PROVA TEÓRICA P3

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

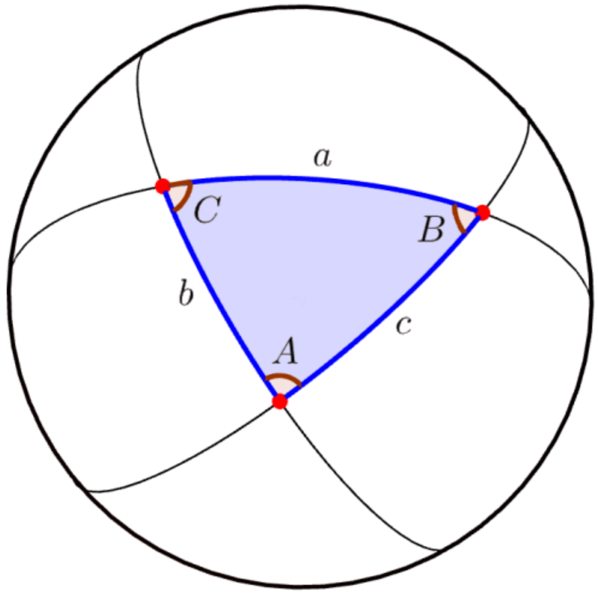
1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., "não respondi à Q1 e à Q2";
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \operatorname{sen}(a) = \cot(B) \cdot \operatorname{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Equação dos gases ideais:

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

Questões Curtas

1. **LSST (15 pontos)**

O LSST, ou Legacy Survey of Space and Time (tradução livre: Levantamento para o Legado do Espaço e do Tempo), é um levantamento astronômico, ou seja, um estudo do céu como um todo. O LSST será feito no Observatório Vera C. Rubin, nomeado em homenagem à astrônoma estadunidense que determinou, além de outras coisas, que as curvas de rotação de galáxias não eram explicadas pela matéria observada. O Observatório Rubin ficará no Cerro Páchon, uma montanha no deserto do Atacama, no Chile.

Esse levantamento tem como objetivo principal entender a matéria e a energia escura, além de realizar um inventário de objetos do sistema solar, buscar por transientes e mapear a via láctea e a sua vizinhança. Para isso, o LSST observará cerca de metade do céu, ou 18,000 graus quadrados durante um período de 10 anos (2025-2035).

Para que seja possível realizar tamanha tarefa, foi necessário projetar um telescópio e uma câmera que esteja pronto para o desafio. Nessa questão, estudaremos um pouco sobre a instrumentação que torna o LSST possível, incluindo a maior câmera digital existente.

(a) **(7 pontos)** Observe a imagem a seguir:

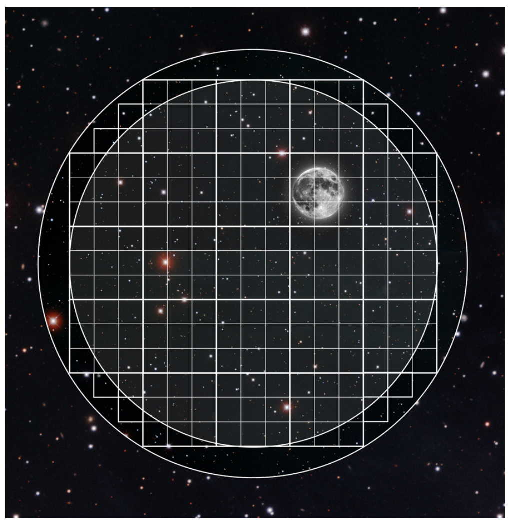


Figura 1: Plano focal do LSST (diâmetro de 64 cm, ilustrado pelo círculo maior), um mosaico que fornece 3.2 gigapixels por imagem; a Lua (30 minutos de arco) ilustra o tamanho do campo de visãocampo de visão. **Crédito:** Rubin Observatory/NSF/AURA.

A partir das informações dadas na legenda, determine o campo de visão em graus e a resolução angular do CCD em segundos de arco por píxel. Estime também o tamanho do pixel em μm e assim calcule a escala de placa. Sabendo que o seeing mediano no pico do Cerro Páchon, onde ficará o Observatório Rubin, é de 0.7 segundos de arco, determine se o LSST será limitado pelo seeing ou pela resolução do CCD.

(b) **(8 pontos)** Leia as alternativas a seguir e marque verdadeiro ou falso, justificando em ambos os casos. Respostas sem uma justificativa correta não serão contabilizadas.

(a) Um telescópio grande como o LSST (8m) que precisa se mexer rapidamente entre cada observação precisa de uma grande razão focal para facilitar esses movimentos.

(b) O uso da óptica adaptativa se torna mais fácil quanto maior o campo de visão.

(c) A razão sinal-ruído de uma observação feita por um telescópio é proporcional ao tempo de exposição.

(d) O seeing muda quando mudamos o filtro pelo qual fazemos a observação.

2. Ano Bissexto(15 Pontos)

Você tem as seguintes informações:

- Duração do ano sideral em dias siderais: 366.256363
- Período de precessão dos equinócios: 25780.00 anos siderais

(a) **(3 pontos)** Utilizando-se apenas das informações dadas, qual é a duração do ano tropical em dias solares?

(b) **(4,5 pontos)** Muitas pessoas pensam que um ano bissexto ocorre simplesmente em anos múltiplos de 4. No entanto, o calendário gregoriano (nosso atual calendário) possui regras adicionais para anos que são múltiplos de 100 e 400.

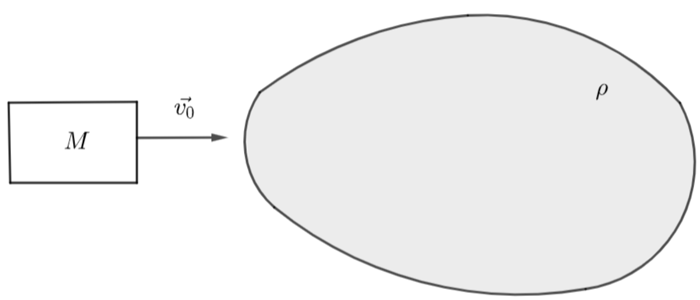
Explique quais são essas ações extras para os anos múltiplos de 100 e 400, e por que elas são necessárias. Para justificar numericamente, utilize a duração do ano, arredondando-a para a quarta casa decimal com o algarismo sendo 5 (Ex: XXX,XXX5) como foi acordado em nosso calendário.

(c) **(3 pontos)** Se não fizéssemos a aproximação anterior, com base nas regras do calendário gregoriano, após quantos anos teríamos um desvio acumulado de um dia em relação às estações?

(d) **(4,5 pontos)** Elchym deu um soco na Terra e o seu período de precessão diminuiu para 2340 anos siderais. Qual nova regra deve ser adotada para anos bissextos?

3. Obstáculos dos Paulos (20 pontos)

Plo 1 e Plo 2 estavam navegando tranquilamente em um foguete pelo espaço, até que, subitamentem encontraram uma nuvem composta por poeira de densidade ρ. Sabe-se que a massa inicial do sistema paulos-foguete é M_0, que a seção-transversal do foguete é S, que as colisões com as partículas de poeira são elásticas e que o foguete ejeta massa à uma taxa constante μ e à uma velocidade de ejeção v_e para propulsão. Com base nisso, e de posse que a velocidade inicial do foguete é desprezível, determine a equação do foguete dos Paulos, que relaciona a sua velocidade instântanea e massa instântanea.



Dado:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 - ax^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{a}x}{1 - \sqrt{a}x}\right) + C$$

Questões Médias

4. Correção Bolométrica (20 pontos)

Correção Bolométrica (BC) é o valor de correção para se obter a magnitude bolométrica a partir da magnitude de um dado filtro x:

$$m_{bol} = m_x - BC_x.$$

A magnitude m_x de um filtro qualquer é definida de forma que sua correção bolométrica é nula para uma estrela de tipo espectral F5 ($T_{F5} = 6550\,\mathrm{K}$). Considere que o filtro da banda B possui comprimento de onda central $\lambda_B = 436\,\mathrm{nm}$ e funciona como filtro ideal com largura de banda $\Delta\lambda_B = 94\,\mathrm{nm}$. Sobre esse sistema de magnitudes, responda:

Dados:

i) A densidade de radiação, por unidade de comprimento de onda, por unidade de esfero-radiano pode ser aproximada pela expressão de Wien

$$B_\lambda(T, \lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \text{ para } e^{hc/(\lambda kT)} \gg 1.$$

ii) Um passarinho que sabe integrar por partes uma vez te disse que

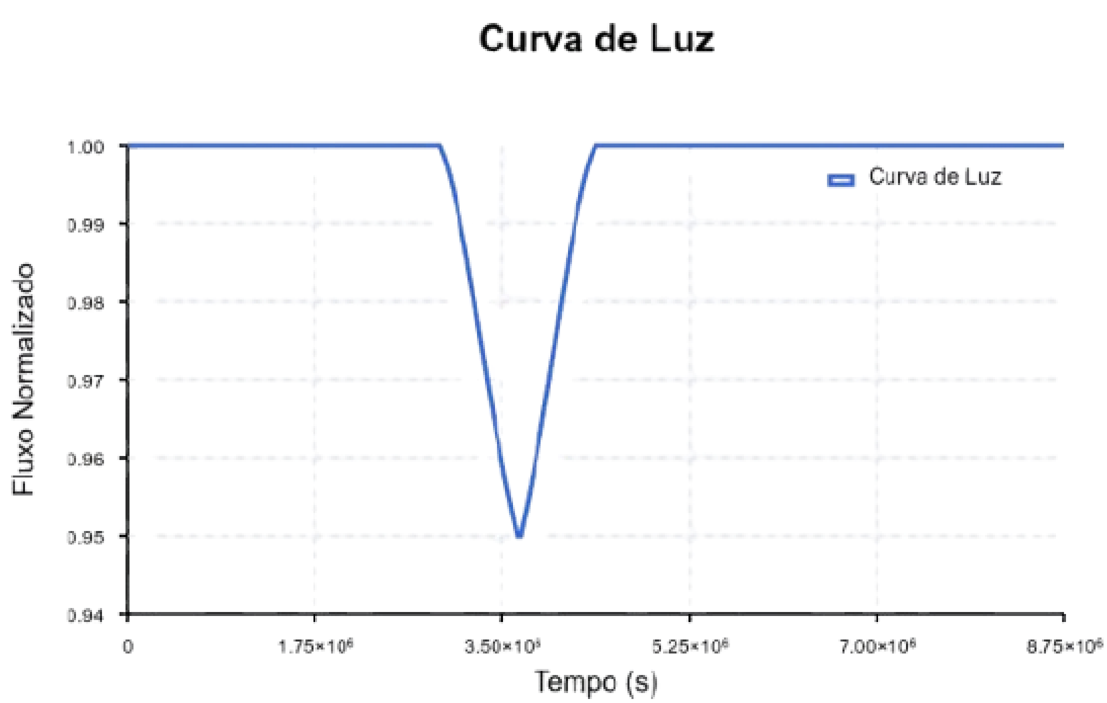
$$\int \frac{e^{-a/x}}{x^5}\,dx = \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{a^4}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{a}{x}\right) + 6\right] + C$$

(a) **(10 pontos)** calcule a razão $\frac{F_{0,bol}}{F_{0,B}}$, sendo $F_{0,bol}$ e $F_{0,B}$ os fluxos que possuem magnitudes nulas no sistema bolométrico e na banda B, respectivamente.

(b) **(10 pontos)** Calcule BC_B para uma estrela de temperatura $T = 4000\,\mathrm{K}$

5. Pesquisas estelares (20 pontos)

Durante suas pesquisas sobre a curva de fluxo de estrelas distantes, Davi se deparou com o seguinte gráfico:



Os dados fornecidos por esse gráfico indicam a possível existência de um exoplaneta nesse sistema estelar. Intrigado com esse corpo celeste, Davi decidiu investigar as características do sistema. Entre as propriedades que ele obteve estão a massa (M_e) e o raio da estrela (R_e), bem como a excentricidade (e), o semieixo maior (a) e a inclinação orbital (i) do exoplaneta. No entanto, um problema no sistema de seu banco de dados apagou o valor da inclinação orbital.

Com base em seus conhecimentos e nos dados obtidos no gráfico, determine a inclinação orbital do exoplaneta estudado por Davi, sabendo que o ápice do trânsito ocorre no periastro.

Dados:

$R_e = 200R_\odot$

$M_e = 15M_\odot$

$e = 0{,}7$

$a = 5$ UA

6. **Maranhão (20 pontos)**

Hemettrius, aluno do MIT (Instituto Tecnológico do Maranhão), acaba de testar na sua faculdade um sensor de meteoros muito especial: ele só detecta a trilha de ionização se ela for perfeitamente perpendicular à linha de visada do sensor. Ou seja, se o sensor aponta para um ponto P, o radiante da chuva, ou o ponto de origem aparente, está a 90° de distância de P.

Às 10:32, horário local, Hemettrius detectou meteoros no horizonte, exatamente na direção leste. Animado com seu brinquedinho novo, ele girou o sensor em 40,0° ao longo do horizonte, para o sul. Após o giro, ele só voltou a detectar meteoros da mesma chuva às 12:32.

Considerando a ascensão reta do Sol nesse dia de aproximadamente 7h25min, e ignorando a equação do tempo e a diferença entre horário solar e civil, ajude nosso querido Hemettrius e encontre as coordenadas equatoriais do radiante dessa chuva de meteoros. Considere também que o radiante esteve sempre acima do horizonte nas duas observações e Maranhão está em $42{,}0°N$.

7. **Inflação (30 pontos)**

A teoria da inflação cósmica propõe um rápido período de expansão acelerada do universo logo após o Big Bang que elegantemente soluciona alguns dos desafios que o modelo padrão da Cosmologia (ΛCDM) não consegue explicar: o problema do horizonte; a geometria essencialmente plana do universo, e a ausência de monopolos magnéticos. Nessa questão, exploraremos condições físicas para a ocorrência da inflação e como ela pode ser alimentada pela dinâmica de um campo escalar. Assuma, nos itens que seguem, um universo plano e dominado por uma componente com equação de estado $P = w\varepsilon$, em que P é sua pressão e $\varepsilon = \rho c^2$ a densidade de energia.

(a) **(3 pontos)** A densidade em termos do fator de escala pode ser escrita como

$$\rho(a) \propto a^n.$$

Encontre o expoente n em termos de w.

(b) **(7 pontos)** Para que universo esteja em um regime inflacionário, requeremos expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$). Mostre que, para isso, devemos ter:

$$w < w_c.$$

E determine w_c.

Agora, assuma que a componente é um tipo de matéria uniformemente distribuída no espaço, descrita por uma função escalar $\phi = \phi(t)$ (campo escalar homogêneo) associada a um potencial $V(\phi)$. É fornecido que sua densidade de energia e pressão são dadas por:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).$$

(c) **(2 pontos)** Verifique que, para $V \gg \dot{\phi}^2$, o campo escalar respeita a condição do item (b).

(d) **(4 pontos)** Encontre $\dot{H}$ em termos de $\dot{\phi}$ e $M_{\rm Pl} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$.

(e) **(14 pontos)** Considere um potencial exponencial do tipo:

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\rm Pl}},$$

onde V_0 e λ são constantes. Supondo soluções para $\phi(t)$ e $a(t)$ do tipo

$$\phi(t) = \alpha \ln(\beta t), \quad a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma},$$

com α, β, γ e t_0 constantes, **(i)** determine α, β e γ, em termos de λ, V_0 e $M_{\rm Pl}$; **(ii)** sendo o fim da inflação definido por $\ddot{a} = 0$, mostre que o período inflacionário desse universo nunca cessa caso $\lambda < \sqrt{2}$.

Dica: Substitua $\phi(t)$ e $a(t)$ na primeira equação de Friedmann e na relação encontrada no item passado.

8. Can You Hear The Music? (30 pontos)

Muitos lembram de Julius Robert Oppenheimer como o pai da bomba atômica. Porém, poucos sabem que ele também contribuiu para a ciência com uma equação importante para o entendimento da estrutura de uma estrela considerando a Relatividade Geral. Para um corpo simetricamente esférico que não rotaciona, pode valer o equilíbrio hidrostático dado pela Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dP}{dr} = -\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\frac{Gm(r)c^2 + 4\pi G r^3 P}{r[rc^2 - 2Gm(r)]}$$

Nesta questão, trataremos de uma estrela de nêutrons no limite de se tornar um buraco negro, isto é, incompressível e de densidade uniforme.

(a) **(4 pontos)** Quais seriam as condições necessárias para que a Equação de TOV se aproxime do seu caso clássico?

(b) **(15 pontos)** Agora, considerando a equação do caso geral, deduza uma expressão para a pressão no centro da estrela de nêutrons, em função de sua massa M, seu raio R e constantes físicas.

Dica 1: Se necessário, utilize as integrais abaixo:

$$\int \frac{dx}{ax - \frac{1}{x}} = \frac{\ln|ax^2 - 1|}{2a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - ax} = \frac{\ln\left|\frac{a}{x} - 1\right|}{a} + C$$

Dica 2: Se achar plausível, utilize a mudança de variável $u = \rho c^2 + P$, em que ρ é a densidade da estrela, c é a velocidade da luz e P é a pressão em algum ponto.

(c) **(7 pontos)** Sabendo disso, o que seria o limite mínimo para o raio da estrela de nêutrons em função de sua massa M e constantes físicas?

(d) **(4 pontos)** Encontre a máxima massa de uma estrela de nêutrons em massas solares, sabendo da densidade típica de uma estrela de nêutrons incompressível $\rho_n = 3{,}7 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}$.

Questões Longas

9. Instabilidade em um Universo em Expansão (60 pontos)

Na Cosmologia, é comum aproximarmos o universo para homogêneo em largas escalas. No entanto, em menores escalas, a densidade do universo apresenta pequenas variações, surgindo desde flutuações quânticas até grandes estruturas astrofísicas como galáxias. Nessa questão, estudaremos como essas pequenas variações relativas de densidade $\delta(t)$ evoluem com o tempo. Para facilitar o problema, iremos focar em variações causados por grandes estruturas, maiores que galáxias, como aglomerados estelares.

Para o que segue, considere um universo composto por matéria, com densidade média $\rho_M(t)$. Em uma região esférica de raio R, como a de um aglomerado estelar, uma pequena quantidade de matéria é adicionada e removida, de modo que a densidade da região é dada por:

$$\rho(t) = \rho_M(t)[1 + \delta(t)]$$

onde $\delta(t) << 1$. Suponha que o excesso de densidade na região esférica é aproximadamente homogêneo e que o universo está em expansão.

(a) **(3 pontos)** Utilizando a Segunda Lei de Newton, mostre que a aceleração da gravidade na superfície da região esférica é dada por:

$$\ddot{R} = -aG\rho_M\,(1 + \delta)\,R$$

e encontre o valor da constante numérica a.

(b) **(7 pontos)** Ao longo do tempo, a massa total na região esférica mantêm-se constante, ou seja, se conserva. Sabendo disso, e de posse da dependência de $\rho_M(t)$ com o fator de escala $a(t)$ para um universo dominado por matéria, mostre que:

$$R(t) \propto a(t)^b [1 + \delta(t)]^c$$

e encontre os valores das constantes numéricas b e c.

(c) **(10 pontos)** Partindo da equação obtida anteriormente, mostre que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} + d\ddot{\delta} + e\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}$$

e encontre os valores das constantes numéricas d e e.
Dado: Se necessário use que:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dx}\frac{dg(x)}{dx}$$

Para além do valor de $\ddot{R}$, para encontrar a dependência temporal de variações de densidade no universo, precisamos encontrar o valor de $\ddot{a}$. Felizmente, é dado que a equação da aceleração para um universo em expansão é da forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P)$$

(d) **(5 pontos)** Mostre que, para um universo dominado por matéria:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -fG\rho_M$$

e encontre o valor da constante numérica f.

(e) **(8 pontos)** Uma vez de posse do valor de $\ddot{R}$ e $\ddot{a}$, e com base nas equações obtidas anteriormente, mostre que podemos obter a dependência temporal de $\delta(t)$ pela seguinte equação:

$$\ddot{\delta} + gH\dot{\delta} = h\Omega H^2\delta$$

e encontre os valores das constantes numéricas g e h. Note que Ω é o parâmetro de densidade, definido por:

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho_M}{3H^2}$$

Apesar de termos estudado o caso de um universo dominado por matéria, a equação obtida acima é válida para universos dominados para outros componentes, como radiação e constante cosmológica. Tanto para radiação, quanto para constante cosmológica, temos que $\Omega << 1$, de modo que podemos negligenciar os termos com Ω.

(f) **(10 pontos)** Sabendo que para um universo dominado por radiação $a \propto t^{1/2}$, mostre que para radiação:

$$\delta(t) \approx B_1 + B_2 \ln t$$

Você não precisa encontrar as constantes B_1 e B_2.
Dado:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

(g) **(6 pontos)** De forma análoga, mostre que para um universo dominado por constante cosmológica:

$$\delta(t) \approx C_1 + C_2 e^{-2Ht}$$

Você não precisa encontrar as constantes C_1 e C_2.

Já para um universo dominado por matéria, $\Omega = 1$, e as equações ficam mais complicadas. Para o que segue, suponha que para matéria $\delta(t) = Dt^n$.

(h) **(11 pontos)** Substitua o valor de $\delta(t) = Dt^n$ para matéria na equação diferencial obtida anteriormente e descubra as soluções para n. Com base nisso, conclua que para matéria:

$$\delta(t) = D_1 t^{2/3} + D_2 t^{-1}$$

Considere que para matéria $a(t) \propto t^{2/3}$. Você não precisa encontrar as constantes D_1 e D_2.

10. O Devorar de Kronos (70 pontos)

Os sistemas de anéis planetários são complexas formações compostas por partículas de gelo, poeira e rochas que orbitam um planeta, criando um disco ao seu redor. Presentes principalmente nos gigantes gasosos do Sistema Solar, esses anéis variam em tamanho, densidade e composição, sendo os de Saturno (Kronos) os mais notórios. A origem desses anéis ainda é debatida, mas as principais hipóteses sugerem que podem ter se formado a partir da destruição de luas ou cometas que chegaram perto demais dos planetas e foram despedaçados pelas forças de maré, ou então serem remanescentes de material primordial que nunca se aglutinou para formar satélites.

Para os itens a seguir, adote $M_S = 5{,}7 \times 10^{26}$ kg para a massa de Saturno, $R_S = 5{,}8 \times 10^{8}$ m para o seu raio e $a_S = 1{,}43 \times 10^{12}$ m para a sua distância ao Sol. Além disso, deixe as respostas finais algébricas em termos somente das variáveis definidas no enunciado da questão e de constantes fundamentais.

(a) **(4 pontos)** Considere um satélite natural esférico, rígido e homogêneo que orbita Saturno. Sabendo que sua densidade é $\rho = 1{,}9\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, o quão próximo do centro de Saturno esse satélite deve chegar para que comece a se fragmentar? Assuma que o satélite não rotaciona.
Dica: Se necessário, utilize que $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ para $\alpha \ll 1$.

(b) **(5 pontos)** Determine uma expressão para a distância do item anterior, agora considerando que o satélite rotaciona com velocidade angular ω em torno de seu próprio eixo.

(c) **(2 pontos)** Na prática, nenhum satélite natural é completamente rígido como o do item (a). Alguns satélites até se aproximam mais de fluídos. Nesse sentido, espera-se que a distância para que uma lua real se desintegre seja maior ou menor que a calculada no item (a), admitindo que ela tenha a mesma densidade ρ? Justifique.

A dinâmica dos anéis planetários é regida por uma série de processos e efeitos físicos que, combinados, determinam sua estrutura, estabilidade e evolução ao longo do tempo, como colisões entre partículas, interações magnéticas e ressonâncias orbitais. Nos próximos itens, iremos analisar o efeito da radiação solar em grãos de poeira do sistema de anéis de Saturno. Mais precisamente, estudaremos (de maneira simplificada) o efeito Poynting-Robertson, um processo em que pequenas partículas em órbita gradualmente perdem momento angular — o que faz com que elas espiralem lentamente em direção ao corpo central — devido à contínua reemissão anisotrópica (no referencial da estrela) da radiação estelar que absorvem. No referencial da partícula, essa emissão é isotrópica e, como veremos mais para frente, o efeito pode ser explicado pelo fato de que os raios de luz solar chegam à partícula levemente inclinados devido ao seu movimento orbital.

Para os itens abaixo, considere uma pequena partícula de poeira esférica de raio R e densidade ρ em órbita circular ao redor de Saturno. Admita que a partícula absorve 100% da radiação solar incidente e que se encontra em equilíbrio.

(d) **(8 pontos)** Estime uma expressão para a taxa aproximada com que a partícula de poeira perde momento angular. Denote o momento angular por J e deixe a expressão em função de J.

Dica: Modele a reemissão de radiação como se a partícula estivesse perdendo uma massa efetiva dm, associada à energia irradiada via $E = mc^2$.

(e) **(12 pontos)**

(i) Encontre uma expressão para t, o tempo que a partícula, inicialmente em uma órbita de raio r_0 em torno de Saturno, leva para chegar à superfície do planeta devido à perda gradual de momento angular. Considere que a órbita da partícula é sempre aproximadamente circular e que sua distância ao Sol é constante.

(ii) O raio médio das partículas de poeira do anel E de Saturno é de 1 μm. Se a densidade dessas partículas é 3,0 $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, quanto tempo uma partícula típica do anel E levaria para espiralar até Saturno a partir de uma distância inicial $5R_S$?

(f) **(2 pontos)** Compare o valor calculado no item anterior com a idade estimada do Sistema Solar (4,6 Gyr). Com base nessa comparação, o que pode-se afirmar a respeito da permanência do anel E do sistema de Saturno?

O efeito Poynting-Robertson também age como um mecanismo de limpeza do sistema solar como um todo, ao fazer com que pequenas partículas em órbitas interplanetárias sejam gradualmente "sugadas" ao Sol. Neste contexto, é oportuno analisar, do ponto de vista dos grãos de poeira, o fenômeno da aberração da luz — devido ao movimento da partícula, a radiação estelar parece vir de uma direção levemente deslocada, à frente da direção real da fonte; a absorção dessa radiação faz com que a partícula "sinta" uma força de arrasto contra seu sentido de movimento. O ângulo (chamado de ângulo de aberração) entre a direção real da fonte de luz (estrela) e a direção aparente em que ela é observada é extremamente pequeno, uma vez que a partícula se movimenta com uma velocidade $v \ll c$. A princípio, podemos calcular o ângulo de aberração a partir da fórmula

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta}{\gamma(v/c + \cos\theta)}$$

onde γ é o fator de Lorentz; ϕ e θ são os ângulos entre a direção de chegada da luz e a direção do movimento da partícula no referencial da partícula e no referencial da estrela, respectivamente.

(g) **(8 pontos)** Demonstre a fórmula dada.

Para os itens abaixo, considere um pequeno grão de poeira esférico de raio R' e densidade ρ', inicialmente em órbita circular ao redor do Sol de raio $a \ll R_\odot$.

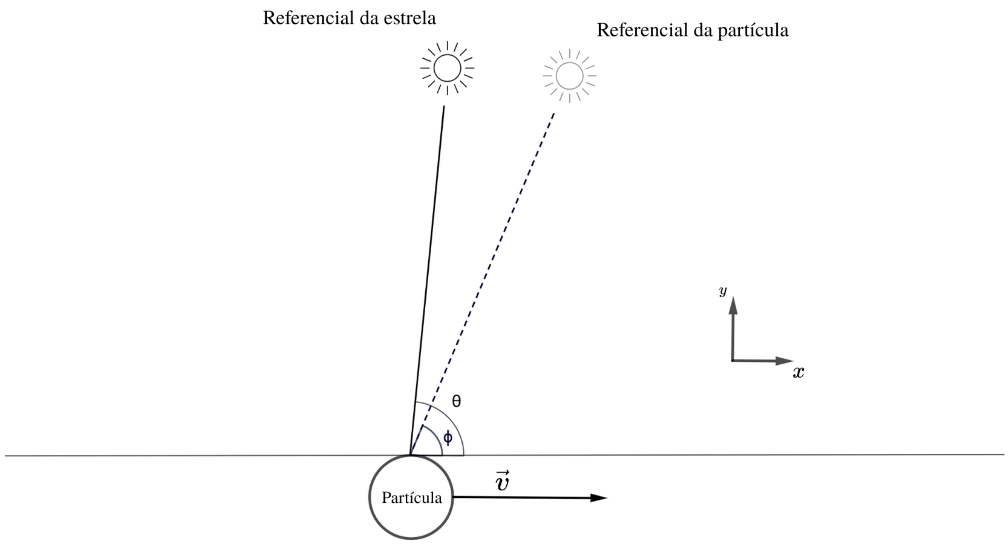


Figura 2: Aberração da luz.

(h) **(12 pontos)** Encontre a expressão para a taxa de perda de momento angular dessa partícula utilizando a fórmula da aberração da luz.

(i) **(15 pontos)** Encontre a expressão para o tempo t' necessário para que a partícula chegue ao Sol devido ao efeito Poynting-Robertson.