



LISTA 1
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

Instruções Gerais

1. A lista é composta por 5 problemas não avaliativos
2. Pratique escrever soluções **legíveis**.
3. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

1. **Força central** Nessa questão vamos estudar o problema da força central. Esse problema é de grande interesse para a astronomia, visto que o problema de dois corpos sob influência da força gravitacional Newtoniana é um exemplo partícula do problema da força central.

Parte I: Problema geral de força central

O Problema de força central é aquele em que um corpo sofre efeito apenas de uma força que aponta sempre para um ponto específico (vamos chamá-lo de origem), e sua magnitude depende apenas da distância do corpo até a origem.

Matematicamente, podemos escrever a segunda lei de Newton aplicada a essa força como

$$m\vec{a} = \vec{F} = f(r)\hat{r},$$

sendo que o vetor \vec{r} é aquele com início na origem e até o corpo. \hat{r} é chamado de *versor radial*, ou seja, é um vetor unitário que aponta na mesma direção que o vetor \vec{r} ($\hat{r} = \vec{r}/r$).

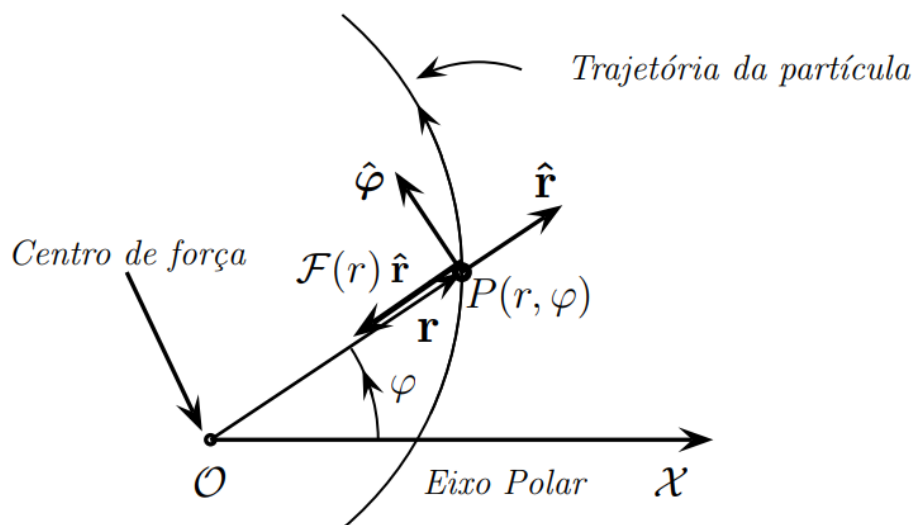


Figura 1: Diagrama da trajetória de uma partícula sob ação de uma força central genérica. Retirado de (UZÊDA, 2011)

Para resolver o problema, ou seja, achar a trajetória que o corpo realizará, precisamos achar grandezas que são conservadas ao longo de todo o movimento, ou seja, que sua variação temporal é nula. Uma dessas grandezas é o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, sendo \vec{p} o momento linear da partícula ($\vec{p} = m\vec{v}$) e “ \times ” o produto vetorial.

- (a) Mostre que o vetor \vec{L} não varia com o tempo.

Dicas: Você calcular o torque da força central e tirar conclusões disso. Caso não queria fazer isso diretamente, pode derivar a expressão de \vec{L} com respeito ao tempo e usar as propriedades do produto vetorial. Nesse caso, você estará deduzindo a relação entre o torque e o momento angular, $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

Sabendo que o vetor momento angular se conserva, conseguimos tirar uma conclusão importante a respeito da trajetória: Como \vec{L} é sempre perpendicular a \vec{r} (recordar a definição de \vec{L}), e \vec{L} é constante, este vetor define um plano normal a ele, em que o vetor \vec{r} está contido. Dessa forma, a trajetória da partícula está restrita ao plano normal ao vetor \vec{L} .

Com essa restrição, reduzimos um problema tridimensional para outro bidimensional, que é mais simples de ser resolvido! Agora, definimos então um sistema de coordenadas polar, ou seja, vamos

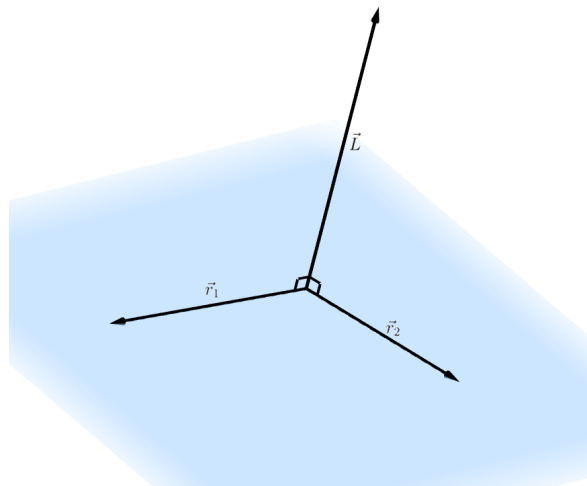


Figura 2: A partir do vetor \vec{L} , define-se um plano onde todos seus vetores são perpendiculares a \vec{L}

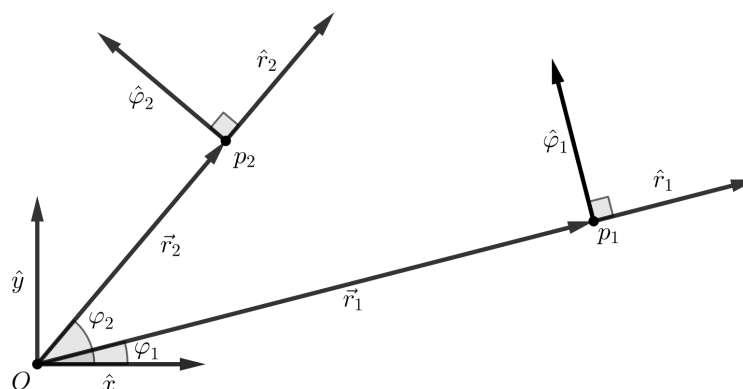


Figura 3: Diferentemente dos eixos cartesianos, que são fixos e não dependem da posição da partícula, os eixos \hat{r} e $\hat{\varphi}$ são definidos em função da posição da partícula: \hat{r} é o vetor unitário radial, enquanto que $\hat{\varphi}$ é o vetor unitário perpendicular a \hat{r} , seguindo a regra da mão direita.

representar os vetores posição, velocidade etc a partir de dois versores \hat{r} e $\hat{\varphi}$ que se movem junto com a partícula (veja a figura 3)

Dessa forma, a posição da partícula é trivialmente obtida como $\vec{r} = r\hat{r}$. Já para a velocidade, queremos representá-la em função da velocidade angular $\dot{\varphi}$ e da velocidade radial \dot{r} .

- (b) Calcule a expressão da velocidade \vec{v} nas componentes radial \hat{r} e tangencial $\hat{\varphi}$ em função da velocidade radial \dot{r} e da velocidade angular $\dot{\varphi}$.
- (c) Mostre que o momento angular L pode ser escrito como

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\hat{z}$$

Desse último resultado, como $mr^2 > 0$, podemos concluir que a velocidade angular da partícula será sempre positiva ou negativa (reflita a implicação física disso), uma vez que o vetor \vec{L} é constante. Vamos daqui em diante definir $L = mr^2\dot{\varphi}$ como o “módulo” do momento angular. Não é exatamente o módulo, pois o valor pode ser negativo a depender do sinal de $\dot{\varphi}$. O mais correto

seria chamá-lo de componente de \vec{L} na direção \hat{z} , porém essa componente representa o vetor \vec{L} em sua totalidade, uma vez que não há outras componentes do vetor.

- (d) Mostre que a conservação de momento angular implica na segunda lei de Kepler. Determine a taxa de variação da área varrida \dot{A} .

Agora, vamos achar outra grandeza conservada: a energia. Como o sistema é isolado e a força central admite um potencial $U(r)$, a energia do sistema é conservada.

- (e) Mostre que a Energia do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

Como L é conservado, conseguimos achar uma expressão para a energia que só depende da velocidade radial e da distância da partícula até a origem. Dessa forma, reduzimos mais uma vez o problema, que agora é efetivamente um problema unidimensional. Assim, $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ é análogo à energia cinética e $U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$ é o *potencial efetivo* do problema. De forma semelhante a um problema unidimensional, o movimento da partícula será limitado caso a energia dela seja pequena o suficiente para haver um poço potencial. Ainda, como a componente $\frac{L^2}{2mr^2}$ (chamada de barreira de momento angular, ou componente centrífuga) tende a infinito com $r \rightarrow 0$, caso $U(0)$ seja um valor finito e $L \neq 0$, o potencial efetivo tenderá ao infinito na origem, de forma que uma partícula com momento angular não nulo nunca passará pela origem.

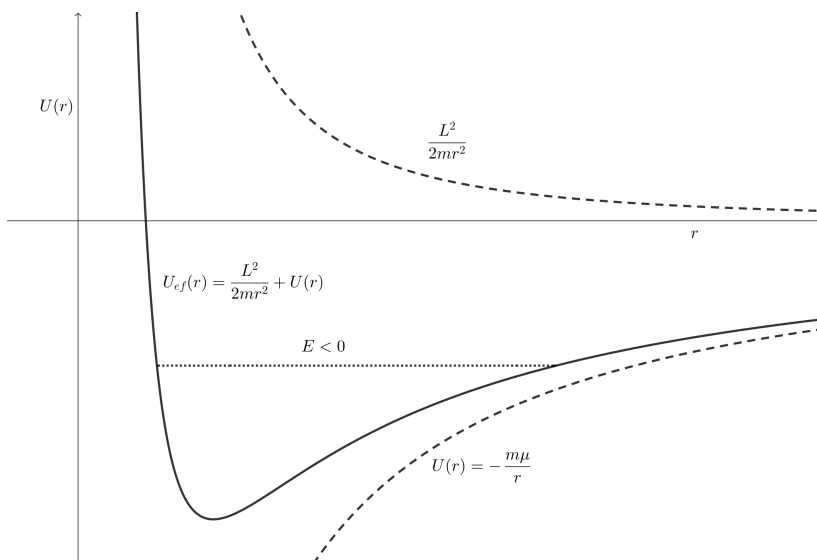


Figura 4: Mesmo que o potencial não possua um mínimo local, como o caso do potencial gravitacional, ao ser somado com a componente centrífuga do potencial efetivo, este passa a admitir um mínimo de energia. Nesse exemplo, caso a energia da partícula seja negativa, esta ficará presa no poço do potencial efetivo. Caso $E > 0$, a partícula escapará, podendo ter seu r arbitrariamente grande. Esse seria um caso de órbita parabólica ou hiperbólica.

Para resolver de fato o problema da força central e obter uma expressão de $r(\varphi)$, precisamos chegar na equação de Binet, que é a equação diferencial que relaciona r com φ . Primeiramente, por analogia do potencial efetivo ($\dot{r}, \ddot{r}, U_{ef} \leftrightarrow v, a, U$), a segunda lei de Newton, derivando o potencial efetivo, fica

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U_{ef} = \frac{L^2}{mr^3} + f(r).$$

Além disso, pela regra da cadeia,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2}$$

Derivando novamente,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} \right) \frac{L}{mr^2} \\ &= \left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} \frac{L}{mr^2} - 2 \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^3} \frac{dr}{d\varphi} \right) \frac{L}{mr^2} \\ &= \frac{L^2}{m^2r^4} \left[\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Juntado essa expressão à segunda lei de Newton,

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = r + \frac{mr^4}{L^2} f(r).$$

Por fim, fazendo uma substituição de variáveis, $u = 1/r$,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} u^{-1} = -u^{-2} \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} &= \frac{d}{d\varphi} \left(-u^{-2} \frac{du}{d\varphi} \right) = 2u^{-3} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 - u^{-2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \end{aligned}$$

e a segunda Lei de Newton fica, por fim,

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} f(u^{-1})}$$

Essa é a chamada Equação de Binet. Dada a expressão específica da força central, é possível resolver a expressão $r(\varphi)$ determinando primeiramente a expressão $u(\varphi)$.

Parte II: Órbitas Keplerianas

Como dito anteriormente, o problema de dois corpos sujeito a força gravitacional newtoniana pode ser escrito como um problema de força central.

(f) Partindo das forças sentidas por cada corpo,

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ \vec{f}_2 &= Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \end{aligned}$$

determine a relação $f(r)/m$ na expressão do problema da força central, sendo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

(g) Pela teoria das equações diferenciais ordinárias, para resolver a equação de Binet, basta achar a solução geral da equação homogênea

$$\frac{d^2u_H}{d\varphi^2} + u_H = 0$$

e somá-la com uma única solução particular da equação completa

$$\frac{d^2 u_p}{d\varphi^2} + u_p = -\frac{m}{L^2 u_p^2} f(u_p^{-1})$$

Sendo assim, ache a solução da equação de Binet para o problema de dois corpos, em função de E/m , L/m e φ_o , o ângulo de menor aproximação em relação à origem.

Observação: Perceba que não importa o valor de m escolhido na solução, desde que L e $f(r)$ sejam mudados de acordo para satisfazer a expressão determinada de $f(r)/m$. Reflita nas implicações físicas disso!

- (h) Comparando o resultado anterior com a equação polar das cônicas com origem no foco,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_o)}$$

concluimos que a órbita do problema de Kepler é uma cônica, deduzindo assim a primeira lei de Kepler. Determine o valor de a e e em função de E/m e L/m

- (i) Com auxílio dos resultados dos itens (d) e do anterior, deduza a terceira lei de Kepler.

Com a solução da equação de Binet, nos deparamos com o ângulo $\varphi - \varphi_o$. Este é o ângulo entre o periastro e a partícula, centrada no foco, e chamamos de “anomalia verdadeira” θ . Além desse ângulo, existe ainda a chamada “anomalia excêntrica” E . Ela é definida de forma geométrica, com auxílio de um círculo de raio a , como mostra a figura 5

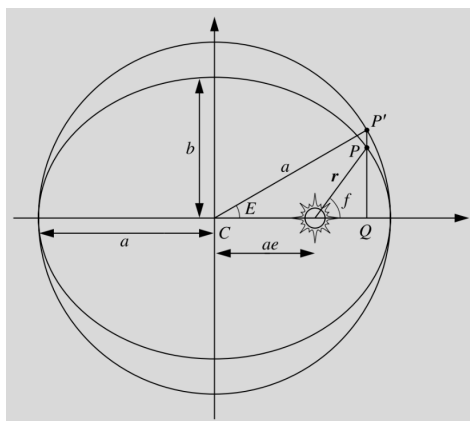


Figura 5: A anomalia excêntrica é o ângulo, centrado no centro geométrico da elipse, entre o periastro e o ponto p' . Esse ponto é definido como a intersecção da reta que passa pela posição da partícula e é perpendicular ao eixo maior da elipse com o círculo de raio a concêntrico com a elipse da trajetória. Figura retirada de (KARTTUNEN, 2007)

- (j) A partir da figura acima, demonstre a Equação de Kepler

$$M = E - e \sin E,$$

em que $M = \frac{2\pi}{T}(t - t_o)$ é a “Anomalia Média”, ângulo que varia uniformemente e com $M = 0$ na passagem pelo periastro.

- (k) Determine r , $\cos \theta$ e $\sin \theta$ em função da anomalia excêntrica E , do semi-eixo maior a e da excentricidade e
- (l) A equação de Kepler é uma equação transcendental, de forma que não é possível resolver a equação para E . Mesmo assim, para pequenos valores de e , é possível aproximar a equação em primeira ordem em e , sendo então possível obter uma equação horária para E aproximada. Faça isso

dica: Substitua a equação de Kepler nela mesma, tendo em vista que $E - M$ é pequeno.

- (m) A partir da aproximação do item anterior e da expressão de $r(E)$, determine uma expressão de $r(M)$ aproximada em segunda ordem em e .

Até agora, nos preocupamos em determinar a geometria do problema kepleriano contida no plano orbital. Porém, esse plano orbital pode estar orientado arbitrariamente no espaço, e portanto é necessária uma forma de descrever a orientação da órbita tridimensionalmente. Para isso, precisamos de 2 ângulos para determinar a orientação do plano, além de outro ângulo adicional para determinar a posição do periastro dentro do plano da órbita. Para determinar o par de ângulos, é necessário conhecer a posição do nodo ascendente, que é a intersecção da órbita com o plano fundamental do sistema de referência (normalmente o equador ou a eclíptica). Existem dois desses pontos, sendo o nodo ascendente o ponto cuja órbita passa do Sul para o Norte, e o nodo descendente o contrário. Dessa forma, determina-se o plano da órbita a partir da longitude do nodo ascendente Ω e da inclinação orbital i , que é o ângulo entre a órbita e o plano de referência.

- (n) os valores de Ω e i estão intimamente relacionados com a posição do vetor normal ao plano da órbita na esfera celeste. Determine a longitude e altura desse vetor no mesmo sistema de referência usado para medir (Ω, i) .

Determinado o plano orbital, ainda é necessário determinar a orientação da órbita contida no plano (imagine a elipse da órbita rotacionando em torno do seu foco, porém sempre no mesmo plano). Para isso, utiliza-se o argumento de periastro ω , que é o ângulo entre o nodo ascendente e o periastro.

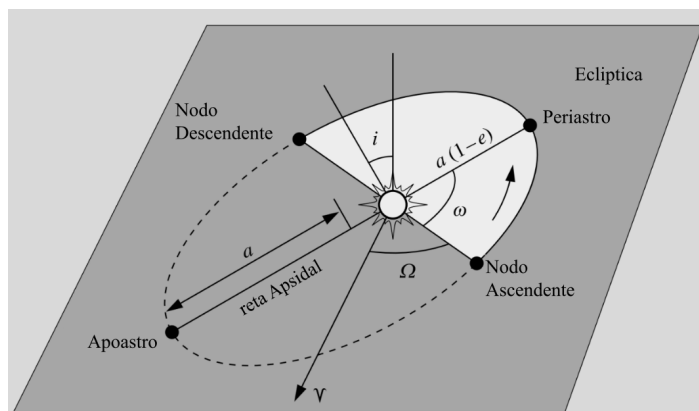


Figura 6: Figura modificada a partir de (KARTTUNEN, 2007)

Por fim, uma forma de representar órbitas com respeito à terra é utilizando um gráfico de “Ground Tracks”, que consiste em representar a posição na Terra em que o satélite está diretamente acima. Dessa forma, essa posição dependerá tanto da posição do satélite em sua órbita como também da rotação da terra. Para uma questão interessante que aborda esse importante assunto, resolva a questão teórica de número 11 da prova da IOAA de 2024

Parte III: Perturbações e precessões

Nessa última seção, vamos abordar o problema de órbitas keplerianas perturbadas. Para isso, introduziremos o vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL), \vec{A} , o que nos auxiliará nos cálculos. Esse vetor é definido como

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m^2 \mu \hat{r}$$

- (o) Mostre que o vetor \vec{A} é uma constante de movimento
Dica: Derive com respeito ao tempo e lembre da relação de dp/dt .
 (p) Mostre que o vetor \vec{A} pertence ao plano da órbita

- (q) Determine o módulo do vetor \vec{A} em função da energia total do sistema E , do módulo do momento angular L , e de m e μ .

Com esses resultados, mostramos que o vetor \vec{A} é constante de movimento, porém, apesar do vetor ser tridimensional, como possui duas relações com as outras constantes de movimento, adiciona apenas uma constante independente a mais na determinação do problema

- (r) Calcule o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{r}$ e chegue na expressão

$$r = \frac{L^2/m^2\mu}{1 + \frac{A}{m^2\mu} \cos \theta},$$

sendo θ o ângulo entre os dois vetores.

Com esse último resultado, conseguimos uma interpretação para o vetor \vec{A} : ele é um vetor cujo módulo é proporcional à excentricidade ($A = m^2\mu e$) e que aponta na direção do periastro da órbita. Dessa forma, o vetor \vec{A} é útil para determinar a orientação da órbita. Determinando \vec{L} , obtemos o plano orbital (ou seja, (Ω, i)), determinando então \vec{A} obtemos a orientação da órbita dentro do plano (ou seja, ω) e a excentricidade, e por fim, com E obtemos o semi-eixo maior da órbita.

Para calcular a precessão de uma órbita causada por uma perturbação do problema de força central, devemos calcular basicamente a média da taxa de variação de \vec{A} , ou seja, $\langle d\vec{A}/dt \rangle$. Para isso, consideramos uma força newtoniana somada a uma perturbação $\delta\vec{f}$,

$$\vec{F} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r} + \delta\vec{f}.$$

A taxa de variação de \vec{A} , será então

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{d\vec{L}}{dt} - m^2\mu \frac{d\hat{r}}{dt}$$

Considerando que a perturbação afeta o sistema apenas em primeira ordem,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r} + \delta\vec{f},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \delta\vec{f},$$

e lembrando o resultado que você deve ter chegado na solução do item (p),

$$-\frac{\mu}{r^2}\hat{r} \times L - m^2\mu \frac{d\hat{r}}{dt} = 0,$$

obtemos a relação

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \delta\vec{f} \times \vec{L} + \vec{p} \times (\vec{r} \times \delta\vec{f}).$$

Com isso, ao aplicar essa fórmula para alguma perturbação $\delta\vec{f}$ e obter

$$\left\langle \frac{d\vec{A}}{dt} \right\rangle = \vec{\Omega}' \times \vec{A},$$

teremos que o vetor velocidade angular será $\vec{\Omega}'$. Caso $\vec{\Omega}'$ seja paralelo a \vec{L} , então a precessão ocorre apenas em no plano orbital, $\dot{\omega} = \Omega'$, ou seja, só há variação no argumento de periastro. Caso Ω' seja paralelo ao polo de sistema de referência, então $\dot{\Omega} = \Omega'$, ou seja, só há variação na longitude do nodo ascendente.

Existe porém uma dificuldade nesse procedimento, que é o cálculo das médias temporais em si. Para isso, será necessário calcular médias temporais de funções que dependem de $f(r(t), \varphi(t))$. Como temos a relação para $\dot{\varphi}$ e a expressão não perturbada de $r(\varphi)$, podemos fazer uma manipulação na integral da média, visto que $d\theta = d\varphi = \dot{\varphi} dt'$, assim integrando no ângulo da anomalia verdadeira:

$$\begin{aligned} \langle f(r(t), \varphi(t)) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T f(r(t'), \varphi(t')) dt' \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} f(r(\theta), \theta) \frac{d\theta}{\dot{\varphi}} \\ &= \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) f(r(\theta), \theta) d\theta \end{aligned}$$

ou seja, obtemos uma relação entre a média temporal da função e a média angular de $r^2 f$

$$\langle f(r(t), \varphi(t)) \rangle_t = \frac{2\pi m}{TL} \langle r^2(\theta) f(r(\theta), \theta) \rangle_\theta$$

(s) Considere um potencial de perturbação

$$\delta V(r) = -\frac{GML^2}{m^2 c^2 r^3}$$

provindo da correção da relatividade geral para o problema de dois corpos. Calcule a velocidade angular de precessão da órbita

Dados: $\langle \cos x \rangle = \langle \cos^3 x \rangle = 0$ e $\langle \cos^2 x \rangle = 1/2$

(t) Mostre que para uma força de perturbação causada pelo arrasto, na forma de

$$\delta \vec{f} = -\beta \vec{v}, \beta > 0,$$

a órbita não precessiona nem muda de excentricidade.

Dado:

$$\langle r^2 \cos \varphi \rangle_\varphi = -ea^2 \sqrt{1 - e^2}$$

Referências para elaboração desse material:

1. UZÊDA, Diego Dias. **Tópicos em Mecânica Clássica**. 2011. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
2. KARTTUNEN, Hannu et al. (Ed.). **Fundamental astronomy**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.

Solução:

(a) Para mostrar que \vec{L} é constante, devemos mostrar que $d\vec{L}/dt = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) \\ &= m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ &= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} = \tau \end{aligned}$$

Com isso acabamos de deduzir a expressão para o torque. Como a força é paralela a \vec{r} , $\tau = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ e portanto \vec{L} é constante.

- (b) Podemos decompor a velocidade em uma componente radial \dot{r} e uma componente tangencial, v_t :

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + v_t\hat{\phi}$$

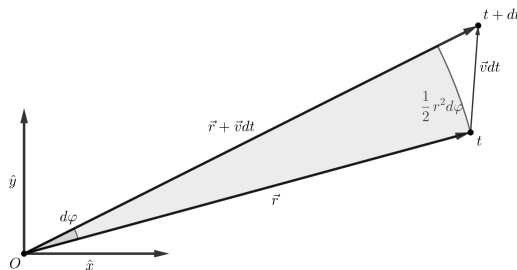
porém, pela relação entre velocidade angular e velocidade tangencial, $v_t = r\dot{\phi}$, e assim,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}}$$

- (c) Pela definição do momento angular,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ &= m(r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &= mr^2\dot{\phi}\hat{r} \times \hat{\phi} \\ &= mr^2\dot{\phi}\hat{z} \end{aligned}$$

- (d) A área varrida durante um intervalo de tempo dt corresponderá, aproximadamente, ao setor circular de raio r e ângulo $d\phi = \dot{\phi}dt$:



$$dA = \frac{1}{2}r^2d\phi dt$$

substituindo $\dot{\phi}$ e dividindo ambos os lados por dt ,

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

como L é constante, a taxa da área varrida ao longo do tempo também é, assim provando a segunda lei de Kepler.

- (e) Como a força admite potencial $U(r)$, sabemos que a energia mecânica total é conservada:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

considerando as duas componentes da velocidade, temos $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$, de forma que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r).$$

Por fim, substituindo a expressão de $\dot{\phi}$,

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}$$

(f) Partindo da expressão para as forças, e então aplicando a segunda lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{a}_1 = Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{a}_2 = Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},\end{aligned}$$

assim, $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2$ fica

$$\ddot{\vec{r}} = -G(m_2+m_1) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -G(m_2+m_1) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -G(m_2+m_1) \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{G(m_2+m_1)}{r^2} \hat{r}$$

Dessa forma, encontramos a aceleração, que é a razão entre a força pela massa, e portanto,

$$\boxed{\frac{f(r)}{m} = -\frac{G(m_2+m_1)}{r^2} \hat{r}}$$

(g) Observando a expressão para a EDO homogênea, percebemos que se trata de uma equação para MHS em u , e assim,

$$u_H(t) = A \cos(\varphi + \varphi_o)$$

Para obter uma solução particular, substituímos a expressão da força central, chegando em

$$\begin{aligned}\frac{f}{m} &= -G(m_2+m_1)u^2 \\ \frac{d^2 u_p}{d\varphi^2} + u_p &= \frac{m^2}{L^2} G(m_2+m_1)\end{aligned}$$

Percebendo que o lado direito se trata de uma constante tanto com relação a φ como u_p , é evidente que uma solução particular é a própria constante:

$$u_p = \left(\frac{L}{m}\right)^{-2} G(m_2+m_1)$$

Assim, a solução geral é, abreviando $\mu = G(m_2+m_1)$,

$$\frac{1}{r(\varphi)} = u(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_o) + \left(\frac{L}{m}\right)^{-2} \mu$$

Para relacionar com a energia, utilizamos fórmula

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{m\mu}{r}$$

e lembramos que

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} \\ \frac{dr}{d\varphi} &= \left[A \cos(\varphi - \varphi_o) + \mu \left(\frac{L}{m}\right)^{-2} \right]^{-2} A \sin(\varphi - \varphi_o)\end{aligned}$$

substituindo na expressão da energia e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 A^2 - \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{L}{m}\right)^{-2}$$

$$A = \frac{m}{L} \sqrt{\frac{2E}{m} + \mu^2 \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

por fim substituindo na expressão de $r(\varphi)$ e fazendo algumas simplificações, chegamos em

$$r(\varphi) = \frac{L^2/m^2\mu}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\mu^2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{E}{m}} \cos(\varphi - \varphi_o)}$$

(h) Pela inspeção da fórmula, chegamos diretamente que

$$e = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu^2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{E}{m}}$$

Assim,

$$1 - e^2 = -\frac{2}{\mu^2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{E}{m},$$

de forma que

$$a = \frac{L^2}{m^2\mu(1 - e^2)} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{-E}{m}\right)^{-1}$$

Perceba que dessa última relação conseguimos a energia mecânica total em função do semi-eixo maior, a conhecida relação:

$$E = -\frac{m\mu}{2a}$$

(i) Pelo resultado do item (d), temos que a taxa em que a área é varrida é constante e igual a

$$\dot{A} = \frac{L}{2m}.$$

Dessa forma, a área total da elipse, dada por $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ é varrida ao longo de um período inteiro. Assim,

$$T\dot{A} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$T \frac{L}{2m} = \pi a^2 \sqrt{\frac{1}{\mu^2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{\mu}{a}}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

(j) É necessário calcular a área do setor de elipse, centrada no foco, do periastro até a posição do astro. Para isso, utiliza-se o círculo auxiliar de raio a que define a anomalia excêntrica E . Dessa forma, como essa região é mesma do círculo, porém “achatada” pela razão b/a na direção do semi-eixo menor, temos que

$$A = \frac{b}{a} (\text{Área SP'X})$$

$$= \frac{b}{a} (\text{Área setor CP'X}) - \text{Área triângulo CP'S})$$

$$= \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a \cdot aE - \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E \right)$$

$$= \frac{ab}{2} (E - e \sin E)$$

Assim, pela segunda lei de Kepler, relacionando com a área total da elipse,

$$\frac{A}{\pi ab} = \frac{\Delta t}{T}$$

como $M = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$,

$$\boxed{M = E - e \sin E}$$

- (k) Primeiramente, devemos calcular r . Estabelecendo um sistema de coordenadas em que \hat{x} é paralelo ao semi-eixo maior e \hat{y} ao semi-eixo menor, o vetor \vec{r} será escrito, utilizando o mesmo raciocínio que a elipse é o círculo achatado na direção \hat{y} pela razão b/a ,

$$\vec{r} = a(\cos E - e)\hat{x} + b \sin E \hat{y}$$

Tomando então a norma do vetor,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2(\cos E - e)^2 + b^2 \sin^2 E} \\ &= \sqrt{a^2(\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E) + a^2(1 - e^2) \sin^2 E} \\ &= a\sqrt{1 + e^2 \cos^2 E + 2e \cos E} \\ &= \boxed{a(1 - e \cos E)} \end{aligned}$$

Para calcular $\cos \theta$ em termos de E , igualamos a componente em \hat{x} da expressão de \vec{r} em função de θ com $r \cos \theta$, utilizando nesse lado a forma polar da elipse.

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \cos \theta = a(\cos E - e)$$

isolando $\cos \theta$,

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}}$$

Realizando um procedimento similar para $\sin \theta$,

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \sin \theta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$$

$$\boxed{\cos \theta = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}}$$

- (l) Na situação em que e é pequeno, percebemos que

$$E - M = e \sin E \ll 1$$

Dessa forma, como queremos uma relação aproximada não transcendental para E , é interessante substituir $\sin E$ por $\sin(M + e \sin E)$. Assim, tendo em vista que $e \sin E \ll 1$, é possível abrir a soma de arcos e fazer a aproximação de pequenos ângulos para o seno e cosseno, resultando em

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin(M + e \sin E) \\ &= E - e(\sin M \cos(e \sin E) + \cos M \sin(e \sin E)) \\ &\approx E - e(\sin M + e \cos E \sin E) \end{aligned}$$

Dessa forma, aproximando em primeira ordem em e , conseguimos descartar a parcela com funções trigonométricas de E , resultando em

$$\boxed{E = M + e \sin M}$$

(m) Tendo em vista a expressão

$$r = a(1 - e \cos E),$$

basta substituir E em função de M e realizar aproximações de pequenos ângulos:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos(M + e \sin M)) \\ &= a(1 - e(\cos M \cos(e \sin M) - \sin M \sin(e \sin M))) \\ &\approx a(1 - e(\cos M - \sin M e \sin M)) \end{aligned}$$

Assim resultando em

$$r = a(1 - e \cos M + e^2 \sin^2 M)$$

(n) De acordo com a figura, em ambos os casos $0^\circ \leq i < 90^\circ$ como $90^\circ \leq i < 180^\circ$,

$$\alpha = \Omega + 90^\circ$$

$$\delta = i - 90^\circ$$

(o) A partir da definição de \vec{A} , derivamos com respeito ao tempo, lembrando que \vec{L} é constante,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} - m^2 \mu \frac{d\hat{r}}{dt}$$

a variação do versor \hat{r} se dá pela sua rotação, de forma que $d\hat{r}/dt = |\hat{r}|\dot{\phi}\hat{\phi} = \dot{\phi}\hat{\phi}$. Já $d\vec{p}/dt = \vec{F} = -m\mu\hat{r}/r^2$. substituindo também \vec{L} , obtemos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{-m\mu\hat{r}}{r^2} \times mr^2\dot{\phi}\hat{z} - m^2\mu\dot{\phi}\hat{\phi}$$

tendo em vista que $\hat{r} \times \hat{z} = -\hat{\phi}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = m^2\mu\dot{\phi}\hat{\phi} - m^2\mu\dot{\phi}\hat{\phi} = 0$$

Dessa forma, \vec{A} é conservado

(p) Como o plano orbital é definido a partir do vetor \vec{L} , podemos tomar seu produto escalar com \vec{A} , de forma a obter

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = (\vec{p} \times \vec{L} - m^2\mu\hat{r}) \cdot \vec{L}$$

como $\vec{p} \times \vec{L}$ é perpendicular a L e \hat{r} é perpendicular a \vec{L} , visto que está no plano da órbita, temos que esse produto é nulo

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$$

(q) O módulo de \vec{A} pode ser calculado a partir de

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{p} \times \vec{L})^2 + m^4\mu^2 - 2m^2\mu\hat{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L})$$

Como \vec{p} e \vec{L} são perpendiculares, $(\vec{p} \times \vec{L})^2 = p^2L^2$. Além disso, utilizamos a propriedade dos produtos mistos para chegar em $\vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{L} = L^2$. Por fim, por conservação de energia,

$$p^2 = 2mE + 2m^2\mu/r$$

substituindo os valores e simplificando, chegamos em

$$A = \sqrt{m^4\mu^2 + 2mEL^2}$$

(r) O produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{r}$ por ser escrito de duas formas:

$$Ar \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{p} \times \vec{L} - m^2 \mu \hat{r}) \cdot \vec{r}$$

usando novamente a relação $(\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} = L^2$ da resolução do item anterior, obtemos

$$Ar \cos \theta = L^2 - m^2 \mu r$$

isolando r e fazendo alguma simplificação,

$$r = \frac{L^2/m^2 \mu}{1 + \frac{A}{m^2 \mu} \cos \theta}$$

(s) A partir da perturbação dada, chegamos em

$$\delta \vec{f} = -3 \frac{GML^2}{m^2 c^2 r^4} \hat{r}$$

como essa perturbação também é central, $\vec{r} \times \delta \vec{f} = 0$. Já

$$\delta \vec{f} \times \vec{L} = \frac{3GML^2}{m^2 c^2} \vec{L} \times \frac{\vec{r}}{r^4}$$

Dessa forma, sua média temporal será dada por

$$\langle \delta \vec{f} \times \vec{L} \rangle = \frac{3GML^2}{m^2 c^2} \vec{L} \times \left\langle \frac{\hat{r}}{r^4} \right\rangle$$

Estabelecendo então o eixo \hat{x} na direção do semi-eixo maior e \hat{y} na direção do semi-eixo menor,

$$\left\langle \frac{\hat{r}}{r^4} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}}{r^4} \right\rangle$$

como há uma simetria na órbita ao longo do eixo \hat{x} , para cada valor de φ , existe um par positivo $\sin \varphi / r^4$ e negativo $\sin(-\varphi) / r^4$, de forma que a média é nula. Assim,

$$\left\langle \frac{\hat{r}}{r^4} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos \varphi}{r^4} \right\rangle \hat{x}$$

Agora basta resolver essa média pelo método mostrado no enunciado:

$$\left\langle \frac{\cos \varphi}{r^4} \right\rangle_t = \frac{2\pi m}{TL} \left\langle \frac{\cos \varphi}{r^2} \right\rangle_\varphi$$

$$\left\langle \frac{\cos \varphi}{r^2} \right\rangle_\varphi = \left\langle \frac{(1 + e \cos \varphi)^2 \cos \varphi}{a^2(1 - e^2)^2} \right\rangle_\varphi = \left\langle \frac{(\cos \varphi + 2e \cos^2 \varphi + e^2 \cos^3 \varphi)}{a^2(1 - e^2)^2} \right\rangle_\varphi = \frac{e}{a^2(1 - e^2)^2}$$

Por fim, chegamos em

$$\langle \delta \vec{f} \times \vec{L} \rangle = \frac{3GML^2}{m^2 c^2} \frac{2\pi m}{T} \frac{e}{a^2(1 - e^2)^2} \hat{z} \times \hat{x}$$

$$\langle \delta \vec{f} \times \vec{L} \rangle = \frac{3GML^2}{m^2 c^2} \frac{2\pi m}{T} \frac{e}{a^2(1 - e^2)^2} \hat{z} \times \hat{x}$$

então, como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\vec{A}}{dt} \right\rangle &= \frac{3GML^2}{m^2c^2} \frac{2\pi m}{T} \frac{e}{a^2(1-e^2)^2} \hat{z} \times \hat{x} \\ &= \frac{3GML}{m^2c^2} \frac{2\pi}{Tm\mu} \frac{1}{a^2(1-e^2)^2} \vec{L} \times (m^2e\mu\hat{x}) \\ &= \left[\frac{3GML}{m^2c^2} \frac{2\pi}{Tm\mu} \frac{1}{a^2(1-e^2)^2} \vec{L} \right] \times \vec{A} \end{aligned}$$

a velocidade angular de precessão é

$$\Omega' = \frac{6\pi GML}{m^3c^2T\mu} \frac{1}{a^2(1-e^2)^2} \vec{L}$$

Perceba que essa precessão afeta apenas o argumento de perigeu, como é esperado pela simetria esférica.

(t) Utilizando a perturbação

$$\delta\vec{f} = -\beta\vec{v}, \beta > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= -\beta\vec{v} \times \vec{L} - \vec{p} \times (\vec{r} \times \beta\vec{v}) \\ &= -2\beta\vec{v} \times \vec{L} \end{aligned}$$

utilizando a definição de \vec{A} , podemos substituir $\vec{v} \times \vec{L}$, de forma que, pela constância de \vec{A} ,

$$\left\langle \frac{d\vec{A}}{dt} \right\rangle = -2\beta \left(\frac{\vec{A}}{m} + m\mu\langle\hat{r}\rangle \right)$$

Calculando a média de \hat{r} , utilizamos o mesmo argumento de simetria do item anterior para chegar em

$$\begin{aligned} \langle\hat{r}\rangle &= \langle\cos\varphi\rangle\hat{x} \\ \langle\cos\varphi\rangle_t &= \frac{2\pi m}{TL} \langle r^2 \cos\varphi \rangle_\varphi \end{aligned}$$

Pelo dado do enunciado,

$$\langle r^2 \cos\varphi \rangle_\varphi = -ea^2\sqrt{1-e^2}$$

Além disso, utilizando a terceira lei de Kepler para substituir T em função de a e sabendo que $L^2/m^2\mu = a(1-e^2)$,

$$\begin{aligned} \langle\cos\varphi\rangle_t &= -2\pi\sqrt{\frac{1}{\mu a(1-e^2)}} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} ea^2\sqrt{1-e^2} \\ &= -e \end{aligned}$$

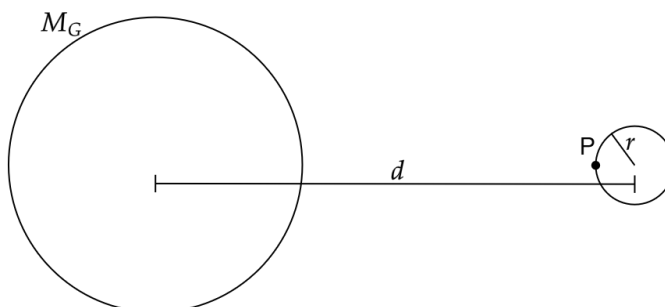
assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\vec{A}}{dt} \right\rangle &= -2\beta \left(\frac{\vec{A}}{m} - m\mu e\hat{x} \right) \\ &= -2\beta \left(\frac{\vec{A}}{m} - \frac{\vec{A}}{m} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, o vetor \vec{A} , em média, permanece constante. Isso significa que a excentricidade, relacionada com o módulo de \vec{A} e a orientação da órbita, relacionada com a direção de \vec{A} , não variam. Ou seja, a órbita não precessiona nem muda de excentricidade.

2. Tá Dando Onda Durante suas viagens pelo universo em seu superfoguete de garrafa PET, a astronauta Lariverde visitou diversos planetas com diferentes formações. Essas experiências despertaram nela um grande interesse pela interação entre planetas e seus satélites, especialmente pelos efeitos associados à força de maré.

O primeiro planeta que ela visitou foi **Geodudion**, assim nomeado por ser um planeta rochoso sem presença de água líquida. Esse planeta possui um único satélite natural, ambos representados a seguir.



Durante sua passagem, Lariverde acabou esbarrando no satélite do planeta. Preocupada com a possibilidade de que a colisão pudesse levá-lo à destruição devido aos efeitos de maré, ela decidiu calcular a distância limite entre o planeta e o satélite para que este fosse desintegrado pela diferença das forças gravitacionais atuando em pontos opostos de sua superfície, o chamado **limite de Roche**.

Entretanto, a viagem espacial durou tanto tempo que ela ficou sem papel e caneta. Por isso, precisa da sua ajuda:

- (a) Determine o módulo da diferença entre a força gravitacional exercida pelo planeta sobre dois elementos de massa infinitesimal u : um localizado no ponto P (indicado na figura) e outro no centro do satélite. Essa diferença corresponde à chamada força de maré.

Expresse sua resposta em função da massa M_G do planeta, da distância d entre o planeta e o satélite, do raio r do satélite e de constantes físicas.

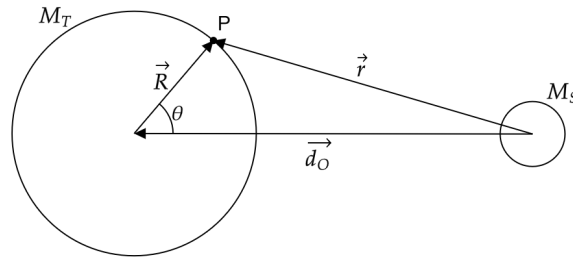
- (b) Determine a distância mínima que o satélite pode estar de Geodudion mantendo sua integridade estrutural apenas por sua própria gravidade.

Expresse sua resposta em função de M_G , M_S , r e constantes físicas.

Após concluir que o sistema formado por Geodudion e seu satélite permaneceria estável, Lariverde prosseguiu sua jornada galáctica. Em seguida, encontrou um segundo planeta que chamou sua atenção: um planeta inteiramente composto por água, orbitado por um satélite rochoso, como mostrado na figura abaixo. Ela decidiu chamá-lo de **TDO**.

Encantada com o planeta, ela decidiu pousar, mas precisava determinar o melhor local para isso. Após refletir, concluiu que deveria pousar no ponto onde o raio do planeta fosse mínimo. Contudo, continuava sem papel ou caneta, então novamente precisará da sua ajuda.

- (c) Sabendo que a força de maré no ponto P , localizado pelas coordenadas R e θ (conforme indicado na figura), pode ser escrita como



$$\vec{F}_M = K_1 \left(\frac{\vec{d}_O}{K_2} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right),$$

determine expressões para as constantes K_1 e K_2 em função da massa M_S do satélite, da massa u de um elemento na superfície do planeta, da distância d_O e de constantes físicas.

- (d) A partir da expressão anterior para a força de maré, obtém-se a seguinte energia potencial associada:

$$U_{\text{maré}} = -K_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{x d_O}{K_2} \right),$$

em que x é a coordenada cartesiana no eixo que aponta para o centro do satélite, considerando um sistema com origem no centro do planeta TDO.

Considerando essa energia potencial atuando sobre o planeta, determine uma equação que relacione a distância ao centro do planeta R de um ponto em sua superfície com o ângulo θ , em função de M_S , d_O , da massa total M_T do planeta e de constantes físicas.

Considere o regime $R \ll d_O$, realizando aproximações até a segunda ordem em R . Dica:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2} \text{ com } x \ll 1 \text{ em segunda ordem.}$$

- (e) Determine a diferença entre maré alta e maré baixa, em função de M_S , d_O , M_T , o menor raio R_{min} do planeta e constantes físicas.

Solução:

- a) O módulo da força de maré atuando sobre o satélite é escrita como:

$$F_M = \frac{GM_G u}{(d-r)^2} - \frac{GM_G u}{d^2}$$

Realizando a aproximação binomial $(1+x)^n \approx 1+nx$, temos:

$$F_M \approx \frac{GM_G u}{d^2} \left(1 + \frac{2r}{d} \right) - \frac{GM_G u}{d^2}$$

$$F_M = \frac{2GM_G u r}{d^3}$$

- b) Para que a estrutura do satélite seja mantida unicamente por sua própria gravidade, precisa-se que a força de maré se iguale a atração gravitacional do satélite no ponto P:

$$F_M = F_{G,S}$$

$$\frac{2GM_Gur}{d^3} = \frac{GM_Su}{r^2}$$

$$d = r \left(\frac{2M_G}{M_S} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- c) A força de maré exercida sobre o ponto P vai ser representada pela diferença entre a força gravitacional causada pelo satélite no ponto P, e pela força gravitacional causada pelo satélite no centro do planeta. Sendo escrita como:

$$F_M = -\frac{GM_Su}{r^2} \hat{r} - \left(-\frac{GM_Su}{d_O^2} \hat{d}_O \right)$$

$$F_M = GM_Su \left(\frac{\vec{d}_O}{d_O^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Portanto, $K_1 = GM_Su$ e $K_2 = d_O^3$

- d) Substituindo os valores de K_1 e K_2 encontrados anteriormente na expressão da energia potencial chegamos em:

$$U_{\text{maré}} = -GM_Su \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{d_O^2} \right)$$

Como o planeta é formado inteiramente por água, sua superfície precisa ser um equipotencial. Portanto a energia potencial da maré mais a energia potencial gravitacional em relação ao planeta devem ser constantes:

$$U_{\text{tot}} = U_{\text{maré}} + U_G = \text{cte}$$

$$U_S = -M_S \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{d_O^2} \right) - \frac{M_T}{R}$$

Onde as constantes G e u foram agregadas à constante U_S . Escrevendo $x = R \cos \theta$ e aproximando o valor de r até a segunda ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(d_O - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2}} \approx \frac{1 + \frac{R \cos \theta}{d_O} - \frac{R^2}{2d_O^2} + \frac{3R^2 \cos^2 \theta}{2d_O^2}}{d_O}$$

Substituindo esses valores na expressão da energia:

$$U_S = -\frac{M_S}{d_O} - \frac{M_S R \cos \theta}{d_O^2} + \frac{M_S R^2}{2d_O^3} - \frac{3M_S R^2 \cos^2 \theta}{2d_O^3} + \frac{M_S R \cos \theta}{d_O^2} - \frac{M_T}{R}$$

Então, a expressão que relaciona R e θ é:

$$U_S = -\frac{M_S}{d_O} - \frac{M_T}{R} - \frac{M_S R^2}{2d_O^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

e) A maré máxima ocorrerá nos pontos que pertencem a interseção entre a reta que liga o satélite e o planeta e a superfície deste, ou seja, nos pontos onde $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$, pois nesses pontos as forças gravitacionais causadas pelo planeta e pelo satélite possuem mesma direção, resultando na componente radial em relação ao centro do planeta da força causada pelo satélite ser maior. Enquanto a maré mínima ocorrerá quando $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$, uma vez que nesses pontos a força causada pelo satélite possui uma maior componente na mesma direção da força de atração do planeta. Esses resultados também poderiam ser encontrados derivando a equação encontrada anteriormente e igualando $\frac{dR}{d\theta}$ a zero. Portanto, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$\frac{M_S R_{\text{máx}}^3}{d_O^3} + R_{\text{máx}} \left(\frac{M_S}{d_O} + U_S \right) + M_T = 0$$

$$\frac{-M_S R_{\text{mín}}^3}{2d_O^3} + R_{\text{mín}} \left(\frac{M_S}{d_O} + U_S \right) + M_T = 0$$

Para encontrar o valor para a diferença entre as alturas das marés Δh , deve-se subtrair as expressões, utilizando $R_{\text{máx}} = R_{\text{mín}} + \Delta h$ e substituindo U_S em função de $R_{\text{mín}}$:

$$\frac{3M_S R_{mn}^3}{d_O^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta h}{R_{mn}} \right) + \Delta h \left(\frac{M_S}{d_O} + U_S \right) = 0$$

$$\Delta h = \frac{-\frac{3M_S R_{mn}^3}{2d_O^3}}{\frac{M_S}{d_O} + U_S + \frac{3M_S R_{mn}^2}{d_O^3}}$$

$$\Delta h = \frac{3R_{mn}^4}{\frac{2M_T d_O^3}{M_S} - 7R_{\text{mín}}^3}$$

3. Pontos de Lagrange Após uma competição insana, Bibucha e Bibrasil decidem unir forças para um feito ainda maior: lançar o mais novo projeto de foguete, *Fallus 3: A Volta dos que Nunca Foram*. Megalomaníacos como sempre, resolvem colocá-lo em uma órbita heliocêntrica associada ao ponto de Lagrange L_5 do sistema Sol-Terra.

Antes de realizar o lançamento, a dupla decide conduzir um estudo teórico detalhado envolvendo a caracterização, a estabilidade e a dinâmica dos pontos de Lagrange, bem como a modelagem da órbita e das condições de lançamento necessárias para atingir seu objetivo.

Parte I: Pontos de Lagrange

Inicialmente, Bibrasil decide estudar a caracterização dos pontos de Lagrange. Os pontos de Lagrange são posições especiais no espaço que surgem ao considerar a influência gravitacional mútua da Terra e do Sol, nas quais um corpo de massa desprezível pode permanecer em repouso quando observado a partir de um referencial não inercial que acompanha a translação da Terra em torno do Sol.

Considere dois corpos de massas M_1 e M_2 ($M_2 > M_1$) descrevendo órbitas circulares em torno do centro de massa comum. Adote um referencial não inercial, rotante e dextrogiro com a origem no centro de massa do sistema, plano fundamental sendo o plano orbital e eixo x apontado sempre

na direção do corpo M_1 . Sejam \vec{r}_1 e \vec{r}_2 as respectivas posições de M_1 e M_2 nesse referencial e $\vec{\Omega}$ o vetor velocidade angular associado a rotação do sistema.

- (a) Expresse a equação de movimento para um corpo nesse referencial rotante.
- (b) Mostre que ambos os pontos, L_4 e L_5 , formam um triângulo equilátero com M_1 e M_2 .
- (c) Supondo $M_2 \ll M_1$, obtenha expressões aproximadas, em primeira ordem na razão de massas, para as posições dos pontos L_1 , L_2 e L_3 ao longo do eixo x .
Expresse seus resultados em função de r_1 , M_1 e M_2 .
- (d) Prove que o lugar geométrico dos pontos nos quais os módulos das forças gravitacionais geradas pelo Sol e pela Terra se igualam é uma circunferência. Além disso, determine as expressões para o raio R e para o centro O dessa circunferência no sistema de coordenadas rotante, em função de r_1 , r_2 , M_1 e M_2 .

Parte II: Lançamento

Em seguida, Bibucha passa a estudar o lançamento do grande foguete *Fallus 3*. No entanto, um obstáculo importante se impõe: a quantidade de combustível disponível é limitada. Dessa forma, torna-se essencial determinar qual órbita heliocêntrica exige a menor velocidade possível para que o foguete consiga atingir a vizinhança do ponto de Lagrange L_5 .

Para a análise que se segue, adotaremos o seguinte modelo simplificado para o lançamento do *Fallus 3*. Inicialmente, o foguete é colocado em uma órbita terrestre, na qual seu movimento é dominado pela gravitação da Terra. Após escapar da esfera de influência da Terra, assume-se que o foguete passa a se mover exclusivamente sob a ação gravitacional do Sol, podendo então ser descrito por uma órbita heliocêntrica. No instante imediatamente posterior à saída da esfera de influência terrestre, sua posição heliocêntrica coincide aproximadamente com a posição da Terra.

- (e) Supondo que a órbita heliocêntrica do foguete seja coplanar à órbita da Terra, determine a velocidade heliocêntrica mínima $v_{\odot, \min}$ necessária para que o mesmo atinja exatamente a distância radial correspondente ao ponto de Lagrange L_5 do sistema Sol–Terra.
- (f) Considerando que *Fallus* será lançado em ponto da superfície terrestre e em um data de modo a minimizar o módulo da velocidade de lançamento no referencial não inercial que gira com a Terra, determine as possíveis latitudes ϕ do ponto de lançamento e a velocidade mínima de lançamento $v_{\oplus, \min}$ no referencial terrestre que o foguete será lançado.

Observação: Desconsidere qualquer efeito gerado pela excentricidade orbital da Terra.

Parte III: Estabilidade

Após essa minuciosa análise, a dupla finalmente realiza o lançamento do foguete. Contudo, Bibucha, fiel ao seu histórico, acaba cometendo um pequeno erro em uma das contas. Como consequência, o foguete não se encontra exatamente no ponto L_5 , mas sim em uma órbita do tipo *halo* ao seu redor. Ao perceber o problema, Bibrasil corre para modelar a dinâmica do foguete na vizinhança de L_5 , analisando o movimento próximo ao ponto de equilíbrio e as condições que permitem a permanência do foguete em órbita.

Levando em conta o sistema de coordenadas rotante definido na Parte I, passamos a analisar o movimento do foguete na vizinhança do quinto ponto de Lagrange. Seja \vec{r}_0 o vetor posição correspondente ao ponto L_5 no referencial rotante. Considera-se que o foguete se encontra inicialmente em uma configuração próxima a esse ponto de equilíbrio, de modo que sua posição possa ser escrita como

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r},$$

onde $\Delta\vec{r}$ representa uma pequena perturbação em torno de L_5 , satisfazendo $|\Delta\vec{r}| \ll |\vec{r}_0|$.

- (g) Obtenha a equação de movimento para $\Delta\vec{r}$ mantendo apenas termos até primeira ordem em $\Delta\vec{r}$, expressando o resultado em função de $\vec{\Omega}$, M_1 e M_2 .

- (h) Mostre que o movimento nessa na direção perpendicular ao plano orbital é estável e determine a frequência angular das oscilações associadas.
- (i) Definindo $P = (x,y)$ como o vetor das componentes planares de $\Delta\vec{r}$, prove que a equação de movimento para P é dada por

$$\ddot{\vec{P}} = -2\Omega \mathbf{A} \cdot \dot{\vec{P}} + \frac{3\Omega^2}{4} \mathbf{B} \cdot \vec{P},$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes e determine essas matrizes em função de $\eta = \frac{M_1}{M_2}$.

- (j) Ache a condição para η para que o ponto L_5 seja estável e determine as frequências angulares características dos modos normais de oscilação associadas em função de η .

Solução:

- (a) No referencial inercial, o movimento do terceiro corpo é descrito por

$$\ddot{\vec{r}}_{\text{in}} = -GM_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - GM_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}.$$

Ao passar para um referencial rotante com velocidade angular constante $\vec{\Omega}$, surgem as forças fictícias de Coriolis e centrífuga, de modo que a equação de movimento assume a forma

$$\ddot{\vec{r}} = -GM_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - GM_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}).$$

- (b) Inicialmente, nos pontos de Lagrange o corpo de prova permanece em repouso no referencial rotante. Assim,

$$\dot{\vec{r}} = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\vec{r}} = 0.$$

Usando o resultado clássico para a velocidade angular do sistema de dois corpos,

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{(r_1 + r_2)^3},$$

a equação de equilíbrio no referencial rotante pode ser escrita como

$$M_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + M_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} = \frac{M_1 + M_2}{(r_1 + r_2)^3} \vec{r}.$$

Pela simetria do problema, se o ponto estiver deslocado para fora do plano orbital, sempre existirá uma componente da força gravitacional apontando de volta para esse plano. Logo, os pontos de equilíbrio relevantes satisfazem $\vec{r} = (x,y)$ no plano orbital.

Analisando a componente na direção y , obtemos

$$y \left(M_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + M_2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right) = \frac{M_1 + M_2}{(r_1 + r_2)^3} y.$$

Como para os pontos L_4 e L_5 vale $y \neq 0$, segue que

$$M_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + M_2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} = \frac{M_1 + M_2}{(r_1 + r_2)^3}.$$

Considerando agora a componente na direção x , temos

$$M_1 \frac{x - r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + M_2 \frac{x + r_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} = \frac{M_1 + M_2}{(r_1 + r_2)^3} x.$$

Reorganizando,

$$x \left(M_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + M_2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} - \frac{M_1 + M_2}{(r_1 + r_2)^3} \right) - \frac{M_1 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{M_2 r_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} = 0.$$

Usando o resultado obtido a partir da componente em y , o primeiro termo se anula, restando

$$\frac{M_1 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \frac{M_2 r_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}.$$

Pela definição do centro de massa do sistema,

$$M_1 r_1 = M_2 r_2,$$

o que implica

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2|.$$

Substituindo esse resultado na condição obtida a partir da componente em y , conclui-se que

$$\boxed{|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2| = r_1 + r_2}.$$

Portanto, os pontos L_4 e L_5 estão à mesma distância de M_1 e M_2 , formando com eles triângulos equiláteros.

- (c) Percebe-se que os pontos L_1 , L_2 e L_3 estão localizados ao longo do eixo x . Assim, a componente da força resultante na direção y é satisfeita identicamente, restando apenas a condição de equilíbrio na direção x .

A equação escalar ao longo do eixo x é dada por

$$M_1 \frac{x - r_1}{|x - r_1|^3} + M_2 \frac{x + r_2}{|x + r_2|^3} = \frac{M_1 + M_2}{(r_1 + r_2)^3} x.$$

Assumimos o regime $M_1 \ll M_2$, de modo que $r_2 \ll r_1$.

O ponto L_1 está situado entre as massas, próximo a M_1 . Escrevemos

$$x = r_1 - \delta_1, \quad 0 < \delta_1 \ll r_1.$$

Substituindo na equação de equilíbrio e expandindo em primeira ordem em δ_1/r_1 , obtemos

$$-\frac{M_1}{\delta_1^2} + \frac{M_2}{r_1^2} \left(1 + 2 \frac{\delta_1}{r_1} \right) = -\frac{M_2}{r_1^3} (r_1 - \delta_1).$$

Mantendo apenas os termos dominantes em δ_1 , segue que

$$\delta_1 = r_1 \left(\frac{M_1}{3M_2} \right)^{1/3}.$$

O ponto L_2 está localizado além de M_1 , no sentido oposto a M_2 . Escrevemos

$$x = r_1 + \delta_2, \quad 0 < \delta_2 \ll r_1.$$

Procedendo de forma análoga,

$$\frac{M_1}{\delta_2^2} + \frac{M_2}{r_1^2} \left(1 - 2 \frac{\delta_2}{r_1} \right) = \frac{M_2}{r_1^3} (r_1 + \delta_2),$$

de onde resulta

$$\delta_2 = r_1 \left(\frac{M_1}{3M_2} \right)^{1/3}.$$

O ponto L_3 situa-se do lado oposto a M_1 , próximo de M_2 . Escrevemos

$$x = -r_1 - \delta_3, \quad 0 < \delta_3 \ll r_1.$$

Substituindo na equação de equilíbrio e expandindo em primeira ordem,

$$\frac{M_1}{4r_1^2} \left(1 - \frac{\delta_3}{r_1} \right) + \frac{M_2}{r_1^2} \left(1 - 2\frac{\delta_3}{r_1} \right) = \frac{M_2}{r_1^3} (r_1 + \delta_3).$$

Mantendo apenas termos até primeira ordem em δ_3/r_1 , obtemos

$$\delta_3 = r_1 \frac{M_1}{12M_2}.$$

Portanto, as posições aproximadas dos pontos colineares são

$$x_{L_1} = r_1 \left[1 - \left(\frac{M_1}{3M_2} \right)^{1/3} \right], \quad x_{L_2} = r_1 \left[1 + \left(\frac{M_1}{3M_2} \right)^{1/3} \right],$$

$$x_{L_3} = -r_1 \left(1 + \frac{M_1}{12M_2} \right).$$

- (d) Igualando os módulos das forças gravitacionais exercidas pelo Sol e pela Terra sobre uma partícula teste, obtemos

$$\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} = \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2}.$$

Cancelando a constante gravitacional G , segue que

$$\frac{M_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} = \frac{M_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2}.$$

Essa expressão mostra que a razão das distâncias do ponto \vec{r} aos pontos fixos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 é constante. Pelo conceito de círculo de Apolônio, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem essa condição é uma circunferência.

Para obter explicitamente sua equação, expresse

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{r}_1 = (r_1, 0), \quad \vec{r}_2 = (-r_2, 0).$$

A equação acima pode então ser escrita como

$$M_1[(x + r_2)^2 + y^2] = M_2[(x - r_1)^2 + y^2].$$

Expandindo os termos e reorganizando a expressão, obtemos

$$(M_2 - M_1)x^2 - 2(M_1r_2 + M_2r_1)x + (M_2 - M_1)y^2 + M_1r_2^2 - M_2r_1^2 = 0.$$

Dividindo toda a equação por $(M_2 - M_1)$ e completando quadrados, chegamos à forma canônica

$$\left[x - \frac{M_1r_2 + M_2r_1}{M_2 - M_1} \right]^2 + y^2 = \frac{M_1M_2}{(M_2 - M_1)^2} (r_1 + r_2)^2.$$

Portanto, o lugar geométrico é uma circunferência de centro

$$O = \left(\frac{M_1 r_2 + M_2 r_1}{M_2 - M_1}, 0 \right)$$

e raio

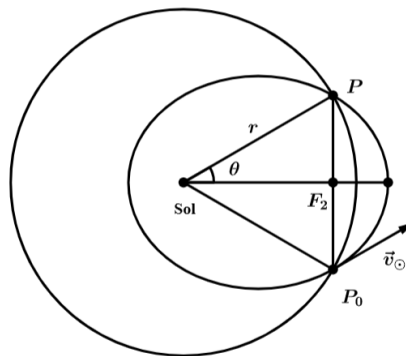
$$R = \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{M_2 - M_1} (r_1 + r_2).$$

(e) Pela conservação da energia mecânica na órbita heliocêntrica do foguete Fallus, temos

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r} = -\frac{GM_\odot}{2a},$$

onde a é o semieixo maior da órbita heliocêntrica. Assim, para minimizar a velocidade heliocêntrica inicial v , é necessário minimizar o semieixo maior a da órbita que conecta a posição inicial do foguete à posição do ponto de Lagrange L_5 .

Para minimizar a , a órbita heliocêntrica deve ser uma elipse de segurança, isto é, a elipse de menor semieixo maior que passa por dois pontos fixos quando o foco secundário se encontra alinhado com esses pontos.



Pela simetria do problema e pela definição de elipse, obtemos

$$a = \frac{r(1 + \sin \theta)}{2}.$$

onde $\theta = \frac{\omega t}{2} - \frac{\pi}{6}$. Introduzindo a excentricidade e da órbita, a geometria da elipse fornece

$$e = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \tan(2\theta) \Rightarrow \theta = 2 \arctan(e).$$

Seja E a anomalia excêntrica no instante inicial. Pela simetria da órbita, no instante final a anomalia excêntrica será $2\pi - E$. A relação entre a anomalia verdadeira ν e a anomalia excêntrica fornece

$$\cos E = \frac{\cos \nu + e}{1 + e \cos \nu}.$$

Para o caso considerado, $0 < E < \pi$, sendo assim

$$E = \pi - \arccos(e).$$

Aplicando a equação de Kepler,

$$\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a^3}} t = 2(\pi - E + e \sin E),$$

e usando identidades trigonométricas apropriadas, pode-se mostrar que

$$a = r \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(e)\right).$$

Reunindo os resultados e identificando

$$\omega t = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r^3}} t = 2 \arctan(e) + \frac{\pi}{6},$$

chegamos à equação transcendental

$$2 \arctan(e) + \frac{\pi}{6} = 2(\arccos(e) + e\sqrt{1 - e^2}) \cos^3\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(e)\right).$$

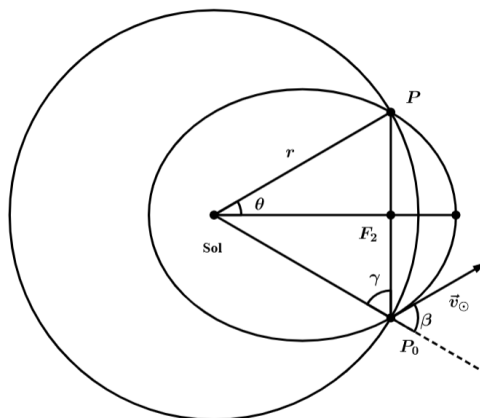
Essa equação pode ser resolvida numericamente por iteração, resultando em

$$e \approx 0.858.$$

Por fim, usando novamente a conservação da energia mecânica,

$$v_{\odot, \min} = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \Rightarrow \boxed{v_{\odot, \min} \approx 29,7 \text{ km/s}}$$

- (f) Inicialmente, calculamos o ângulo da velocidade inicial heliocêntrica logo após o escape do campo terrestre. Observe a seguinte geometria.



Pela a propriedade óptica das elipses, $\gamma = \pi - 2\beta$, já por o triângulo ser isósceles $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$. Assim, o ângulo entre o vetor velocidade inicial heliocêntrica \vec{v}_i e o vetor raio orbital \vec{r} é $\pi - \beta \approx 85,6^\circ$.

Definimos um sistema de coordenadas dextrogiro cujo plano fundamental é o plano orbital da Terra, com origem no centro da Terra e eixo x alinhado com o ponto vernal, acompanhando a translação terrestre. Nesse referencial, a velocidade terrestre no infinito é dada por

$$\vec{v}_{\infty} = \vec{v}_i - \vec{\Omega}_{\oplus} \times \vec{r},$$

onde $\vec{\Omega}_{\oplus}$ é o vetor velocidade angular da translação da Terra. O módulo da velocidade no infinito é $|\vec{v}_{\infty}|$, e o ângulo α entre \vec{v}_{∞} e a reta Sol-Terra satisfaz

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}_{\infty}| r}\right).$$

A órbita terrestre resultante é hiperbólica. Pelo princípio da conservação da energia mecânica específica, temos

$$a = \frac{GM_{\odot}}{v_{\infty}^2}.$$

O momento angular específico da órbita pode ser escrito como

$$h = v_{\infty} b,$$

onde b é o semieixo menor da hipérbole. Pela geometria da hipérbole, sendo ψ o semi-ângulo de abertura das assíntotas,

$$b = a \tan \psi \Rightarrow h = v_{\infty} a \tan \psi.$$

A conservação do momento angular entre o instante de lançamento e o movimento no infinito fornece a componente tangencial da velocidade no referencial terrestre,

$$v_{0,t} = \frac{v_{\infty} a \tan \psi}{R_{\oplus}}.$$

Seja ϕ a latitude geográfica do ponto de lançamento e \vec{v}_{\oplus} o vetor velocidade associado à rotação da Terra nesse ponto. O vetor velocidade do foguete no referencial terrestre, no instante do lançamento, é dado por

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{\oplus}.$$

O vetor \vec{v}_0 pode ser decomposto em uma componente radial e uma componente tangencial $v_{0,t}$ no plano orbital, enquanto \vec{v}_{\oplus} é tangente ao paralelo local.

Pelo teorema do cosseno, obtemos

$$v^2 = v_0^2 + v_{\oplus}^2 - 2 v_{0,t} v_{\oplus} \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre \vec{v}_{\oplus} e a componente tangencial $v_{0,t}$.

A velocidade associada à rotação da Terra no ponto de latitude ϕ é

$$v_{\oplus} = R_{\oplus} \omega_{\oplus} \cos \phi,$$

onde ω_{\oplus} é a frequência angular de rotação da Terra. Substituindo na expressão acima, obtemos

$$v^2 = v_0^2 + R_{\oplus}^2 \omega_{\oplus}^2 \cos^2 \phi - 2 v_{0,t} R_{\oplus} \omega_{\oplus} \cos \phi \cos \theta.$$

Observe o seguinte triângulo esférico.

obtemos

$$\psi = \arccos\left(\frac{a}{a + R_{\oplus}}\right).$$

Substituindo esse valor na expressão para $v_{0,t}$ e, posteriormente, na equação de v^2 , encontramos o valor mínimo da velocidade de lançamento no referencial terrestre,

$$v_{\oplus, \min} = 10,8 \text{ km/s}.$$

(g) A equação de movimento no referencial rotante é dada por

$$\ddot{\vec{r}} = -GM_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - GM_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}).$$

Os termos de aceleração, centrífugo e de Coriolis já são lineares em $\Delta\vec{r}$ e suas derivadas. Assim, apenas os termos gravitacionais precisam ser linearizados.

Para um termo genérico do tipo

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3},$$

temos, em primeira ordem,

$$\delta\vec{f} = \frac{\Delta\vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} - 3 \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^5} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i).$$

No ponto L_5 , vale

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_0 - \vec{r}_2| = r_1 + r_2,$$

e a velocidade angular do sistema satisfaz

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{(r_1 + r_2)^3}.$$

Definindo

$$\vec{w}_1 = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 = (r_1 + r_2) \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{w}_2 = \vec{r}_0 - \vec{r}_2 = (r_1 + r_2) \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

a soma das forças gravitacionais linearizadas fornece

$$\ddot{\delta\vec{r}} = -2\vec{\Omega} \times \Delta\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\Delta\vec{r} \times \vec{\Omega}) - \Omega^2 \Delta\vec{r} + 3\Omega^2 \frac{M_1(\hat{w}_1 \cdot \Delta\vec{r})\hat{w}_1 + M_2(\hat{w}_2 \cdot \Delta\vec{r})\hat{w}_2}{M_1 + M_2}.$$

(h) Considerando somente a componente z da equação de movimento obtida, os termos vindo da força centrífuga e da força de Coriolis são nulos pela definição de produto vetorial. Já os termos que vem dos produtos escalares também são nulos pelo fato dos vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 estarem contidos no plano orbital. A equação de movimento reduz-se a

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = 0.$$

Portanto, o movimento na direção perpendicular ao plano orbital é estável e corresponde a oscilações harmônicas simples com frequência angular

$$\omega_z = \Omega.$$

(i) A equação obtida no item (g) projeta-se no plano como

$$\ddot{\vec{P}} = -2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{P}} + \Omega^2 \vec{P} - \Omega^2 \vec{P} + \frac{3\Omega^2}{M_1 + M_2} \left[M_1(\hat{w}_1 \cdot \Delta\vec{r})\hat{w}_1 + M_2(\hat{w}_2 \cdot \Delta\vec{r})\hat{w}_2 \right].$$

Perceba que o termo vindo da força centrífuga se cancela, obtemos

$$\ddot{\vec{P}} = -2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{P}} + \frac{3\Omega^2}{M_1 + M_2} \left[M_1(\hat{w}_1 \cdot \Delta\vec{r})\hat{w}_1 + M_2(\hat{w}_2 \cdot \Delta\vec{r})\hat{w}_2 \right].$$

Escrevendo $\vec{P} = (x, y)$, $\eta = \frac{M_2}{M_1}$ e utilizando as expressões para \hat{w}_1 e \hat{w}_2 , obtemos

$$\frac{M_1(\vec{w}_1 \cdot \vec{P})\vec{w}_1 + M_2(\vec{w}_2 \cdot \vec{P})\vec{w}_2}{M_1 + M_2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x - \sqrt{3} \frac{\eta - 1}{\eta + 1} y \\ -\sqrt{3} \frac{\eta - 1}{\eta + 1} x + 3y \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, o termo de Coriolis projetado no plano orbital assume a forma

$$\vec{\Omega} \times \dot{\vec{P}} = \Omega(-\dot{y}, \dot{x}).$$

Assim, a equação de movimento pode ser escrita na forma matricial compacta

$$\ddot{\vec{P}} = -2\Omega \mathbf{A} \dot{\vec{P}} + \frac{3\Omega^2}{4} \mathbf{B} \vec{P},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \frac{1 - \eta}{\eta + 1} \\ -\sqrt{3} \frac{1 - \eta}{\eta + 1} & 3 \end{pmatrix}.$$

(j) Para analisar a estabilidade do movimento no plano orbital em torno de L_5 , supomos uma solução do tipo

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_0 e^{\lambda t}.$$

Substituindo essa forma funcional na equação obtida no item (i), obtemos a equação algébrica

$$\left(\lambda^2 \mathbf{I} + 2\lambda\Omega \mathbf{A} - \frac{3}{4}\Omega^2 \mathbf{B} \right) \vec{P}_0 = 0.$$

Para que existam soluções não triviais, é necessário que

$$\det \left(\lambda^2 \mathbf{I} + 2\lambda\Omega \mathbf{A} - \frac{3}{4}\Omega^2 \mathbf{B} \right) = 0.$$

Utilizando as expressões para \mathbf{A} , \mathbf{B} e definindo $\zeta = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}$, a condição torna-se

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{3}{4}\Omega^2 & -2\Omega\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4}\Omega^2\zeta \\ 2\Omega\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4}\Omega^2\zeta & \lambda^2 - \frac{9}{4}\Omega^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante e dividindo toda a equação por Ω^4 , obtemos a equação biquadrada

$$\left(\frac{\lambda}{\Omega} \right)^4 + \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right)^2 + \frac{27}{4} \frac{\eta}{(1 + \eta)^2} = 0.$$

Aplicando a fórmula quadrática para $(\lambda/\Omega)^2$, segue que

$$\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\frac{\eta}{(1+\eta)^2}}.$$

Observa-se que, independentemente do valor de η , o termo constante $-1/2$ garante que λ seja, em geral, um número complexo. A parte imaginária de λ está associada a oscilações periódicas do movimento em torno do ponto de Lagrange L_5 . Entretanto, a presença de uma parte real não nula implicaria crescimento exponencial de pequenas perturbações, caracterizando instabilidade dinâmica.

Para que o movimento seja estável, é necessário que $(\lambda/\Omega)^2$ seja um número real e negativo, o que exige que o discriminante seja não negativo, isto é,

$$1 - 27\frac{\eta}{(1+\eta)^2} \geq 0 \Rightarrow \eta^2 - 26\eta + 1 \geq 0.$$

Como temos $\eta < 1$, a condição de estabilidade reduz-se a

$$\eta \leq 13 - 2\sqrt{42} \approx 0.0385.$$

Sob essa condição, ambas as soluções para $(\lambda/\Omega)^2$ são reais e negativas, e o movimento em torno de L_5 consiste em uma superposição de dois modos oscilatórios estáveis. As frequências características associadas são

$$\Omega_1 = \Omega \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27\frac{\eta}{(1+\eta)^2}}}{2}}, \quad \Omega_2 = \Omega \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27\frac{\eta}{(1+\eta)^2}}}{2}}.$$

Observação: Cálculos análogos podem ser realizados para os pontos L_1 , L_2 e L_3 . Em todos esses casos, a linearização das equações conduz a um sistema cuja equação característica possui pelo menos um λ real positivo, indicando a presença de modos exponencialmente crescentes. Portanto, os pontos L_1 , L_2 e L_3 são sempre linearmente instáveis, independentemente da razão de massas do sistema. Por outro lado, um cálculo análogo para o ponto L_4 conduz à mesma equação característica obtida para L_5 , resultando no mesmo critério de estabilidade, conhecido como critério de Routh.

4. Oguh e os vetores Em seus monitoramentos noturnos, o astrônomo Oguh detectou dois astros em suposta rota de colisão na esfera celeste. Para apontar seu telescópio para o lugar exato e registrar o evento, ele precisa determinar as coordenadas do cruzamento dessas trajetórias com precisão. As posições iniciais são dadas pelas coordenadas equatoriais (α_1, δ_1) para o Astro 1 e (α_2, δ_2) para o Astro 2. Sabendo que na IOAA o uso de vetores pode ser intenso, Oguh precisa da sua ajuda na utilização deste poder para resolver o problema.

- (a) Considerando as definições advindas da astronomia de posição, escreva os vetores de posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , representando, respectivamente, a posição do Astro 1 e do Astro 2 na esfera celeste de raio 1. Para isso, converta as coordenadas equatoriais (α, δ) para coordenadas cartesianas (x, y, z) (como mostrado na imagem abaixo).
- (b) Para se familiarizar com a geometria do problema, calcule tanto o produto escalar quanto o produto vetorial entre os vetores de posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Apresente os resultados de ambas as operações (explicitando a direção no caso do produto vetorial). A partir desses resultados, determine a expressão para a separação angular θ entre as duas estrelas.

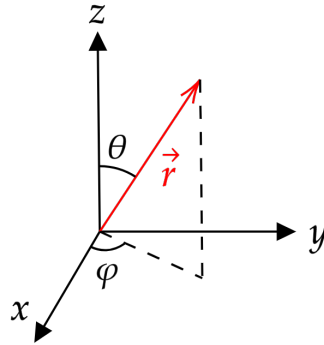


Figura 7: Representação do vetor de posição em coordenadas cartesianas

Enquanto você calculava a separação angular instantânea, Oguh conseguiu medir os movimentos próprios μ_α (no eixo da Ascensão Reta) e μ_δ (no eixo da Declinação) para cada estrela no momento da detecção. Note que, embora fisicamente as estrelas se movam no espaço tridimensional, para os propósitos deste problema, modelaremos seus movimentos projetados diretamente sobre a esfera celeste considerando velocidade radial nula. Assuma que cada estrela se move ao longo de sua trajetória com velocidade tangencial de módulo aproximadamente constante. Para trabalhar com a interseção de trajetórias, precisamos do vetor velocidade tangencial \vec{v} expresso em coordenadas cartesianas no momento da detecção.

- (c) Utilizando a regra da cadeia na derivada temporal do vetor posição \vec{r} encontrado no item (a), determine as componentes cartesianas instantâneas (v_x, v_y, v_z) do vetor velocidade de cada estrela em função de $\alpha, \delta, \mu_\alpha$ e μ_δ .

Agora, vamos definir a geometria do movimento. Cada estrela se move ao longo de um círculo máximo fixo na esfera celeste, o que significa que sua trajetória está contida em um plano que passa pela origem. Para definir um plano no espaço, precisamos de seu vetor normal \vec{N} (um vetor perpendicular a qualquer vetor contido no plano).

- (d) Com base nos vetores cinemáticos que você já encontrou nos itens anteriores, encontre os vetores normais \vec{N}_1 e \vec{N}_2 que definem de forma única os planos orbitais do Astro 1 e do Astro 2.

Enfim, a localização do evento. O ponto de interseção das trajetórias deve pertencer simultaneamente aos dois planos orbitais que você definiu no item anterior. Geometricamente, isso significa que o vetor posição do encontro, \vec{P}_{cruz} , deve ser perpendicular a ambos os vetores normais \vec{N}_1 e \vec{N}_2 .

- (e) Encontre as coordenadas cartesianas dos pontos de cruzamento das trajetórias das estrelas na esfera celeste.
- (f) Para que Oguh testemunhe uma belíssima vista (onde os dois astros ocupam exatamente a mesma coordenada na esfera celeste no mesmo instante), não basta que suas trajetórias se cruzem geometricamente; elas devem chegar a tal ponto no mesmo instante. Lembre-se de que existem dois cruzamentos possíveis, mas fisicamente as estrelas estão se movendo em direção a apenas um deles agora. Portanto, escreva a condição matemática que determina o ponto desejado, considerando que tal ponto exista (isto é, um ponto de cruzamento para onde ambas as estrelas estão indo agora). Em seguida, determine a expressão para o tempo de trânsito Δt de cada estrela em função do módulo do seu vetor velocidade tangencial $|\vec{v}|$ (encontrado no item c) e de sua distância angular ao ponto de encontro correto \vec{P}_{cruz} . Por fim, escreva a condição matemática de simultaneidade.

- (g) Oguh está empolgado com a possibilidade de testemunhar uma colisão entre duas das estrelas mais brilhantes da constelação de Órion: Betelgeuse e Rigel. Considere os dados astrométricos (referenciais ao catálogo J2000.0) fornecidos na tabela abaixo, extraídos de um software de simulação astronômica.

Estrela	Ascensão Reta (J2000.0)	Declinação (J2000.0)	Paralaxe (mas)	Movimento Próprio	
				$\mu_\alpha \cos \delta$ (mas/ano)	μ_δ (mas/ano)
Betelgeuse	05 ^h 55 ^m 10.53 ^s	+07°24'20.1"	6.55	+27.54	+11.30
Rigel	05 ^h 14 ^m 32.22 ^s	-08°12'16.6"	3.78	+1.31	+0.50

Utilizando as equações que você deduziu nos itens anteriores, calcule o tempo de trânsito Δt (em anos) que cada uma das estrelas levaria para alcançar a interseção geométrica de suas trajetórias projetadas. Com base na sua condição de simultaneidade do item (f), responda e justifique com números: Oguh realmente testemunhará a colisão desses astros ou foi apenas um erro de interpretação?

Dica: atente-se à notação e equações dos itens anteriores

Solução:

- (a) Na Astronomia de Posição, definimos a Declinação (δ) como o ângulo medido a partir do plano equatorial (plano xy) em direção aos polos, e a Ascensão Reta (α) como o ângulo azimutal medido no plano do equador. Considerando a esfera celeste com raio unitário ($R = 1$), as projeções nos eixos cartesianos são:

- A componente z é a projeção vertical: $z = R \sin \delta = \sin \delta$.
- A projeção no plano xy é $R \cos \delta = \cos \delta$. Decompondo-a nos eixos x e y :

$$x = (\cos \delta) \cos \alpha$$

$$y = (\cos \delta) \sin \alpha$$

Portanto, o vetor posição \vec{r} é:

$$\vec{r} = (\cos \delta \cos \alpha) \hat{i} + (\cos \delta \sin \alpha) \hat{j} + (\sin \delta) \hat{k}$$

- (b) **Separação Angular entre os Astros**

I. Produto Escalar:

O produto escalar entre dois vetores unitários fornece diretamente o cosseno do ângulo entre eles:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos \theta = \cos \theta$$

II. Produto Vetorial: O vetor $\vec{C} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ pode ser calculado através do determinante da matriz:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \hat{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \hat{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \hat{k}$$

Este vetor resultante é perpendicular ao plano que contém as duas estrelas e a origem, respeitando a regra da mão direita. Seu módulo é $|\vec{C}| = \sin \theta$ (para vetores unitários).

Como a separação angular é definida como o menor ângulo entre as duas estrelas, ela será sempre menor ou igual a 180° . A função trigonométrica que não apresenta ambiguidade nos dois primeiros quadrantes é o cosseno. Por isso, utilizaremos o produto escalar para determinar θ :

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 + \cos \delta_1 \sin \alpha_1 \cos \delta_2 \sin \alpha_2 + \sin \delta_1 \sin \delta_2$$

Fatorando $\cos \delta_1 \cos \delta_2$ e aplicando a identidade $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$:

$$\cos \theta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\theta = \arccos [\sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

- (c) Como o raio da esfera é constante ($R = 1 \implies \dot{R} = 0$), o vetor velocidade tangencial instantâneo é puramente a derivada temporal do vetor posição: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Aplicando a Regra da Cadeia e considerando as taxas de variação $\dot{\alpha} = \mu_\alpha$ e $\dot{\delta} = \mu_\delta$:

- $v_x = \frac{d}{dt}(\cos \delta \cos \alpha) = -\sin \delta \dot{\delta} \cos \alpha - \cos \delta \sin \alpha \dot{\alpha}$
- $v_y = \frac{d}{dt}(\cos \delta \sin \alpha) = -\sin \delta \dot{\delta} \sin \alpha + \cos \delta \cos \alpha \dot{\alpha}$
- $v_z = \frac{d}{dt}(\sin \delta) = \cos \delta \dot{\delta}$

Substituindo $\dot{\alpha}$ e $\dot{\delta}$:

$$\vec{v} = (-\mu_\alpha \cos \delta \sin \alpha - \mu_\delta \sin \delta \cos \alpha)\hat{i} + (\mu_\alpha \cos \delta \cos \alpha - \mu_\delta \sin \delta \sin \alpha)\hat{j} + (\mu_\delta \cos \delta)\hat{k}$$

- (d) A trajetória de cada estrela é um círculo máximo, contido em um plano que passa pela origem. Tanto o vetor posição \vec{r} (que define um ponto no plano) quanto o vetor velocidade \vec{v} (tangente à trajetória no plano) pertencem a este plano orbital.

O vetor normal \vec{N} , por definição, é ortogonal a qualquer vetor contido no plano. Portanto, ele é obtido pelo produto vetorial entre a posição e a velocidade:

$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \vec{N}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

- (e) Os pontos de interseção das trajetórias pertencem simultaneamente ao plano orbital 1 e ao plano orbital 2. A reta de interseção entre dois planos que passam pela origem possui a direção do produto vetorial de suas normais:

$$\vec{P}_{dir} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$$

Como estamos trabalhando na Esfera Celeste, que é definida geometricamente como uma esfera de raio unitário ($R = 1$), os vetores posição dos pontos de cruzamento \vec{P}_{cruz} devem ter módulo igual a 1. O vetor \vec{P}_{dir} calculado acima não é necessariamente unitário. Portanto, devemos normalizá-lo:

$$\vec{P}_{cruz} = \pm \frac{\vec{N}_1 \times \vec{N}_2}{|\vec{N}_1 \times \vec{N}_2|} = (x_c, y_c, z_c)$$

As componentes (x_c, y_c, z_c) destes vetores normalizados correspondem às coordenadas cartesianas dos cruzamentos. É interessante notar que o sinal de mais ou menos foi colocado para indicar o fato de que há 2 interseções entre dois círculos máximos e elas são simétricas na esfera celeste.

Para enxergar a simetria, veja que a interseção de dois planos que passam pela origem $(0,0,0)$ é uma reta que também passa pela origem. Essa reta perfura a superfície da esfera em dois pontos. Por estarem alinhados com o centro, esses pontos são diametralmente opostos, justificando o sinal \pm na solução: se o vetor \vec{P} satisfaz o cruzamento, o vetor $-\vec{P}$ também satisfaz.

- (f) Para que ocorra um encontro no mesmo instante, os tempos de trânsito até o ponto de encontro futuro devem ser idênticos.

I. Seleção do Ponto Correto (Critério de Aproximação): No item anterior, encontramos dois pontos simétricos $(\pm \vec{P}_{cruz})$. Devemos selecionar o ponto para o qual as estrelas estão convergindo. Para demonstrar qual é o ponto correto, impomos a condição física de aproximação: a distância entre a estrela e o ponto num instante futuro infinitesimal $(\vec{r} + \vec{v}\Delta t)$ deve ser menor que a distância atual (\vec{r}) :

$$|(\vec{r} - \vec{P}_{cruz}) + \vec{v}\Delta t|^2 < |\vec{r} - \vec{P}_{cruz}|^2$$

Expandindo o produto notável vetorial $(|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2)$:

$$|\vec{r} - \vec{P}_{cruz}|^2 + 2(\vec{r} - \vec{P}_{cruz}) \cdot (\vec{v}\Delta t) + |\vec{v}\Delta t|^2 < |\vec{r} - \vec{P}_{cruz}|^2$$

Cancelando o termo $|\vec{r} - \vec{P}_{cruz}|^2$ dos dois lados e lembrando que $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$:

$$-2(\vec{P}_{cruz} \cdot \vec{v})\Delta t + |\vec{v}|^2(\Delta t)^2 < 0$$

$$2(\vec{P}_{cruz} \cdot \vec{v})\Delta t > |\vec{v}|^2(\Delta t)^2$$

Dividindo ambos os lados por Δt (que é positivo) e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, o termo de segunda ordem $|\vec{v}|^2\Delta t$ torna-se desprezível (tende a zero), resultando na condição que dá o ponto escolhido:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{P}_{cruz} > 0}$$

II. Tempo de Trânsito (Δt) : Utilizando o ponto \vec{P}_{cruz} devidamente selecionado acima, a distância angular é $\Delta\theta = \arccos(\vec{r}_{inicial} \cdot \vec{P}_{cruz})$. O tempo é a razão entre essa distância angular e o módulo do vetor velocidade tangencial instantâneo $|\vec{v}|$ (encontrado no item c):

$$\Delta t = \frac{\arccos(\vec{r}_{inicial} \cdot \vec{P}_{cruz})}{|\vec{v}|}$$

III. Condição de Simultaneidade: A condição para o encontro visual é $\Delta t_1 = \Delta t_2$, logo:

$$\boxed{\frac{\arccos(\vec{r}_1 \cdot \vec{P}_{cruz})}{|\vec{v}_1|} = \frac{\arccos(\vec{r}_2 \cdot \vec{P}_{cruz})}{|\vec{v}_2|}}$$

- (g) Para avaliar a possibilidade da colisão, começamos determinando o módulo da velocidade tangencial instantânea $|\vec{v}|$ de cada estrela a partir das componentes (v_x, v_y, v_z) deduzidas no item (c). O quadrado do módulo é dado por $|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Ao elevarmos essas componentes ao quadrado e somá-las, os termos cruzados $(2\mu_\alpha\mu_\delta \cos \delta \sin \delta \sin \alpha \cos \alpha)$ possuem sinais opostos e se cancelam. Agrupando os termos restantes, temos:

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= (\mu_\alpha \cos \delta)^2 \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1 + (\mu_\delta \sin \delta)^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_1 \\ &= (\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2 \sin^2 \delta \end{aligned}$$

Somando agora o componente $v_z^2 = \mu_\delta^2 \cos^2 \delta$:

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= (\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2 \sin^2 \delta + \mu_\delta^2 \cos^2 \delta \\ |\vec{v}|^2 &= (\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2 \underbrace{(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)}_1 \end{aligned}$$

Aplicando a identidade trigonométrica fundamental demonstrada acima, a expressão simplifica-se drasticamente para a identidade:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2}$$

Como os catálogos estelares já fornecem o termo do movimento próprio em ascensão reta previamente compensado pelo fator $\cos \delta$, podemos utilizar os valores da tabela de forma direta.

Substituindo os dados numéricos, encontramos para Betelgeuse e Rigel respectivamente:

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{(27.54)^2 + (11.30)^2} = \sqrt{758.45 + 127.69} \approx 29.77 \text{ mas/ano}$$

$$|\vec{v}_R| = \sqrt{(1.31)^2 + (0.50)^2} = \sqrt{1.71 + 0.25} \approx 1.40 \text{ mas/ano}$$

Em seguida, precisamos determinar a separação angular θ atual entre os astros. Para usar a equação deduzida no item (b), primeiro convertemos as coordenadas equatoriais da tabela (dadas em horas e graus sexagesimais) para graus decimais. Isso nos fornece $\alpha_B \approx 88.79^\circ$ e $\delta_B \approx 7.41^\circ$ para Betelgeuse, e $\alpha_R \approx 78.63^\circ$ e $\delta_R \approx -8.20^\circ$ para Rigel. Aplicando esses valores na fórmula do produto escalar:

$$\cos \theta = \sin(7.41^\circ) \sin(-8.20^\circ) + \cos(7.41^\circ) \cos(-8.20^\circ) \cos(88.79^\circ - 78.63^\circ)$$

$$\cos \theta \approx (0.1289)(-0.1427) + (0.9917)(0.9898)(0.9843) \approx -0.0184 + 0.9662 = 0.9478$$

Isso resulta em uma separação angular $\theta = \arccos(0.9478) \approx 18.6^\circ$. Para mantermos a consistência dimensional com as velocidades do catálogo, convertamos esse ângulo para miliarcosegundos (multiplicando por 3600×1000), obtendo uma distância angular total de $\theta \approx 66.960.000 \text{ mas}$.

Por fim, avaliamos a condição de simultaneidade do item (f): $\Delta t_B = \Delta t_R \implies \frac{\Delta \theta_B}{|\vec{v}_B|} = \frac{\Delta \theta_R}{|\vec{v}_R|}$. Substituindo os módulos calculados, para que o encontro ocorresse, a distância angular percorrida por Betelgeuse deveria ser aproximadamente 21,3 vezes maior que a de Rigel ($\Delta \theta_B \approx 21,3 \Delta \theta_R$).

Pela desigualdade triangular na geometria esférica, a soma das distâncias percorridas até o ponto de encontro deve ser, no mínimo, a separação inicial entre elas: $\Delta \theta_B + \Delta \theta_R \geq \theta_{ini}$. Substituindo a proporção, teríamos $22,3 \Delta \theta_R \geq 18,6^\circ$, o que exige que Rigel percorra pelo menos $0,83^\circ$ (cerca de 3.000.000 mas). Com sua velocidade de apenas 1,40 mas/ano, esse trajeto mínimo otimista já exigiria mais de 2,1 milhões de anos.

Fica evidente com esta análise que a condição matemática de simultaneidade falha drasticamente. Mais do que isso, a própria ordem de grandeza do tempo calculado torna o evento fisicamente impossível. Sendo Betelgeuse e Rigel estrelas massivas nos estágios finais de sua evolução (Betelgeuse, por exemplo, explodirá como supernova em menos de 100 mil anos), elas deixarão de existir milhões de anos antes de sequer se aproximarem do ponto de cruzamento geométrico. Conclui-se que o astrônomo cometeu um erro de interpretação astrofísica e não testemunhará colisão alguma.

5. **Tira-Teima** Mais uma disputa lendária se inicia entre Bibucha e Bibrasil. Após uma sequência de vitórias constrangedoras, Bibrasil parece imparável, para o desespero de seu rival. Determinado a virar o jogo, Bibucha propõe mais um desafio: uma batalha de conhecimentos sobre o céu.

Parte I: Reconhecimento

Para provar sua superioridade, Bibucha decide começar exibindo seus impressionantes conhecimentos de estrelas, objetos, pontos e linhas.

- Nas **Cartas 1 e 2**, identifique com um X os polos visíveis: polo celeste, polo eclíptico, polo galáctico e polo supergaláctico. Trace o equador celeste, a eclíptica, o equador galáctico e o equador supergaláctico.
- Nas **Cartas 1 e 2**, identifique todos os objetos do Catálogo Messier que estejam visíveis. Cada objeto deve ser indicado na carta com um círculo na sua posição aproximada, acompanhado de sua designação Messier. Identifique também a posição das duas Nuvens de Magalhães.
- Na **Carta 3**, identifique todas as estrelas numeradas indicadas na **Tabela 1** utilizando setas apontando para cada uma delas, e indique-as pelo número correspondente da tabela. Além disso, esboce sobre a carta os asterismos de todas as constelações presentes.

Observação: Se necessário, utilize mais de uma cópia da carta para tornar suas marcações mais claras.

Parte II: Orientação

Chega agora a vez de Bibrasil demonstrar por que suas vitórias recentes não são mero acaso. Convicto de que conhece o céu em um nível quase absurdo de detalhe, ele decide realizar uma façanha: reconstruir a esfera celeste apenas a partir de sua memória das posições relativas entre estrelas e constelações. Para evitar qualquer ajuda externa, Bibrasil se tranca em um galpão completamente fechado, sem qualquer acesso ao exterior.

Bibrasil encontra-se na latitude $\phi = 35^\circ$ N e possui um relógio que marca o tempo solar verdadeiro para sua longitude. Sabe-se que a data é 21 de junho. A seguir, encontram-se duas cartas celestes em projeção equidistante: a **Carta 4** mostra apenas os limites oficiais das constelações e o equador celeste no céu de Bibrasil, enquanto a **Carta 5** está completamente em branco.

- Utilizando apenas os limites apresentados na carta, identifique e escreva diretamente na **Carta 4** os nomes de todas as constelações visíveis no céu de Bibrasil nesse instante.
- Determine qual constelação se encontra no zênite de Bibrasil quando seu relógio marcar 10:00.
- Tomando a orientação da carta com o norte apontado verticalmente para cima, indique na **Carta 5** a posição da estrela Praecipua - 46 Leonis Minoris ($\delta = 34^\circ 13'$, $\alpha = 10^h 53^m$) quando o relógio de Bibrasil marcar 16:00. Em seguida, (i) indique onde essa estrela estava cinco meses antes no mesmo horário e local e (ii) onde ela estaria na mesma data e horário caso o observador estivesse na latitude $\phi = 35^\circ$ S.

Parte III: Determinação Orbital

Inconformado com as impressionantes demonstrações de memória celeste de Bibrasil, Bibucha decide elevar ainda mais o nível da disputa. Para tentar desempatar a competição, ele anuncia um desafio particularmente ambicioso: determinar todos os parâmetros orbitais do cometa Halley utilizando o menor número possível de observações.

Para isso, Bibucha realiza uma série de medições das posições aparentes do cometa ao longo do tempo. Na **Carta 6** encontram-se indicadas essas posições observadas, numeradas de acordo com

a ordem cronológica em que foram registradas. As observações foram realizadas em intervalos de cinco anos, sendo a primeira delas no ano de 2026. A carta está representada em projeção estereográfica. Para maior clareza na representação, a carta contém apenas as observações pares e é seguida por uma tabela com as medidas obtidas.

Os efeitos de paralaxe devidos à órbita da Terra devem ser desconsiderados. Afinal, em busca da máxima precisão possível, Bibucha construiu um equipamento absolutamente indestrutível que lhe permitiu realizar todas as observações diretamente do centro do Sol.

- (g) Utilizando as posições indicadas na carta, determine graficamente tanto a inclinação orbital i da órbita do cometa em relação à eclíptica quanto a longitude eclíptica do nodo ascendente Ω dessa órbita.
- (h) Considerando as medições realizadas por Bibucha, determine qual é o número mínimo de observações necessário para que uma órbita kepleriana seja completamente determinada.
- (i) Seja esse número mínimo de observações igual a n . Utilizando n observações de sua escolha indicadas na carta, determine os valores do semieixo maior a , da excentricidade e , da longitude do periélio ω e da anomalia verdadeira ν_0 correspondente à observação 2.

Solução:

- (a) Conforme indicado na carta abaixo.
- (b) Conforme indicado na carta abaixo.
- (c) Conforme indicado na carta abaixo.
- (d) Conforme indicado na carta abaixo.
- (e) Usando que $\alpha_{\odot} = 6^{\text{h}}$, já que estamos no solstício de inverno, obtemos o ângulo horário do Sol às 10:00:

$$H_{\odot} = 10^{\text{h}} - 12^{\text{h}} = -2^{\text{h}}.$$

Logo, o tempo sideral local é

$$TSL = \alpha_{\odot} + H_{\odot} = 6^{\text{h}} - 2^{\text{h}} = 4^{\text{h}}.$$

Assim, o zênite possui ascensão reta

$$\alpha_0 = 4^{\text{h}}$$

e declinação

$$\delta_0 = +35^{\circ}.$$

Portanto, a constelação que contém esse ponto da esfera celeste é a constelação de **Perseu**.

- (f) Analogamente ao item anterior, podemos calcular o ângulo horário da estrela no instante considerado:

$$H = H_{\odot} + \alpha_{\odot} - \alpha = -53^{\text{m}}.$$

Como $\delta \approx 35^{\circ}$, a estrela estará pouco antes de sua passagem meridiana.

Para confirmar, utilizando o triângulo esférico fundamental e a lei dos cossenos, obtemos

Nº	Nome Comum	Designação
1	Sirius	α CMa
2	Canopus	α Car
3	Arcturus	α Boo
4	Vega	α Lyr
5	Capella	α Aur
6	Rigel	β Ori
7	Procyon	α CMi
8	Achernar	α Eri
9	Betelgeuse	α Ori
10	Hadar	β Cen
11	Altair	α Aql
12	Aldebaran	α Tau
13	Spica	α Vir
14	Antares	α Sco
15	Pollux	β Gem
16	Fomalhaut	α PsA
17	Deneb	α Cyg
18	Mimosa	β Cru
19	Acrux	α Cru
20	Regulus	α Leo
21	Shaula	λ Sco
22	Sargas	θ Sco
23	Menkent	θ Cen
24	Avior	ε Car
25	Miaplacidus	β Car
26	Alnair	α Gru
27	Nunki	σ Sgr
28	Peacock	α Pav
29	Mirfak	α Per
30	Mirzam	β CMa
31	Alhena	γ Gem
32	Hamal	α Ari
33	Diphda	β Cet
34	Kochab	β UMi
35	Alpheratz	α And
36	Menkalinan	β Aur
37	Wezen	δ CMa
38	Adhara	ε CMa
39	Gacrux	γ Cru
40	Atria	α TrA
41	Unurgunite	σ CMa
42	Alsiaukat	31 Lyn
43	Circitores	ε UMi
44	Edasich	ι Dra
45	Alrakis	μ Dra

Nº	Nome Comum	Designação
46	Lesath	ν Sco
47	Kaus Media	δ Sgr
48	Kaus Borealis	λ Sgr
49	Rasalhague	α Oph
50	Rasalgethi	α Her
51	Zubenelgenubi	α Lib
52	Zubeneschamali	β Lib
53	Izar	ε Boo
54	Caph	β Cas
55	Schedar	α Cas
56	Ruchbah	δ Cas
57	Alderamin	α Cep
58	Tarazed	γ Aql
59	Alshain	β Aql
60	Kornephoros	β Her
61	Gienah	γ Crv
62	Sadalmelik	α Aqr
63	Sadalsuud	β Aqr
64	Markab	α Peg
65	Scheat	β Peg
66	Algenib	γ Peg
67	Enif	ε Peg
68	Algol	β Per
69	Almach	γ And
70	Denebola	β Leo
71	Furud	ζ CMa
72	Naos	ζ Pup
73	Phact	α Col
74	Wazn	β Col
75	Alsephina	δ Vel
76	Suhail	λ Vel
77	Baten Kaitos	ζ Cet
78	Nihal	β Lep
79	Arneb	α Lep
80	Mintaka	δ Ori
81	Tabit	π^3 Ori
82	Rotanev	β Del
83	Sualocin	α Del
84	Terebellum	ω Sgr
85	Kurahh	ξ Cep
86	Alula Borealis	ν UMa
87	Alula Australis	ξ UMa
88	Xamidimura	μ^1 Sco
89	Funi	ζ Ara
90	Sika	α Mus

Tabela 1

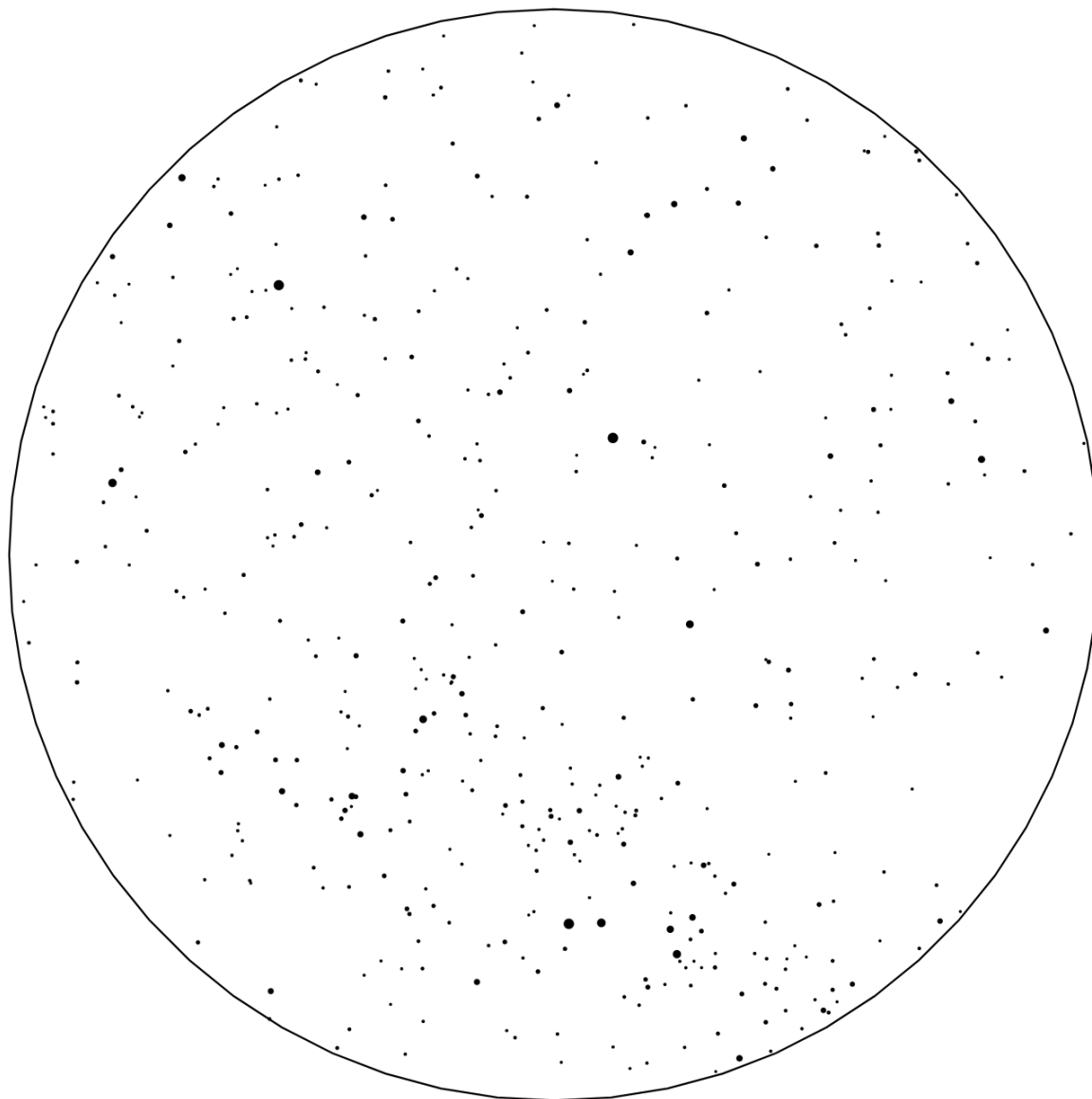


Figura 8: Carta 1

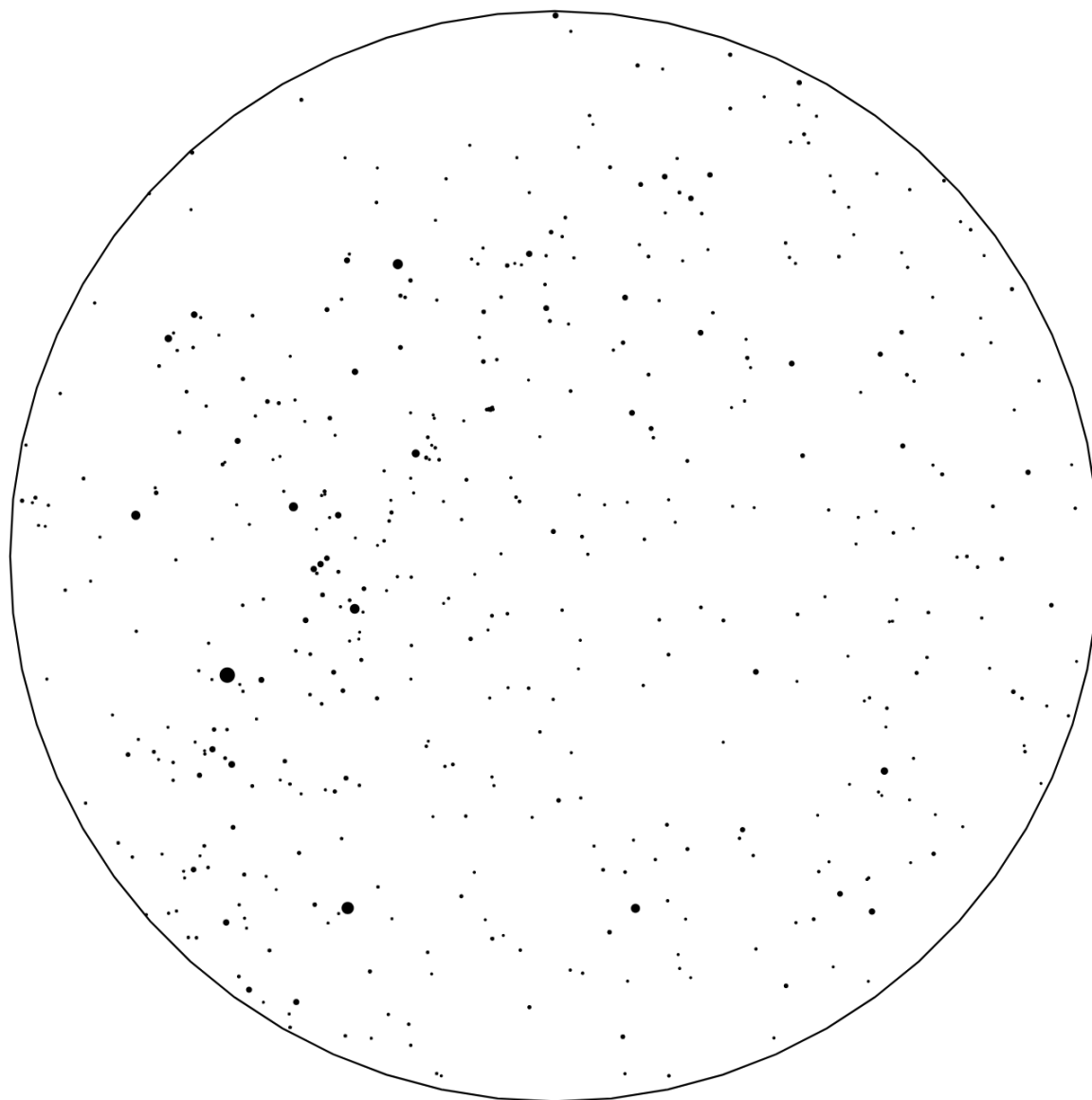


Figura 9: Carta 2

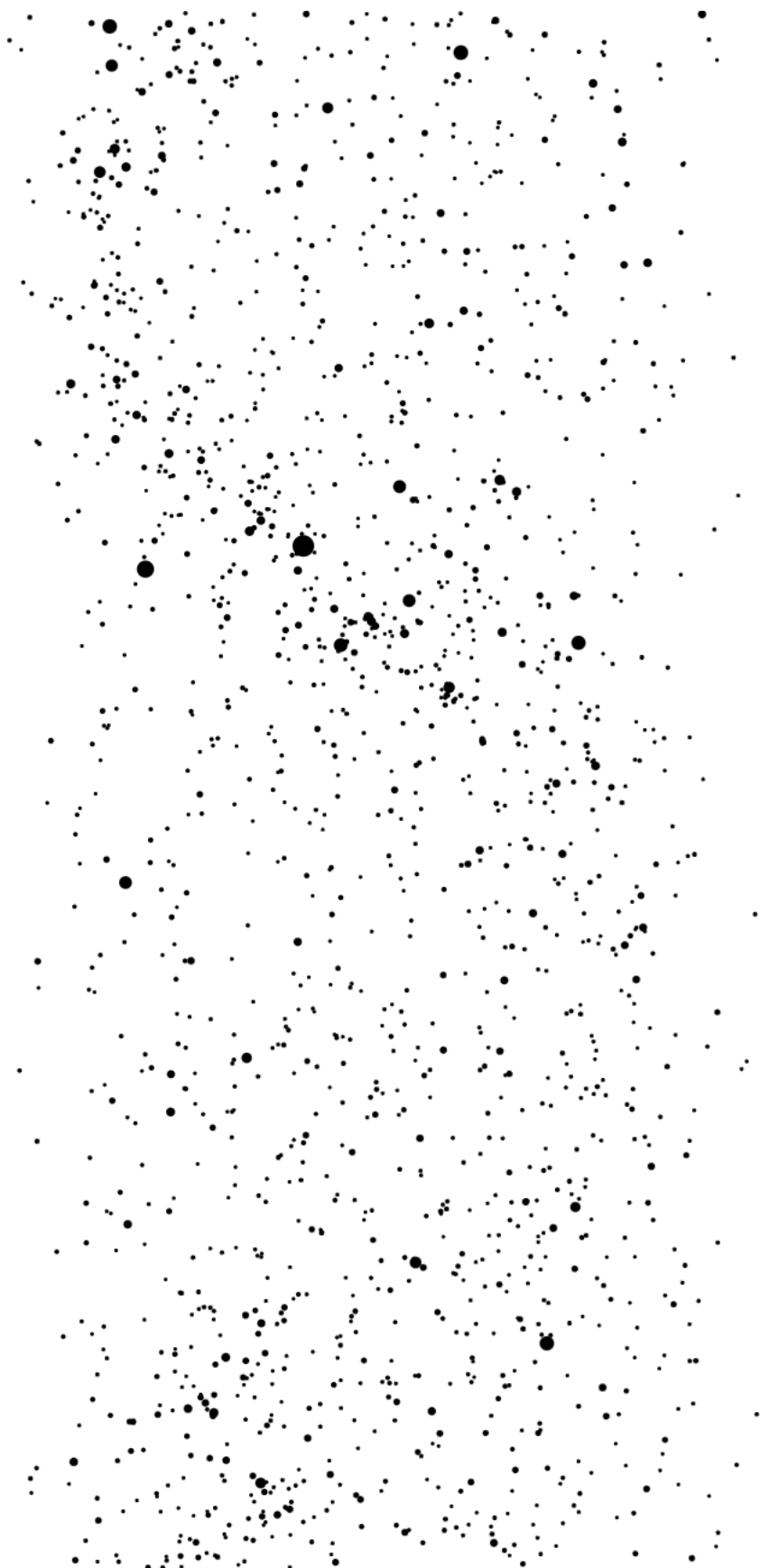


Figura 10: Carta 3

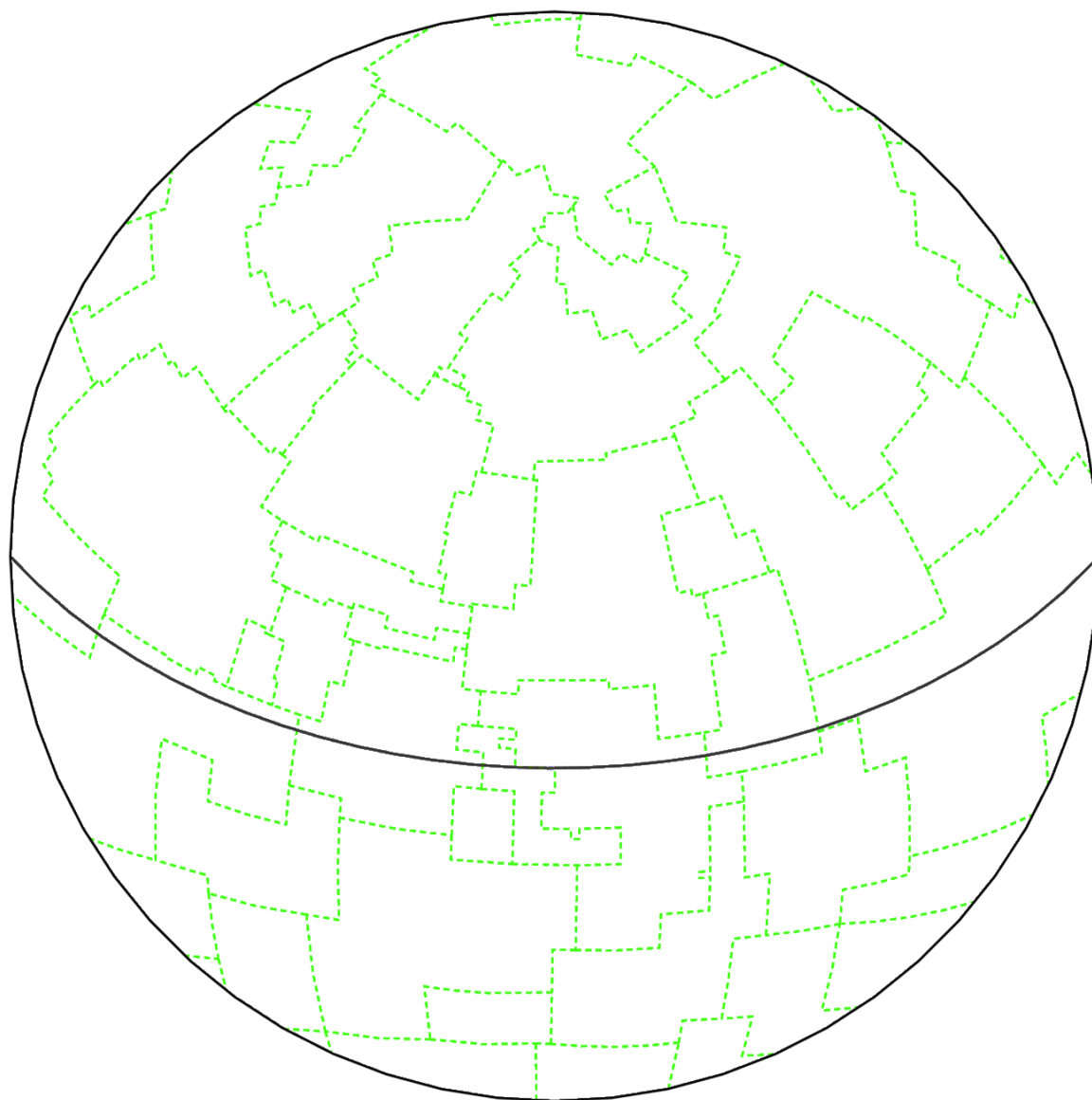


Figura 11: Carta 4

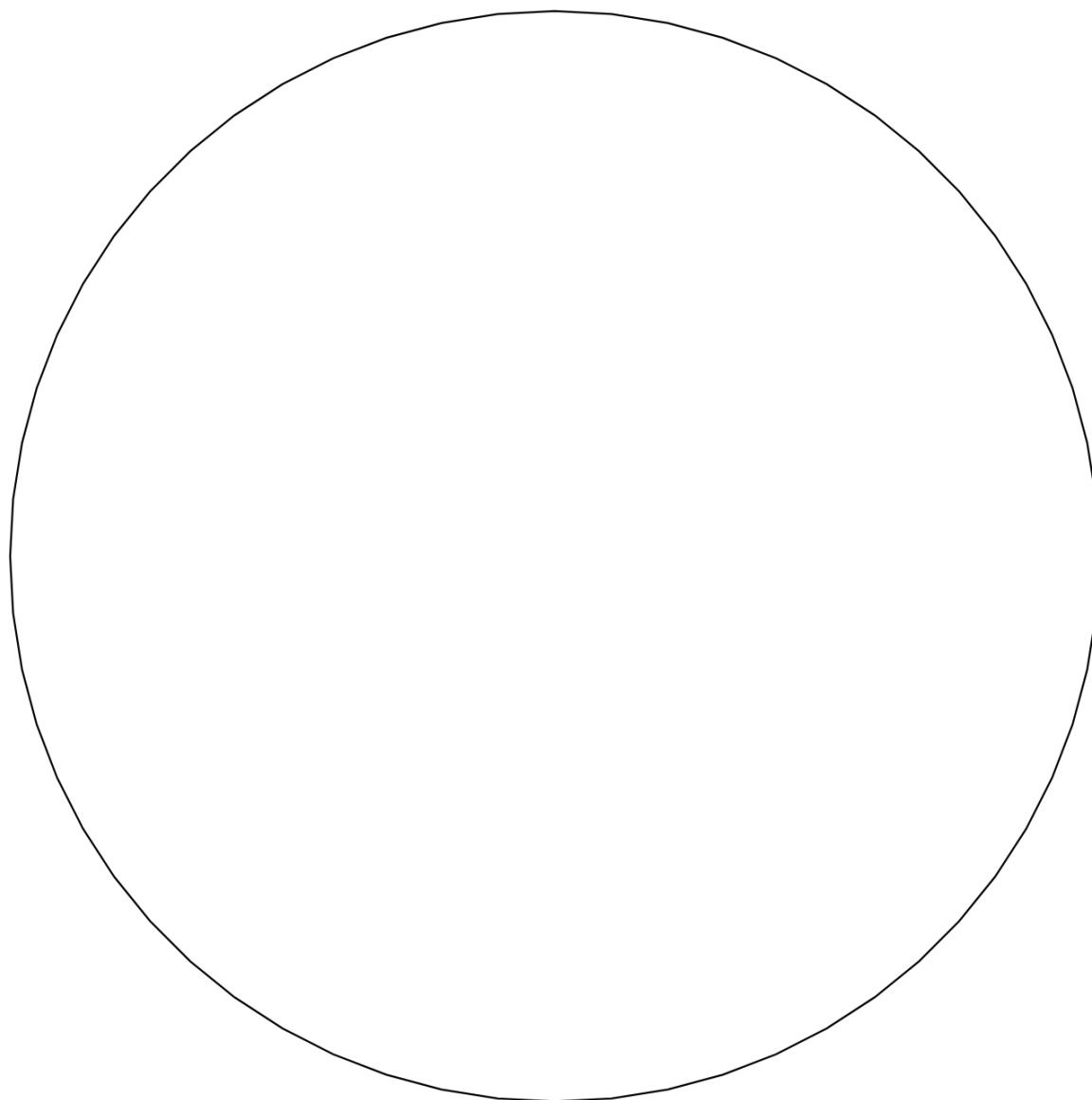
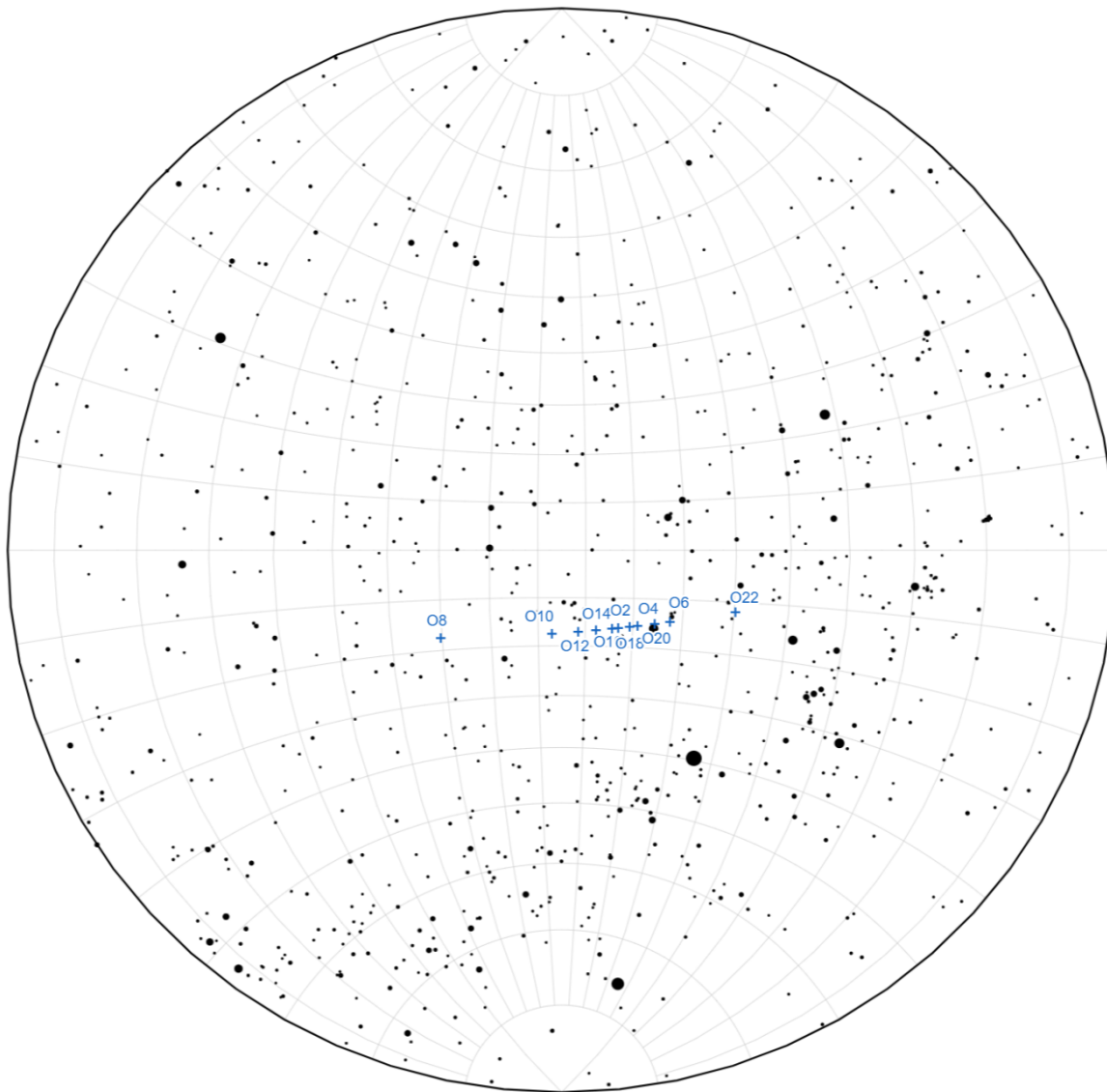


Figura 12: Carta 5



Observação	Ano	l ($^{\circ}$)	λ ($^{\circ}$)
2	2031	-16,19	123,1
4	2041	-15,63	119,1
6	2051	-14,54	112,5
8	2061	-17,58	160,2
10	2071	-17,53	137,1
12	2081	-17,11	131,5
14	2091	-16,74	127,7
16	2101	-16,35	124,4
18	2111	-15,87	120,7
20	2121	-15,08	115,6
22	2131	-11,89	99,78

Figura 13: Carta 6 e observações do cometa Halley

$$\cot A = \sin \phi \cot H - \tan \delta \cos \phi \csc H,$$

de onde

$$A \approx 89.4^\circ.$$

Além disso,

$$\cos z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H,$$

resultando em

$$z \approx 10.9^\circ.$$

Assim, a posição obtida coincide com a posição marcada na carta utilizando as propriedades da projeção equidistante.

Para a latitude -35° , a estrela estaria novamente próxima do meridiano, porém muito próxima do horizonte. Utilizando novamente as relações anteriores obtemos

$$z \approx 70.3^\circ, A \approx 116.1$$

posição também indicada na carta.

Para cinco meses antes, devemos calcular a ascensão reta do Sol. Usando o triângulo esférico correspondente:

$$\tan \alpha = \tan \lambda \cos \varepsilon.$$

Como voltamos cinco meses antes do solstício de junho, temos aproximadamente $\lambda = 300^\circ$. Assim,

$$\alpha \approx 302.2^\circ.$$

Logo,

$$TSL \approx 0^h 9^m \Rightarrow H \approx -10^h 44^m.$$

Aplicando novamente as fórmulas anteriores, obtemos

$$A \approx 16.5^\circ, \quad z \approx 108.6^\circ.$$

Portanto, a estrela encontra-se abaixo do horizonte, o que não impede sua posição geométrica de ser representada fora da carta, conforme indicado abaixo.

- (g) Utilizando a propriedade de que círculos máximos na esfera projetam-se como circunferências na projeção estereográfica, podemos ajustar manualmente uma circunferência que se adapte ao conjunto de pontos observados, representando assim o plano orbital do cometa.

Traçando também a circunferência correspondente à eclíptica e marcando suas interseções com a circunferência orbital, identificamos os nodos da órbita. Analisando o sentido do movimento indicado pelos pontos observados, conclui-se que o ponto marcado como X corresponde ao nodo ascendente.

Observando o *grid* da carta, obtemos então a longitude do nodo ascendente

$$\Omega \approx 60^\circ.$$

Além disso, como a projeção estereográfica é conforme, isto é, preserva ângulos entre curvas, podemos traçar as tangentes às duas circunferências no ponto do nodo e medir o ângulo entre elas, que corresponde ao ângulo entre os planos orbital e da eclíptica.

A medida obtida é aproximadamente 18° . Entretanto, como a órbita do cometa é retrógrada, a inclinação orbital é

$$i = 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ.$$

- (h) Em essência, o que pode ser medido a partir das observações são as variações angulares da posição do corpo ao longo do tempo. Para formalizar essa ideia, utilizamos as relações entre a anomalia excêntrica E e a anomalia verdadeira ν :

$$E = \cos^{-1} \left(\frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right),$$

e

$$\sin E = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu}.$$

Substituindo essas relações na equação de Kepler,

$$M = E - e \sin E,$$

e lembrando que

$$M = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} t,$$

obtemos

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}} t = \cos^{-1} \left(\frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) - e \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu},$$

onde t é o tempo decorrido desde o periélio.

Aplicando agora um operador Δ para considerar intervalos entre observações, temos

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}} \Delta t = \Delta \left[\cos^{-1} \left(\frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) \right] - e \sqrt{1 - e^2} \Delta \left(\frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu} \right) = f(e, \nu, \Delta \nu).$$

Tomando dois intervalos de tempo e considerando que $\Delta t_1 = 2\Delta t_2$, obtemos

$$f(e, \nu_0, \Delta \nu_1) = 2 \cdot f(e, \nu_0, \Delta \nu_2).$$

Essa relação fornece uma equação envolvendo duas incógnitas, ν_0 e e . Portanto, são necessárias duas equações independentes para determinar completamente o sistema. Isso implica três intervalos angulares distintos e, conseqüentemente, quatro observações.

Logo, o número mínimo de observações necessário é

$$n = 4.$$

Observação: Somente esse argumento mais simples já seria o suficiente para pontuação completa, contudo vale a pena formalizar um pouco mais a prova. Como a equação de Kepler

$$M = E - e \sin E$$

satisfaz

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E > 0,$$

existe uma correspondência unívoca entre M e E para $0 \leq e < 1$. Além disso, no intervalo considerado $0 < \nu < \pi$, a relação $E(\nu, e)$ também é monotônica.

Assim, para um valor fixo de e , cada anomalia verdadeira determina unicamente o instante de observação. Consequentemente, dois valores distintos de e produzem sequências temporais incompatíveis com o conjunto de observações.

Portanto, o sistema de equações obtido a partir dos intervalos observados admite no máximo uma solução física, garantindo a unicidade da determinação orbital.

- (i) Utilizando as quatro primeiras observações, podemos utilizar a tabela para obtermos os dados de longitude e latitude eclípticas.

Organizamos os dados na seguinte tabela:

Observação	Ano	l ($^\circ$)	λ ($^\circ$)	$\Delta\nu$ ($^\circ$) (em relação à segunda observação)
2	2031	-16,19	123,1	-
4	2041	-15,63	119,1	de 8,8
6	2051	-14,54	112,5	10,20
8	2061	-17,58	160,2	324,4

onde os incrementos de anomalia verdadeira são obtidos a partir da separação angular entre os pontos na esfera celeste. Para duas posições quaisquer, temos

$$\cos \Delta\nu = \sin l_1 \sin l_2 + \cos l_1 \cos l_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Tomando sempre a primeira observação como referência, determinamos os valores de $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_2$ e $\Delta\nu_3$.

Como as observações foram realizadas em intervalos iguais de tempo, podemos utilizar a relação desenvolvida no item anterior para obter o sistema

$$\begin{cases} f(e, \nu_0, \Delta\nu_1) = 2 f(e, \nu_0, \Delta\nu_2) \\ f(e, \nu_0, \Delta\nu_1) = 3 f(e, \nu_0, \Delta\nu_3) \end{cases}$$

Resolvendo numericamente esse sistema com ferramentas apropriadas, obtemos

$$e = 0.97, \quad \nu_0 = 182.5^\circ.$$

Retornando então à equação original,

$$f(e, \nu_0, 0) = \sqrt{\frac{GM}{a^3}},$$

podemos determinar o semieixo maior da órbita. Substituindo os valores encontrados, obtemos

$$a = 17.9 \text{ UA}.$$

Por fim, para determinar a longitude do periélio ω , utilizamos a relação geométrica entre a posição do objeto na esfera celeste e os elementos orbitais.

Sabemos que a latitude eclíptica l satisfaz

$$\sin l = \sin i \sin(\nu + \omega),$$

onde i é a inclinação orbital já determinada anteriormente.

Aplicando essa relação à observação 2, obtemos

$$\sin l_2 = \sin i \sin(\nu_0 + \omega) \Rightarrow \omega \approx 112.5^\circ.$$