do foguete dos Paulos, que relaciona a sua velocidade instântanea e massa instântanea.



Dado:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 - ax^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{ax}}{1 - \sqrt{ax}} \right) + C$$

Solução: Pela descrição do enunciado, sabemos que as partículas colidem elasticamente no foguete. Seja a velocidade do foguete v , as partículas se aproximam com velocidade v e se afastam com mesma velocidade v em seu referencial, tal que a variação de momento é dada por:

$$dp = -2vdm$$

onde:

$$dm = \rho\pi R^2 v dt$$

é a massa varrida pelo foguete em um intervalo de tempo dt . Assim:

$$dp = -2\rho\pi R^2 v^2 dt$$

ou seja:

$$\frac{dp}{dt} = -2\rho\pi R^2 v^2$$

Perceba que dp deve ser calculado levando em consideração a variação do momento do sistema foguete-massa ejetada. Tal que:

$$dp = p(t + dt) - p(t) = [(m - dm)(v + dv) + dm(v - v_e)] - mv$$

simplificando:

$$dp = m dv - dm v_e$$

assim:

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} v_e$$

Logo:

$$m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} v_e = -2\rho\pi R^2 v^2$$

mas

$$\mu = \frac{dm}{dt}$$

assim, eliminando a variável dt , obtemos:

$$\mu m \frac{dv}{dm} - \mu v_e = -2\rho\pi R^2 v^2$$

de modo que:

$$\frac{1}{v_e} \int_0^v \frac{dv}{1 - \frac{2\rho\pi R^2 v^2}{\mu v_e}} = \int_{M_0}^M \frac{dm}{m}$$

definindo

$$k = \frac{2\rho\pi R^2}{\mu v_e}$$

obtemos:

$$\frac{1}{2v_e\sqrt{k}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{kv}}{1 - \sqrt{kv}} \right) = \ln \left(\frac{M}{M_0} \right)$$

de modo que:

$$\boxed{\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1 + \sqrt{kv}}{1 - \sqrt{kv}} \right)^{\frac{1}{2v_e\sqrt{k}}}}$$

Questões Médias

4. Correção Bolométrica (20 pontos)

Correção Bolométrica (BC) é o valor de correção para se obter a magnitude bolométrica a partir da magnitude de um dado filtro x :

$$m_{bol} = m_x - BC_x.$$

A magnitude m_x de um filtro qualquer é definida de forma que sua correção bolométrica é nula para uma estrela de tipo espectral F5 ($T_{F5} = 6550$ K). Considere que o filtro da banda B possui comprimento de onda central $\lambda_B = 436$ nm e funciona como filtro ideal com largura de banda $\Delta\lambda_B = 94$ nm. Sobre esse sistema de magnitudes, responda:

Dados:

- i) A densidade de radiação, por unidade de comprimento de onda, por unidade de esfero-radiano pode ser aproximada pela expressão de Wien

$$B_\lambda(T, \lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \text{ para } e^{hc/(\lambda kT)} \gg 1.$$

- ii) Um passarinho que sabe integrar por partes uma vez te disse que

$$\int \frac{e^{-a/x}}{x^5} dx = \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{a^4} \left[\left(\frac{a}{x} \right)^3 + 3 \left(\frac{a}{x} \right)^2 + 6 \left(\frac{a}{x} \right) + 6 \right] + C$$

- (a) (10 pontos) calcule a razão $\frac{F_{0,bol}}{F_{0,B}}$, sendo $F_{0,bol}$ e $F_{0,B}$ os fluxos que possuem magnitudes nulas no sistema bolométrico e na banda B , respectivamente.
- (b) (10 pontos) Calcule BC_B para uma estrela de temperatura $T = 4000$ K

Solução:

(a) Podemos escrever as magnitudes como:

$$m_{bol} = -2,5 \log \left(\frac{F_t(T)}{F_{0,bol}} \right)$$

$$m_B = -2,5 \log \left(\frac{F_B(T)}{F_{0,B}} \right)$$

Calcular a luminosidade total em função da temperatura é facilmente feito pela lei de Stefan-Boltzman, sendo A a área da estrela :

$$L_t(T) = A\sigma T^4$$

Para calcular a luminosidade na banda B, precisamos integrar a densidade de fluxo ao longo do intervalo em que o filtro atua. Dessa forma,

$$L_B(T) = A \int_{\lambda_B - \Delta\lambda_B/2}^{\lambda_B + \Delta\lambda_B/2} B_\lambda(T, \lambda) d\lambda$$

Seria muito difícil resolver essa integral utilizando a expressão exata da lei de Planck, porém usando a aproximação de Wien, isso fica mais fácil.

$$L_B(T) = 2hc^2 A \int_{\lambda_B - \Delta\lambda_B/2}^{\lambda_B + \Delta\lambda_B/2} \lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} d\lambda$$

Utilizando a dica do passarinho tomando $a = \frac{hc}{kT}$, obtemos

$$L_B(T) = 2hc^2 A e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \left(\frac{hc}{kT} \right)^{-4} \left[\left(\frac{hc}{\lambda kT} \right)^3 + 3 \left(\frac{hc}{\lambda kT} \right)^2 + 6 \left(\frac{hc}{\lambda kT} \right) + 6 \right] \Bigg|_{\lambda_B - \Delta\lambda_B/2}^{\lambda_B + \Delta\lambda_B/2}$$

Por fim, sabemos que $m_{bol} = m_B$ para $T = 6550$ K. Assim,

$$\frac{F_t(T)}{F_{0,bol}} = \frac{F_B(T)}{F_{0,B}}$$

$$\frac{F_{0,bol}}{F_{0,B}} = \frac{L_t(T)}{L_B(T)}$$

Calculando os valores para $T = 6550$ K, obtemos $L_B(6550 \text{ K}) = A \cdot 4,532 \times 10^6 \text{ Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}$ e $L_t(6550 \text{ K}) = A \cdot 1,044 \times 10^8 \text{ Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}$. Dessa forma,

$$\boxed{\frac{F_{0,bol}}{F_{0,B}} = 23,0}$$

(b) Para calcular BC_B para $T = 4000$ K, realizamos um procedimento análogo:

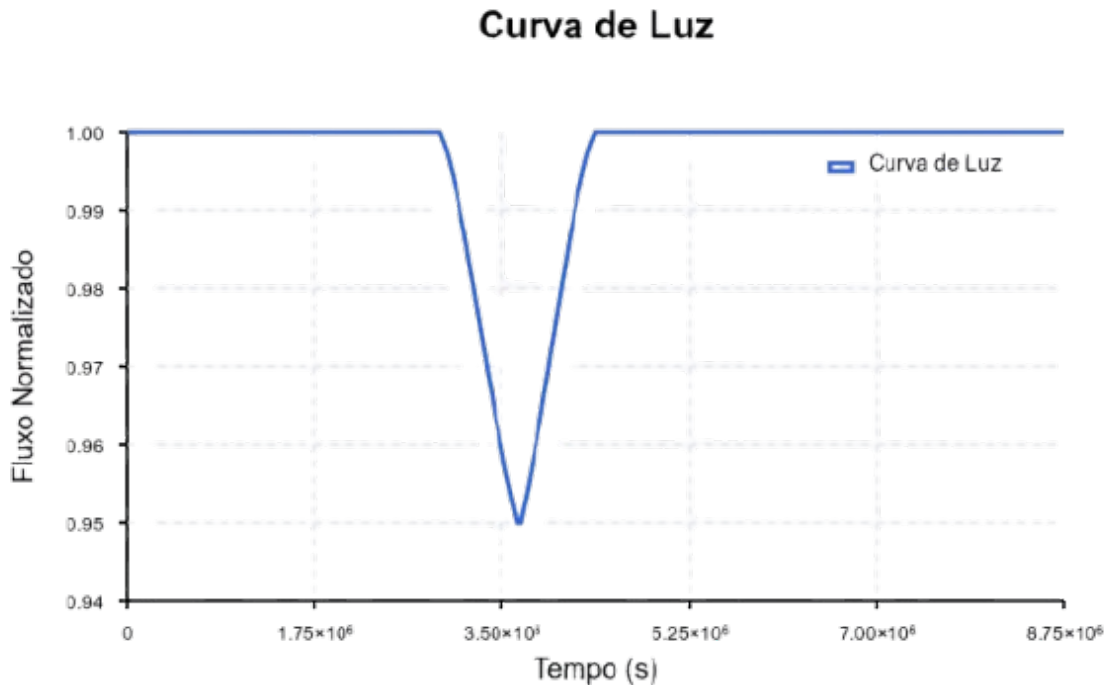
$$BC_b = m_B - m_{bol} = -2,5 \log \left(\frac{F_B(T)}{F_t(T)} \frac{F_{0,bol}}{F_{0,B}} \right)$$

Para $T = 4000$ K, obtemos $L_B(4000 \text{ K}) = A \cdot 1,831 \times 10^5 \text{ Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}$ e $L_t(4000 \text{ K}) = A \cdot 1,452 \times 10^7 \text{ Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}$. Sabendo a razão $\frac{F_{0,bol}}{F_{0,B}}$ do item anterior, chegamos então em

$$\boxed{BC_B = 1,34}$$

5. Pesquisas estelares (20 pontos)

Durante suas pesquisas sobre a curva de fluxo de estrelas distantes, Davi se deparou com o seguinte gráfico:



Os dados fornecidos por esse gráfico indicam a possível existência de um exoplaneta nesse sistema estelar. Intrigado com esse corpo celeste, Davi decidiu investigar as características do sistema. Entre as propriedades que ele obteve estão a massa (M_e) e o raio da estrela (R_e), bem como a excentricidade (e), o semieixo maior (a) e a inclinação orbital (i) do exoplaneta. No entanto, um problema no sistema de seu banco de dados apagou o valor da inclinação orbital.

Com base em seus conhecimentos e nos dados obtidos no gráfico, determine a inclinação orbital do exoplaneta estudado por Davi, sabendo que o ápice do trânsito ocorre no periastro.

Dados:

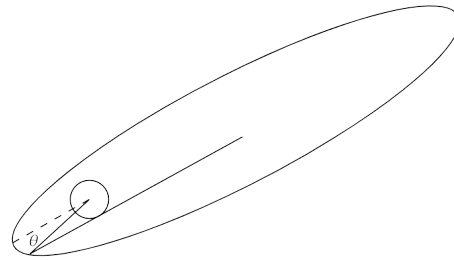
$$R_e = 200R_{\odot}$$

$$M_e = 15M_{\odot}$$

$$e = 0,7$$

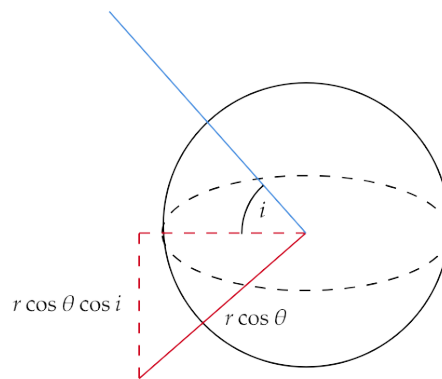
$$a = 5 \text{ UA}$$

Solução: Primeiro, representando o trânsito em uma figura:



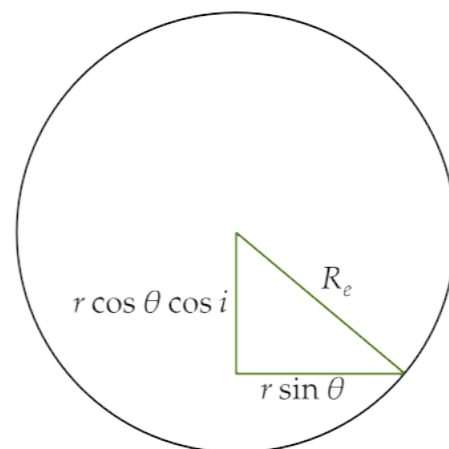
Onde θ representa a anomalia verdadeira do planeta no final do trânsito.

A partir dessa figura, pode-se representar como seria a órbita ao projetar no plano que corta a estrela em uma vista lateral:



Em que o $r \cos \theta$ é a projeção da distância do planeta ao centro da estrela no plano representado, ainda, i representa o ângulo de inclinação da órbita.

Então, com a representação anterior, pode-se desenhar como a posição final do trânsito seria vista da Terra, relacionando os comprimentos observados:



Da última figura, encontra-se uma relação entre a inclinação orbital, anomalia verdadeira e distância orbital:

$$R_e^2 = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 i + r^2 \sin^2 \theta$$

Dividindo ambos os lados por r^2 e sabendo que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\frac{R_e^2}{r^2} = \cos^2 \theta \cos^2 i + \sin^2 \theta$$

$$\frac{R_e^2}{r^2} = 1 - \cos^2 \theta \sin^2 i$$

Agora, é preciso encontrar uma relação entre θ e o tempo desde a passagem pelo periastro. Essa relação pode ser encontrada a partir da equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Onde M , a anomalia média, pode ser encontrada por $M = \frac{2\pi\Delta t}{T}$ e E é a anomalia excêntrica, que se relaciona com a distância orbital pela expressão:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

Agora, para continuar a resolução, precisa-se encontrar o tempo desde a passagem pelo periastro, o qual pode ser medido diretamente da curva de luz como sendo metade do tempo total do eclipse, e o período da órbita, encontrado pela terceira lei de Kepler:

$$\Delta t = \frac{\Delta T}{2} = \frac{2,0}{2,4} \cdot \frac{1,75 \cdot 10^6}{2} = 7,5 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_e}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_e}}$$

$$T \approx 9,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Então, a anomalia média no final do trânsito será:

$$M = \frac{2\pi\Delta t}{T} \approx 0,05 \text{ rad}$$

Agora, para encontrar a anomalia excêntrica é preciso iterar a equação de Kepler, isolando um dos termos, obtendo como resultado:

$$E \approx 0,16 \text{ rad}$$

Com esse valor, pode-se relacionar a anomalia excêntrica com a verdadeira igualando as expressões para a distância orbital:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos E)$$

$$\frac{1 - e^2}{1 - e \cos E} = 1 + e \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{1 - e^2}{1 - e \cos E} - 1 \right)$$

$$\theta \approx 0,38 \text{ rad}$$

Com esse valor, a distância orbital ao final do trânsito será:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$r \approx 2,32 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Por fim, substituindo os valores encontrados na expressão:

$$\frac{R_e^2}{r^2} = 1 - \cos^2 \theta \sin^2 i$$

$$i = \arcsin \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{R_e^2}{r^2}}}{\cos \theta} \right)$$

$$i \approx 1,04 \text{ rad} = 59,5^\circ$$

6. Maranhão (20 pontos)

Hemettrius, aluno do MIT (Instituto Tecnológico do Maranhão), acaba de testar na sua faculdade um sensor de meteoros muito especial: ele só detecta a trilha de ionização se ela for perfeitamente perpendicular à linha de visada do sensor. Ou seja, se o sensor aponta para um ponto P, o radiante da chuva, ou o ponto de origem aparente, está a 90° de distância de P.

Às 10:32, horário local, Hemettrius detectou meteoros no horizonte, exatamente na direção leste. Animado com seu brinquedinho novo, ele girou o sensor em $40,0^\circ$ ao longo do horizonte, para o sul. Após o giro, ele só voltou a detectar meteoros da mesma chuva às 12:32.

Considerando a ascensão reta do Sol nesse dia de aproximadamente 7h25min, e ignorando a equação do tempo e a diferença entre horário solar e civil, ajude nosso querido Hemettrius e encontre as coordenadas equatoriais do radiante dessa chuva de meteoros. Considere também que o radiante esteve sempre acima do horizonte nas duas observações e Maranhão está em $42,0^\circ N$.

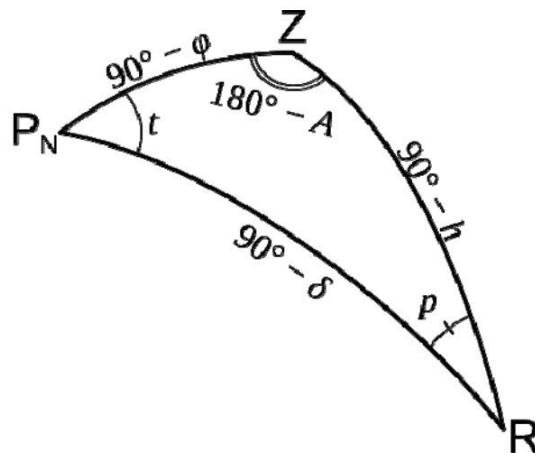
Solução:

O radiante de uma chuva de meteoros deve estar no plano perpendicular ao ponto onde um meteoro foi detectado pelo radar. No caso da primeira observação, esse plano é o mesmo que contém o meridiano local, o que restringe os possíveis valores de ascensão reta para o radiante. O primeiro valor possível é o da ascensão do meridiano local. Ao meio-dia, o meridiano local corresponderia a uma ascensão reta de 7h25min. Dessa forma, às 10:32, a ascensão reta seria de 5h57min. A outra possibilidade seria a ascensão reta de 17h57min, oposta ao meridiano local.

Note que para um intervalo tão curto, a diferença entre o tempo sideral e o tempo solar é desprezível, então não foi necessário realizar nenhuma conversão nos cálculos de ascensão reta.

Na segunda observação, um meteoro foi detectado no horizonte em um azimute de 130° . Dessa forma, o radiante deve estar no círculo máximo que intersecta com o horizonte nos azimutes de $130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$ e $130^\circ + 90^\circ = 220^\circ$. Se o radiante estivesse no meridiano local na primeira observação, o azimute do radiante 2h depois da primeira observação só podia ser de 40° . Da mesma forma, o azimute da segunda observação seria de 220° se o radiante estivesse originalmente no meridiano oposto.

É possível utilizar o seguinte triângulo esférico para determinar a declinação do radiante:



Nesse triângulo esférico, t corresponde ao tempo transcorrido entre as observações dos meteoros. Considerando o caso do azimute de 40° e utilizando a fórmula das quatro partes:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \phi) \cos(t) &= \sin(90^\circ - \phi) \cot(90^\circ - \delta) - \sin(t) \cot(180^\circ - A) \\ \sin(\phi) \cos(t) &= \cos(\phi) \tan(\delta) + \frac{\sin(t)}{\tan(A)} \\ \tan(\delta) &= \tan(\phi) \cos(t) - \frac{\sin(t)}{\cos(\phi) \tan(A)} \\ \tan(\delta) &= \tan(42^\circ) \cos(30^\circ) - \frac{\sin(30^\circ)}{\cos(42^\circ) \tan(40^\circ)} \\ \tan(\delta) &= -0,02206 \\ \delta &= \arctan(-0,02206) \\ \delta &= -1,26^\circ \end{aligned}$$

Note que no caso para o azimute de 220° o triângulo esférico utilizado é muito similar ao da imagem. As únicas diferenças são que o ângulo do azimute corresponderia a A , não a $180^\circ - A$ e que o ângulo t seria de $17h57min + 2h - 12h = 7h57min$. Contudo, esse azimute seria inviável porque o radiante estaria abaixo do horizonte. Utilizando a fórmula das quatro partes, é possível concluir que a altura do radiante seria negativa na segunda observação.

Dessa forma, as coordenadas equatoriais do radiante são $\delta = -1,26^\circ$ e $\alpha = 5h57min$.

7. Inflação (30 pontos)

A teoria da inflação cósmica propõe um rápido período de expansão acelerada do universo logo após o Big Bang que elegantemente soluciona alguns dos desafios que o modelo padrão da Cosmologia (Λ CDM) não consegue explicar: o problema do horizonte; a geometria essencialmente plana do universo, e a ausência de monopolos magnéticos. Nessa questão, exploraremos condições físicas para a ocorrência da inflação e como ela pode ser alimentada pela dinâmica de um campo escalar. Assuma, nos itens que seguem, um universo plano e dominado por uma componente com equação de estado $P = w\varepsilon$, em que P é sua pressão e $\varepsilon = \rho c^2$ a densidade de energia.

- (a) **(3 pontos)** A densidade em termos do fator de escala pode ser escrita como

$$\rho(a) \propto a^n.$$

Encontre o expoente n em termos de w .

- (b) **(7 pontos)** Para que universo esteja em um regime inflacionário, requeremos expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$). Mostre que, para isso, devemos ter:

$$w < w_c.$$

E determine w_c .

Agora, assuma que a componente é um tipo de matéria uniformemente distribuída no espaço, descrita por uma função escalar $\phi = \phi(t)$ (campo escalar homogêneo) associada a um potencial $V(\phi)$. É fornecido que sua densidade de energia e pressão são dadas por:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).$$

- (c) **(2 pontos)** Verifique que, para $V \gg \dot{\phi}^2$, o campo escalar respeita a condição do item (b).
 (d) **(4 pontos)** Encontre \dot{H} em termos de $\dot{\phi}$ e $M_{\text{Pl}} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$.
 (e) **(14 pontos)** Considere um potencial exponencial do tipo:

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\text{Pl}}},$$

onde V_0 e λ são constantes. Supondo soluções para $\phi(t)$ e $a(t)$ do tipo

$$\phi(t) = \alpha \ln(\beta t), \quad a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma,$$

com α , β , γ e t_0 constantes, **(i)** determine α , β e γ , em termos de λ , V_0 e M_{Pl} ; **(ii)** sendo o fim da inflação definido por $\ddot{a} = 0$, mostre que o período inflacionário desse universo nunca cessa caso $\lambda < \sqrt{2}$.

Dica: Substitua $\phi(t)$ e $a(t)$ na primeira equação de Friedmann e na relação encontrada no item passado.

Solução:

- (a) Partimos da equação dos fluidos:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P/c^2) = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3H\rho(1 + w) = 0$$

Usando $H = \dot{a}/a$, podemos escrever:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3(1 + w)\frac{\dot{a}}{a}\rho \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + w)\frac{da}{a} \Rightarrow \rho(a) \propto a^{-3(1+w)}$$

Portanto, o expoente pedido é:

$$n = -3(1 + w)$$

(b) Do item (a), temos:

$$\rho(a) = \rho_0 a^n, \quad \text{com } n = -3(1+w)$$

Substituímos esse resultado na primeira equação de Friedmann para um universo plano:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(a) = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a^n$$

Separando variáveis:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} a^{n/2} \Rightarrow \frac{da}{a^{1+n/2}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} dt$$

Integrando:

$$\int_0^{a(t)} a^{-1-n/2} da = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} \int_0^t dt' = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} t + \text{const}$$

Cujo resultado é:

$$\frac{a^{-n/2}}{-n/2} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} t \Rightarrow a^{-n/2} \propto t \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{-n}} = t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Portanto, derivando duas vezes, temos:

Se:

$$a(t) = At^p \quad \text{com } p = \frac{2}{3(1+w)}$$

$$\dot{a} = Apt^{p-1}, \quad \ddot{a} = Ap(p-1)t^{p-2}$$

Queremos:

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow p(p-1) > 0$$

Sabemos que $p > 0$ sempre (para expansão) então $p > 1$.

$$\frac{2}{3(1+w)} > 1 \Rightarrow 2 > 3(1+w) \Rightarrow \boxed{w < -\frac{1}{3} = w_c}$$

(c) Dado:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \Rightarrow w = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}$$

Se $V \gg \dot{\phi}^2$, então:

$$w \approx \frac{-V}{V} = -1 \Rightarrow \boxed{w < -\frac{1}{3}}$$

Logo, o campo escalar respeita a condição para inflação quando $V \gg \dot{\phi}^2$.

(d) Usamos a primeira equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi} \right) = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \dot{\phi}(\ddot{\phi} + V'(\phi))$$

Mas usando a equação dos fluidos:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2}(\rho + P) = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2}(\dot{\phi}^2) \Rightarrow \dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2}$$

(e) Dado:

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\text{Pl}}}, \quad \phi(t) = \alpha \ln(\beta t), \quad a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma$$

Calculamos:

- $\dot{\phi} = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{\alpha^2}{t^2}$
- $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\gamma}{t}$

Usamos a equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{\alpha^2}{2t^2} + V_0 (\beta t)^{-\lambda\alpha/M_{\text{Pl}}} \right)$$

Mas também:

$$H = \frac{\gamma}{t} \Rightarrow H^2 = \frac{\gamma^2}{t^2}$$

Multiplicando ambos os lados por t^2 :

$$\gamma^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{\alpha^2}{2} + V_0 \beta^{-\lambda\alpha/M_{\text{Pl}}} t^{2-\lambda\alpha/M_{\text{Pl}}} \right)$$

Para que os termos de t cancelem, exigimos:

$$\lambda\alpha = 2M_{\text{Pl}} \Rightarrow \alpha = \frac{2M_{\text{Pl}}}{\lambda}$$

Substituímos em \dot{H} :

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2} = -\frac{\alpha^2}{2M_{\text{Pl}}^2 t^2} = -\frac{4M_{\text{Pl}}^2}{2M_{\text{Pl}}^2 \lambda^2 t^2} = -\frac{2}{\lambda^2 t^2}$$

E como:

$$H = \frac{\gamma}{t} \Rightarrow \dot{H} = -\frac{\gamma}{t^2} \Rightarrow -\frac{\gamma}{t^2} = -\frac{2}{\lambda^2 t^2} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\lambda^2}$$

Para β , temos, pela Primeira Equação de Friedmann:

$$3M_{\text{Pl}}^2 \gamma^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{V_0}{\beta^2}$$

Substituindo os valores

$$\alpha = \frac{2M_{\text{Pl}}}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2}, \quad \gamma^2 = \frac{4}{\lambda^4}$$

$$3M_{\text{Pl}}^2 \cdot \frac{4}{\lambda^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2} + \frac{V_0}{\beta^2} \Rightarrow \frac{12M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^4} = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2} + \frac{V_0}{\beta^2}$$

Isolando β :

$$\frac{V_0}{\beta^2} = \frac{12M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^4} - \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2} = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2} \left(\frac{6}{\lambda^2} - 1 \right) = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2} \cdot \frac{6 - \lambda^2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \frac{V_0}{\frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\lambda^2} \cdot \frac{6 - \lambda^2}{\lambda^2}} = \frac{V_0 \lambda^4}{2M_{\text{Pl}}^2(6 - \lambda^2)}$$

$$\beta = \frac{\lambda^2}{M_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{V_0}{2(6 - \lambda^2)}}$$

Por fim, temos que

- $\phi(t) = \frac{2M_{\text{Pl}}}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda^2}{M_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{V_0}{2(6 - \lambda^2)}} t \right)$
- $a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/\lambda^2}$

Então, para que o universo esteja em regime inflacionário, requeremos $\ddot{a} > 0$:

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow \gamma > 1 \Rightarrow \frac{2}{\lambda^2} > 1 \Rightarrow \lambda < \sqrt{2}$$

Como o fim da inflação requer $\lambda = \sqrt{2}$, é notório que se $\lambda < \sqrt{2}$ a inflação nunca termina dado que λ é uma constante. Ou seja, um universo com tal mecanismo inflacionário estaria *eternamente em inflação!*

8. Can You Hear The Music? (30 pontos)

Muitos lembram de Julius Robert Oppenheimer como o pai da bomba atômica. Porém, poucos sabem que ele também contribuiu para a ciência com uma equação importante para o entendimento da estrutura de uma estrela considerando a Relatividade Geral. Para um corpo simetricamente esférico que não rotaciona, pode valer o equilíbrio hidrostático dado pela Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dP}{dr} = - \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{Gm(r)c^2 + 4\pi Gr^3 P}{r[r c^2 - 2Gm(r)]}$$

Nesta questão, trataremos de uma estrela de nêutrons no limite de se tornar um buraco negro, isto é, incompressível e de densidade uniforme.

- (a) **(4 pontos)** Quais seriam as condições necessárias para que a Equação de TOV se aproxime do seu caso clássico?
- (b) **(15 pontos)** Agora, considerando a equação do caso geral, deduza uma expressão para a pressão no centro da estrela de nêutrons, em função de sua massa M , seu raio R e constantes físicas.

Dica 1: Se necessário, utilize as integrais abaixo:

$$\int \frac{dx}{ax - \frac{1}{x}} = \frac{\ln |ax^2 - 1|}{2a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - ax} = \frac{\ln \left| \frac{a}{x} - 1 \right|}{a} + C$$

Dica 2: Se achar plausível, utilize a mudança de variável $u = \rho c^2 + P$, em que ρ é a densidade da estrela, c é a velocidade da luz e P é a pressão em algum ponto.

- (c) **(7 pontos)** Sabendo disso, o que seria o limite mínimo para o raio da estrela de nêutrons em função de sua massa M e constantes físicas?
- (d) **(4 pontos)** Encontre a máxima massa de uma estrela de nêutrons em massas solares, sabendo da densidade típica de uma estrela de nêutrons incompressível $\rho_n = 3,7 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$.

Solução:

- (a) Para uma densidade constante, $m(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$. Daí, perceba que, ao termos $P \ll \rho c^2$ e $2Gm(r) \ll rc^2$, chegamos no caso clássico:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2}$$

- (b) Tratemos a Equação de TOV, sabendo que $m(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{Gm(r)c^2 + 4\pi G r^3 P}{r[r c^2 - 2Gm(r)]} \\ \frac{dP}{dr} &= -4\pi G \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{\rho r^2 c^2 + 3r^2 P}{3rc^2 - 2G \cdot 4\pi r^3 \rho} \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{4\pi G r}{c^2} (\rho c^2 + P) \frac{\rho c^2 + 3P}{3c^2 - 8G\pi r^2 \rho} \end{aligned}$$

Para facilitar um pouco as contas e adequarmos a equação para usar as integrais dadas, usemos $u = \rho c^2 + P$ e $\rho c^2 + 3P = 3u - 2\rho c^2$. Perceba também que $du = dP$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{4\pi G}{3c^4} \frac{u(3u - 2\rho c^2)}{\frac{1}{r} - \frac{8\pi G \rho}{3c^2} r} \\ \frac{du}{u(3u - 2\rho c^2)} &= \frac{4\pi G}{3c^4} \frac{dr}{\frac{8\pi G \rho}{3c^2} r - \frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Sabendo que, na superfície da estrela de nêutrons, a pressão deve ser praticamente nula, já que o vácuo tem pressão praticamente nula, temos:

$$\begin{aligned} \int_{P_c + \rho c^2}^{\rho c^2} \frac{du}{u^2 - \frac{2\rho c^2}{3}u} &= \int_0^R \frac{4\pi G}{c^4} \frac{dr}{\frac{8\pi G \rho}{3c^2} r - \frac{1}{r}} \\ \frac{3}{2\rho c^2} \ln \left| \frac{\frac{2}{3} - 1}{2\rho c^2} - 1 \right| &= \frac{4\pi G}{c^4} \cdot \frac{3c^2}{16\pi G \rho} \ln \left| \frac{8\pi G \rho R^2}{3c^2} - 1 \right| \\ \ln \left(\frac{P_c + \rho c^2}{3P_c + \rho c^2} \right) &= \ln \sqrt{\left| \frac{2GM}{Rc^2} - 1 \right|} \end{aligned}$$

A escolha do sinal no lado esquerdo foi feita para não encontrarmos uma raiz quadrada negativa. O lado direito merece mais atenção: sabendo que $R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$ é o Raio de Schwarzschild, o raio de um buraco negro que não gira nem tem carga, fica claro que $R > R_{sch}$, já que a estrela

de nêutrons ainda não é um buraco negro. Com isso, fica claro que $\left| \frac{2GM}{Rc^2} - 1 \right| = 1 - \frac{2GM}{Rc^2}$. Por fim, após resolver esta simples equação:

$$P_c = \rho c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}$$

$$P_c = \frac{3Mc^2}{4\pi R^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}$$

(c) A pressão no centro não pode ser infinita. Dito isso, reveja a sua expressão:

$$P_c = \frac{3Mc^2}{4\pi R^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}$$

Daí, o raio limite será tal que é satisfeito $3\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} = 1$. Com isso:

$$R_{lim} = \frac{9GM}{4c^2}$$

Se tivéssemos concluído que $\left| \frac{2GM}{Rc^2} - 1 \right| = \frac{2GM}{Rc^2} - 1$, encontraríamos um raio negativo, o que deixa ainda mais claro o porquê da escolha correta no item anterior.

(d) Do item anterior:

$$R > R_{lim} = \frac{9GM}{4c^2}$$

$$M > \frac{4\pi\rho_n}{3} \left(\frac{9GM}{4c^2} \right)^3$$

$$M < \sqrt{\frac{16c^6}{243\pi\rho_n G^3}}$$

$$M < \frac{4c^3}{9G} \sqrt{\frac{1}{3\pi\rho_n G}}$$

$$M < 5,92 M_{Sol}$$

Atualmente, a estrela de nêutros mais pesada que observamos é a PSR J0952–0607, com massa $M = 2,35 \pm 0,17 M_{Sol}$. O limite que encontramos para a massa de uma estrela de nêutrons ao utilizarmos uma matemática mais rigorosa seria de cerca de 3 massas solares.

Questões Longas

9. Instabilidade em um Universo em Expansão (60 pontos)

Na Cosmologia, é comum aproximarmos o universo para homogêneo em largas escalas. No entanto, em menores escalas, a densidade do universo apresenta pequenas variações, surgindo desde flutuações quânticas até grandes estruturas astrofísicas como galáxias. Nessa questão, estudaremos como essas pequenas variações relativas de densidade $\delta(t)$ evoluem com o tempo. Para facilitar o problema, iremos focar em variações causados por grandes estruturas, maiores que galáxias, como aglomerados estelares.

Para o que segue, considere um universo composto por matéria, com densidade média $\rho_M(t)$. Em uma região esférica de raio R , como a de um aglomerado estelar, uma pequena quantidade de matéria é adicionada e removida, de modo que a densidade da região é dada por:

$$\rho(t) = \rho_M(t)[1 + \delta(t)]$$

onde $\delta(t) \ll 1$. Suponha que o excesso de densidade na região esférica é aproximadamente homogêneo e que o universo está em expansão.

- (a) **(3 pontos)** Utilizando a Segunda Lei de Newton, mostre que a aceleração da gravidade na superfície da região esférica é dada por:

$$\ddot{R} = -aG\rho_M(1 + \delta)R$$

e encontre o valor da constante numérica a .

- (b) **(7 pontos)** Ao longo do tempo, a massa total na região esférica mantém-se constante, ou seja, se conserva. Sabendo disso, e de posse da dependência de $\rho_M(t)$ com o fator de escala $a(t)$ para um universo dominado por matéria, mostre que:

$$R(t) \propto a(t)^b [1 + \delta(t)]^c$$

e encontre os valores das constantes numéricas b e c .

- (c) **(10 pontos)** Partindo da equação obtida anteriormente, mostre que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} + d\ddot{\delta} + e\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}$$

e encontre os valores das constantes numéricas d e e .

Dado: Se necessário use que:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df(g(x))}{dx} \frac{dg(x)}{dx}$$

Para além do valor de \ddot{R} , para encontrar a dependência temporal de variações de densidade no universo, precisamos encontrar o valor de \ddot{a} . Felizmente, é dado que a equação da aceleração para um universo em expansão é da forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P)$$

- (d) **(5 pontos)** Mostre que, para um universo dominado por matéria:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -fG\rho_M$$

e encontre o valor da constante numérica f .

- (e) **(8 pontos)** Uma vez de posse do valor de \ddot{R} e \ddot{a} , e com base nas equações obtidas anteriormente, mostre que podemos obter a dependência temporal de $\delta(t)$ pela seguinte equação:

$$\ddot{\delta} + gH\dot{\delta} = h\Omega H^2\delta$$

e encontre os valores das constantes numéricas g e h . Note que Ω é o parâmetro de densidade, definido por:

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho_M}{3H^2}$$

Apesar de termos estudado o caso de um universo dominado por matéria, a equação obtida acima é válida para universos dominados por outros componentes, como radiação e constante cosmológica. Tanto para radiação, quanto para constante cosmológica, temos que $\Omega \ll 1$, de modo que podemos negligenciar os termos com Ω .

- (f) **(10 pontos)** Sabendo que para um universo dominado por radiação $a \propto t^{1/2}$, mostre que para radiação:

$$\delta(t) \approx B_1 + B_2 \ln t$$

Você não precisa encontrar as constantes B_1 e B_2 .

Dado:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

- (g) **(6 pontos)** De forma análoga, mostre que para um universo dominado por constante cosmológica:

$$\delta(t) \approx C_1 + C_2 e^{-2Ht}$$

Você não precisa encontrar as constantes C_1 e C_2 .

Já para um universo dominado por matéria, $\Omega = 1$, e as equações ficam mais complicadas. Para o que segue, suponha que para matéria $\delta(t) = Dt^n$.

- (h) **(11 pontos)** Substitua o valor de $\delta(t) = Dt^n$ para matéria na equação diferencial obtida anteriormente e descubra as soluções para n . Com base nisso, conclua que para matéria:

$$\delta(t) = D_1 t^{2/3} + D_2 t^{-1}$$

Considere que para matéria $a(t) \propto t^{2/3}$. Você não precisa encontrar as constantes D_1 e D_2 .

Solução:

- (a) Podemos simplesmente utilizar da fórmula:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

onde:

$$M = \rho_M(1 + \delta) \frac{4\pi R^3}{3}$$

logo:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} \rho_M(1 + \delta)R$$

então:

$$\alpha = \frac{4\pi}{3}$$

(b) A conservação de massa dentro da esfera diz que

$$M(t) = \frac{4\pi}{3} \rho_M(t) [1 + \delta(t)] R(t)^3$$

é uma constante. Dessa maneira, conseguimos obter que:

$$R(t) \propto \rho_M(t)^{-1/3} [1 + \delta(t)]^{-1/3}$$

Perceba, contudo, que para um universo dominado por matéria:

$$\rho_M(t) \propto a(t)^3$$

assim:

$$R(t) \propto a(t) [1 + \delta(t)]^{-1/3}$$

de modo que:

$$b = 1$$

$$c = -\frac{1}{3}$$

(c) Derivando duas vezes em relação ao tempo a equação obtida anteriormente e simplificando, obtemos que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}$$

assim:

$$d = -\frac{1}{3}$$

$$e = -\frac{2}{3}$$

(d) Sabemos que:

$$P = w\epsilon$$

e é conhecido que para matéria $w = 0$, logo $P = 0$ e então:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G \rho_M}{3}$$

de modo que:

$$f = \frac{4\pi}{3}$$

(e) Combinando a equação obtida no item (c) com a do item (a), obtemos que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = -\frac{4\pi G \rho_M (1 + \delta)}{3}$$

porém, sabemos que:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G \rho_M}{3}$$

logo, obtemos que:

$$-\frac{1}{3} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = -\frac{4\pi G \rho_M \delta}{3}$$

ou

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi\rho_M G\delta$$

reescrevendo em função de Ω , obtemos:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{3\Omega H^2 \delta}{2}$$

assim:

$$\boxed{g = 2}$$

$$\boxed{h = \frac{3}{2}}$$

(f) Utilizando as informações do enunciado, temos que para radiação:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}$$

desse modo:

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{t}\dot{\delta} \approx 0$$

assim:

$$\frac{d\dot{\delta}}{dt} \approx -\frac{\dot{\delta}}{t}$$

logo:

$$\int \frac{d\dot{\delta}}{\dot{\delta}} \approx -\int \frac{dt}{t}$$

tal que:

$$\ln \dot{\delta} = -\ln t + C$$

ou seja:

$$\dot{\delta} \approx \frac{B_1}{t}$$

de onde obtemos:

$$\int d\delta \approx B_1 \int \frac{dt}{t}$$

assim:

$$\boxed{\delta(t) \approx B_1 + B_2 \ln t}$$

(g) Para um universo dominado por constante cosmológica, a constante de Hubble H é uma constante, assim:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} \approx 0$$

ou seja:

$$\frac{d\dot{\delta}}{dt} = -2H\dot{\delta}$$

assim:

$$\int \frac{d\dot{\delta}}{\dot{\delta}} = -2H \int dt$$

logo:

$$\ln \dot{\delta} = -2Ht + C$$

de tal modo que:

$$\dot{\delta} = ke^{-2Ht}$$

de onde obtemos:

$$\int d\delta = k \int e^{-2Ht} dt$$

assim:

$$\delta(t) = C_1 + C_2 e^{-2Ht}$$

(h) Para a matéria, temos que:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

assim:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t} \dot{\delta} - \frac{2}{3t^2} \delta = 0$$

Substituindo $\delta(t) = Dt^n$, obtemos a equação:

$$n(n-1)Dt^{n-2} + \frac{4}{3t}Dt^{n-1} - \frac{2}{3t^2}Dt^n = 0$$

ou

$$n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0$$

as duas possíveis soluções para a equação acima são $n = -1$ e $n = 2/3$. Logo:

$$\delta(t) = D_1 t^{2/3} + D_2 t^{-1}$$

10. O Devorar de Kronos (70 pontos)

Os sistemas de anéis planetários são complexas formações compostas por partículas de gelo, poeira e rochas que orbitam um planeta, criando um disco ao seu redor. Presentes principalmente nos gigantes gasosos do Sistema Solar, esses anéis variam em tamanho, densidade e composição, sendo os de Saturno (Kronos) os mais notórios. A origem desses anéis ainda é debatida, mas as principais hipóteses sugerem que podem ter se formado a partir da destruição de luas ou cometas que chegaram perto demais dos planetas e foram despedaçados pelas forças de maré, ou então serem remanescentes de material primordial que nunca se aglutinou para formar satélites.

Para os itens a seguir, adote $M_S = 5,7 \times 10^{26}$ kg para a massa de Saturno, $R_S = 5,8 \times 10^8$ m para o seu raio e $a_S = 1,43 \times 10^{12}$ m para a sua distância ao Sol. Além disso, deixe as respostas finais algébricas em termos somente das variáveis definidas no enunciado da questão e de constantes fundamentais.

- (a) **(4 pontos)** Considere um satélite natural esférico, rígido e homogêneo que orbita Saturno. Sabendo que sua densidade é $\rho = 1,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, o quão próximo do centro de Saturno esse satélite deve chegar para que comece a se fragmentar? Assuma que o satélite não rotaciona.
Dica: Se necessário, utilize que $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ para $\alpha \ll 1$.
- (b) **(5 pontos)** Determine uma expressão para a distância do item anterior, agora considerando que o satélite rotaciona com velocidade angular ω em torno de seu próprio eixo.
- (c) **(2 pontos)** Na prática, nenhum satélite natural é completamente rígido como o do item (a). Alguns satélites até se aproximam mais de fluídos. Nesse sentido, espera-se que a distância para que uma lua real se desintegre seja maior ou menor que a calculada no item (a), admitindo que ela tenha a mesma densidade ρ ? Justifique.

A dinâmica dos anéis planetários é regida por uma série de processos e efeitos físicos que, combinados, determinam sua estrutura, estabilidade e evolução ao longo do tempo, como colisões entre partículas, interações magnéticas e ressonâncias orbitais. Nos próximos itens, iremos analisar o efeito da radiação solar em grãos de poeira do sistema de anéis de Saturno. Mais precisamente, estudaremos (de maneira simplificada) o efeito Poynting-Robertson, um processo em que pequenas partículas em órbita gradualmente perdem momento angular — o que faz com que elas espiralem lentamente em direção ao corpo

central — devido à contínua reemissão anisotrópica (no referencial da estrela) da radiação estelar que absorvem. No referencial da partícula, essa emissão é isotrópica e, como veremos mais para frente, o efeito pode ser explicado pelo fato de que os raios de luz solar chegam à partícula levemente inclinados devido ao seu movimento orbital.

Para os itens abaixo, considere uma pequena partícula de poeira esférica de raio R e densidade ρ em órbita circular ao redor de Saturno. Admita que a partícula absorve 100% da radiação solar incidente e que se encontra em equilíbrio.

- (d) **(8 pontos)** Estime uma expressão para a taxa aproximada com que a partícula de poeira perde momento angular. Denote o momento angular por J e deixe a expressão em função de J .

Dica: Modele a reemissão de radiação como se a partícula estivesse perdendo uma massa efetiva dm , associada à energia irradiada via $E = mc^2$.

- (e) **(12 pontos)**

- (i) Encontre uma expressão para t , o tempo que a partícula, inicialmente em uma órbita de raio r_0 em torno de Saturno, leva para chegar à superfície do planeta devido à perda gradual de momento angular. Considere que a órbita da partícula é sempre aproximadamente circular e que sua distância ao Sol é constante.

- (ii) O raio médio das partículas de poeira do anel E de Saturno é de $1 \mu\text{m}$. Se a densidade dessas partículas é $3,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, quanto tempo uma partícula típica do anel E levaria para espiralar até Saturno a partir de uma distância inicial $5R_S$?

- (f) **(2 pontos)** Compare o valor calculado no item anterior com a idade estimada do Sistema Solar (4,6 Gyr). Com base nessa comparação, o que pode-se afirmar a respeito da permanência do anel E do sistema de Saturno?

O efeito Poynting-Robertson também age como um mecanismo de limpeza do sistema solar como um todo, ao fazer com que pequenas partículas em órbitas interplanetárias sejam gradualmente “sugadas” ao Sol. Neste contexto, é oportuno analisar, do ponto de vista dos grãos de poeira, o fenômeno da aberração da luz — devido ao movimento da partícula, a radiação estelar parece vir de uma direção levemente deslocada, à frente da direção real da fonte; a absorção dessa radiação faz com que a partícula “sinta” uma força de arrasto contra seu sentido de movimento. O ângulo (chamado de ângulo de aberração) entre a direção real da fonte de luz (estrela) e a direção aparente em que ela é observada é extremamente pequeno, uma vez que a partícula se movimenta com uma velocidade $v \ll c$. A princípio, podemos calcular o ângulo de aberração a partir da fórmula

$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{\gamma(v/c + \cos \theta)}$$

onde γ é o fator de Lorentz; ϕ e θ são os ângulos entre a direção de chegada da luz e a direção do movimento da partícula no referencial da partícula e no referencial da estrela, respectivamente.

- (g) **(8 pontos)** Demonstre a fórmula dada.

Para os itens abaixo, considere um pequeno grão de poeira esférico de raio R' e densidade ρ' , inicialmente em órbita circular ao redor do Sol de raio $a \ll R_\odot$.

- (h) **(12 pontos)** Encontre a expressão para a taxa de perda de momento angular dessa partícula utilizando a fórmula da aberração da luz.

- (i) **(15 pontos)** Encontre a expressão para o tempo t' necessário para que a partícula chegue ao Sol devido ao efeito Poynting-Robertson.

Solução:

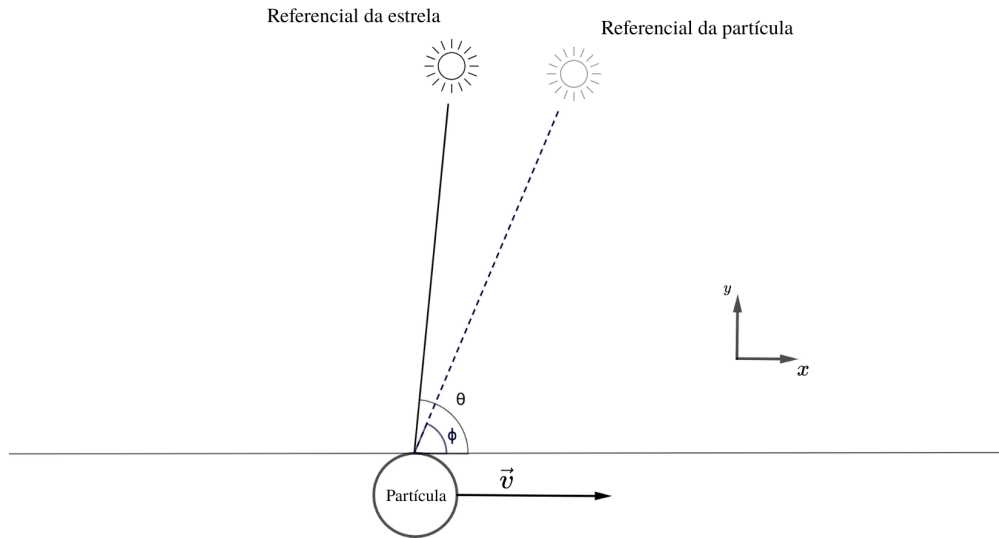
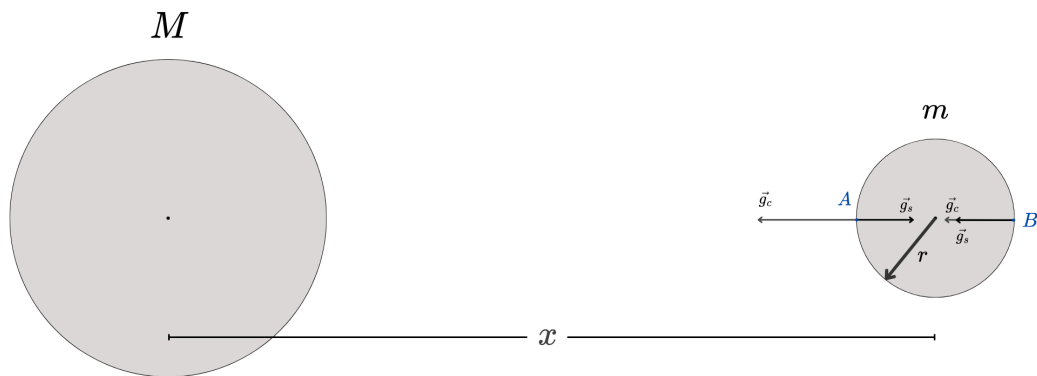


Figura 2: Aberração da luz.

- (a) A distância teórica mínima ao centro de um corpo central para que um corpo secundário se desintegre devido à força de maré é o chamado limite de Roche. Para deduzir uma expressão para o valor dessa distância x , esquematizamos a situação de maneira genérica:



Onde M é a massa do corpo central; m e r são a massa e o raio do corpo secundário. Sejam A e B os pontos do corpo secundário mais próximo e mais distante do corpo central, respectivamente. Sendo \vec{g}_c o campo gravitacional do corpo central e \vec{g}_s o campo gravitacional do corpo secundário, podemos determinar os módulos das acelerações gravitacionais em cada ponto:

$$g_A = g_c - g_s = \frac{GM}{(x - r)^2} - \frac{Gm}{r^2}$$

$$g_B = g_c + g_s = \frac{GM}{(x + r)^2} + \frac{Gm}{r^2}$$

Como o satélite é rígido, não há deformação e a aceleração relativa entre A e B deve ser zero:

$$g_A - g_B = 0$$

$$\frac{GM}{(x-r)^2} - \frac{Gm}{r^2} = \frac{GM}{(x+r)^2} + \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{GM}{x^2} \left(1 - \frac{r}{x}\right)^{-2} - \frac{Gm}{r^2} = \frac{GM}{x^2} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^{-2} + \frac{Gm}{r^2}$$

Como $x \gg r$, podemos utilizar a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$:

$$\frac{GM}{x^2} \left(1 + \frac{2r}{x}\right) - \frac{Gm}{r^2} \approx \frac{GM}{x^2} \left(1 - \frac{2r}{x}\right) + \frac{Gm}{r^2}$$

$$x \approx r \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$

$$\therefore x \approx \left(\frac{3M_S}{2\pi\rho}\right)^{1/3}$$

Substituindo os valores dados no enunciado,

$$x \approx \left(\frac{3 \cdot 5,7 \times 10^{26}}{2\pi \cdot 1,9 \times 10^3}\right)^{1/3} \Rightarrow \boxed{x \approx 5,2 \times 10^7 \text{ m}}$$

(b) Nesse caso, é preciso levar em conta a contribuição da força centrífuga:

$$g_A = g_c - g_s + a_{cf} = \frac{GM_S}{(x-r)^2} - \frac{Gm}{r^2} + \omega^2 r$$

$$g_B = g_c + g_s - a_{cf} = \frac{GM_S}{(x+r)^2} + \frac{Gm}{r^2} - \omega^2 r$$

$$\Rightarrow \frac{GM_S}{(x-r)^2} - \frac{Gm}{r^2} + \omega^2 r = \frac{GM_S}{(x+r)^2} + \frac{Gm}{r^2} - \omega^2 r$$

$$\frac{GM_S}{x^2} \left(1 - \frac{r}{x}\right)^{-2} - \frac{Gm}{r^2} + \omega^2 r = \frac{GM_S}{x^2} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^{-2} + \frac{Gm}{r^2} - \omega^2 r$$

$$\frac{GM_S}{x^2} \left(1 + \frac{2r}{x}\right) - \frac{Gm}{r^2} + \omega^2 r \approx \frac{GM_S}{x^2} \left(1 - \frac{2r}{x}\right) + \frac{Gm}{r^2} - \omega^2 r$$

$$\frac{4GM_S r}{x^3} \approx \frac{2Gm}{r^2} - 2\omega^2 r \Rightarrow x^3 \approx \frac{4GM_S r^3}{2Gm - 2\omega^2 r^3}$$

$$\therefore \boxed{x \approx \left(\frac{6GM_S}{4\pi G\rho - 3\omega^2}\right)^{1/3}}$$

(c) No caso de uma lua real de densidade ρ , o limite de Roche seria maior que o calculado no item (a), pois a força de maré causaria a deformação do satélite na direção do eixo que liga o centro do corpo ao centro de Saturno. Com isso, um ponto na superfície do satélite nessa direção estaria mais longe do centro, ficando sujeito a uma força gravitacional menor. De fato, um cálculo mais rigoroso do limite de Roche para o caso de um satélite perfeitamente deformável resulta em uma distância $x \approx 2,43 \left(\frac{3M_S}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$.

(d) O momento angular da partícula de massa m é $J = mvr$, sendo r o raio de sua órbita e v a sua velocidade orbital. Como o decaimento orbital da partícula é um processo extremamente lento, é possível assumir que v e r permanecem praticamente constantes durante um intervalo

de tempo infinitesimal. Com isso, podemos escrever a taxa de perda do momento angular da partícula como:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dm}{dt}vr$$

Em seguida, associando a energia irradiada por meio de um fóton a uma massa efetiva, temos

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{vr}{c^2} \frac{dE_\gamma}{dt}$$

Se a partícula absorve radiação solar e reemite isotropicamente no seu referencial, a energia que ela emite por unidade de tempo é sua luminosidade, que é igual à energia que absorve (em equilíbrio).

$$\frac{dE_\gamma}{dt} = - \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{absorvido}} = -\pi R^2 \frac{L_\odot}{4\pi a_S^2}$$

Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -\frac{L_\odot R^2}{4mc^2 a_S^2} J \\ \therefore \frac{dJ}{dt} &= -\frac{3L_\odot}{16\pi R\rho c^2 a_S^2} J \end{aligned}$$

- (e) (i) Integrando a expressão encontrada no item anterior, obtemos uma expressão para t em termos dos momentos angulares final e inicial:

$$\begin{aligned} \int_{J_0}^{J_f} \frac{dJ}{J} &= -\frac{3L_\odot}{16\pi R\rho c^2 a_S^2} \int_0^t dt \\ \ln\left(\frac{J_f}{J_0}\right) &= -\frac{3L_\odot}{16\pi R\rho c^2 a_S^2} t \Rightarrow t = -\frac{16\pi\rho c^2}{3L_\odot} R a_S^2 \ln\left(\frac{J_f}{J_0}\right) \end{aligned}$$

Sendo a órbita da partícula sempre aproximadamente circular, temos

$$\begin{aligned} J(r) = mvr &= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \sqrt{\frac{GM_S}{r}} r \Rightarrow \frac{J_f}{J_0} = \sqrt{\frac{R_S}{r_0}} \\ \therefore t &= \frac{8\pi\rho c^2}{3L_\odot} R a_S^2 \ln\left(\frac{r_0}{R_S}\right) \end{aligned}$$

- (ii) Substituindo os valores dados na fórmula encontrada,

$$\begin{aligned} t &= \frac{8\pi \cdot 3 \times 10^3 \cdot (3,0 \times 10^8)^2}{3 \cdot 3.83 \times 10^{26}} \cdot 1 \times 10^{-6} \cdot (1,43 \times 10^{12})^2 \ln(5) \\ t &\approx 1,9 \times 10^{13} \text{ s} \\ \therefore t &\approx 6,2 \times 10^5 \text{ anos} \end{aligned}$$

- (f) O tempo calculado no item anterior é muito menor que a idade estimada do Sistema Solar. Dessa forma, a permanência do anel E de Saturno indica que há alguma fonte de material que reabastece esse anel de forma contínua — caso essa fonte não existisse, o tênue anel se dissiparia em um tempo relativamente curto devido aos efeitos da radiação solar, principalmente. Apenas a título de curiosidade, a hipótese mais aceita é a de que são os gêiseres criovulcânicos de Enceladus (o sexto maior satélite natural de Saturno, que orbita o planeta dentro do anel E) as fontes que sustentam o anel. Essas estruturas ejetam partículas de gelo e outros materiais que, então, podem escapar da gravidade do satélite e realimentar o anel.

- (g) A luz se propaga com ângulo θ em relação ao eixo x no referencial do Sol. As componentes da velocidade da luz nesse referencial são:

$$u_x = c \cos \theta \quad u_y = c \sin \theta$$

Já a partícula está se movendo com velocidade v no sentido $+x$ em relação ao Sol. Devemos fazer a transformação da velocidade da luz para esse referencial em movimento. Temos

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + u_x v/c^2} = \frac{c \cos \theta + v}{1 + v \cos \theta/c}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 + u_x v/c^2)} = \frac{c \sin \theta}{\gamma(1 + v \cos \theta/c)}$$

No referencial da partícula, a luz se propaga com um ângulo ϕ tal que

$$\tan \phi = \frac{u'_y}{u'_x}$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{\sin \theta}{\gamma(v/c + \cos \theta)}$$

- (h) No referencial da partícula, os raios de luz emitidos pelo Sol chegam à partícula levemente inclinados devido à aberração da luz. Isso faz com que a força de pressão de radiação tenha uma pequena componente tangencial à órbita — e é essa componente que desacelera o grão de poeira.

Como a partícula absorve completamente a radiação solar incidente e reemite essa energia isotropicamente em seu referencial, a força de pressão de radiação é

$$F_{rad} = \frac{L_{\odot} \pi R^2}{4\pi a^2 c}$$

Para determinarmos a componente tangencial dessa força, precisaremos do ângulo de aberração. Como $v/c \ll 1$, $\gamma \approx 1$ e a fórmula dada se reduz a

$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{(v/c + \cos \theta)}$$

Para $\theta = 90^\circ$, temos

$$\tan \phi = \frac{c}{v}$$

Mas queremos $\theta - \phi$, então

$$\tan(\theta - \phi) = \cot \phi = \frac{v}{c}$$

E, como o ângulo de aberração é pequeno,

$$\theta - \phi \approx \frac{v}{c}$$

Assim, a componente tangencial da força será

$$F = \frac{v}{c} \frac{L_{\odot} \pi R^2}{4\pi a^2 c}$$

A taxa de perda de momento angular que queremos calcular é o torque associado a essa força, logo

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{v}{c} \frac{L_{\odot} R^2}{4a^2 c} a$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{L_{\odot}R'^2}{4mc^2a^2}J$$

$$\therefore \boxed{\frac{dJ}{dt} = -\frac{3L_{\odot}}{16\pi R' \rho c^2 a^2}J}$$

(i) Partindo da expressão encontrada,

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{L_{\odot}R'^2}{4mc^2a^2}J$$

$$\frac{d(va)}{dt} = -\frac{L_{\odot}R'^2}{4mc^2a^2}(va)$$

Substituindo $v = \sqrt{GM_{\odot}/a}$, simplificando e integrando, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}} a \right) = -\frac{L_{\odot}R'^2}{4mc^2a^2} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}} a$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}} \frac{da}{dt} = -\frac{L_{\odot}R'^2}{4mc^2a} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}}$$

$$\int_a^{R_{\odot}} ada = -\int_0^{t'} \frac{L_{\odot}R'^2}{2mc^2} dt$$

$$\frac{1}{2} (R_{\odot}^2 - a^2) = -\frac{L_{\odot}R'^2}{2mc^2} t'$$

Como $a \gg R_{\odot}$,

$$t' = \frac{mc^2a^2}{L_{\odot}R'^2}$$

$$\therefore \boxed{t' = \frac{4\pi\rho'c^2}{3L_{\odot}} R' a^2}$$

Grade de Correção

Item (a)	4 pontos
+ 0.5 Argumentar que, como o satélite é rígido, $g_A = g_B$.	
+ 2 Desenvolver a equação e aplicar aproximações apropriadamente.	
+ 1 Expressão final correta.	
+ 0.5 Valor numérico correto.	
Item (b)	5 pontos
+ 2 Adicionar a contribuição da força centrífuga à aceleração nos pontos A e B.	
+ 2 Desenvolver a equação e aplicar aproximações apropriadamente.	
+ 1 Expressão final correta.	
Item (c)	2 pontos
+ 2 Argumentar que a distância (limite de Roche) seria maior que a calculada no item (a) pelo fato de um satélite real ser deformável.	
Item (d)	8 pontos
+ 0.5 Escrever a expressão geral para a taxa de perda de momento angular $\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}(mvr)$.	
+ 3 Argumentar que pode ser feita a aproximação $\frac{dJ}{dt} \approx \frac{dm}{dt}vr$, uma vez que o processo de decaimento orbital é extremamente lento.	
+ 3 Associar a energia irradiada por meio de um fóton a uma massa efetiva para escrever a taxa de perda de momento angular como $\frac{dJ}{dt} \approx \frac{vr}{c^2} \frac{dE_\gamma}{dt}$.	
+ 1.5 Utilizar a expressão para a luminosidade da partícula e chegar na expressão final correta.	
Item (e)	12 pontos
+ 4 Obter uma expressão para t em termos dos momentos angulares final e inicial.	
+ 3 Determinar a razão entre os momentos angulares final e inicial.	
+ 3 Expressão final correta.	
+ 2 Valor numérico final correto.	
Item (f)	2 pontos
+ 2 Inferir, com base na comparação ($t \ll 4,6$ Gyr), que o anel já teria se dissipado há muito tempo caso não existisse alguma fonte de matéria que o reabastecesse continuamente.	
Item (g)	8 pontos
+ 1 Escrever as componentes da velocidade da luz no referencial do Sol.	
+ 3,5 Escrever as fórmulas de adição de velocidades relativística para passar para o referencial da partícula.	
+ 2,5 Escrever $\tan \phi = u'_y/u'_x$.	
+ 1 Chegar na expressão esperada.	
Item (h)	12 pontos
+ 2 Partir da fórmula geral dada e determinar o ângulo de aberração $\theta - \phi \approx v/c$, argumentando que $v \ll c$.	
+ 4 Escrever a expressão para a componente tangencial da força de pressão de radiação.	
+ 4 Argumentar que a taxa de perda de momento angular pedida é o torque associado a essa força.	
+ 2 Expressão final correta.	
Item (i)	15 pontos
+ 6 Utilizando o fato de que $v = \sqrt{GM_\odot/a}$, obter uma expressão com $\frac{da}{dt}$.	
+ 5 Integrar a em relação a a no intervalo a a R_\odot .	
+ 2 Utilizar o fato de que $a \gg R_\odot$.	
+ 2 Expressão final correta.	