



PROVA TEÓRICA P1  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

---

## Instruções Gerais

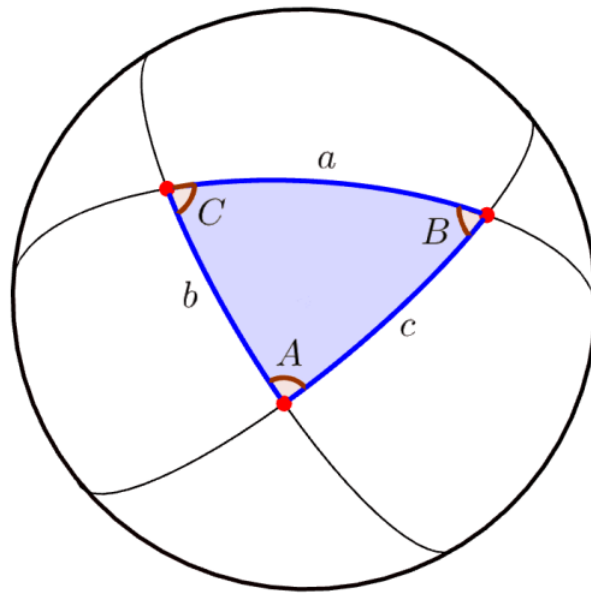
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 19 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Equação dos gases ideais:

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

## Questões

1. **Mecânica Celeste (Classe C1)** Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito à mecânica celeste. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

(1.) A descrição completa de um corpo numa órbita kepleriana exige seis parâmetros orbitais: a inclinação e a longitude do nodo ascendente orientam o plano de órbita; a excentricidade define o formato da órbita; o semi-eixo maior define a escala da órbita; o argumento do periastro orienta a órbita dentro de seu plano; e a anomalia localiza a posição do corpo na órbita.

(2.) A órbita osculadora é a órbita assumida por um corpo quando consideramos perturbações a partir do primeiro termo numa série de expansão. Ou seja, ao invés de considerar o potencial caindo com  $A/r$  (situação ideal), consideramos que ele cai com  $A/r + B/r^2$  (em que o  $B/r^2$  é o primeiro termo de uma expansão em série).

(4.) Os pontos de Lagrange L4 e L5 são regiões estáveis e favoráveis a fenômenos de ressonância orbital 1:1. Um exemplo notório desse efeito são os asteroides troianos na órbita de Júpiter.

(8.) Em um sistema de dois corpos, as deformações de uma componente devido à atração gravitacional da companheira geram atritos internos, os quais tendem o sistema à sua configuração de menor energia, caracterizada por órbitas síncronas e circulares.

(16.) A Precessão dos Equinócios é um exemplo de atuação de torque sobre um sistema em rotação prévia, modificando a direção de seu momento angular. Se a variação local do campo gravitacional externo for desprezada, ainda existe torque resultante no referencial do centro de massa terrestre. Sendo assim, mesmo que sacrifique alguma precisão, é possível explicar a Precessão dos Equinócios independentemente de efeitos de maré.

(32.) A esfera de Hill (ou esfera de influência) da Terra é o lugar geométrico dos pontos nos quais existe pelo menos uma órbita estável ao redor do planeta. Fora dessa esfera, qualquer satélite terrestre será eventualmente capturado pelo Sol.

Dezena       0     1     2     3     4     5     6

Unidade     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9

### Solução:

1. **V** - A assertiva descreve corretamente os seis parâmetros orbitais.

2. **F** - Osculadora significa *tangente*, e a órbita osculadora é a órbita kepleriana tangente à trajetória real do corpo.

4. **V** - A assertiva descreve corretamente o que são os pontos L4 e L5, cujo exemplo mais notório são os troianos.

8. **V** - As órbitas síncronas (os corpos sempre “se encarando”) e circulares são configurações em que as deformações elásticas dos corpos não se altere mais. Sendo assim, não têm mais gasto de energia e são o caso limite da evolução de um sistema simples de dois corpos.

16. **F** - Na ausência de forças diferenciais, o torque sobre a Terra se anula. Sendo assim, a Precessão dos Equinócios é necessariamente uma manifestação de efeitos de maré.

32. **V** - A assertiva descreve corretamente a esfera de Hill.

Sendo assim, a resposta é  $1 + 4 + 8 + 32 = 45$ .

**2. Óptica (Classe C1)** Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito a equipamentos ópticos. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

- (1.) Os espelhos parabólicos são amplamente utilizados na construção de telescópios, em razão da luz que vier paralela ao eixo ser projetada em um foco único e bem definido.
- (2.) Redes de interferometria são particularmente importantes na astronomia de baixas energias, nas quais o comprimento de onda da radiação detectada é comparativamente maior, diminuindo a resolução de telescópios individuais.
- (4.) O aumento útil de um telescópio doméstico é principalmente determinado pela sua resolução angular, de modo que aumentos excessivos resultam em imagens pouco nítidas.
- (8.) O foco efetivo  $F$  de um telescópio é tal que, quando aplicada uma ocular de foco  $f$ , o aumento do sistema será  $A = f/F$ .
- (16.) A aberração cromática é um efeito inevitável de qualquer sistema óptico. O que normalmente tentamos é minimizá-la, mas conhecendo uma limitação física de sua existência.
- (32.) A montagem germânica é a única montagem equatorial facilmente executável no Hemisfério Sul, pois é a única que não exige precisar a posição do polo elevado, o que é particularmente difícil devido à ausência de uma estrela polar.

Dezena       0     1     2     3     4     5     6

Unidade     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9

**Solução:**

1. **V** - A assertiva justifica corretamente a aplicação de espelhos parabólicos.
2. **V** - A assertiva justifica corretamente a aplicação de redes de interferometria.
4. **F** - Uma vez que os telescópios domésticos trabalham no visível, a resolução não é tão importante como a limitação do ganho ou a presença de ruídos. Sendo assim, dificilmente será o fator decisivo do aumento útil.
8. **F** - O aumento seria dado pela razão contrária, i.e.,  $A = F/f$ .
16. **F** - A aberração cromática é um efeito evitável pela utilização de espelhos ao invés de lentes.
32. **F** - A montagem germânica também necessita da identificação do polo elevado. Além disso, existem métodos para precisar a posição do Polo Sul.

Sendo assim, a resposta é  $1 + 2 = 3$ .

**3. Orientação de Sistemas (Classe C1)** Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito à orientação de giro (dextrorrotatório ou levorrotatório) de sistemas e objetos astronômicos. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

- (1.) No decorrer de um dia, o Sol aparenta se movimentar mais lentamente do que as estrelas fixas na esfera celeste.
- (2.) No Hemisfério Sul, o céu aparenta girar em sentido anti-horário.
- (4.) A definição de um Tempo Sideral Local igual ao ângulo horário mais a ascensão reta, válida para qualquer estrela de referência, só é possível porque ambos (ângulo horário e ascensão reta) têm o mesmo Polo Fundamental e crescem em sentido leste.

(8.) O Polo Norte Eclíptico (PNE) é aproximadamente antiparalelo (mesma direção, mas sentido oposto) ao momento angular do sistema solar.

(16.) A Precessão dos Equinócios avança em orientação de mão esquerda (levorrotatório) se o Polo Fundamental for o PNE. **Dica:** por que se chama ponto de *Aries* se fica em Peixes?

(32.) O movimento aparente de Vênus em relação às estrelas fixas altera sua orientação ao longo do tempo, sendo que Vênus passa um período maior em sentido de mão esquerda (levorrotatório) se o Polo Fundamental for o PNE.

Dezena       0     1     2     3     4     5     6

Unidade     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9

**Solução:**

1. **V** - Enquanto o movimento das estrelas fixas é em sentido oeste, o movimento anual do Sol é em sentido leste. Sendo assim, o movimento anual “atrapalha” o movimento diurno, fazendo com que o Sol gire mais devagar.

2. **F** - No Hemisfério Sul, o céu aparenta girar no sentido horário, pois o movimento diurno aparente dos astros ocorre com orientação levorrotatória.

4. **F** - Embora a soma de dois ângulos ser constante exige que eles sejam medidos sobre o mesmo plano, ela também exige que cresçam em sentido oposto, não em mesmo sentido, de modo que o aumento de um gere diminuição do outro.

8. **F** - O movimento translacional não altera a orientação de um sistema. Sendo assim, se observamos o movimento anual do Sol em sentido de mão direita, o Sol também observa nosso movimento (e do resto do sistema solar, pois é um sentido de movimento geral do sistema) em sentido de mão direita. Sendo assim, como o momento angular é definido por uma regra de mão direita, o PNE é aproximadamente paralelo ao momento angular do sistema solar.

16. **V** - A Precessão dos Equinócios é exemplo notório de sistema levorrotatório em relação ao PNE. Ainda assim, é possível perceber isso observando que o ponto vernal move-se em sentido oeste (de Áries para Peixes).

32. **F** - A orientação do movimento aparente de Vênus de fato se altera a cada máxima elongação por que o planeta passa. Na maior parte do tempo, Vênus está “para trás” da máxima elongação, situação na qual a Terra e o Sol observam o planeta com a mesma orientação, ou seja, dextrorrotatória.

Sendo assim, a resposta é  $16 + 1 = 17$ .

4. **Fotometria (Classe C1)** Leia atentamente as seguintes assertivas, todas com respeito à teoria de radiação. Marque a soma das alternativas verdadeiras.

(1.) A expressão  $v = \lambda \cdot f$  para o cálculo da velocidade de uma onda é apenas uma aproximação para baixas amplitudes. A abordagem mais rigorosa seria considerar o perímetro da senoide.

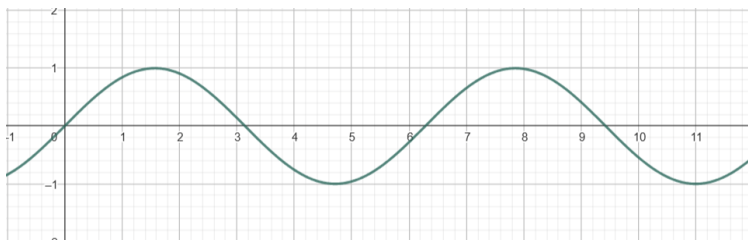


Figura 1: Representação de uma onda. Feito com Geogebra.

(2.) A consideração do Sol como um corpo negro é antagônica à sua visível tonalidade amarelada. Usamos essa aproximação porque ela não carrega muito erro na maioria das frequências de interesse, mas evita modelos matemáticos muito mais trabalhosos.

(4.) Considere o imageamento de uma fonte astronômica de baixo brilho, utilizando uma matriz CCD. A média temporal de detecção de fótons é bem definida, sendo calculada por parâmetros como o fluxo aparente da fonte, a energia do fóton e o ganho do aparato óptico. Contudo, os instantes específicos nos quais cada detecção ocorre são consideravelmente aleatórios e independentes. Sendo assim, podemos modelar a imagem como uma distribuição de Poisson, na qual o ruído (desvio padrão) associado à quantidade de fótons detectada é inversamente proporcional à raiz do tempo de coleta.

(8.) A lei de Wien pode ser obtida derivando a lei de Planck com respeito à temperatura e igualando a derivada a zero. Já a lei de Stefan-Boltzmann pode ser obtida integrando a lei de Planck com respeito à frequência, em todo o espectro eletromagnético, depois corrigindo a dependência pela área e pelo ângulo sólido por meio de um fator multiplicativo.

(16.) O excesso de cor é uma medida do avermelhamento de uma fonte emissora após passar por um meio com extinção. Para duas fontes iguais passando por meios distintos, quanto maior o excesso de cor, maior o índice de cor aparente, portanto mais avermelhada aparenta ser a fonte.

(32.) As linhas de absorção em um espectro estelar revelam a composição química da estrela. Por exemplo, as fortes linhas de hidrogênio no espectro de estrelas do tipo A comprovam a concentração apreciável desse elemento na composição química desse tipo estelar. Por outro lado, a ausência de linhas de hidrogênio no espectro de estrelas do tipo K revela que o elemento não é tão abundante nesse outro tipo.

Dezena       0     1     2     3     4     5     6

Unidade     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9

#### Solução:

1. **F.** A afirmação assume que a onda é uma partícula que percorre a senoide, ou seja, parte de uma interpretação física incorreta para tirar uma conclusão fisicamente incoerente.

2. **F.** O tom amarelado do Sol não é causado por sua refletividade, mas por sua emissividade. Sendo assim, mesmo que tenha uma cor, isso não contradiz o modelo de corpo negro.

4. **F.** Embora a distribuição de Poisson seja um bom modelo para a quantidade de detecções em um pixel de CCD, seu desvio padrão é diretamente proporcional à raiz do tempo de coleta.

8. **F.** Embora as leis de Wien e de Stefan-Boltzmann possam ser obtidas a partir da lei de Planck por ferramentas de cálculo diferencial e integral, a derivada é feita em relação à frequência, não à temperatura.

16. **V.** Assim como afirma a assertiva, o excesso de cor ( $E_{B-V} = (B-V) - (B-V)_0$ ) é uma medida do quanto o índice de cor aumentou. O aumento do índice de cor indica que magnitudes no azul cresceram em comparação com magnitudes no vermelho, ou seja, que houve aumento relativo da luz vermelha em relação à azul. Sendo assim, podemos pensar no excesso de cor como um índice de avermelhamento.

32. **F.** Embora as linhas de absorção evidenciem traços químicos da atmosfera estelar, a assertiva extrapola essa correlação ao negligenciar outros fatores que também são relevantes para a formação dessas linhas. No caso de estrelas do tipo K, a ausência de linhas de absorção de hidrogênio não significa que o elemento não esteja presente significativamente (pelo contrário, o hidrogênio é o elemento mais abundante em todas as estrelas da Sequência Principal). Na verdade, essas deixam de ocorrer (ou ocorrem de forma bem fraca) porque a temperatura da atmosfera estelar é desfavorável à formação de orbitais atômicos que absorveriam as frequências emitidas pela estrela.

Sendo assim, a resposta é 16.

5. **Vaca Roxa (Classe C1)** Ephilia, a famosa vaca roxa de Williamstown, decidiu se mudar para Porto Alegre ( $\varphi = -30^\circ$ ) para observar o céu noturno. Para realizar as suas observações, ela comprou um telescópio de razão focal  $f/5$ . Sabendo que Ephilia deixou o instrumento apontado fixamente para o zênite durante um ano, assinale a soma das alternativas verdadeiras.

- (1.) Ephilia conseguia observar a todo momento as estrelas de declinação  $\delta = -60^\circ$  pelo seu telescópio.
- (2.) Se Ephilia visse uma estrela a cinco graus norte do zênite em sua culminação superior, ela teria declinação  $\delta = -25^\circ$ .
- (4.) Ephilia conseguirá ver apenas as estrelas de declinação  $-60^\circ \leq \delta \leq -40^\circ$  pelo seu telescópio.
- (8.) O ângulo sólido visível pelo telescópio de Ephilia é  $\Omega \approx 1,08$  sr.
- (16.) Ao longo do ano, Ephilia consegue enxergar apenas 0,25% do número total de estrelas espalhadas por toda a esfera celeste pelo seu telescópio.
- (32.) O campo de visão do telescópio de Ephilia é de aproximadamente  $11,40^\circ$

Dezena      ( ) 0    ( ) 1    ( ) 2    ( ) 3    ( ) 4    ( ) 5    ( ) 6

Unidade    ( ) 0    ( ) 1    ( ) 2    ( ) 3    ( ) 4    ( ) 5    ( ) 6    ( ) 7    ( ) 8    ( ) 9

**Solução:**

**Obs:** Questão anulada, pois a aproximação para CCD's foi feita sem que fosse clara essa condição.

- (1.) Falso. Como o telescópio está fixamente apontado para o zênite, é impossível enxergar as estrelas de declinação  $\delta = -60^\circ$  a todo momento, mesmo elas sendo circumpolares.
- (2.) Verdadeiro. Basta perceber que  $\delta = -(|\varphi| - |z|) = -25^\circ$ .
- (4.) Falso. Como o telescópio tem razão focal  $f/5$ , o campo de visão dele será dado por  $\theta = 2 \arctan(1/10) \approx 11,4^\circ$  (aproximação para CCD). Desse modo, só será possível ver estrelas de declinação  $-30^\circ - \theta/2 \leq \delta \leq -30^\circ + \theta/2$ , ou seja,  $-35,7^\circ \leq \delta \leq -24,3^\circ$ .
- (8.) Verdadeiro. Lembre-se de que  $\Omega = 2\pi(\cos \alpha - \cos \beta)$ , em que  $\alpha = 90^\circ - (|\varphi| + |\theta/2|)$  e  $\beta = 90^\circ - (|\varphi| - |\theta/2|)$ . Substituindo os valores, obtemos  $\Omega \approx 1,08$  sr.

(16.) Falso. Poderíamos encontrar a porcentagem de estrelas visíveis pela fórmula  $n/N = \Omega/4\pi \approx 0,086$ . Logo, a porcentagem correta seria 8,6%.

(32.) Verdadeiro. Como vimos anteriormente,  $\theta = 11,4^\circ$ .

Sendo assim, a resposta é 42.

**6. Perdido em Marte (Classe C2)** Após um intenso treinamento para a OLAA na construção de foguetes, Hugo e Tia Mi decidiram aprimorar seu projeto e desenvolver um foguete de garrafa PET. Com um design inovador, eles conseguiram um feito extraordinário: o foguete não apenas escapou da órbita terrestre, como também alcançou Marte. Entretanto, durante o processo de pouso, a estrutura da nave se separou, resultando em aterrissagens em diferentes regiões do planeta.

Apesar da separação, Hugo e Tia Mi utilizaram a observação astronômica para determinar suas posições. Medindo o ângulo horário do Sol em seus respectivos locais, encontraram os valores de 8 h e 2 h, respectivamente. Sabe-se que, no momento do pouso, Marte estava em conjunção com o Sol, visto da Terra, e que a aterrissagem ocorreu no dia 21 de março. Além disso, a longitude de Hugo, em relação a um meridiano de referência equivalente ao de Greenwich na Terra, é  $+45^\circ$ .

Com base nessas informações, determine a longitude de Tia Mi em relação ao mesmo meridiano de referência e seu tempo sideral local.

- |                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| (a) $-135^\circ; 2 h$  | (e) $-45^\circ; 2 h$  |
| (b) $+135^\circ; 2 h$  | (f) $+45^\circ; 2 h$  |
| (c) $-135^\circ; 14 h$ | (g) $-45^\circ; 14 h$ |
| (d) $+135^\circ; 14 h$ | (h) n.d.a.            |

**Solução:**

Para relacionar as longitudes dos locais de pouso de Hugo e Tia Mi, pode-se comparar o tempo sideral local deles. Uma vez que o tempo sideral de Greenwich pode ser escrito como:

$$TSL = TSG + \lambda \Rightarrow TSG = TSL - \lambda$$

Agora, igualando a expressão para o TSG de ambas as localidades:

$$H_{Hu} + \alpha_{\odot} - \lambda_{Hu} = H_{Mi} + \alpha_{\odot} - \lambda_{Mi}$$

$$\lambda_{Mi} = H_{Mi} - H_{Hu} + \lambda_{Hu}$$

$$\boxed{\lambda_{Mi} = -45^\circ}$$

Agora, como Marte está em conjunção com o Sol, a ascensão reta da estrela para o planeta será o oposto ao da Terra, ou seja, a ascensão reta terá uma diferença de 12 h, em relação à vista pela Terra. Além disso, como o pouso ocorreu durante o equinócio de Março, a ascensão reta do Sol para a Terra é de 0 h. Portanto, o TSL de Tia Mi será:

$$TSL = H + \alpha = 2 h + 12 h$$

$$\boxed{TSL = 14 h}$$

Resposta: g)

7. Eu consigo ver o céu? (Classe C2)

Maxbom, em seus esforços para ser aprovado no ITA (Instituto de Tecnologia dos Astrônomos), localizado na cidade de São José dos Campos ( $\phi = 23,2^\circ S; \lambda = 45,9^\circ O$ ), decidiu visitar a instituição para conhecer o seu observatório. Para isso, ele pediu para seu colega Dudu, astrônomo profissional, mostrar o observatório.

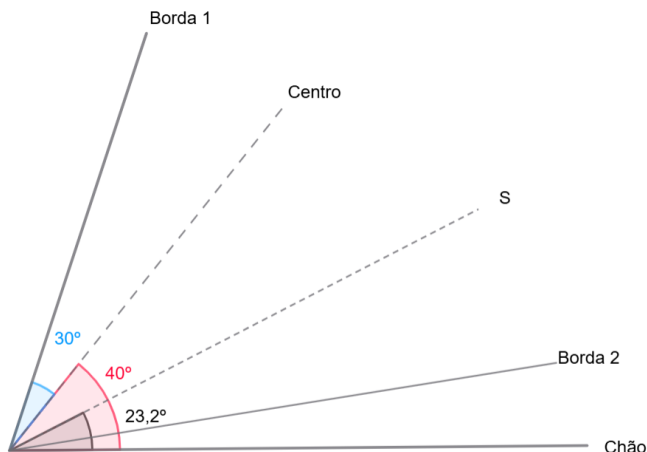
Durante a visita, o motor da cúpula, em formato de uma semiesfera, travou. No momento da falha, a cúpula possuía um ângulo de abertura de  $30^\circ$  e seu centro estava a uma altura de  $40^\circ$ , apontando na direção do ponto cardinal sul.

Mesmo com esse problema, eles resolveram esperar o dia inteiro ali para fazer suas observações do céu. Qual a porcentagem total do céu que eles conseguiram ver durante o dia?

- (a) 7,5%
- (b) 9,5%
- (c) 15,0%
- (d) 15,8%
- (e) 18,9%
- (f) 31,6%
- (g) 43,7%
- (h) n.d.a.

**Solução:**

Fazendo uma representação da situação:



Sabemos que, durante um dia, o céu se move de forma que os únicos pontos fixos são os polos. Dessa forma, pode-se concluir que, em um intervalo de tempo igual a um dia, o ângulo sólido que pode ser visto é igual ao de um cone com abertura igual à distância angular entre o polo celeste Sul e a borda superior da cúpula, Borda 1. Esse ângulo é igual a:

$$\theta = 30^\circ + 40^\circ - 23,2^\circ = 46,8^\circ$$

Dessa forma, a porcentagem do céu que é visível durante um dia será a razão entre o ângulo sólido de um cone de abertura  $46,8^\circ$  e o total do céu, que é  $4\pi$ :

$$P = \frac{2\pi(1 - \cos \theta)}{4\pi}$$

$$P \approx 15,8\%$$

Resposta: (d)

**Obs:** Na correção também foi aceito considerar o céu total como  $2\pi$ , ou seja, 31.6% (f), também foi uma resposta aceita

**LIGOS fora de fase** O texto a seguir refere-se às questões 8 e 9.

Os observatórios LIGO (Observatório de ondas gravitacionais por interferômetro laser) estão entre os mais impressionantes e promissores detectores da modernidade. Com uma precisão que satura princípios quânticos de incerteza, estes já são capazes de detectar eventos dinâmicos supermassivos e prometem muito mais. Os observatórios constituem de dois interferômetros de Michelson localizados em Livingston, Louisiana ( $30^{\circ}33'47''$  N ,  $90^{\circ}46'27''$  O) e em Richland, Washington ( $46^{\circ}27'19''$  N  $119^{\circ}24'28''$  O), e fazem forte uso da correlação estatística dos dados coletados para a busca de sinais (eventos) entre os dados medidos. Um tipo simples de correlação que podemos estudar é a diferença de fase entre sinais periódicos.

8. (**Classe C2**) Considere uma fonte de ondas gravitacionais com uma frequência bem definida  $\nu = 200$  Hz, localizada em  $\delta = -22^{\circ}28'12''$  e  $\alpha = 17^h 03^m 15^s$  e seja  $P$  o ponto da Terra no qual a onda fez seu primeiro contato. Se o tempo sideral de Greenwich no momento da detecção é  $TSG = 14^h 7^m 57^s$ , determine as distâncias angulares  $\theta_L$  e  $\theta_W$  entre o ponto  $P$  e os observatórios de Louisiana e Washington, respectivamente.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\theta_L = 69^{\circ} 35' 02''$ ; $\theta_W = 96^{\circ} 48' 25''$   | (e) $\theta_L = 67^{\circ} 41' 01''$ ; $\theta_W = 79^{\circ} 29' 55''$   |
| (b) $\theta_L = 138^{\circ} 51' 15''$ ; $\theta_W = 152^{\circ} 26' 49''$ | (f) $\theta_L = 115^{\circ} 56' 59''$ ; $\theta_W = 118^{\circ} 08' 28''$ |
| (c) $\theta_L = 161^{\circ} 32' 56''$ ; $\theta_W = 135^{\circ} 11' 43''$ | (g) $\theta_L = 23^{\circ} 42' 05''$ ; $\theta_W = 37^{\circ} 18' 26''$   |
| (d) $\theta_L = 55^{\circ} 29' 41''$ ; $\theta_W = 69^{\circ} 43' 22''$   | (h) n.d.a.  |

**Solução:** Lembrando da equação para o tempo sideral local e ângulo horário:

$$TSG + \lambda = TSL = H + \alpha. \quad (1)$$

Se estamos no meridiano que contem a direção da onda temos que seu ângulo horário  $H = 0$ , de modo que:

$$\lambda = \alpha - TSG = 43^{\circ} 49' 30'' \text{ L}. \quad (2)$$

Também temos que na direção do evento, a declinação corresponde à latitude:  $\delta = \varphi = 22^{\circ}28'12''$  S. Assim, nosso ponto é ( $22^{\circ}28'12''$  S ,  $43^{\circ} 49' 30''$  L).

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo formado por P, o observatório (L ou W) e o Pólo Norte:

$$\cos(\theta) = \cos(90 - \varphi_P) \cos(90 - \varphi) + \sin(90 - \varphi_P) \sin(90 - \varphi) \cos(\Delta\lambda), \quad (3)$$

obtemos:

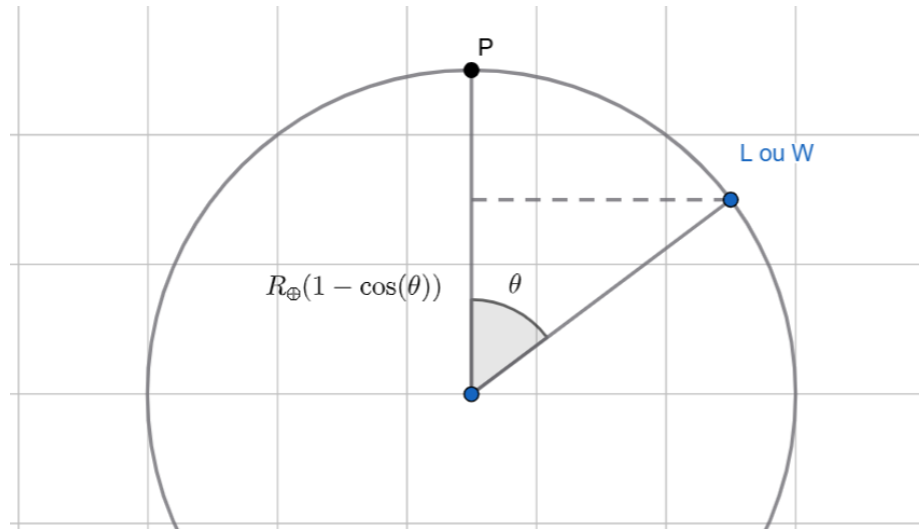
$$\begin{cases} \theta_L = 138^{\circ} 51' 15'' \\ \theta_W = 152^{\circ} 26' 49'' \end{cases} \quad (4)$$

Resposta: (b)

9. (**Classe C2**) Considere agora uma nova fonte de sinal, com a mesma frequência, e cujo sinal atinge a Terra em  $P'$ , formando ângulos  $\theta'_L = 23^{\circ} 12' 56''$  e  $\theta'_W = 82^{\circ} 47' 33''$ . Encontre a diferença de fase  $\Delta\phi$  (em radianos) com a qual os observatórios detectam este sinal.

- (a)  $\Delta\phi = 1,71$  rad
- (b)  $\Delta\phi = 0,11$  rad
- (c)  $\Delta\phi = 2,36$  rad
- (d)  $\Delta\phi = 4,05$  rad
- (e)  $\Delta\phi = 3,41$  rad
- (f)  $\Delta\phi = 2,66$  rad
- (g)  $\Delta\phi = 5,08$  rad
- (h) n.d.a.

**Solução:** Desde o seu primeiro ponto de contato na Terra até o observatório, a onda percorre uma distância de  $R_{\oplus}(1 - \cos(\theta))$



a diferença entre as distâncias percorridas é portanto:

$$d_W - d_L = R_{\oplus}(\cos(\theta'_L) - \cos(\theta'_W)) = 5.06 \cdot 10^3 \text{ km.} \quad (5)$$

Assim, a diferença de fase é:

$$\Delta\phi = 2\pi\nu\Delta t = 2\pi\nu\frac{\Delta d}{c} = 21,2 \text{ rad.} \quad (6)$$

Ou retirando fatores irrelevantes de  $2\pi$ :  $\Delta\phi = 2.36$  rad

Resposta: (c)

**Betelgeuse** O texto a seguir refere-se às questões 10 e 11.

A estrela Betelgeuse ( $\alpha$  Ori) é uma supergigante vermelha pertencente à constelação de Órion, e uma das mais brilhantes do céu. Estudos indicam que ela irá explodir após o colapso de seu núcleo em um futuro próximo de até cem mil anos, gerando uma supernova (SN). Após a SN, o núcleo de Betelgeuse se tornará uma estrela de nêutrons.

A energia liberada durante a explosão é essencialmente a energia de ligação gravitacional da estrela de nêutrons formada, estimada como

$$E = \frac{3}{5} \frac{GM_N^2}{R_N}$$

Em que  $M_N$  é sua massa e  $R_N$  o seu raio.

Considere que o núcleo de Betelgeuse, na iminência do colapso, possa ser modelado como uma esfera **homogênea de gás ideal**, composta por Ferro-56 ( $^{56}_{26}\text{Fe}$ ) e com pressão  $P$  dada por:

$$P = \frac{3}{8\pi} \frac{GM_c^2}{R_c^4}$$

Em que  $M_c$  é a massa do núcleo e  $R_c$  o raio do núcleo. Por fim, assuma que a massa da estrela de nêutrons formada é essencialmente a mesma do núcleo de Betelgeuse pré-colapso. Para as questões a seguir, suponha que astrônomos do futuro observam a SN gerada pela explosão de Betelgeuse e verificam que a variação de magnitude bolométrica de Betelgeuse é de  $\Delta m = -12,6$ , e a SN dura um período  $\Delta t = 100$  dias, sendo o brilho da SN essencialmente o mesmo em toda a sua duração.

**Dados de Betelgeuse:**

- Raio:  $R = 760 R_\odot$
- Temperatura efetiva:  $T_{ef} = 3600 \text{ K}$
- Densidade média do núcleo (pré-colapso):  $\rho_c = 1 \times 10^8 \text{ g/cm}^3$
- Temperatura do núcleo (pré-colapso):  $T_c = 4 \times 10^{11} \text{ K}$
- Raio da Estrela de nêutrons:  $R_N = 10 \text{ km}$

10. (Classe C2) Determine a massa  $M_N$  da estrela de nêutrons resultante.

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $8,54 \times 10^{29} \text{ kg}$ | (e) $2,15 \times 10^{31} \text{ kg}$ |
| (b) $3,67 \times 10^{30} \text{ kg}$ | (f) $5,36 \times 10^{31} \text{ kg}$ |
| (c) $6,89 \times 10^{30} \text{ kg}$ | (g) $7,44 \times 10^{31} \text{ kg}$ |
| (d) $9,47 \times 10^{30} \text{ kg}$ | (h) n.d.a.                           |

**Solução:**

Sendo o núcleo um gás ideal, temos que a pressão em seu interior será dada por:

$$PV = \frac{m}{M_{Fe}} RT \Rightarrow P = \frac{\rho_c}{M_{Fe}} RT_c$$

Em que  $M_{Fe}$  é a massa molar do Ferro-56, que vale 56 g/mol;. Igualando à expressão fornecida no enunciado para a pressão nuclear:

$$\frac{3}{8\pi} \frac{GM_c^2}{R_c^4} = \frac{\rho_c}{M_{Fe}} RT_c$$

Por fim, podemos escrever  $R_c$  em termos de  $M_c$  e  $\rho_c$  lembrando da definição de densidade média  $\rho_c = \frac{M_c}{\frac{4}{3}\pi R_c^3}$ , considerando o núcleo esférico. Assim, após um pouco de álgebra:

$$M_c^2 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{3M_c}{4\pi\rho_c} \right)^{4/3} \frac{\rho_c}{GM_{Fe}} RT_c$$

$$M_c^{2/3} = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{4/3} \frac{8\pi}{3} \frac{RT_c}{GM_{Fe}} \rho_c^{-1/3}$$

$$M_c = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{8\pi}{3} \frac{RT_c}{GM_{Fe}} \right)^{3/2} \rho_c^{-1/2}$$

Por hipótese, a massa  $M_N$  da estrela de nêutrons é igual à massa  $M_C$  do núcleo. Numericamente temos, em kg:

$$M_N = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{8\pi}{3} \frac{8,314 \times 4 \times 10^{11}}{6,67 \times 10^{-11} \times 56 \times 10^{-3}}\right)^{3/2} (1 \times 10^{11})^{-1/2}$$

$$\boxed{\approx 3,67 \times 10^{30} \text{ kg}}$$

Resposta: (b)

11. (Classe C2) A energia luminosa emitida corresponde à qual fração da energia total liberada pela supernova, em porcentagem?

- |           |            |
|-----------|------------|
| (a) 0,01% | (e) 0,08%  |
| (b) 0,02% | (f) 0,1%   |
| (c) 0,04% | (g) 0,2%   |
| (d) 0,06% | (h) n.d.a. |

**Solução:**

Primeiramente, encontremos a energia luminosa emitida pela explosão. Por meio da equação de Pogson, a mudança de magnitude de Betelgeuse durante a supernova é de

$$\Delta m = -2,5 \log \left( \frac{F_{SN}}{F_*} \right) = -2,5 \log \left( \frac{L_{SN}}{L_*} \right)$$

Isolando  $L_{SN}$ , a luminosidade da supernova:

$$L_{SN} = 10^{-\frac{\Delta m}{2,5}} \times L_*$$

Multiplicando pelo tempo de observação, obtemos a energia luminosa total ( $E_L$ ) emitida durante a supernova:

$$E_L = 10^{-\Delta m/2,5} \times L_* \times \Delta t$$

Sendo Betelgeuse um corpo negro, sua luminosidade é facilmente obtida pela equação de Stefan-Boltzmann  $L_* = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$ . Assim, substituindo os valores numéricos:

$$\begin{aligned} E_L &= 10^{-\frac{\Delta m}{2,5}} \times 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \times \Delta t \\ &= 10^{\frac{12,6}{2,5}} \times 4\pi \times (760 \times 6,96 \times 10^8)^2 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (3600)^4 \times 100 \times 86400 \text{ J} \\ &\approx 3,172 \times 10^{43} \text{ J} \end{aligned}$$

Agora, resta-nos encontrar a energia total liberada, que depende do raio da estrela de nêutrons  $R_N$  dado e de sua massa  $M_N$ , que consideramos igual à massa do núcleo  $M_c$ , calculada na questão anterior. De acordo com a fórmula dada, a energia total liberada em J é de

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{5} \frac{GM_c^2}{R_N} \\ &= \frac{3}{5} \frac{6,67 \times 10^{-11} \times (3,638 \times 10^{30})^2}{10 \times 10^3} \approx 5,297 \times 10^{46} \text{ J} \end{aligned}$$

Por fim, a razão pedida é de

$$f = \frac{E_L}{E} \approx 6 \times 10^{-4} = 0.06\%$$

Note que, talvez surpreendentemente, isso corresponde à uma fração pequena da energia total liberada pela supernova!

Resposta: **(d)**

**Pula Pula gravitacional** O texto a seguir se refere às questões 12 e 13.

A bordo da nave Galileu IV, a tripulação se prepara para explorar o planeta Titanus, um exoplaneta rochoso com o mesmo raio da Terra,  $R_{\oplus}$ , porém muito mais massivo, com uma massa  $M_T = nM_{\oplus}$ , onde  $n > 1$ .

Tendo pousado em Titanus, o astronauta Lucas, especialista em testes de gravidade, decide realizar um experimento. Ele prende um elástico de constante elástica  $k$  em um suporte a uma altura  $h$  (muito maior que o comprimento natural do elástico) acima da superfície do planeta. Depois, se pendura na outra extremidade livre do elástico para sentir a gravidade local com seus pés na superfície do planeta.

**Na questão, considere:**

- A massa do astronauta como  $m$ .
- O elástico segue a **Lei de Hooke** e pode ser tratado como um sistema conservativo.
- $h_1 \ll R_{\oplus}$  e  $h_2 \ll R_{\oplus}$
- Se preciso, use a aproximação binomial para  $x$  pequeno  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ .

**12. (Classe C2)** Qual deve ser a altura  $h_1$  para que, ao se pendurar no elástico, a gravidade efetiva sentida por Lucas seja igual à gravidade na Terra?

(a)  $\frac{GMnmR_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$

(e)  $\frac{GM(n-1)mR_{\oplus}}{nGM_{\oplus}m - 2k \cdot R_{\oplus}^3}$

(b)  $\frac{GM(n-1)mR_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}}$

(f)  $\frac{GnMmR_{\oplus}}{2(n-1)GM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$

(c)  $\frac{GM(n-1)R_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}}$

(g)  $\frac{GM^2(n-1)R_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$

(d)  $\frac{GM(n-1)mR_{\oplus}}{2nGM_{\oplus}m - k \cdot R_{\oplus}^3}$

(h) n.d.a

**Solução:** A força que Lucas sente é dada por:

$$F = \frac{G \cdot (n \cdot M_{\oplus}) \cdot m}{R_{\oplus}^2} - k \cdot h_1$$

A condição de contorno é que seja igual à força sentida na superfície da Terra, ou seja:

$$\frac{G \cdot (n \cdot M_{\oplus}) \cdot m}{R_{\oplus}^2} - k \cdot h_1 = \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2}$$

$$\frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot (n - 1) \cdot m}{R_{\oplus}^2} = k \cdot h_1$$

$$h_1 = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot (n - 1) \cdot m}{k \cdot R_{\oplus}^2}$$

Resposta: (h)

13. (Classe C2) Considere a altura mínima  $h_2$  para que, ao ser impulsionado pelo elástico, ele alcance a velocidade de escape do planeta e nunca mais retorne. Determine a equação de segundo grau que fornece  $h_2$  como raiz.

- (a)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus}^2 m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus}^2 m}{R_{\oplus}} = 0$       (e)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}} = 0$   
 (b)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{GM_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}} = 0$       (f)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}^3} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} = 0$   
 (c)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{nGM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGm}{R_{\oplus}} = 0$       (g)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \frac{GM_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} \cdot h - \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}} = 0$   
 (d)  $\frac{k}{2} \cdot h^2 + \left( \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} - \frac{nGM_{\oplus} m}{R_{\oplus}} \right) \cdot h = 0$       (h) n.d.a

**Solução:** Para que haja escape do planeta, a energia deve ser zero:

$$\frac{k \cdot h_2^2}{2} - \frac{G \cdot (n \cdot M_{\oplus}) \cdot m}{R_{\oplus}} = 0$$

Resposta: (h)

**Neo-Universe** O texto a seguir refere-se às questões 14 e 15.

Obazs Rotieh, nosso cientista maluco favorito, e seu mais novo ajudante Ualypinho estavam desenvolvendo sua mais recente invenção, uma máquina que transporta o usuário para outros universos. Em um de seus testes, Ualypinho foi levado para um universo onde os planetas e estrelas podiam assumir diversos formatos. Como um astrônomo curioso e atrapalhado que ele é, resolveu encontrar a temperatura de alguns tipos de planeta que ele encontrou. No entanto, Ualypinho não sabia como fazer isso. Ajude-o nessa missão:

14. (Classe C2) O primeiro sistema planetário que nosso amiguinho encontrou foi um igual ao do nosso universo, ou seja, em que tanto o planeta quanto a estrela eram esferas. Ele resolveu nomear a estrela como M0m0, enquanto o planeta ele chamou-o de M0n0. Então, encontre a temperatura  $T_n$  de M0n0 que possui emissividade  $\epsilon$ , albedo  $\alpha$  e dista  $r$  de M0m0, a qual possui raio  $R_m$  e temperatura  $T_m$ . Considere que o planeta possui rotação rápida.

- (a)  $T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m \alpha}{4r \epsilon}}$       (d)  $T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m (1 - \alpha)}{4r (1 - \epsilon)}}$   
 (b)  $T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^3 (1 - \alpha)}{4r^3 \epsilon}}$       (e)  $T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2 \alpha}{4r^2 (1 - \epsilon)}}$   
 (c)  $T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^3 \alpha}{4r^3 \epsilon}}$       (f)  $T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^3 \alpha}{4r^3 \epsilon}}$

$$(g) T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2(1-\alpha)}{4r^2\epsilon}}$$

$$(h) T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2(1-\alpha)}{4r^2(1-\epsilon)}}$$

**Solução:** Para o primeiro caso, a propagação do fluxo estelar seria de forma esférica. Então, o fluxo que atinge M0n0 é representado pela expressão:

$$F = \frac{4\pi R_m^2 \sigma T_m^4}{4\pi r^2}$$

Portanto, a potência que realmente será absorvida é:

$$P_{abs} = \frac{R_m^2 \sigma T_m^4}{r^2} \cdot \pi R_n^2 (1-\alpha)$$

No equilíbrio termodinâmico, a energia absorvida é igual a emitida. Por fim, a temperatura de M0n0 pode ser expressa por:

$$\frac{R_m^2 \sigma T_m^4}{r^2} \cdot \pi R_n^2 (1-\alpha) = 4\pi R_n^2 \sigma T_n^4 \epsilon$$

$$T_n = T_m \sqrt[4]{\frac{R_m^2(1-\alpha)}{4r^2\epsilon}}$$

**Resposta: (g)**

15. (Classe C2) Então, vagando por esse novo universo, Ualypinho encontrou um sistema interessante. Esse novo sistema planetário era formado por cilindros, ou seja, tanto a estrela quanto o planeta eram cilíndricos! Então, ele decidiu dar nome ao planeta e a estrela também, sendo a estrela chamada de J3ss3 Llum1 e o planeta, Sh0gun. Assim, encontre a temperatura  $T_s$  de Sh0gun, sabendo que possui mesma emissividade  $\epsilon$  e albedo  $\alpha$  de M0n0, e dista  $r$  de J3ss3 Llum1, que possui raio  $R_j$  e temperatura  $T_j$ . Considere que Sh0gun possui rápida rotação e que o fluxo de objetos cilíndricos é apenas radial.

**Dica:** A radiação se propaga numa frente cilíndrica com área  $A = 2\pi r h_j$ , em que  $r$  é a distância ao eixo da estrela cilíndrica e  $h_j$  é a altura da estrela cilíndrica. Perceba também que a projeção de um cilindro, de um ponto de vista em que a linha de visada seja perpendicular ao eixo do cilindro, é um retângulo.

$$(a) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j \alpha}{\pi r \epsilon}}$$

$$(e) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^2 \alpha}{\pi r^2 (1-\epsilon)}}$$

$$(b) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^3 (1-\alpha)}{\pi r^3 \epsilon}}$$

$$(f) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^3 \alpha}{2r^3 \epsilon}}$$

$$(c) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^3 \alpha}{\pi r^3 \epsilon}}$$

$$(g) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j (1-\alpha)}{\pi r \epsilon}}$$

$$(d) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j (1-\alpha)}{2r (1-\epsilon)}}$$

$$(h) T_n = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j^2 (1-\alpha)}{2r^2 (1-\epsilon)}}$$

**Solução:** Agora, para o caso da estrela cilíndrica, por seu fluxo se propagar de forma radial e sua área superficial ser escrita por  $A = 2\pi R_j h_j$ , o fluxo que chega até Sh0gun é:

$$F = \frac{2\pi R_j h_j \sigma T_j^4}{2\pi r h_j}$$

Ainda, a projeção do planeta não será mais um círculo, mas sim, um retângulo de comprimento  $2R_s$  e altura  $h_s$ . Portanto, a potência absorvida por ela será:

$$P_{abs} = \frac{R_j \sigma T_j^4}{r} \cdot 2R_s h_s (1 - \alpha)$$

Como no equilíbrio termodinâmico, a potência emitida é igual a absorvida:

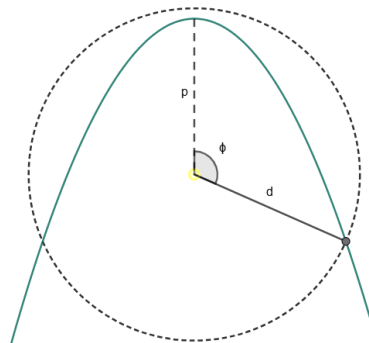
$$\frac{R_j \sigma T_j^4}{r} \cdot 2R_s h_s (1 - \alpha) = 2\pi R_s h_s \sigma T_s^4 \epsilon$$

$$T_s = T_j \sqrt[4]{\frac{R_j (1 - \alpha)}{\pi r \epsilon}}$$

**Resposta: (g)**

- 16. UALL-E $\pi$  (Classe C2)** O programa via-lácteo de vida extraterrestre é uma iniciativa fundada pela OBA em 2053 com o intuito de investigar sistemas com potenciais planetas habitáveis. Após se aproximar de uma estrela interessante, a nave mãe ejeta uma sonda UALL-E $\pi$  para coleta de dados próximo às órbitas dos planetas interiores, efetuando nesse processo uma órbita aproximadamente parabólica.

Considere uma dessas sondas de massa  $m$  se direcionando a uma estrela de massa  $M$ , que passará alguns dias estudando um planeta rochoso enquanto está no interior de sua órbita (circular de raio  $d$ ). Seja  $p$  a distância de periastro da sonda, e supondo  $p < d$ , encontre o ângulo  $\phi$  entre a sonda e o periastro, com vértice na estrela, no momento em que ela cruza com a órbita do planeta.



- |   |  |
|---|--|
| (a) $\phi = \cos^{-1} \left( \frac{4p^2}{d^2} - \frac{3p}{d} - 1 \right)$       | (e) $\phi = \cot^{-1} \left( \frac{2dp - d^2}{p(d-p)} \right)$ |
| (b) $\phi = \text{sen}^{-1} \left( \frac{4p^2}{d^2} - \frac{3p}{d} - 1 \right)$ | (f) $\phi = \sec^{-1} \left( \frac{d^3}{(2p-d)^3} \right)$     |
| (c) $\phi = \cos^{-1} \left( \frac{2p-d}{d} \right)$                            | (g) $\phi = 90^\circ$  |
| (d) $\phi = \text{sen}^{-1} \left( \frac{2p-d}{d} \right)$                      | (h) n.d.a.   |



## Grade de Correção

- + 3.0 Expressar o raio de Schwarzschild referente ao buraco negro de massa igual a do Sol.
- + 8.0 Cálculo da energia inicial do objeto, explicitando a condição  $r \gg R_s$  e, consequentemente,  $E_0 \approx 0$ . Também pontua se utilizar o resultado diretamente na conservação de energia.
- + 3.0 Cálculo da energia final do objeto, explicitando o resultado  $-GMm/R_s$ . Também pontua se utilizar o resultado diretamente na conservação de energia.
- + 3.0 Conservação de energia.
- + 5.0 Cálculo do acréscimo de energia da matéria inerte por tempo.
- + 5.0 Igualar a potência irradiada com o acréscimo de energia da matéria inerte por tempo.
- + 3.0 Resultado final correto.

**Foi Por Pouco!** O texto a seguir se refere às questões 19 e 20.

Em 2012 quando vocês eram recém nascidos, havia uma suposta previsão que o fim do mundo era iminente. Nessa realidade um meteoro devastador extinguiria a vida na Terra. Considere um asteroide distante se deslocando em relação à Terra com velocidade  $\vec{v}$ ; a reta tangente ao seu movimento fazendo uma distância  $b$  do planeta (parâmetro de impacto), vide figura. Quando primeiro foi observado, o objeto estava sobre o meridiano local do Observatório Abraão de Moraes, ( $23^\circ 00' 23''$  S,  $46^\circ 57' 49''$  O). E foi calculado que a partir deste momento demoraria 7 dias 8 horas, 24 minutos e 12,4 segundos para sua maior aproximação à Terra.

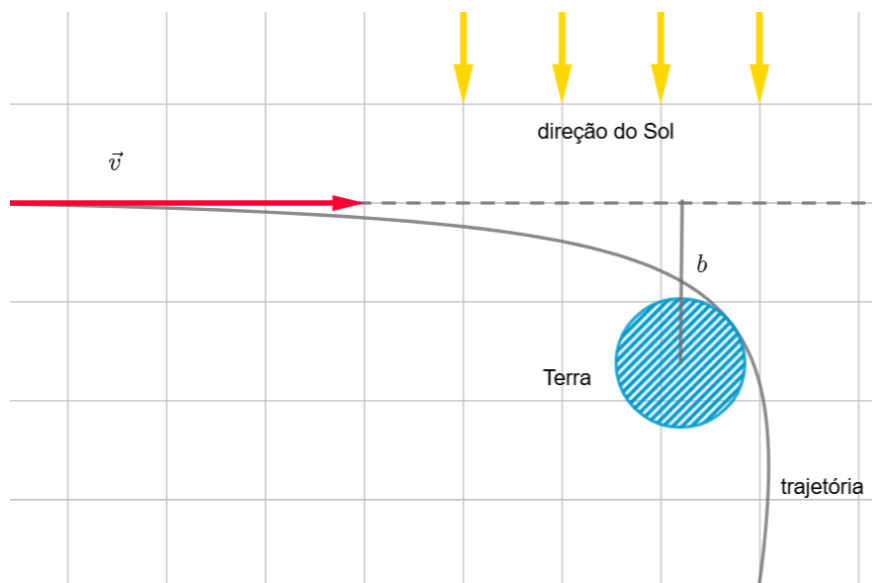


Figura 2: Visão esquemática da situação física. O desenho deve ser interpretado como situado no plano do equador, exibindo o hemisfério Norte.

**18. (Classe C3)** Determine qual é o menor parâmetro de impacto  $b$  para o qual o asteroide passará de raspão sem atingir o planeta.

**Dica:** Utilize as condições iniciais para determinar o valor das grandezas conservadas do problema.

(a)  $b = \sqrt{\frac{GMR_{\oplus}}{v^2} - R_{\oplus}^2}$

(e)  $b = \sqrt{\frac{2GMR_{\oplus}}{v^2} + R_{\oplus}^2}$

(b)  $b = \frac{v^2 R_{\oplus}^2}{GM} + R_{\oplus}$

(f)  $b = \frac{v^2 R_{\oplus}^2}{2GM} + R_{\oplus}$

(c)  $b = \sqrt{\left(\frac{GM}{v^2}\right)^2 + R_{\oplus}^2}$

(g)  $b = \sqrt{\left(\frac{2GM}{v^2}\right)^2 + R_{\oplus}^2}$

(d)  $b = \frac{2GM}{v^2} + \frac{R_{\oplus}}{4}$

(h)  $b = \frac{GM}{v^2} + \frac{R_{\oplus}}{2}$

**Solução:** Assumindo o objeto suficientemente distante da Terra, sua energia e momento angular (em módulo) são:

$$\begin{cases} E = \frac{mv^2}{2} + U(r_{\infty}) = \frac{mv^2}{2} \\ L = p \times b = mvb. \end{cases} \quad (12)$$

A maior aproximação do asteroide ocorre em seu perigeu quando sua velocidade  $v_p$  é totalmente tangencial à Terra. Para que não aconteça a colisão, precisamos impor que a distância deste ponto é  $r_p = R_{\oplus}$ . Nesse caso, aplicando as leis de conservação:

$$\begin{aligned} L = mvb = mv_p r_p &\implies v_p = \frac{bv}{R_{\oplus}} \\ E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} &\implies \frac{v^2}{2} = \frac{v^2 b^2}{2R_{\oplus}^2} - \frac{GM}{R_{\oplus}} \\ \therefore b = \sqrt{\frac{2GMR_{\oplus}}{v^2} + R_{\oplus}^2} & \end{aligned} \quad (13)$$

Resposta: (e)

**Grade de Correção**

- + 4.0 Expressar a condição de contorno (distância do perigeu igual ao raio da Terra).
- + 4.0 Cálculo da energia inicial do objeto, explicitando o resultado  $mv^2/2$ . Também pontua se utilizar o resultado diretamente na conservação de energia.
- + 3.0 Cálculo da energia final do objeto, explicitando o resultado  $mv_p^2/2 - GMm/r_p$ . Também pontua se utilizar o resultado diretamente na conservação de energia.
- + 3.0 Conservação de energia.
- + 5.0 Cálculo do momento angular inicial do objeto, explicitando o resultado  $mbv$ . Também pontua se utilizar o resultado diretamente na conservação de momento angular.
- + 5.0 Cálculo do momento angular final do objeto, explicitando o resultado  $mv_p r_p$ . Também pontua se utilizar o resultado diretamente na conservação de momento angular.
- + 4.0 Conservação de momento angular.
- + 2.0 Resultado final correto.

19. (Classe C3) Assuma que a excentricidade da órbita do asteroide seja  $\epsilon = 1,4$ , se movendo sobre o plano equatorial. Encontre as coordenadas de sua maior aproximação à Terra.

**Dica:** Considere que o asteroide venha do infinito, de modo que seu ângulo inicial em relação ao perigeu seja àquele em que  $r \rightarrow \infty$ .

- (a) 0° N, 135° 50' 51" O (e) 0° N, 135° 50' 51" L  
 (b) 0° N, 88° 53' 2" O (f) 0° N, 88° 53' 2" L  
 (c) 0° N, 179° 44' 14" O (g) 0° N, 179° 44' 14" L  
 (d) 0° N, 133° 17' 57" O (h) 0° N, 133° 17' 57" L

**Solução:** A equação polar da hipérbole é dada por:

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (14)$$

Como o asteroide começa muito distante, podemos tomar o ângulo inicial:

$$\theta_i = -\cos^{-1}(-1/\epsilon) = -135^\circ 35' 05''$$

O ângulo onde ocorre a máxima aproximação, aquele do perigeu, é justamente  $\theta_f = 0$ . Nesse caso, a variação angular do asteroide é  $\Delta\theta = 135^\circ 35' 05''$ .

Este movimento deve ser composto com a rotação da Terra, que por sua vez deve ser calculada em termos do dia sideral:

$$\omega_S \Delta t = 2653^\circ 17' 57'', \text{ retirando múltiplos inteiros de } 360^\circ : \Delta\phi_\oplus = 133^\circ 17' 57''.$$

Assim, a variação angular é de:  $\Delta\phi = \Delta\theta + \Delta\phi_\oplus = 268^\circ 51' 08''$ . Levando a uma coordenada de maior aproximação sobre o equador, com longitude:

$$\lambda = \lambda_{\text{Abrão de Moraes}} + \Delta\phi = 315^\circ 48' 57'' \text{ O} \quad (15)$$

$$\lambda = 44^\circ 11' 03'' \text{ L} \quad (16)$$

Resposta: (Sem alternativa)

#### Grade de Correção

- + 10.0 Variação de anomalia do cometa até a situação de perigeu (valor algébrico  $\cos^{-1}(-1/\epsilon)$ )
- + 7.0 Cálculo da rotação da Terra no período (desconto de 4.0 pontos se não utilizar o dia sideral)
- + 5.0 Rotação da Terra acrescenta longitude para oeste
- + 5.0 Variação de anomalia acrescenta longitude para oeste
- + 3.0 Resultado final correto.