



LISTA 3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

Instruções Gerais

1. A lista é composta por 4 problemas não avaliativos
2. Pratique escrever soluções **legíveis**.
3. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

1. Modela Af: Protoestrela

Considere uma protoestrela esférica e homogênea de massa M e raio R , inteiramente composta de um gás ideal com coeficiente de Poisson γ e massa molecular média μ . Nosso objetivo é deduzir, a partir de um modelo físico simplificado, a evolução temporal no diagrama HR desse corpo enquanto sua luminosidade é sustentada pelo mecanismo de Kelvin–Helmholtz. O processo pode ser tratado como quasiestático, ou seja, a estrela se contrai lentamente de modo que, em cada instante, ela esteja praticamente em equilíbrio hidrostático. Durante toda a questão você não precisa se preocupar com casos que surgem de valores ou relações específicas para as constantes.

- (a) Deduza as expressões para os perfis internos de $P(r)$ e $T(r)$ no corpo em função da pressão na superfície P_s , densidade ρ , raio R e constantes físicas relevantes.

No mecanismo de Kelvin–Helmholtz, a estrela em contração libera energia gravitacional que é convertida em energia térmica e irradiada na forma de luminosidade. Esse processo de liberação de energia é responsável por sustentar temporariamente a luminosidade da protoestrela antes do início da fusão nuclear. Para realizar os próximos itens, você pode usar o teorema de Virial modificado, que correlaciona a energia autopotencial gravitacional Ω e a energia interna do gás U como

$$\Omega + 3(\gamma - 1)U = 4\pi P_s R^3.$$

- b) Deduza a expressão para a energia autopotencial gravitacional do corpo em função de M , R e constantes físicas.
 c) Deduza a expressão para a energia total do gás E em função de M , R , P_c e constantes físicas relevantes.

Para estrelas de baixa massa, o envelope superficial é altamente convectivo, de modo que a temperatura efetiva da superfície muda muito pouco. Nesse regime, podemos assumir aproximadamente T_s constante.

- (d) Determine a relação $R(t)$ da estrela durante a contração Kelvin–Helmholtz, considerando que inicialmente a nuvem tem raio R_0 . Deixe sua resposta em função de R_0 , γ , T_s , M e constantes físicas.
 (e) Calcule o tempo necessário Δt para que a protoestrela comece o seu processo de ignição, ou seja, que tenha temperatura o suficiente para iniciar o processo de fusão de hidrogênio em seu núcleo. **Dados:** $R_0 = 4.5R_\odot$, $M = M_\odot$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $\mu = 0.61m_p$, $T_{\text{fusão do H}} = 10^7$ K e $T_s = 4000$ K.

Mesmo sob essa aproximação, a superfície do corpo ainda apresenta uma fina zona radiativa, responsável por regular a emissão de energia para o espaço. A pressão na superfície pode ser aproximada pela condição de Eddington:

$$P_s = \frac{2g}{3\kappa},$$

onde g é a gravidade superficial e κ a opacidade.

- (f) Mostre que a opacidade deve variar com a temperatura e a densidade de tal forma que existam a_1 e a_2 tais que $\kappa \propto \rho^{a_1} T^{a_2}$ e calcule os valores desses expoentes.

Em protoestrelas mais massivas ou em fases posteriores da evolução, a temperatura superficial pode variar significativamente e o envelope pode ser parcialmente radiativo. Nesse caso, a evolução de $R(t)$ precisa levar em conta a variação da energia térmica interna, e a opacidade pode seguir uma lei de potência do tipo

$$\kappa = \kappa_0 \rho^n T_s^m.$$

- (g) Derive uma relação para R em função de T_s , n , m e constantes, e determine a inclinação da trajetória da estrela no diagrama HR, a seguir está representado um diagrama HR para referência.

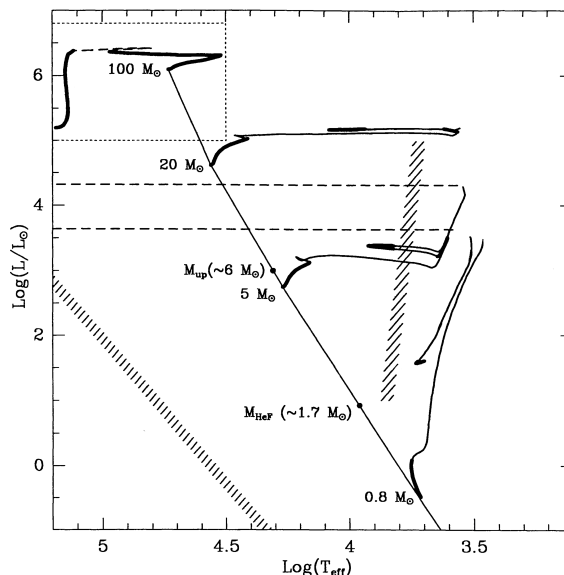


Figura 1: Diagrama HR, modificado a partir de (CHIOSI, Cesare; BERTELLI, Gianpaolo; BRESSAN, Alessandro)

2. Equação de Lane-Emden e Estrelas de Nêutrons

Estrelas são sistemas autogravitantes em equilíbrio hidrostático, nos quais a tendência de colapso gravitacional é equilibrada por gradientes de pressão interna. Esse equilíbrio pode ser descrito, no regime clássico (newtoniano), por duas equações fundamentais: a equação de equilíbrio hidrostático e a equação de conservação de massa.

Explicitamente, essas equações são dadas por:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r),$$

onde:

- $P(r)$ representa a pressão local a uma distância r do centro da estrela;
- $\rho(r)$ é a densidade de massa;
- $m(r)$ é a massa contida dentro de uma esfera de raio r ;

Essas equações, por si só, não formam um sistema fechado. Para resolvê-las, é necessário especificar uma equação de estado, que relacione pressão e densidade. Um dos modelos utilizados em astrofísica é o modelo politrópico, no qual se assume:

$$P = K\rho^{1+1/n},$$

onde K é uma constante (dependente da física do sistema) e n é o chamado índice politrópico, que caracteriza o tipo de matéria estelar.

Esse modelo permite descrever, de forma aproximada, diferentes regimes físicos (desde gases ideais até matéria degenerada em estrelas compactas).

Parte I: Equação de Lane-Emden

Para simplificar o problema, podemos introduzir algumas variáveis adimensionais. Defina:

$$\rho(r) = \rho_c \theta(\xi)^n, \quad r = \alpha \xi,$$

onde:

- $\rho_c = \rho(0)$ é a densidade central da estrela;
- $\theta(\xi)$ é uma função adimensional que descreve o perfil de densidade;
- ξ é a coordenada radial adimensional;
- α é um fator de escala definido por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}}$$

Essas transformações permitem reduzir o sistema original a uma única equação diferencial adimensional.

- (a) Mostre, a partir das equações de equilíbrio hidrostático e conservação de massa, juntamente com a equação de estado politrópica e as variáveis adimensionais acima, que a função $\theta(\xi)$ satisfaz a equação de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

- (b) Analise o comportamento físico da solução próxima ao centro da estrela. Quais são as condições de contorno apropriadas para $\theta(\xi)$ em $\xi = 0$? Justifique sua resposta com base em regularidade física e simetria esférica.

Além disso, explique como se define a superfície da estrela em termos da função $\theta(\xi)$. Qual é o significado físico do primeiro zero de θ ?

- (c) Utilizando as definições introduzidas, mostre que a massa total M e o raio R da estrela podem ser escritos como:

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c \left(-\xi_1^2 \theta'(\xi_1) \right), \quad R = \alpha \xi_1,$$

onde ξ_1 é o primeiro zero de $\theta(\xi)$.

Interprete fisicamente o fator $-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)$.

- (d) A partir das expressões obtidas, elimine ρ_c e deduza a seguinte relação:

$$M \propto R^{(3-n)/(1-n)}, \quad (n \neq 1)$$

Parte II: Aplicação a uma estrela de nêutrons

Estrelas de nêutrons são objetos extremamente compactos formados após o colapso gravitacional de estrelas massivas. Uma aproximação simplificada consiste em modelá-las como um sistema politrópico com índice $n = 1$, isto é:

$$P = K\rho^2$$

Para esse caso especial, a equação de Lane-Emden possui solução analítica:

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi},$$

com:

$$\xi_1 = \pi, \quad -\xi_1^2 \theta'(\xi_1) = \pi$$

Observações astrofísicas indicam que estrelas de nêutrons típicas possuem massa da ordem de $1,4 M_\odot$ e raio da ordem de 10 km.

- (e) Utilizando os resultados da Parte I, obtenha uma expressão explícita para a constante K em termos da massa total M e do raio R da estrela.
- (f) Calcule numericamente o valor de K para:

$$M = 1,4 M_\odot, \quad R = 10 \text{ km}$$

- (g) A partir dos resultados obtidos, estime a densidade central ρ_c da estrela. Em seguida, determine a pressão central P_c .

Ademais, compare a densidade encontrada com a densidade nuclear típica:

$$\rho_{\text{nuc}} \sim 10^{17} \text{ a } 10^{18} \text{ kg/m}^3$$

Parte III: Correções relativísticas

Para estrelas extremamente compactas, como estrelas de nêutrons, a descrição newtoniana não se mostra suficientemente adequada. Nesse regime, deve-se utilizar a relatividade geral. A equação de equilíbrio hidrostático é então substituída pela equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}$$

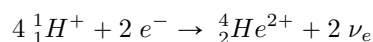
Essa equação pode ser vista como sendo a versão newtoniana multiplicada por três fatores corretivos associados a efeitos relativísticos no sistema.

- (h) Discuta o papel físico de cada um dos fatores corretivos:
- O termo $1 + \frac{P}{\rho c^2}$: interprete o papel relativístico da pressão no desequilíbrio hidrostático.
 - O termo $1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2}$: discuta sua relação com a energia interna do fluido.
 - O fator $\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1}$: relacione com a curvatura do espaço-tempo e com o raio de Schwarzschild.

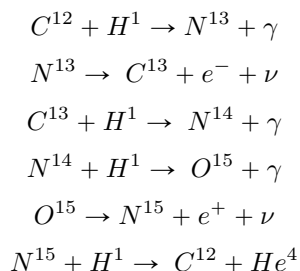
3. O Sol queima?

Diferentemente da crença popular, o Sol e as estrelas não são bolas de fogo que emitem energia por combustão. Em vez disso, elas produzem sua energia a partir de reações entre núcleos atômicos, chamadas de fusão nuclear. Como essas reações produzem novos elementos, esse processo também é conhecido como nucleossíntese estelar. Entre as reações de nucleossíntese estelar, as principais cadeias de reações são a cadeia próton-próton, ciclo CNO e reação triplo-alfa, representadas a seguir:

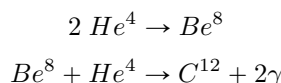
- Cadeia próton-próton (Cadeia pp):



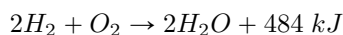
- Ciclo Carbono-Nitrogênio-Oxigênio (Ciclo CNO):



- Reação triplo-alfa:



- Encontre as reações reduzidas para o ciclo CNO e a reação triplo-alfa.
- Determine a energia total por reação emitida em cada tipo de cadeia reacionária. Desconsidere a energia das partículas liberadas que já estão representadas. Dados: $A_H = 1.008 u$; $A_{He} = 4.003 u$; $A_C = 12 u$; $A_p = 1 u$.
- Agora, indique qual reação possui maior razão energia produzida por mol de H entre a cadeia pp e a combustão do H_2 descrita pela equação química:



Entre as reações nucleares estelares a predominante em determinada estrela pode ser prevista a partir de sua temperatura sendo a cadeia pp mais comum próximo a $4 \cdot 10^6 K$, o ciclo CNO em temperaturas da ordem de $1,7 \cdot 10^7 K$ e, por fim, a reação triplo-alpha necessitando de temperaturas ainda maiores, próximas de $10^8 K$. Essa mudança ocorre porque o aumento da temperatura eleva a velocidade das partículas na estrela, permitindo que núcleos com maior repulsão eletrostática consigam se aproximar e reagir. Além disso, temperaturas mais altas aumentam a razão entre íons e átomos neutros, fenômeno descrito pela equação de ionização de Saha, a qual será analisada no resto da questão.

No equilíbrio termodinâmico local entre dois estados A e B de uma partícula, o número de partículas nesses estados N_A e N_B é descrito pela equação de Boltzmann:

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{g_A}{g_B} \exp \frac{-(E_A - E_B)}{kT}$$

Onde E_i é a energia do estado i , g_i é o peso estatístico do estado i , k é a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema. A partir dessa expressão, iremos derivar a equação de ionização de Saha. Considere o estado A como o átomo ionizado (estado +) e o estado B como o átomo neutro (estado 0).

- Encontre a diferença de energia entre os estados 0 e + ($E_+ - E_0$) em função da energia de ionização χ , do momento p do elétron livre, da massa m_e do elétron e constantes. Considere o caso semiclassico.

Agora, iremos entender os pesos estatísticos de cada estado. Para o estado 0, seu peso estatístico será simplesmente g_0 . No entanto, para seu estado ionizado, seu peso estatístico será a multiplicação entre o peso estatístico próprio do íon g_+ e o peso estatístico dos elétrons dg_e , onde o caráter infinitesimal surge porque estamos considerando elétrons com momento específico p em vez de todos os possíveis valores. O peso estatístico dos elétrons equivale a todos os estados que elétrons podem assumir no espaço de fase considerando que seu momento p pode ser decomposto

em p_x , p_y e p_z e o princípio de exclusão de Pauli. A imagem a seguir mostra uma representação da existência de vários vetores com mesmo módulo (mesma energia), mas diferentes componentes.

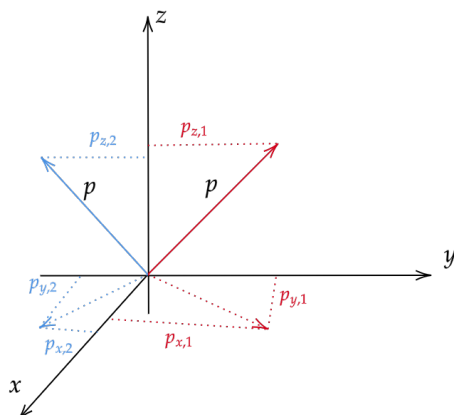


Figura 2: Imagem da decomposição de dois vetores momento com mesmo módulo, mas diferentes componentes

Além de um mesmo valor de momento possuir diversos conjuntos de componentes, o espaço de fase quântico que estamos analisando corresponde a um espaço de seis dimensões, cujas coordenadas são as posições (x, y, z) e os momentos (p_x, p_y, p_z) . Um fato muito importante desse espaço é que ele não é contínuo, pois podemos dividi-lo em pequenos cubos de dimensões h , de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg. A situação para os eixos p_x e x está representada na imagem a seguir:

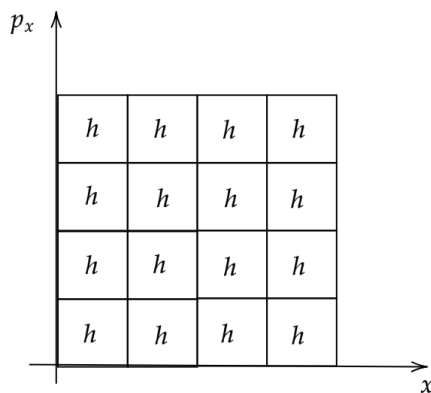


Figura 3: Imagem da representação do espaço de fase em uma dimensão dividido em pequenos compartimentos h

- e) Com o auxílio das imagens e seus conhecimentos, escreva uma expressão para o número total de estados disponíveis (células ocupadas por elétrons vezes o número máximo de elétrons em cada célula) que elétrons com momento entre p e $p + dp$ podem possuir no espaço de fase em função de p , da densidade de elétrons no espaço ordinário (real) n_e e constantes. Esse valor é o peso estatístico dg_e dos elétrons.
- f) Com todas as informações encontradas até agora, encontre uma expressão para a razão entre as densidades de íons n_+ e a densidade de átomos neutros n_0 em função de n_e , g_0 , g_+ , a energia de ionização χ , a temperatura do sistema T , a massa m_e do elétron e constantes.

Dica: $\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

A expressão encontrada é a chamada equação de Saha. Essa expressão possui diversos usos em Astronomia, podendo ser utilizada para explicar a classificação espectral de estrelas, entender sua composição e estimar a idade do universo. A seguir, iremos utilizá-la em alguns contextos:

- g) Utilize a equação de Saha derivada anteriormente para encontrar uma expressão que relacione o estado neutro com o estado $-$ do átomo em função da densidade n_- , o peso estatístico g_- do estado $-$, n_0 , n_e , g_0 , χ_{ion} a energia de ligação do elétron no estado $-$, T , m_e e constantes.
- h) Sabendo que a energia de ionização do hidrogênio é $\chi_+ = 13.54 \text{ eV}$, a energia de ligação do elétron no H^- é 0.7 eV , a temperatura da fotosfera do Sol é $T = 6000 \text{ K}$ e o termo $P_e = n_e kT$ é a pressão eletrônica que para a fotosfera do Sol tem valor $P_e = 30 \text{ Pa}$, encontre as razões $\frac{H^+}{H}$ e $\frac{H^-}{H}$ entre as densidades do hidrogênio neutro e de suas formas ionizada e negativa na fotosfera solar. **Dica:** Para encontrar os pesos estatísticos dos estados do hidrogênio pense nas combinações de spin que os elétrons ligados ao átomo em cada estado podem ter. **Dado:** $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

4. Moto Moto observações

Moto Moto decidiu fazer uma observação de 2 dias. Naturalizado em Fortaleza, ele decide observar o céu no meio do Parque do Cocó, envolto pela iluminação da cidade. Ele observou uma estrela com um telescópio motorizado (o motor mantém a estrela sempre centrada no mesmo conjunto de pixels do CCD). O CCD mede o sinal vindo de uma estrela a uma taxa $R(t)$ em unidades proporcionais a e^-/s (elétrons acumulados em um pixel por segundo).

Dia 1 (com estrela): Moto Moto acompanhou a estrela desde o nascer até o pôr e registrou a taxa total $R_1(t)$. **Dia 2 (sem estrela):** ele repetiu a mesma trajetória de apontamento (mesmos horários), mas sem a estrela no campo (céu “vazio”), obtendo uma medida associada à poluição luminosa.

Assuma que:

- o detector tem um termo de ruído instrumental **constante** na leitura de qualquer sinal R_c (independente do tempo);
- no dia 2, Moto Moto obteve a tabela de $R_p(t)$ (a forma do comportamento urbano);
- o ruído total efetivo (em taxa) é a sobreposição do ruído associado ao instrumento e um ruído desconhecido;
- O sol fica abaixo do horizonte durante todo o tempo de observação.

Além disso, neste experimento a estrela passa pelo zênite na culminação: Moto Moto estava aproximadamente no equador ($\phi \simeq 0^\circ$) e escolheu uma estrela com declinação $\delta \simeq 0^\circ$.

Tabela (dados). Horários de 30 em 30 min (18:00–06:00). No Dia 1 mede-se $R_1(t)$; no Dia 2 mede-se $R_2(t)$.

- Esboce o gráfico $R_1(t) \times t$ (todos os pontos do Dia 1).
- O que a tabela do Dia 2 (valores de R_2) representa fisicamente?
- Estime o valor do ruído constante por segundo R_c do telescópio. Justifique.
- Dê um motivo coerente para uma flutuação **para cima** em $R_1(t)$ e um motivo coerente para uma flutuação **para baixo** em $R_1(t)$ em relação a tendência dos dados.
- Monte uma tabela do termo desconhecido “puro” R_3 (isto é, **excluindo** o termo constante do telescópio) e explicita sua relação com R_2 .
- Explique de forma qualitativa o comportamento de $R_3(t)$ ao longo da noite e identifique a fonte dominante.
- Monte uma tabela com os dados do sinal vindo unicamente da estrela, **excluindo** os dados contaminados por fatores externos (justifique quais pontos excluiu).

Tabela 1: Taxa observada pelo CCD. Dia 1: $R_1(t)$; Dia 2: $R_2(t)$.

Hora	R_1	R_2
18:00	592.340	230.489
18:30	643.637	180.369
19:00	663.478	139.471
19:30	669.502	107.266
20:00	670.242	83.320
20:30	669.465	66.570
21:00	670.368	57.355
21:30	742.652	126.593
22:00	739.483	119.330
22:30	674.252	50.122
23:00	674.759	50.013
23:30	674.890	50.000
00:00	674.900	50.000

Hora	R_1	R_2
00:30	674.890	50.000
01:00	674.759	50.013
01:30	674.252	50.122
02:00	268.464	50.589
02:30	268.242	51.551
03:00	267.954	53.400
03:30	660.250	57.355
04:00	670.242	83.320
04:30	669.502	107.266
05:00	663.478	139.471
05:30	643.637	180.369
06:00	592.340	230.489

- (h) Encontre uma expressão que relacione $S(t)$ com o ângulo horário da estrela $H(t)$ com base em extinção atmosférica. Deduza uma **linearização** adequada para encontrar a profundidade óptica vertical τ da atmosfera e o sinal que incide na atmosfera vindo da estrela S_0 .
- (i) Monte a tabela dos dados linearizados e faça o gráfico linearizado.
- (j) A partir do gráfico linearizado, estime a profundidade óptica vertical τ da atmosfera na banda observada e o Sinal que incide na atmosfera vindo da estrela S_0 .