



LISTA 2
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

Instruções Gerais

1. A lista é composta por 5 problemas não avaliativos
2. Pratique escrever soluções **legíveis**.
3. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

1. Câmera CCD A câmera CCD é um dispositivo que transforma a luz recebida em sinal elétrico. Quando um fóton atinge o sensor, ele pode liberar um elétron no material, e esse elétron fica armazenado no pixel correspondente.

Durante o tempo de exposição, cada pixel acumula elétrons de acordo com a quantidade de luz que recebe. Ao final desse tempo, mede-se a carga acumulada em cada pixel, e esses valores são usados para formar a imagem.

Cada pixel possui uma capacidade máxima de carga, denotada por q_{\max} . Quando essa capacidade é atingida, diz-se que o pixel está saturado. Nesse caso, mais fótons incidentes não produzem aumento no sinal registrado.

Acopla-se uma câmera CCD plana a um telescópio, posicionada exatamente no plano onde se formava a imagem final. O CCD é composto por pixels quadrados de lado l , e o sistema permanece perfeitamente focado. Admita que o feixe de luz sofra reflexões nos dois espelhos do telescópio, todas com a mesma eficiência ε ($0 < \varepsilon \leq 1$), isto é, a cada reflexão o fluxo de fótons é multiplicado por um fator ε .

Use e adote:

- Carga de saturação do pixel: $q_{\text{sat}} = 2,8 \times 10^{-11} C$.
 - A menor diferença de carga detectável por um pixel é $\Delta q = 7,8 \times 10^{-15} C$.
 - Diâmetro do telescópio: $D = 15 \text{ cm}$
 - $\varepsilon = 0,9$
 - Razão focal do telescópio: $f/16$
 - Considere que a região iluminada do CCD é circular e tem diâmetro igual a $D_p = 6 \text{ mm}$.
 - Considere que o CCD opera na faixa espectral de comprimento de onda central $\lambda_{H\alpha}$.
 - Eficiência quântica do CCD: $\frac{N_{\text{elétrons capitados}}}{N_{\text{fótons incidentes}}} = 100\%$
- (a) Determine o valor do lado l de cada pixel para que o ângulo subtendido por um único pixel no céu seja igual à resolução angular mínima do telescópio e a área total do CCD em pixels². Considere que o CCD deve conter todo o feixe de luz que emerge do telescópio.
 - (b) A área, em pixels², que o Sol ocupa no CCD, considerando seu diâmetro angular aparente θ_{\odot} e o resultado da escala angular por pixel obtida em a).
 - (c) Calcule a variação de magnitude (Δm) que um feixe de luz sofre ao passar pelo sistema óptico do telescópio.
 - (d) Admita que o fluxo de luz proveniente do Sol é distribuído homogeneamente sobre sua área angular no céu. Determine a magnitude aparente $m_{\text{pix},\odot}$ equivalente ao fluxo recebido em um único pixel da imagem do Sol no CCD.
 - (e) Determine a transmitância máxima T_{\max} de um filtro solar que, quando acoplado ao telescópio, impeça a saturação de qualquer pixel do CCD ao observar o Sol durante 2h.
 - (f) Estime a temperatura do filtro na observação do sol considerando apenas troca de calor com o ambiente por radiação e usando o resultado do item e) e admitindo o equilíbrio térmico. Considere a temperatura ambiente como $T_0 = 25$.
 - (g) Admita agora que o fluxo superficial do Sol, medido em unidades de fluxo por ângulo sólido, varie linearmente com a distância angular ρ até o centro do disco solar, sendo modelado por

$$F(\rho) = F_0 (1 - k\rho),$$

onde $0 \leq \rho \leq \theta_{\odot}/2$, θ_{\odot} é o diâmetro angular aparente do Sol, $F_0 = 2,5 \times 10^7 \text{ W/rad}^2 \text{ m}^2$ e $k = 65 \text{ rad}^{-1}$ é uma constante positiva caracterizando o escurecimento em direção à borda. Determine o número total de níveis distintos de intensidade que serão registrados ao imagear o disco solar durante essa observação de 2h usando o filtro solar do item e) , isto é, quantos valores diferentes de fluxo $F(\rho)$ aparecem nos pixels que compõem a imagem digital feita pelo CCD.

Solução:

- (a) A escala de placa relaciona ângulo no céu e a quantidade de pixels N que corresponde no CCD:

$$p = \frac{l}{f} = \frac{\theta}{N}$$

Logo, um pixel de lado l subtende o ângulo

$$\theta_{\text{pix}} \simeq \frac{l}{f}.$$

Impondo $\theta_{\text{pix}} = \theta_{\text{res}}$, usando a razão focal $f/16$ e usando o comprimento de onda do visível $\lambda_{H\alpha}$:

$$l = f \theta_{\text{res}} = (16 \times D)(1,22 \times \frac{\lambda}{D}) = 19,52 \times \lambda = 12,8 \mu m.$$

$$\boxed{l = 12,8 \mu m}$$

Como o CCD deve conter todo o feixe, temos o número de pixels do diâmetro:

$$N = \frac{D_p}{l} = 469 \text{ pixels}$$

Área total em pixels²:

$$A_{\text{CCD}} = \pi \left(\frac{N}{2} \right)^2 \approx 1,73 \times 10^5 \text{ pixels}^2.$$

$$\boxed{A_{\text{CCD}} \approx 1,73 \times 10^5 \text{ pixels}^2}$$

- (b) Como $\theta_{\text{pix}} = \theta_{\text{res}}$, o diâmetro do Sol em pixels é

$$n_{\odot} = \frac{\theta_{\odot}}{\theta_{\text{res}}} = \frac{32'}{1,22 \times \frac{656}{15} \times 10^{-7} \text{ rad}} = \frac{32'}{183'} \times 10^3 = 1740 \text{ pixels}.$$

A imagem é um disco:

$$A_{\odot} \simeq \pi \left(\frac{n_{\odot}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\theta_{\odot}}{\theta_{\text{res}}} \right)^2 \approx 2,38 \times 10^6 \text{ pixels}^2.$$

$$\boxed{A_{\odot} \approx 2,38 \times 10^6 \text{ pixels}^2}$$

Perceba que o sol não vai estar inteiro no CCD, logo temos:

$$\boxed{A'_{\odot} = A_{\text{CCD}} = 1,73 \times 10^5 \text{ pixels}^2}$$

- (c) Com $N = 2$ reflexões:

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_e}{F_i} \right) = -5 \log_{10} \left(\epsilon \frac{D}{D_p} \right).$$

Logo

$$\Delta m = -5 \log_{10} \left(0,90 \frac{150}{6} \right) \approx -6,76.$$

$$\boxed{\Delta m \approx -6,76 \text{ mag}}$$

(d) Fluxo em um pixel (brilho superficial uniforme) incluindo perdas do telescópio:

$$F_{\text{pix}} = F_{\odot} \left(\frac{A_{\text{pix}}}{A_{\odot}} \right) \left(\frac{D}{D_p} \right)^2 \varepsilon^N.$$

Em magnitudes:

$$m_{\text{pix},\odot} = m_{\odot} + \Delta m + 2,5 \log_{10} \left(\frac{A_{\odot}}{A_{\text{pix}}} \right).$$

logo:

$$m_{\text{pix},\odot} = m_{\odot} + \Delta m + 2,5 \log_{10}(A_{\odot}).$$

Numericamente:

$$m_{\text{pix},\odot} \approx (-26,7) + (-6,76) + 2,5 \log_{10}(2,38 \times 10^6) \approx -17,5.$$

$$\boxed{m_{\text{pix},\odot} \approx -22,5}$$

(e) Cada fóton incidente detectado gera um elétron, logo temos para o número de fótons máximo capitados durante a exposição:

$$N = \frac{q_{\text{sat}}}{e}$$

Pelo fluxo incidente temos para A sendo a área do pixel:

$$F' = hf \frac{\Delta N}{\Delta t A} \therefore N = \Delta t \frac{F' A}{hf}$$

Logo para o fluxo que pode incidir no pixel do CCD:

$$\Delta t \frac{F' A}{hf} = \frac{q_{\text{sat}}}{e} \therefore F' = \frac{q_{\text{sat}} hf}{e \Delta t A} = \frac{q_{\text{sat}} hc}{\lambda e \Delta t A} = 4,5 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

Para o fluxo inicial que incide no pixel sem filtro:

$$F_0 = F_{\odot,10pc} \times 10^{\frac{M_{\odot} - m_{\text{pix},\odot}}{2,5}} = 0,266 \text{ W/m}^2$$

Para a transmitância do filtro temos:

$$\boxed{T = \frac{F'}{F_0} = 1,7 \times 10^{-4}}$$

(f) Ao apontar para o Sol, o filtro recebe a irradiância solar na Terra

$$S \approx 1,36 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

Se o filtro tem transmitância T (do item (e)), então a fração não transmitida é $(1 - T)$. No pior caso (tudo que não transmite é absorvido), o fluxo absorvido por unidade de área é

$$\Phi_{\text{abs}} \approx (1 - T) S.$$

Como no item (e) obtivemos $T_{\text{max}} \approx 1,7 \times 10^{-6}$, então $(1 - T) \approx 1$ e

$$\Phi_{\text{abs}} \approx S.$$

Em equilíbrio térmico, com duas faces radiando como corpo negro:

$$\Phi_{\text{abs}} = 2\sigma (T_{\text{eq}}^4 - T_0^4), \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}, \quad T_0 = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}.$$

Logo,

$$T_{\text{eq}} = \left(T_0^4 + \frac{\Phi_{\text{abs}}}{2\sigma} \right)^{1/4} \approx \left((298)^4 + \frac{1,36 \times 10^3}{2(5,67 \times 10^{-8})} \right)^{1/4}.$$

$$T_{\text{eq}} \approx (2,0 \times 10^{10})^{1/4} \approx 3,76 \times 10^2 \text{ K} \approx 376 \text{ K} \approx 103^\circ\text{C}.$$

$$T_{\text{eq}} \approx 3,76 \times 10^2 \text{ K} \approx 103^\circ\text{C}$$

Observação: este é um valor máximo, pois na prática há convecção com o ar e muitos filtros solares reais são majoritariamente reflexivos (logo absorvem bem menos que $(1 - T)$), o que reduz bastante a temperatura.

(g) Temos para a sensibilidade fotométrica do CCD ΔF_{sens} :

$$\Delta F A \Delta t = N h f = N \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc \Delta q}{\lambda e}$$

Para a quantidade de tons distintos mapeado pelo CCD (considerando o escuro da parte de fora do sol):

$$n = \frac{\Delta F_{\odot}}{\Delta F} + 1$$

Ao passar pelo filtro e emergir no CCD temos para a variação de fluxo entre o centro e a borda do sol no CCD:

$$\Delta F_{\odot} = \Delta F_{\odot_0} T \left(\frac{D}{D_p} \right)^2$$

Como $\Delta F_{\odot_0} = F_0 k \frac{\theta_{\odot}}{2}$ temos para a quantidade de diferentes níveis:

$$n = \frac{\lambda e \Delta t A F_0 k \frac{\theta_{\odot}}{2} T \left(\frac{D}{D_p} \right)^2}{hc \Delta q} + 1 = 6,9 \times 10^{13}$$

Como o raio do sol ocupa apenas 1740 pixels no CCD percebe que cada pixel vai ter um nível diferente, Logo temos 235 níveis (já que o sol não aparece todo no CCD)

2. Prisioneiro Espacial Davi estava realizando pesquisas sobre magnitude e luminosidade de estrelas e outros objetos estelares quando, subitamente, um vento extremamente veloz o envolveu. Em um piscar de olhos, ele se viu aprisionado na nave espacial do ET Palansaeg.

O extraterrestre desejava determinar as propriedades físicas de uma estrela distante, bem como a distância necessária para alcançá-la e colonizar seus planetas. Reconhecendo a grande habilidade e o vasto conhecimento de Davi em Astronomia, Palansaeg o sequestrou para que atuasse como seu cientista pessoal.

Utilizando os equipamentos disponíveis na nave, Davi obteve as seguintes informações sobre a estrela:

- A razão entre as luminosidades nas bandas do azul (B) e do visível (V) é $\frac{3}{2}$;
- A estrela emite radiação apenas nessas duas bandas;
- A magnitude aparente na banda do azul é 9 mag;
- O raio da estrela é $1,4 R_{\odot}$;
- O avermelhamento na banda do visível é $A_V = 2,6$ mag.

Além disso, Davi recordava-se da última fórmula que havia estudado: a fórmula de Ballesteros, que relaciona a temperatura efetiva de uma estrela ao seu índice de cor ($B - V$), dada por

$$T = 4600 \left(\frac{1}{0,92(B - V) + 1,7} + \frac{1}{0,92(B - V) + 0,62} \right).$$

Ajude Davi a determinar as propriedades da estrela para que ele consiga sobreviver ao cativeiro do ET Palansaeg.

- (a) Determine o índice de cor ($B - V$) da estrela e a extinção na banda do azul A_B , sabendo que a razão entre o avermelhamento do visível e a extinção é $R = \frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,2$.
- (b) Utilizando a equação de Ballesteros, calcule a temperatura efetiva da estrela e sua luminosidade total.
- (c) Sabendo que a magnitude absoluta na banda do azul e a luminosidade na banda do azul de Vega são, respectivamente, $B_{\text{Vega}} = 0,58 \text{ mag}$ e $L_{B,\text{Vega}} = 3,0 \times 10^{27} \text{ W}$, determine a distância da estrela até a nave.

Solução:

- (a) A extinção pode ser escrita como:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0 = A_B - A_V$$

Dessa expressão e da razão entre avermelhamento e extinção, encontra-se diretamente o avermelhamento no azul:

$$A_B = A_V + \frac{A_V}{3,2}$$

$$\boxed{A_B = 3,4 \text{ mag}}$$

Agora, para o índice de cor da estrelas, deve-se encontrar o índice de cor absoluto a partir da razão entre as luminosidades:

$$(B - V)_0 = -2,5 \log \left(\frac{L_B}{L_V} \right)$$

$$(B - V)_0 = -0,44$$

Substituindo na primeira expressão, encontra-se:

$$\boxed{(B - V) = 0,37 \text{ mag}}$$

- (b) Substituindo o valor encontrado anteriormente na fórmula de Ballesteros, encontra-se:

$$T = 4600 \left(\frac{1}{0,92 \cdot 0,37 + 1,7} + \frac{1}{0,92 \cdot 0,37 + 0,62} \right).$$

$$\boxed{T = 7045 \text{ K}}$$

Substituindo a temperatura na fórmula da luminosidade:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$L \approx 1,7 \cdot 10^{27} \text{ W}$$

- (c) Para encontrar a distância da estrela até a nave, pode-se utilizar a expressão do módulo da distância com a correção pelo avermelhamento:

$$B - B_0 = 5 \log d - 5 + A_B$$

Para isso, faz-se necessário encontrar a magnitude absoluta da estrela na banda do azul, o que pode ser feito comparando-a com Vega:

$$B_0 - B_{Vega} = -2,5 \log \left(\frac{L_B}{L_{B,Vega}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{\frac{3}{5}L}{L_{B,Vega}} \right)$$

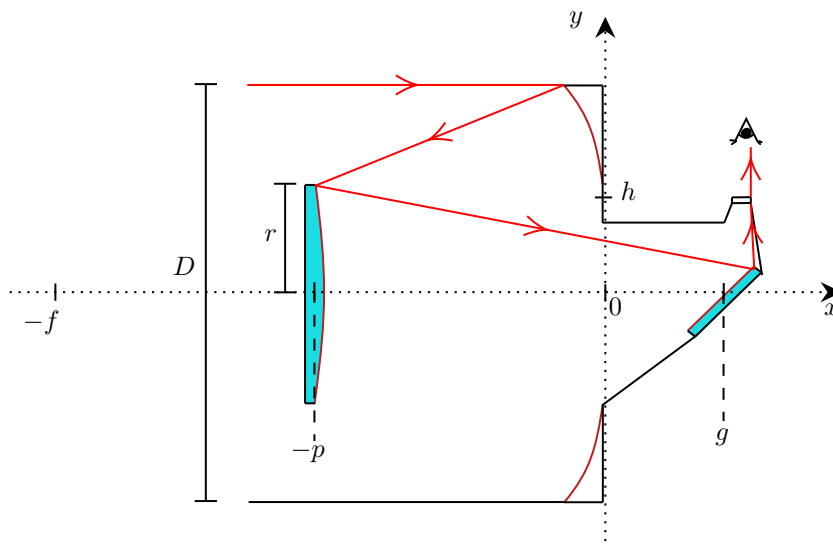
Onde o $\frac{3}{5}$ vem da luminosidade total ser a soma das luminosidades na banda do azul e visível. A expressão anterior resulta em:

$$B_0 \approx 1,8 \text{ mag}$$

Substituindo na expressão da distância:

$$d = 84 \text{ pc}$$

- 3. Telescópio** Esta questão é composta pelas partes A, B e C. A parte B depende dos resultados obtidos na parte A; a parte C é independente da parte B e da parte A. Considere um telescópio Cassegrain cujo espelho primário é parabólico, situado no plano $x = 0$, com distância focal f e diâmetro $D = 15$ cm. O espelho secundário é hiperbólico, com distância entre os focos $2c = 2f$, parâmetro $a = p$ e está posicionado no plano $x = -p$, com $p > 0$. O feixe refletido pelo secundário é desviado para uma lateral visível por um espelho plano inclinado de 45° , cujo centro está na posição $x = g$. Após essa deflexão, a luz atravessa uma lente delgada localizada no ponto (g, h) , onde h é a altura acima do eixo óptico. Para os espelhos curvos, admita que a área efetiva de coleta de luz pode ser aproximada pela área circular projetada perpendicularmente ao eixo do telescópio. Apresente todos os resultados da Parte A de forma literal, expressando cada grandeza exclusivamente em função de p , f , D , g e h . Apenas nos itens que exigirem explicitamente valores numéricos substitua esses parâmetros numericamente.



Parte I : Óptica geométrica

- (a) Determine a coordenada x da imagem formada pelo espelho secundário.
- (b) Determine o raio mínimo do espelho secundário, de modo que todo o feixe refletido pelo primário incida sobre ele.
A partir de agora use o raio do espelho secundário r_s encontrado no item b).
- (c) Determine o formato necessário do espelho plano inclinado a 45° para interceptar completamente o feixe que chega nele e determine uma expressão algébrica para área mínima desse espelho. Somente nesse item, apresente o resultado em função de r_s sem necessariamente substituir pela expressão encontrada no item b).
- (d) Considere agora que, para este telescópio, a distância focal do espelho primário é $f = 1,20$ m, o centro do espelho plano está em $x = g = 0,80$ m e a lente está posicionada no ponto (g, h) , com $h = 0,15$ m.
 - (i) Determine numericamente a distância focal f' da lente em (g, h) necessária para formar, após o espelho plano, uma imagem imprópria “ao infinito” na direção da ocular (ou do observador).
 - (ii) Indique se essa lente é convergente ou divergente.
 - (iii) Determine, em forma algébrica, o raio útil R_ℓ da lente em (g, h) necessário para que *todo* o feixe refletido pelo espelho plano seja redirecionado pela lente, em função dos parâmetros geométricos do problema.
 - (iv) Determine se, quando observada na ocular, a imagem será direita ou invertida.

Parte II : Ganho de brilho

- (e) Determine o aumento de brilho do telescópio em relação ao olho humano, em termos das áreas efetivas de coleta e de saída A_c e A_s .
- (f) Usando a configuração geométrica descrita na parte I, mostre que o aumento de brilho do item anterior pode ser escrito na forma

$$G(x) = \frac{(1+x)^2(2-x)x}{(1-x)^2} C,$$

em que

$$x = \frac{p}{f}.$$

Escreva a constante C em forma algébrica, em função dos parâmetros geométricos relevantes do sistema.

- (g) Admita que o feixe de luz que emerge da lente em (g, h) forma, na saída do telescópio, um feixe aproximadamente cilíndrico de diâmetro $d_{\text{saída}}$. Sabendo que o olho humano só consegue receber todo o feixe se $d_{\text{saída}} \geq d_{\text{pup}}$, onde d_{pup} é o diâmetro da pupila, use a expressão de $G(x)$ encontrada no item anterior e o raio do feixe de luz que emerge da lente encontrado na parte I para:
- determinar o valor de x e de p que maximiza o módulo do aumento $|G(x)|$ respeitando essa condição;
 - calcular numericamente o aumento máximo G_{max} que esse telescópio pode fornecer.

Parte III : Resolução

A partir deste ponto, considere que o telescópio está operando com o *aumento máximo* obtido no item anterior e que o diâmetro do tubo (e do espelho primário) é $D = 15$ cm. Caso o estudante não tenha resolvido as partes I e II, utilize, para todos os cálculos desta parte, os seguintes valores de referência:

$$G_{\text{ref}} = 500, \quad p_{\text{ref}} = 0,40 \text{ m}, \quad r'_{\text{ref}} = 25 \text{ mm}.$$

Além disso, sempre que necessário, adote também os valores numéricos empregados anteriormente:

$$f = 1,20 \text{ m}, \quad g = 0,80 \text{ m}, \quad h = 0,15 \text{ m}.$$

Assuma, em todos os itens, que o sistema está perfeitamente ajustado para a observação de estrelas pontuais no visível.

- Calcule a resolução angular do telescópio para luz no visível.
- Para simplificar a visualização da geometria do problema, considere apenas o espelho primário parabólico em $x = 0$ e o espelho secundário hiperbólico em $x = -p$. Determine a distância focal efetiva f_{ef} do telescópio, isto é, a distância focal equivalente do conjunto Cassegrain primário-secundário. Desconsidere, apenas neste item, o espelho plano inclinado e a lente em (g, h) , pois eles não alteram o valor do foco efetivo.
- Calcule o campo de visão angular do telescópio, utilizando o diâmetro do telescópio e a distância focal efetiva f_{ef} do sistema.
- A partir do campo de visão obtido no item anterior e do fato de que duas estrelas só podem ser distinguidas se estiverem separadas, no céu, por pelo menos o limite de resolução angular do telescópio, estime a ordem de grandeza do número máximo de estrelas pontuais que podem ser simultaneamente resolvidas pelo olho humano ao observar através desse telescópio.

Solução:

- O espelho secundário é hiperbólico. Uma propriedade geométrica da hipérbole é que todo raio dirigido para um de seus focos, ao refletir-se em sua superfície, passa a se propagar em direção do outro foco.

No presente caso, os raios refletidos pelo espelho primário convergem para o ponto $x = -f$, que coincide com um dos focos do espelho secundário. Como, pelo modelo adotado, os focos do secundário estão em $x = -f$ e $x = +f$, segue da propriedade refletora da hipérbole que, após a reflexão no espelho secundário, os raios passam a convergir para o segundo foco.

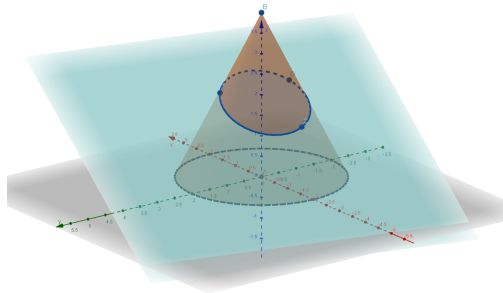
Portanto, a imagem formada pelo espelho secundário está em

$$x = f.$$

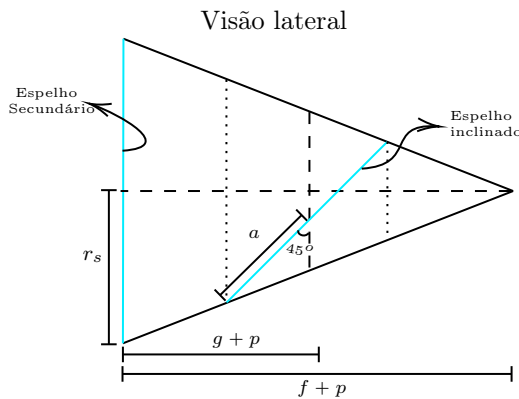
- (b) O feixe refletido pelo primário vai de raio $D/2$ em $x = 0$ até raio 0 no foco $x = -f$. No plano $x = -p$, por semelhança de triângulos (cone de luz):

$$\frac{r_s}{f-p} = \frac{D/2}{f} \implies r_s = \frac{D}{2} \frac{f-p}{f} = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{p}{f}\right).$$

- (c) Podemos visualizar o espelho plano como um plano que corta um cone segundo a imagem abaixo:



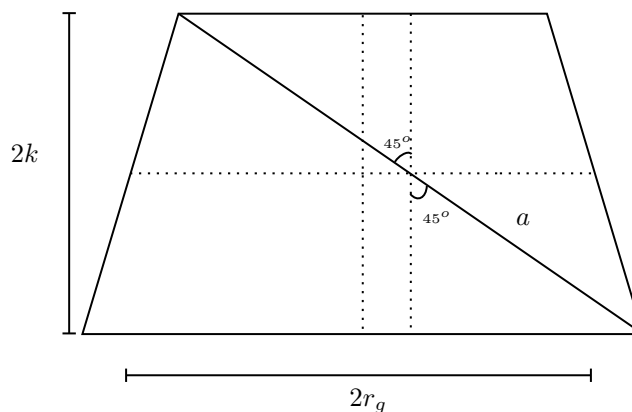
Temos o esquema planificado da elipse formada:



Na posição $x = g$, o raio do feixe é

$$r_g = r_s \frac{f-g}{f+p}.$$

Para o parâmetro a observe o diagrama:

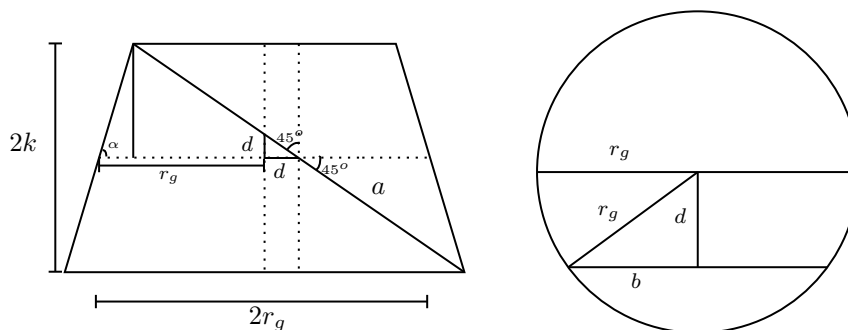


Temos pelos diagramas:

$$2k = 2a \cos 45^\circ \therefore (2r_g)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2 = (2a)^2 \therefore a = \sqrt{2} r_g$$

$$a = \sqrt{2} r_s \frac{f - g}{f + p}$$

Para encontrar o parâmetro b observe os diagramas:



Temos:

$$d + r_g - \frac{k}{\tan(\alpha)} = a \cos 45^\circ = r_g \therefore d = \frac{r_g}{\tan \alpha}$$

Temos para α :

$$\tan \alpha = \frac{p + f}{r_s}$$

Logo, com $d = \frac{r_s r_g}{p + f}$, temos para b:

$$b = \sqrt{r_g^2 - d^2} = r_g \sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{f + p}\right)^2} = r_s \frac{f - g}{(f + p)^2} \sqrt{f^2 + p^2 + 2pf - r_s^2}$$

Logo para área:
$$A = \pi ab = \sqrt{2} r_s^2 \frac{(f - g)^2}{(f + p)^3} \sqrt{(p + f)^2 - r_s^2}$$

- (d) (i) Sem a lente, após a reflexão no espelho plano inclinado de 45° , o feixe continuaria convergindo para o ponto que é a imagem refletida do foco $(f,0)$ em relação ao plano do espelho. Como o espelho está centrado em $(g,0)$ e faz 45° com o eixo óptico, essa reflexão leva o ponto $(f,0)$ ao ponto

$$(g, f - g).$$

Portanto, após o espelho plano, o feixe converge para o ponto $(g, f - g)$.

A lente está posicionada em (g, h) , isto é, antes desse foco. Logo, a distância entre a lente e o ponto para o qual o feixe convergiria é

$$s = (f - g) - h = f - g - h.$$

Para que o feixe emergente da lente seja paralelo (imagem imprópria, no infinito), a lente deve colimar esse feixe convergente. Isso ocorre quando o ponto para o qual os raios convergem está no foco objeto da lente. Como esse foco está do lado de saída da lente, a lente deve ser divergente, com

$$|f'| = s.$$

Assim,

$$f' = -(f - g - h).$$

Substituindo os valores dados:

$$f - g - h = 1.20 - 0.80 - 0.15 = 0,25 \text{ m},$$

portanto,

$$f' = -0,25 \text{ m}.$$

(ii) Como $f' < 0$, conclui-se que a lente é

divergente.

(iii) No plano do espelho inclinado, a seção do feixe é uma elipse. O semi-eixo menor dessa elipse é

$$r_g = r_s \frac{f - g}{f + p}.$$

Após a reflexão, o feixe passa a convergir verticalmente para o ponto $(g, f - g)$. Assim, a largura transversal relevante do feixe no plano da lente é obtida por semelhança de triângulos:

$$R_l = b \frac{f - g - h}{f - g}.$$

Logo,

$$R_l = \left(r_s \frac{f - g}{f + p} \right) \frac{f - g - h}{f - g} = r_s \frac{f - g - h}{f + p}.$$

Como

$$r_s = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{p}{f} \right),$$

segue que

$$R_l = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{p}{f} \right) \frac{f - g - h}{f + p}.$$

(iv) Perceba que: o espelho primário e secundário não inverte a imagem; o espelho plano inverte e a lente não inverte já que $f < 0$ logo a imagem será invertida. (assumindo que o observador está atrás do telescópio)

a imagem será invertida.

(e) Sob a aproximação de feixe aproximadamente uniforme na saída, o ganho de brilho do telescópio em relação ao olho pode ser expresso como a razão entre a área efetiva de coleta e a área do feixe emergente (área de observação):

$$G = \frac{A_{\text{coleta}}}{A_{\text{saida}}}.$$

(f) Aqui A_{coleta} é a área do primário *menos* a obstrução do secundário (projeção perpendicular ao eixo), e $A_{\text{saida}} = \pi(d_{\text{saida}}/2)^2$ é a área do feixe aproximadamente cilíndrico na saída.

$$A_{\text{coleta}} = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 - \pi r_s^2 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \left[1 - \left(1 - p/f \right)^2 \right] = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \frac{p}{f} (2 - p/f),$$

pois $r_s = \frac{D}{2}(1 - p/f)$.

O feixe colimado é limitado pela lente (raio útil do item A4(iii)), logo

$$A_{\text{saída}} = \pi R_l^2, \quad R_l = \frac{D}{2}(1 - p/f) \frac{f - g - h}{f(1 + p/f)}.$$

Logo:

$$G(p) = \frac{A_{\text{coleta}}}{A_{\text{saída}}} = \frac{\pi(D/2)^2 \frac{p}{f} (2 - \frac{p}{f})}{\pi(D/2)^2 (1 - \frac{p}{f})^2 \frac{(f - g - h)^2}{f^2 (1 + \frac{p}{f})^2}}$$

$$G(x) = \frac{A_{\text{coleta}}}{A_{\text{saída}}} = \frac{2x(2-x)}{(1-x)^2 \frac{(f-g-h)^2}{f^2(1+x)^2}} = \frac{(1+x)^2(2-x)x}{(1-x)^2} \underbrace{\frac{f^2}{(f-g-h)^2}}_C.$$

$$C = \frac{f^2}{(f-g-h)^2}.$$

Com os valores numéricos de A4:

$$C = \frac{(1.20)^2}{(0.25)^2} = 23.04 \approx \boxed{23}.$$

- (g) Pelo enunciado, o olho recebe todo o feixe se $d_{\text{saída}} > d_{\text{pup}}$. Como $d_{\text{saída}} \approx 2R_l$, a condição vira:

$$2R_l > d_{\text{pup}} \iff \frac{D}{2}(1-x) \frac{f-g-h}{f(1+x)} > \frac{d_{\text{pup}}}{2}.$$

Reorganizando,

$$\frac{1-x}{1+x} > \alpha, \quad \alpha = \frac{d_{\text{pup}} f}{D(f-g-h)}.$$

Como $G(x)$ cresce sem limite quando $x \rightarrow 1^-$, o máximo permitido ocorre no **limite** da restrição:

$$x_* = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (\text{maximiza } |G| \text{ sob a condição}).$$

Assumindo o valor típico $d_{\text{pup}} = 6 \text{ mm}$ (compatível com seu rascunho), com $D = 15 \text{ cm}$, $f = 1,20 \text{ m}$, $f - g - h = 0,25 \text{ m}$:

Então

$$G_{\text{max}} = G(x_*) \approx 5.6 \times 10^2 \text{ (cerca de 559-561)}.$$

- (h) Pelo critério de difração de Rayleigh:

$$\theta_{\text{res}} = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

Tomando $\lambda = 650 \text{ nm}$ (visível, como no seu rascunho):

$$\theta_{\text{res}} = 1.22 \frac{650 \times 10^{-9}}{0.15} = 5.29 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx \boxed{5.3 \times 10^{-6} \text{ rad}}.$$

(i) Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{D/2}{f_{ef}} = \frac{r_s}{f+p}$$

portanto:

$$f_{ef} = \frac{D}{2} \frac{f+p}{r_s}$$

$$f_{ef} = 1.20 \frac{1.678}{0.322} = 6,25 \text{ m}, \quad \boxed{f_{ef} \approx 6,25 \text{ m.}}$$

(j) Aproximação geométrica (pequenos ângulos): o semi-ângulo de campo é

$$\boxed{\theta_{\text{FOV}} \approx \frac{D/2}{f_{ef}}.}$$

Com $D/2 = 0.075 \text{ m}$ e $f_{ef} = 6,25 \text{ m}$:

$$\theta_{\text{FOV}} \approx \frac{0.075}{6.25} = 1.2 \times 10^{-2} \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{FOV}} \approx 1.2 \times 10^{-2} \text{ rad.}}$$

(O campo total seria $\approx 2\theta_{\text{FOV}} \approx 2.4 \times 10^{-2} \text{ rad} \approx 1.4^\circ$.)

(k) Se duas estrelas só são distinguíveis se separadas por pelo menos θ_{res} podemos estimar o número de estrelas resolvíveis definindo uma célula de resolução, que é a área angular que uma estrela ocupa ($\pi\theta^2$). Dessa forma o número máximo de “células de resolução” no campo (ordem de grandeza) é

$$\boxed{N_{\text{max}} \sim \left(\frac{\theta_{\text{FOV}}}{\theta_{\text{res}}} \right)^2.}$$

Usando $\theta_{\text{FOV}} = 1.2 \times 10^{-2} \text{ rad}$ e $\theta_{\text{res}} = 5.3 \times 10^{-6} \text{ rad}$:

$$N_{\text{max}} \sim \left(\frac{1.2 \times 10^{-2}}{5.3 \times 10^{-6}} \right)^2 = 5.13 \times 10^6.$$

$$\boxed{N_{\text{max}} \approx 5.1 \times 10^6 \text{ estrelas pontuais (ordem de grandeza).}}$$

4. Projeto O.D.I.N. e a Óptica do Caos Após o sucesso duvidoso do foguete *Fallus 3*, Bibucha e Bibrasil decidem investigar a estrutura fundamental do espaço-tempo. Para isso, fundam o *Projeto O.D.I.N. (Observatório de Difração e Interferometria Não-Inercial)*. O objetivo? Medir flutuações minúsculas na rotação da Terra usando um feixe de luz absurdamente coerente.

Como era de se esperar, o experimento toma proporções megalomaniacas, envolvendo lasers, meios dielétricos em movimento e cristais birrefringentes exóticos. A dupla precisa resolver a modelagem matemática completa do sistema antes de ligar a máquina e correr o risco de cegar acidentalmente metade do hemisfério sul.

Parte I: O Interferômetro de Sagnac-Fizeau

O coração do O.D.I.N. é um interferômetro de anel gigante. Considere uma fibra óptica perfeitamente circular de raio R e índice de refração n , disposta no equador terrestre. A Terra rotaciona com velocidade angular Ω . Um feixe de luz de comprimento de onda λ_0 no vácuo é dividido em dois, que se propagam em sentidos opostos (horário e anti-horário) dentro da fibra.

- (a) Utilizando a lei relativística de adição de velocidades, obtenha uma aproximação em primeira ordem para v/c e mostre que a velocidade efetiva da luz na fibra, medida pelo referencial inercial do centro da Terra, é dada por:

$$v_{\pm} = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

onde $v = \Omega R$ e o termo entre parênteses é conhecido como coeficiente de arraste de Fresnel.

- (b) Determine a diferença de tempo Δt e a diferença de fase $\Delta\phi$ entre os dois feixes ao se recombinarem após uma volta completa. Mostre o surpreendente resultado de que, em primeira ordem de aproximação, o atraso temporal de Sagnac em um meio co-rotante independe do índice de refração n .

Parte II: Difração e Coerência Parcial

Os feixes recombinados saem da fibra e incidem normalmente sobre um anteparo contendo duas fendas retangulares idênticas, separadas por uma distância d (centro a centro), cada uma com largura a . O padrão de interferência e difração é projetado em uma tela a uma distância $L \gg d$. Para piorar, Bibrasil nota que o laser não é perfeitamente monocromático, possuindo um perfil espectral retangular com largura $\Delta\lambda$ centrada em λ_0 ($\Delta\lambda \ll \lambda_0$).

- (c) Supondo inicialmente que o laser seja ideal ($\Delta\lambda = 0$), obtenha a expressão para a intensidade $I(\theta)$ na tela em função do ângulo de difração θ . Considere a diferença de fase $\Delta\phi$ gerada na Parte I como condição inicial de defasagem entre as fendas e denote a intensidade máxima de uma única fenda como I_0 .
- (d) Agora, considerando a largura espectral $\Delta\lambda$, determine a expressão para a visibilidade das franjas $V(\theta) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ na região central do padrão (onde o envelope de difração de fenda única é aproximadamente constante). Determine o ângulo θ_c no qual a visibilidade cai a zero pela primeira vez.

Parte III: O Escudo de Polarização

No dia do experimento final, Bibucha acidentalmente derruba uma placa retardadora de fase (uma lâmina de meia onda, $\lambda/2$) logo após a saída da fenda 2. O laser inicial incidente nas fendas é linearmente polarizado em um ângulo de 45° em relação à horizontal (eixo x). O eixo rápido da lâmina de meia onda está perfeitamente alinhado com o eixo vertical (eixo y).

- (e) Utilizando o formalismo dos vetores e matrizes de Jones, determine os estados de polarização normalizados \vec{E}_1 e \vec{E}_2 da luz imediatamente após passar pela fenda 1 (sem a lâmina) e pela fenda 2 (com a lâmina de meia onda).
- (f) Prove matematicamente que, devido ao novo estado de polarização resultante, o padrão de interferência de Young na tela desaparecerá completamente, restando apenas o padrão de difração de uma fenda única (com o dobro da intensidade).

Solução:

- (a) Seja $v' = c/n$ a velocidade da luz no referencial da fibra óptica e $u = v = \Omega R$ a velocidade tangencial da fibra no referencial do laboratório (centro da Terra). Pela lei de adição de velocidades de Einstein:

$$v_{\pm} = \frac{v' \pm u}{1 \pm \frac{v'u}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{cv}{nc^2}} = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{nc}}$$

Como $v \ll c$, podemos expandir o denominador em série de Taylor para primeira ordem $(1 \pm x)^{-1} \approx 1 \mp x$:

$$v_{\pm} \approx \left(\frac{c}{n} \pm v\right) \left(1 \mp \frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n} \mp \frac{v}{n^2} \pm v - \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Desprezando os termos de ordem superior, reorganizamos a expressão para evidenciar o coeficiente de arraste de Fresnel:

$$v_{\pm} = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

- (b) No referencial do laboratório, o detector também se move com velocidade v . O percurso percorrido pela luz a favor (+) e contra (-) a rotação até encontrar o detector é $L_{\pm} = 2\pi R \pm vt_{\pm}$. Igualando isso a $v_{\pm}t_{\pm}$, temos:

$$v_{\pm}t_{\pm} = 2\pi R \pm vt_{\pm} \implies t_{\pm} = \frac{2\pi R}{v_{\pm} \mp v}$$

Substituindo o v_{\pm} encontrado no item anterior:

$$v_{\pm} \mp v = \frac{c}{n} \pm v - \pm \frac{v}{n^2} \mp v = \frac{c}{n} \mp \frac{v}{n^2}$$

Logo, o tempo de viagem é:

$$t_{\pm} = \frac{2\pi R}{\frac{c}{n} \mp \frac{v}{n^2}} = \frac{2\pi Rn}{c} \left(1 \mp \frac{v}{nc}\right)^{-1} \approx \frac{2\pi Rn}{c} \left(1 \pm \frac{v}{nc}\right)$$

A diferença de tempo $\Delta t = t_+ - t_-$ resulta em:

$$\Delta t = \frac{2\pi Rn}{c} \left(\frac{2v}{nc}\right) \implies \Delta t = \frac{4\pi Rv}{c^2}$$

Notavelmente, o índice de refração n é cancelado, mostrando que o efeito depende apenas da área do anel e da rotação. A diferença de fase é:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \left(\frac{4\pi R(\Omega R)}{c^2}\right) \implies \Delta\phi = \frac{8\pi^2 R^2 \Omega}{\lambda_0 c}$$

- (c) A intensidade total de um padrão de difração de fenda dupla é o produto do envelope de difração de fenda única (termo *sinc*) pelo termo de interferência de Young (termo *cos*). A diferença de caminho óptico introduz uma fase $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta + \Delta\phi$. A intensidade resultante é:

$$I(\theta) = 4I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0}\right) \cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda_0} + \frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

onde $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

- (d) Para um laser com largura espectral, a intensidade final é a soma incoerente das intensidades para cada comprimento de onda. O padrão de interferência perde contraste à medida que as franjas de diferentes λ se sobrepõem destrutivamente. A visibilidade de um perfil espectral retangular é regida pela transformada de Fourier do espectro, que resulta em uma função *sinc*:

$$V(\theta) = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta x\right) \right| = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} d \sin \theta\right) \right|$$

A visibilidade cai a zero pela primeira vez quando o argumento da função sinc $(\sin(x)/x)$ é igual a π :

$$\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_0^2} d \sin \theta_c = \pi \implies \sin \theta_c = \frac{\lambda_0^2}{d \Delta \lambda} \implies \theta_c = \arcsin \left(\frac{\lambda_0^2}{d \Delta \lambda} \right)$$

(e) O laser incidente possui polarização linear a 45° . Seu vetor de Jones normalizado é:

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A fenda 1 não altera a polarização. Logo:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de Jones para uma lâmina de meia onda ($\lambda/2$) com o eixo rápido na vertical (y) introduz uma defasagem de π na componente horizontal (x). A matriz de operação é:

$$M_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O estado da fenda 2 será $\vec{E}_2 = M_{\lambda/2} \vec{E}_{in}$:

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(f) A intensidade do padrão de interferência entre dois campos vetoriais \vec{E}_1 e \vec{E}_2 é dada por:

$$I = \langle |\vec{E}_1 + \vec{E}_2 e^{i\delta}|^2 \rangle = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* e^{i\delta})$$

O termo responsável pelas franjas de interferência de Young é $2 \operatorname{Re}(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* e^{i\delta})$. Calculando o produto interno dos vetores de Jones encontrados no item anterior:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(1)(-1) + (1)(1)] = \frac{1}{2} [-1 + 1] = 0$$

Como os vetores são ortogonais (polarizações lineares perpendiculares, conhecidas pelas Leis de Arago-Fresnel), o produto interno é nulo. O termo de interferência desaparece:

$$I(\theta) = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 = 2I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0} \right)$$

Restando exclusivamente o envelope de difração correspondente a uma fenda única, com o dobro da intensidade, provando matematicamente o desaparecimento das franjas.

5. Peppermanta em seu Pepperboat

Peppermanta é um explorador apaixonado por cartografia, navegação e astronomia. Em sua mais nova aventura científica, ele decide viajar de Fortaleza ($3^\circ 43' 58''$ S, $38^\circ 31' 37''$ O) até o remoto arquipélago de Novaja Zemlja ($74^\circ 45'$ N, $57^\circ 57'$ E), no oceano Ártico. Essa expedição faz parte de seu projeto pessoal de pesquisa em cartografia e navegação, que ele costuma chamar informalmente de Peppernavigation.

Para iniciar sua jornada, Peppermanta pretende utilizar seu barco de exploração, o Pepperboat. Como bom navegador tradicional, ele decide confiar apenas em sua bússola — que ele carinhosamente chama de Peppercompass — e em uma carta náutica baseada na famosa projeção de Mercator, amplamente utilizada na navegação marítima desde o século XVI. Essa carta, naturalmente, faz parte de sua coleção pessoal de mapas, conhecida como Peppercharts.

Observação: Em alguma(s) parte(s) desta questão pode ser útil o seguinte resultado:

$$\int \sec(x) dx = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) + C.$$

Parte I: Construção da Projeção de Mercator

Antes de iniciar sua viagem, Peppermanta decide compreender com mais profundidade a matemática por trás de sua carta náutica favorita, uma de suas Peppercharts, a qual utiliza a projeção de Mercator.

Considere a Terra modelada como uma esfera de raio R_{\oplus} . Um ponto da superfície terrestre pode ser descrito por suas coordenadas geográficas (φ, λ) .

Desejamos construir uma projeção cartográfica que associe cada ponto da superfície esférica a um ponto do plano (x, y) .

A projeção de Mercator é caracterizada pelas seguintes propriedades:

- os meridianos são representados por retas verticais igualmente espaçadas;
- os paralelos são representados por retas horizontais;
- a projeção é conforme, isto é, preserva os ângulos locais.

Com base no exposto, responda:

- (a) Mostre que, sob essas hipóteses, a coordenada horizontal da projeção deve ser da forma

$$x = R\lambda,$$

onde λ é a longitude medida em radianos.

- (b) Mostre que o elemento de comprimento sobre a superfície da esfera, em coordenadas (λ, φ) , pode ser escrito como

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2.$$

- (c) No plano da projeção, o elemento de comprimento é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Mostre que, utilizando $x = R\lambda$, obtemos

$$ds^2 = R^2 d\lambda^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2 d\varphi^2.$$

- (d) Uma projeção é dita conforme quando os fatores de escala nas duas direções coincidem. Mostre que essa condição implica

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{R}{\cos \varphi}.$$

- (e) Já em posse da função $x = R\lambda$, resta-nos agora determinar a fórmula de conversão da latitude para a coordenada y na projeção de Mercator. Nesse sentido, determine a função que relaciona a coordenada geográfica φ com a coordenada y , isto é, encontre $y = f(\varphi)$.

Parte II: Peppermanta e sua Peppercompass

Já em alto-mar com seu Pepperboat, Peppermanta consulta sua fiel Peppercompass. Utilizando esse instrumento, ele decide adotar uma estratégia clássica de navegação: manter o barco sempre apontado na mesma direção em relação ao norte magnético, isto é, seguir uma trajetória de azimute constante.

Ao planejar sua viagem, Peppermanta percebe que essa escolha define sua chamada Pepperroute.

- (f) Obtenha uma expressão que descreva a longitude de Peppermanta em função da latitude geográfica, isto é, encontre:

$$\lambda = f(\varphi, A).$$

Por fim, determine o azimute constante A que Peppermanta deve manter para sair de Fortaleza e chegar até Novaja Zemlja.

Observação 1: neste item, ignore quaisquer limitações físicas do Pepperboat. Suponha que o barco possa seguir a trajetória indefinidamente.

Observação 2: note que uma trajetória de azimute constante não corresponde, em geral, a um círculo máximo.

- (g) Represente na projeção de Mercator fornecida a Pepperroute seguida por Peppermanta. A curva deve partir de Fortaleza e chegar até Novaja Zemlja.
- (h) Considerando agora as limitações físicas do Pepperboat — em particular, o fato de que o barco não pode navegar sobre terra firme — discuta se Peppermanta conseguirá completar sua viagem mantendo azimute constante, usando como base a Pepperroute representada na Pepperchart.

Parte III: Peppermanta e o Pepperplane

Após analisar sua rota marítima, Peppermanta decide considerar uma alternativa mais moderna: realizar a viagem utilizando o Pepperplane, seu pequeno avião de pesquisa.

Diferentemente da navegação marítima tradicional, aviões costumam seguir trajetórias próximas de círculos máximos, que correspondem às rotas de menor distância sobre a superfície da esfera - as quais são denominadas ortodrômicas.

- (i) Represente essa trajetória de círculo máximo na projeção de Mercator fornecida.
- (j) Ao seguir sua nova Pepperroute, Peppermanta passa a enfrentar uma nova preocupação. Na cidade de Ittoqqortoormiit ($70^\circ 29' 7''$ N, $21^\circ 58'$ O), localizada na Groenlândia, encontra-se seu maior arqu-inimigo: Bigbucha.

Diante disso, Peppermanta deseja determinar qual será a menor distância angular θ_{\min} entre a trajetória de seu avião e a posição de Bigbucha, a fim de tomar medidas preventivas. Com base nessas informações, determine θ_{\min} .

Solução:

- (a) Como os meridianos são representados por retas verticais igualmente espaçadas e a longitude λ varia uniformemente, a coordenada horizontal deve ser proporcional a λ . Assim,

$$x = R\lambda$$

onde R é o raio da Terra e λ está em radianos.

- (b) Numa esfera de raio R , o comprimento do arco latitudinal de ângulo φ é dado por $\Phi = R\varphi$, ao passo que o comprimento do arco longitudinal, o qual se dá em um círculo de raio $R \cos(\varphi)$, será dado por $\Lambda = R \cos(\varphi)\lambda$. Disso implica que:

$$d\Phi = R d\varphi, \quad d\Lambda = R \cos(\varphi) d\lambda$$

Por teorema de Pitágoras:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2$$

- (c) No plano, temos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Como $x = R\lambda$, então

$$dx = R d\lambda.$$

Logo,

$$ds^2 = R^2 d\lambda^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 d\varphi^2.$$

- (d) Para que a projeção seja conforme, os fatores de escala nas direções λ e φ devem coincidir.

Comparando os coeficientes de $d\lambda^2$ e $d\varphi^2$:

$$R^2 \cos^2 \varphi \longleftrightarrow R^2 \quad \text{e} \quad R^2 \longleftrightarrow \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2.$$

A condição de conformidade implica

$$\frac{R}{R \cos \varphi} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{R},$$

o que resulta em

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{R}{\cos \varphi}.$$

(e) Integrando,

$$y = \int \frac{R}{\cos \varphi} d\varphi = R \int \sec \varphi d\varphi.$$

Usando o resultado fornecido,

$$\int \sec x dx = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) + C,$$

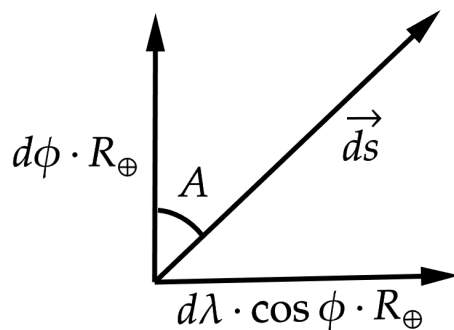
obtemos

$$y = R \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) + C.$$

Escolhendo $C = 0$, a coordenada y será dada por:

$$y = R \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

(f) Decompondo o deslocamento infinitesimal \vec{ds} sobre a superfície esférica, podemos separar o movimento em duas componentes perpendiculares:



Assim, um deslocamento infinitesimal pode ser decomposto em:

- uma componente meridional, associada à variação da latitude, de módulo $R d\phi$;
- uma componente zonal, associada à variação da longitude, de módulo $R \cos \phi d\lambda$.

Pela definição de azimute A , que é o ângulo entre a direção do movimento e o meridiano local, temos

$$\tan(A) = \frac{\text{componente zonal}}{\text{componente meridional}} = \frac{R_{\oplus} \cos(\varphi) d\lambda}{R_{\oplus} d\varphi}$$

Cancelando o fator R_{\oplus} , obtemos

$$\tan(A) = \cos(\varphi) \frac{d\lambda}{d\varphi}$$

Como o azimute é constante ao longo da trajetória, essa relação vale para todo o percurso, o que nos permite escrever

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan(A)}{\cos(\varphi)}$$

Reorganizando os termos,

$$d\lambda = \tan(A) \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)}$$

Integrando entre os pontos inicial e final, temos

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = \tan(A) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)}$$

Usando a identidade fornecida no enunciado para a integral de $\sec(\varphi)$, obtemos

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan(A) \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \right]$$

Observação: a expressão obtida envolve diretamente a mesma combinação funcional que aparece na coordenada y da projeção de Mercator, isto é, $y = R \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$. Isso revela uma conexão entre loxodromias (trajetórias de azimute constante) e a projeção de Mercator: nessa projeção, tais trajetórias correspondem a retas no plano. Essa equivalência será interessante para a análise dos próximos itens.

Por fim, isolando o azimute, encontramos

$$\tan(A) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \right]}$$

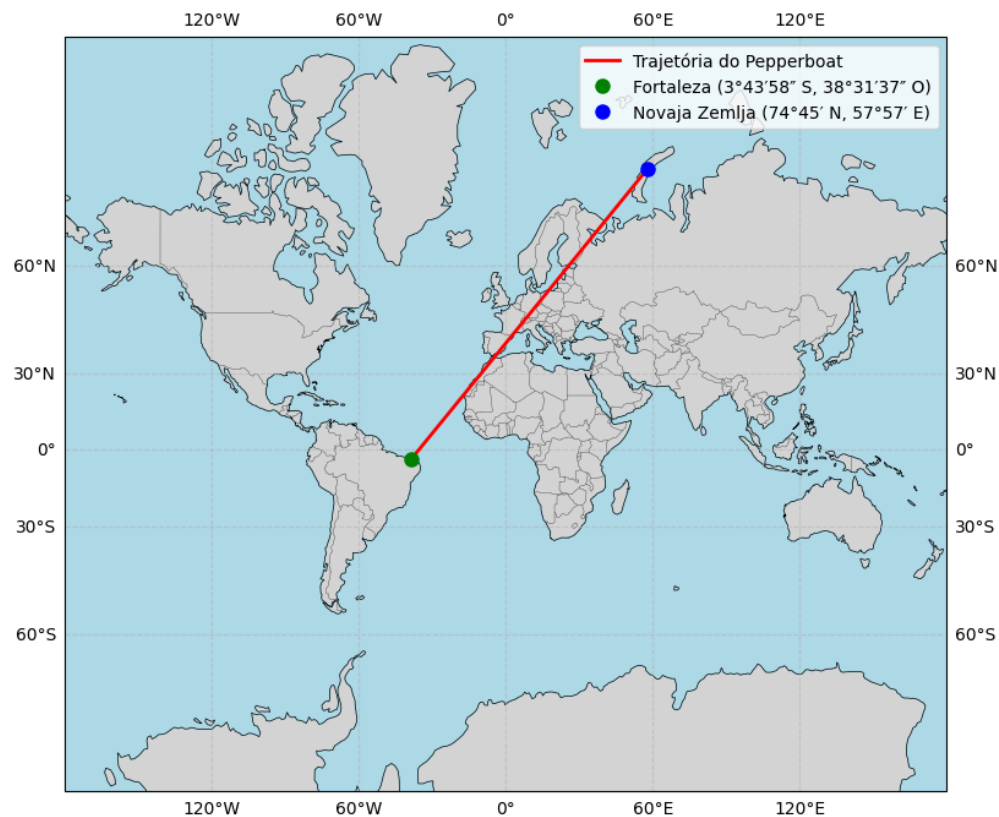
Considerando que o azimute pertencerá ao primeiro quadrante, $0 < A < \frac{\pi}{2}$, não há ambiguidade na escolha do ramo da função arco-tangente. Assim, o azimute constante que permite atingir P_2 a partir de P_1 é dado por

$$A = \arctan \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \right]} \right)$$

Calculando:

$$A \approx 39^\circ$$

(g) A trajetória em questão está representada no gráfico a seguir:

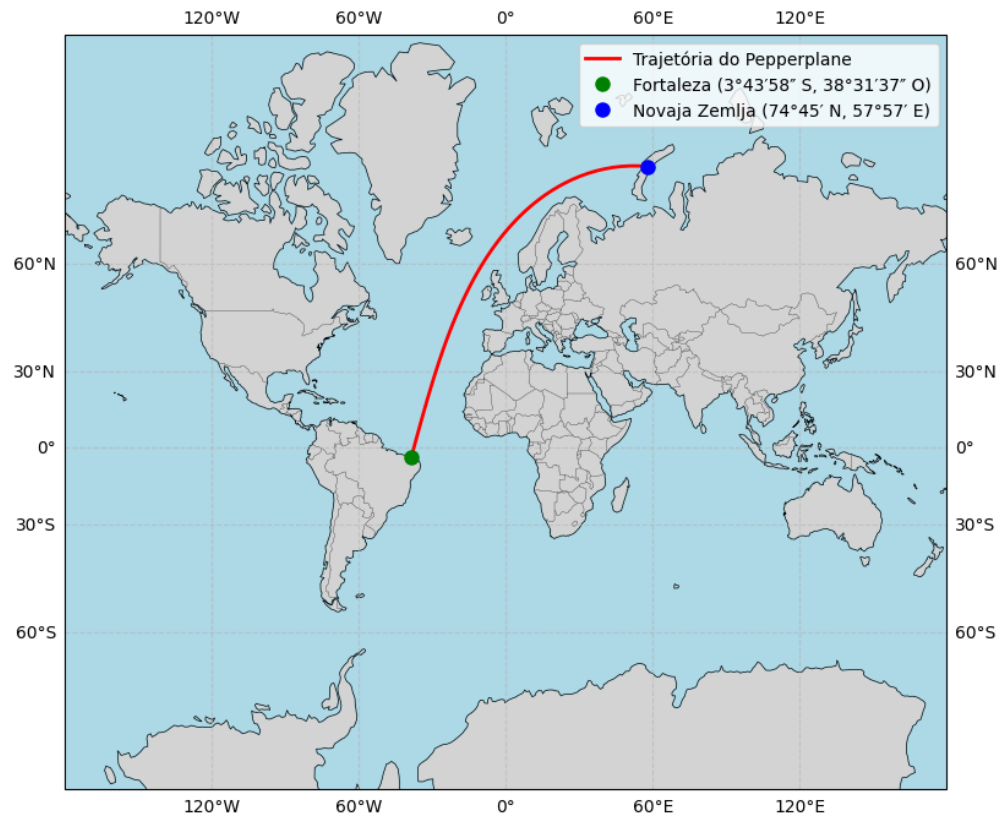


A partir dessa representação, nota-se um fato interessante já mencionado no item f): **curvas de azimute constante em superfícies esféricas - denominadas loxodromias - são representadas por linhas retas na projeção de Mercator.** Nota-se que isso decorre da condição de conformidade da projeção.

- (h) Analisando a Pepperroute traçada na Pepperchart, observa-se que essa reta atravessa regiões continentais, incluindo partes da África e Europa.

Portanto, Peppermenta **não conseguirá completar sua viagem mantendo azimute constante**, pois seria inevitavelmente impedido pela presença de terra firme ao longo do percurso.

- (i) A trajetória do Pepperplane está representada a seguir:



- (j) A trajetória do avião corresponde a um arco de círculo máximo sobre a esfera terrestre. Geometricamente, um círculo máximo é a interseção da esfera com um plano que passa pelo seu centro. Assim, a trajetória do avião está contida em um plano que passa pela origem.

Sejam \hat{r}_1 e \hat{r}_2 os vetores unitários que representam, respectivamente, as posições de Fortaleza e Novaja Zemlja. O plano do círculo máximo é determinado por esses dois vetores, e um vetor normal a esse plano é dado por

$$\vec{n} = \hat{r}_1 \times \hat{r}_2.$$

Normalizando, obtemos o versor normal

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\hat{r}_1 \times \hat{r}_2}{\|\hat{r}_1 \times \hat{r}_2\|}.$$

Agora, seja \hat{r}_B o vetor unitário que representa a posição de Bigbucha. A menor distância angular entre esse ponto e o círculo máximo é justamente o ângulo entre o vetor \hat{r}_B e o plano da trajetória.

Esse ângulo é complementar ao ângulo entre \hat{r}_B e o vetor normal \hat{n} . Logo, a menor distância angular é dada por

$$\theta_{\min} = \arcsin(|\hat{n} \cdot \hat{r}_B|).$$

Substituindo a expressão de \hat{n} , podemos escrever diretamente

$$\theta_{\min} = \arcsin \left(\left| \frac{(\hat{r}_1 \times \hat{r}_2) \cdot \hat{r}_B}{\|\hat{r}_1 \times \hat{r}_2\|} \right| \right).$$

Para efetuar o cálculo, utilizamos a representação cartesiana de um ponto na esfera de raio unitário em termos de suas coordenadas geográficas (φ, λ) :

$$\hat{r} = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi).$$

Assim, substituindo as coordenadas de Fortaleza, Novaja Zemlja e Ittoqqortoormiit, obtemos explicitamente os vetores \hat{r}_1 , \hat{r}_2 e \hat{r}_B . Em seguida, calculamos:

- o produto vetorial $\hat{r}_1 \times \hat{r}_2$, que fornece o vetor normal ao plano da trajetória;
- sua norma $\|\hat{r}_1 \times \hat{r}_2\|$;
- o produto escalar com \hat{r}_B .

Substituindo esses valores na expressão acima, encontramos numericamente

$$\theta_{\min} \approx 9^\circ 14'.$$

Portanto, a trajetória ortodrômica do avião passa a aproximadamente $9^\circ 14'$ da posição de Bigbucha. Esse resultado indica que, embora o avião não sobrevoe exatamente o ponto onde ele se encontra, a aproximação angular é relativamente pequena, o que pode exigir atenção por parte de Peppermanta.