

OBM 2019 N2 P5

Por Gabriel Mota

Problema 5 (OBM-N2). Na figura abaixo, um quadradinho branco é cercado por quatro quadradinhos pretos e três quadradinhos brancos são cercados por sete quadradinhos pretos.



Qual o número máximo de quadradinhos brancos que podem ser cercados por n quadradinhos pretos?

Comentário:

Antes de começar a solução, é preciso entender que **este problema é muito mais difícil que os problemas 5** (ou até problemas 6) da OBM nível 3, quanto mais da OBM nível 2! Provavelmente este problema foi proposto com uma solução com erros que a banca não havia percebido na elaboração da prova. Porém isso não significa que o problema está errado ou é impossível, só é **muito mais difícil do que esperado!**

Se você é do nível 2 e procura entender a solução deste problema, recomendo focar em entender as ideias, que vão estar destacadas em caixas azuis ao longo da solução.

Solução.

Inicialmente, assuma que o tabuleiro de quadradinhos 1×1 (que, daqui em diante, chamaremos de *casas*) seja infinito na horizontal e na vertical. Veja que uma configuração máxima existe, uma vez que há somente um número finito de configurações. Iremos mostrar que:

Se $n = 4t$, a resposta é $2t^2 - 2t + 1$.

Se $n = 4t + 1$, a resposta é $2t^2 - t$.

Se $n = 4t + 2$, a resposta é $2t^2$.

Se $n = 4t + 3$, a resposta é $2t^2 + t$.

Ideia principal: Para resolver este problema, basta construir a configuração máxima (ou as configurações máximas), e provar que ela é de fato a melhor configuração. Não é tão difícil encontrar a configuração máxima para n múltiplo de 4, e adaptar essa construção para todo n , e se convencer que elas são máximas (tente fazer isso!). Porém, realmente provar que de fato essas configurações são máximas parece quase impossível de primeira, pois temos liberdade até demais de como podemos colocar no plano os quadradinhos pretos. Então a ideia é **restringir a liberdade excessiva do problema aos poucos**, provando e definindo várias coisas pequenas, até que a nossa figura máxima tenha que ser uma das configurações que construímos!

Ideia 1 (casos iniciais): Tentar construir exemplos pequenos e simples, sem se preocupar se as figuras são máximas ou não. Depois tentar mover alguns quadradinhos pretos individualmente no intuito de maximizar a área da figura. A ideia é tentar **perceber características que a sua figura nova tem e a antiga não**, para termos um direcionamento do que precisamos provar.

Definição 1. Uma sequência de k quadrados pretos horizontais consecutivos, verticais ou diagonais é definido como um **segmento de tamanho k** , horizontal, vertical ou diagonal, respectivamente, como mostrado na figura 1.

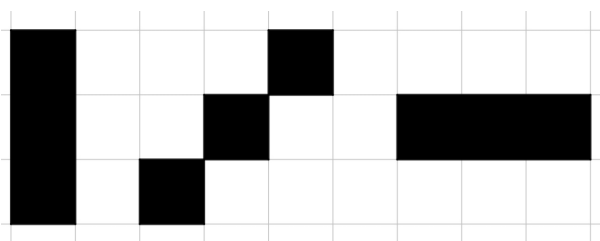


Figura 1: ilustração dos tipos de retas.

Uma configuração com n quadradinhos brancos cercados é **máxima** se o número de quadradinhos pretos que cercam os quadradinhos brancos for máximo.

Afirmção 1. Na configuração máxima, todos os segmentos verticais e horizontais vão ter tamanho 1 ou 2.

Isso é imediato, pois, se tivermos uma figura com um segmento horizontal ou vertical de tamanho 3 ou mais, então poderemos facilmente aumentar a quantidade de quadrados brancos, procedendo como mostrado na figura 2. ■

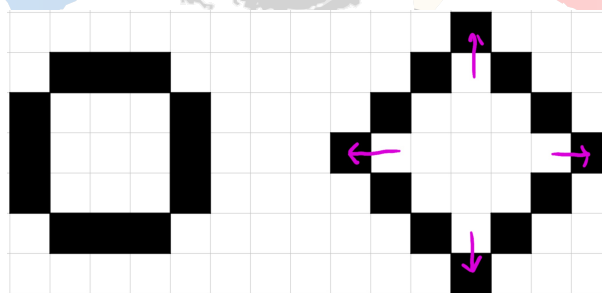


Figura 2: segmentos verticais e horizontais de tamanho ≥ 3 .

Afirmção 2. A configuração máxima é uma figura conexa.

Suponha que a configuração máxima seja composta por pelo menos duas figuras conexas distintas e escolha duas delas. Transladando as demais componentes conexas, e procedendo como na figura 3, unimos as duas componentes escolhidas e aumentamos a quantidade de quadrados brancos circundados por quadrados pretos em pelo menos uma unidade. Absurdo. ■

Afirmção 3. A configuração máxima é uma figura convexa.

Se tivermos uma figura não convexa, então, procedendo conforme mostrado na figura 4, podemos mover algumas casas pretas de forma a aumentar a quantidade de quadrados brancos envolvidos por elas e tornar a figura convexa. ■

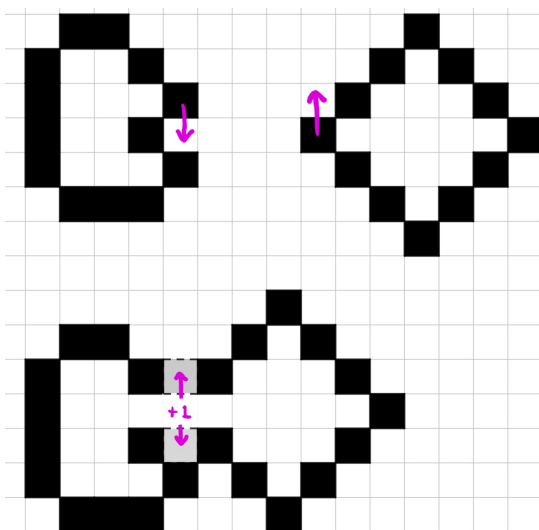


Figura 3: tornando a figura conexa.

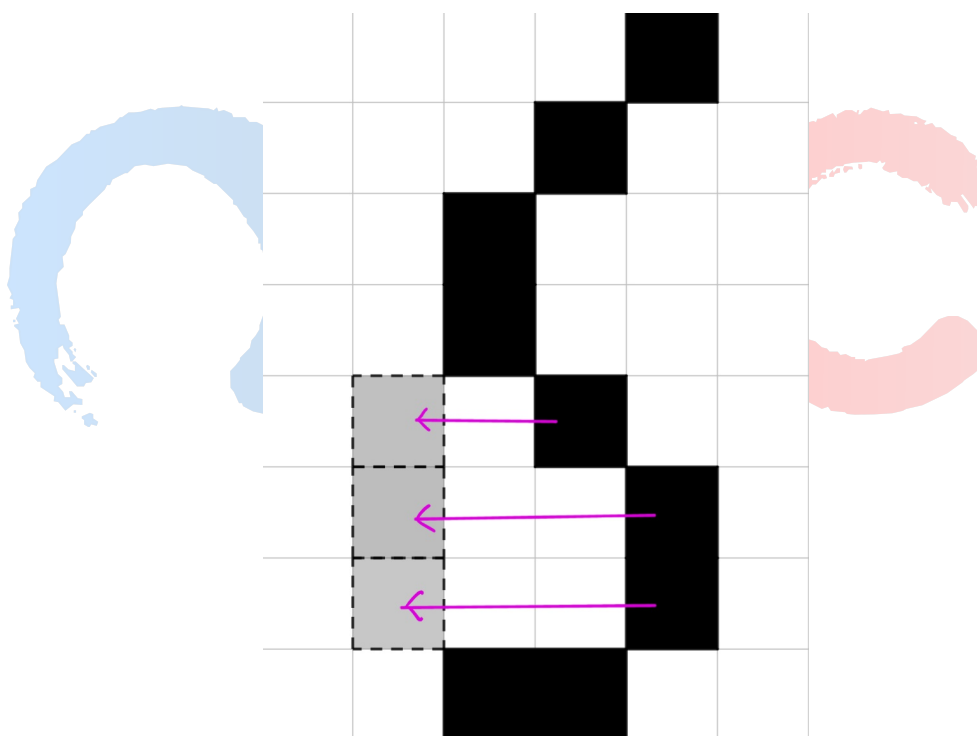


Figura 4: tornando a figura convexa.

Ideia 2 (olhar os extremos): em problemas de combinatória como esses, sempre é bom tentar **analisar os extremos ou as bordas da figura** (nesse caso, podemos definir as bordas da figura como o seu fecho convexo). Note que por termos conseguido mostrar que a figura tem que ser convexa e conexa, ela já está razoavelmente bem definida, sendo semelhante a um polígono convexo. A ideia é tentar definir o formato desse polígono, para tentarmos entender melhor a figura máxima.

As afirmações feitas até aqui garantem que a figura máxima é um octógono $ABCDEFGH$ (veja a figura 5, na qual A, B, C, D, E, F, G, H representam casas), em que AH e DE são segmentos horizontais, BC e GF são segmentos verticais e AB, EF, HG, CD são segmentos diagonais, com $AB \parallel EF$ e $HG \parallel CD$. (Veja que não descartamos a possibilidade de que $A = H, D = E, B = C$ ou $G = F$.) Realmente, um momento de reflexão deixa claro que outras configurações dos segmentos formariam uma figura não convexa.

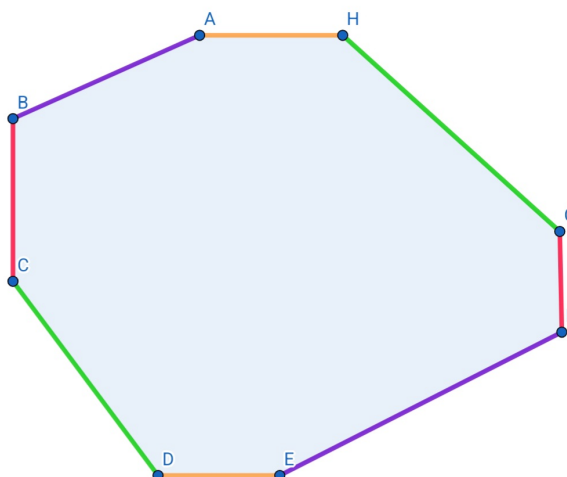


Figura 5: a figura máxima é um octógono.

No que segue, dadas casas X e Y tais que XY é um segmento horizontal, vertical ou diagonal, denotemos por XY seu tamanho, conforme estabelecido na Definição 1.

Afirmção 4. Se n for par, então $AH = DE$ e $BC = FG$. Se n for ímpar, então $AH \neq DE$ e $BC \neq FG$.

De fato, como AH e DE são segmentos horizontais, temos que $AB+BC+CD$ e $HG+FG+FE$ medem a separação vertical entre as retas que contém AH e DE ; portanto, $AB+BC+CD = HG+FG+FE := m$. Agora, recorde que

$$\underbrace{(AB + BC + CD) + (HG + FG + FE)}_{=2m} + AH + DE = n.$$

Então se n for par, temos pela afirmação 1 que AH e DE são iguais; por outro lado, se n for ímpar, esses tamanhos são distintos. ■

Para a próxima afirmação, recorde que, pela Afirmação 1, os segmentos horizontais e os verticais da figura máxima têm tamanho 1 ou 2. Por outro lado, pela Afirmação 4, os tamanhos desses segmentos são iguais se n for par e distintos se n for ímpar.

Afirmção 5. A figura de área máxima depende somente das posições dos segmentos AH, DE ou BC, FG .

Também não é difícil nos convenceremos disso a partir de duas ilustrações. Por exemplo, supondo n par (o caso n ímpar é análogo), as figuras 6 e 7 deixam claro que, uma vez que AH e DE estejam marcados no plano (com $AH = DE = 1$ ou 2), há somente uma maneira de construir um octógono como desejado, isto é, com BC e FG segmentos de tamanhos iguais (a 1 ou 2) e AB, CD, EF, GH segmentos diagonais. ■

Um corolário imediato da justificativa da Afirmação 5 é que o octógono da configuração máxima tem um eixo de simetria.

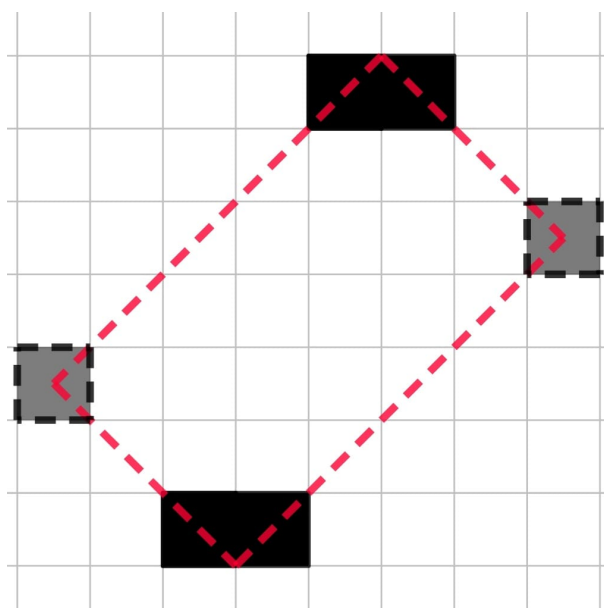


Figura 6: construindo o octógono a partir de AH e DE , com $BC = FG = 1$.

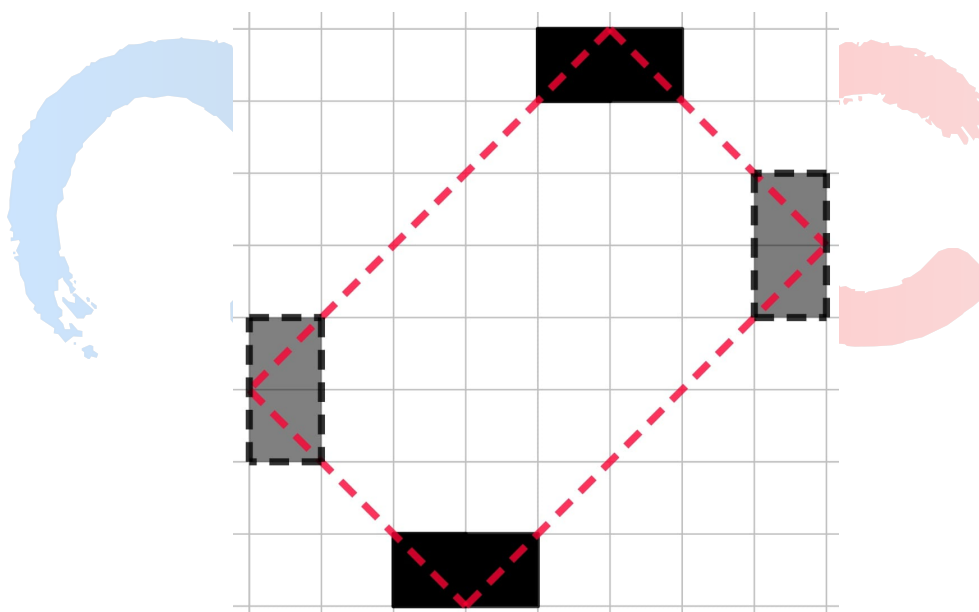


Figura 7: construindo o octógono a partir de AH e DE , com $BC = FG = 2$.

Ideia 3 (como calcular os quadrados brancos da figura?): Já temos uma figura muito bem definida, mas ainda não está claro como podemos calcular e maximizar a sua quantidade de quadrados brancos. Porém, já podemos facilmente conjecturar o exemplos para n par (se ainda não conseguiu enxergar o exemplo, olhe para a figura 13), ela parece fácil de calcular. Se conseguirmos generalizar a configuração máxima (para ganharmos mais liberdade e ainda conseguirmos calcular com certa facilidade a quantidade de quadrados brancos), talvez seja mais fácil primeiro provar que a figura que temos é análoga a essa generalização, e depois provar que a generalização é máxima quando for a figura 13. Em resumo, a ideia é que às vezes precisamos dar um passo para trás para dar dois passos para frente.

Para continuar, precisamos da seguinte definição

Definição 2. Um **retângulo torto** $x \times y$ é um octógono $ABCDEFGH$ de lados horizontais e verticais iguais a 1 que satisfaz as condições anteriores da figura de área máxima (afirmações 4 e 5) e tal que seus outros quatro lados são dois segmentos diagonais paralelos de comprimento x e dois segmentos diagonais paralelos de comprimento y .

A figura 8 ilustra uma possibilidade com $x = 4$ e $y = 5$.

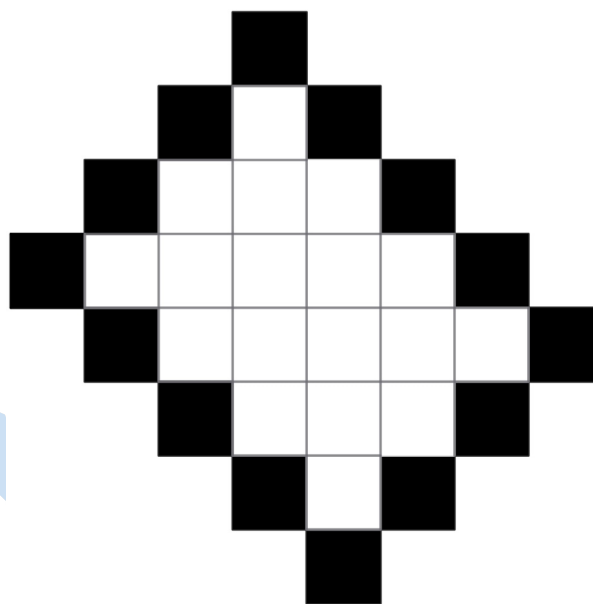


Figura 8: um retângulo torto com $x = 4$ e $y = 5$.

Definição 3. A **área** de um retângulo torto $x \times y$ é a quantidade de casas que ele contém (isto é, inclusive aquelas em seu perímetro), ou seja, $xy + (x - 1)(y - 1)$. A **área interna** de um retângulo torto $x \times y$ é a quantidade de casas brancas que ele contém (isto é, excluindo as de seu perímetro), ou seja, $(x - 1)(y - 1) + (x - 2)(y - 2)$.

É fácil nos convencermos de que as fórmulas acima estão corretas colorindo as casas brancas de azul e vermelho, como em um tabuleiro de xadrez (veja a figura 9).

Afirmção 6. Para n par, podemos assumir que a configuração máxima é algum retângulo torto.

Se $AH = DE = BC = GF = 1$, a figura já seria um retângulo torto. Se $AH = DE = BC = GF = 2$ (veja a figura 10), ou $AH = DE = 2$ e $BC = GF = 1$ (veja a figura 11), basta realizar o movimento ilustrado nas imagens, transformando a figura em um retângulo torto sem diminuir sua área interna (o que é possível devido à simetria já observada da figura máxima).

Note que é preciso tomar cuidado em como transformamos a figura em um retângulo torto, pois podemos acidentalmente diminuir sua área (como mostrado na figura 12). Caso isso ocorra, é suficiente mover as casas no sentido oposto, pois, como a figura é simétrica, se a área interna diminuir ao movermos as casas em um sentido, ela aumentará ao movermos as casas no outro sentido. ■

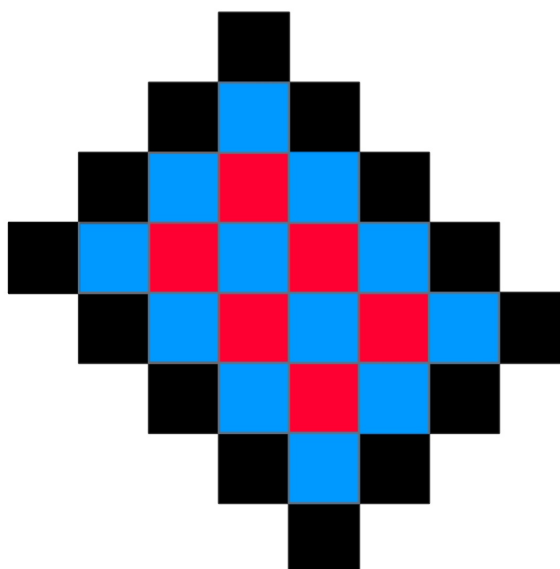


Figura 9: cálculo da área de retângulo torto.

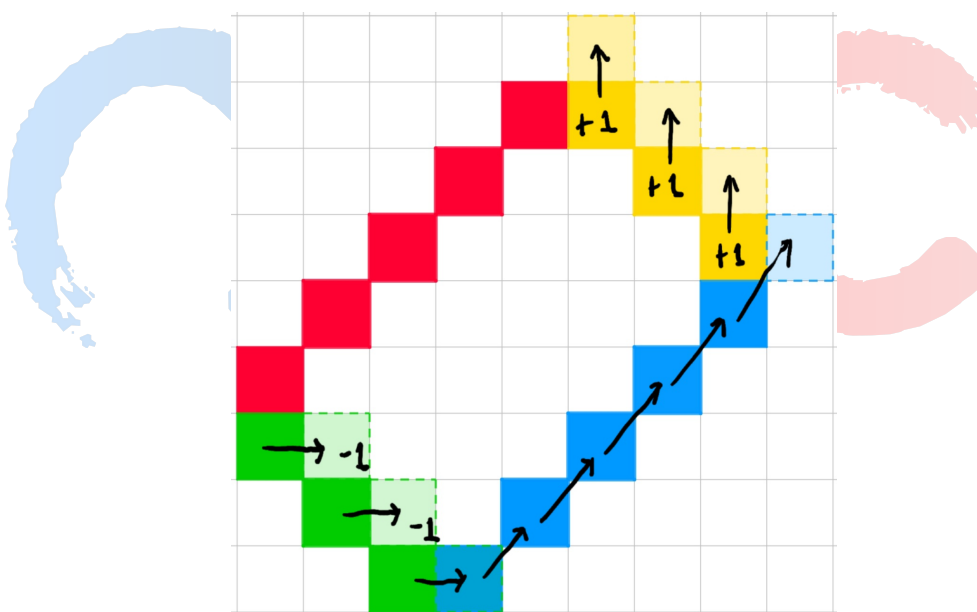


Figura 10: transformando a figura em retângulo torto I.

Ideia 3 (continuação): Agora basta só fazer a conta e adaptar o mesmo argumento para n ímpar, o problema essencialmente já acabou!

Agora, ainda no caso n par e já supondo que a figura máxima seja um retângulo torto $x \times y$, temos de maximizar sua área interna. Assim, temos que

$$n = 2x + 2y - 4$$

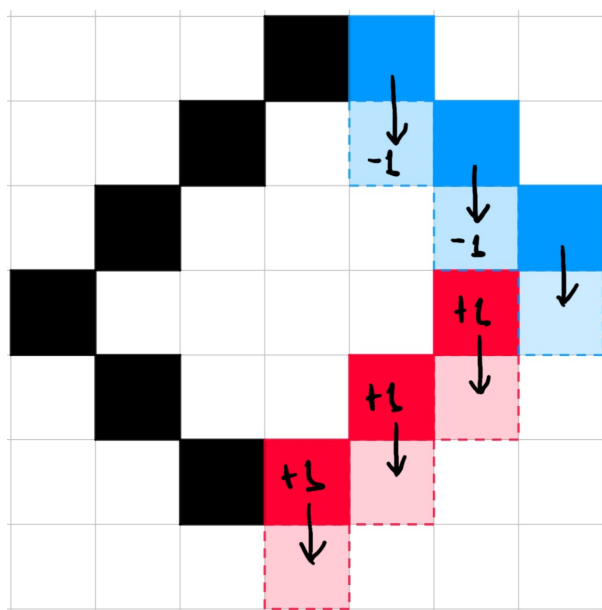


Figura 11: transformando a figura em retângulo torto II.

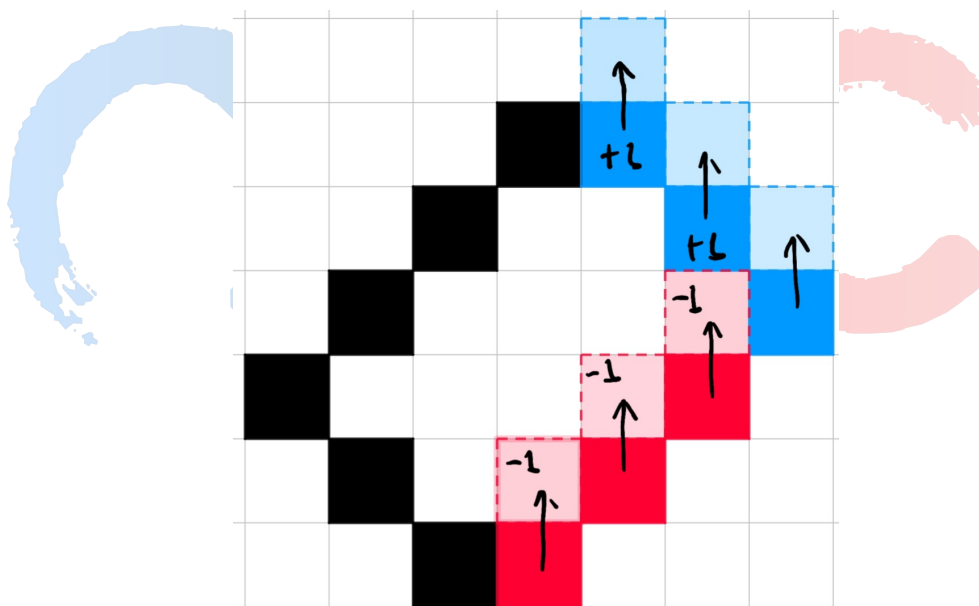


Figura 12: cuidado ao transformar a figura em um retângulo torto.

e que a área interna da figura vale

$$(x - 1)(y - 1) + (x - 2)(y - 2).$$

Pela desigualdade entre as médias, a área interna é máxima quando $x = y = \frac{n+4}{4}$; então, a área interna máxima é menor ou igual que

$$\left\lfloor \left(\frac{n}{4} \right)^2 + \frac{n-4}{4} \right\rfloor.$$

Para $n = 4t$, isso dá $t^2 + (t - 1)^2 = 2t^2 - 2t + 1$; para $n = 4t + 2$, isso dá $2t^2$.

A seguir, verificamos que esses valores podem ser atingidos quando n for par:

- Para $n = 4t$, tome o retângulo torto $(t + 1) \times (t + 1)$ como mostrado na figura 13. Sua área interna é $t^2 + (t - 1)^2 = 2t^2 - 2t + 1$.

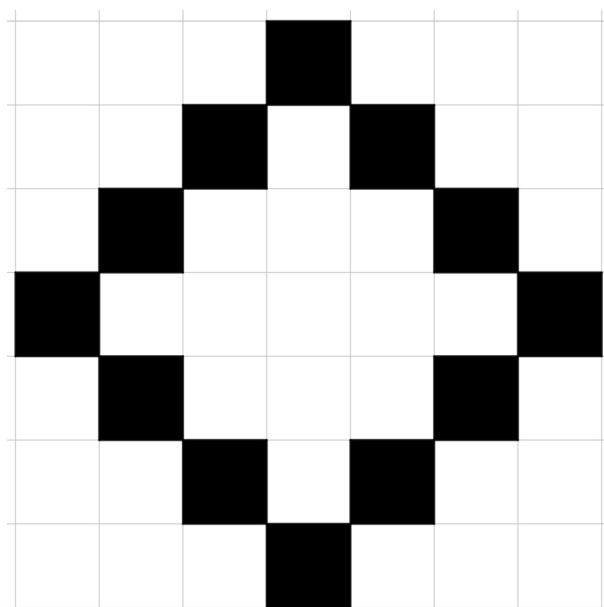


Figura 13: área interna máxima quando $n = 4t$.

- Para $n = 4t + 2$, pegue o retângulo torto $(t + 1) \times (t + 1)$ do item anterior, e adicione uma casa preta em AH e outra em DE ; em seguida, transforme a figura como mostrado na figura 14, de modo que ela ganhe $2t - 1$ casas brancas. Sua área interna será $2t^2 - 2t + 1 + (2t - 1) = 2t^2$.

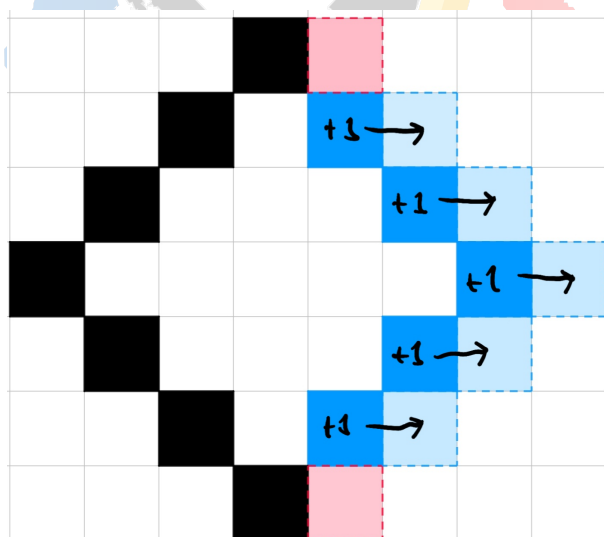


Figura 14: área interna máxima quando $n = 4t + 2$.

Afirmção 7. Se n for ímpar, a área interna máxima vale $\lfloor \frac{(n-2)^2}{8} \rfloor$.

Note que, pelas afirmações 4 e 5, a configuração máxima para n ímpar tem a forma mostrada na figura 15 ($AH \neq NE$, $BC \neq FG$ e AB , EF , HG , CD estão determinados ou por DE e AH ou por BC e FG). Isso nada mais é do que um retângulo torto $x \times y$ com $y - 2$ casas adicionais. Assim,

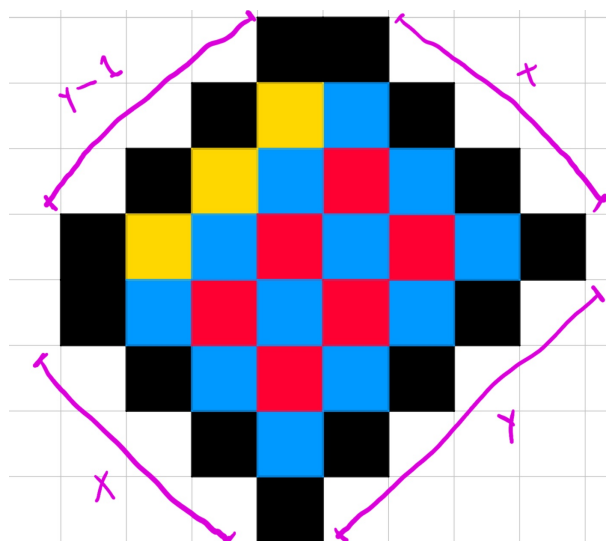


Figura 15: área máxima para n ímpar.

$$n = 2x + 2y - 3$$

e a área interna vale

$$\begin{aligned} & (x - 1)(y - 1) + (x - 2)(y - 2) + y - 2 = \\ & = (x - 1)(y - 1) + (x - 1)(y - 2) \\ & = (x - 1)(2y - 3) \\ & = (x - 1)(n - 2x). \end{aligned}$$

Desconsiderando por enquanto que x é inteiro, queremos encontrar o valor máximo de $f(x) = (x - 1)(n - 2x)$; derivando, temos $f'(x) = -4x + (n + 2) = 0$, logo, $x = \frac{n+2}{4}$. Então, o valor máximo da área interna da figura é menor ou igual que

$$\left\lfloor \left(\frac{n-2}{4} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{8} \right\rfloor.$$

Se $n = 4t + 1$, a expressão acima dá $\left\lfloor \frac{(4t-1)^2}{8} \right\rfloor = \left\lfloor 2t^2 - t + \frac{1}{8} \right\rfloor = 2t^2 - t$; se $n = 4t + 3$, ela dá $\left\lfloor \frac{(4t+1)^2}{8} \right\rfloor = \left\lfloor 2t^2 + t + \frac{1}{8} \right\rfloor = 2t^2 + t$. Se mostrarmos que há exemplos nesses dois casos, concluiremos que esses são, de fato, os valores máximos.

Para $n = 4t + 1$, basta pegar a configuração máxima para $4t$, adicionar uma casa e transformar o resultado como mostrado na figura 16.

Para $n = 4t + 3$, basta pegar a configuração máxima para $4t + 2$, adicionar uma casa e transformar o resultado como mostrado na figura 17.

Isso conclui a afirmação 7 e o problema. ■

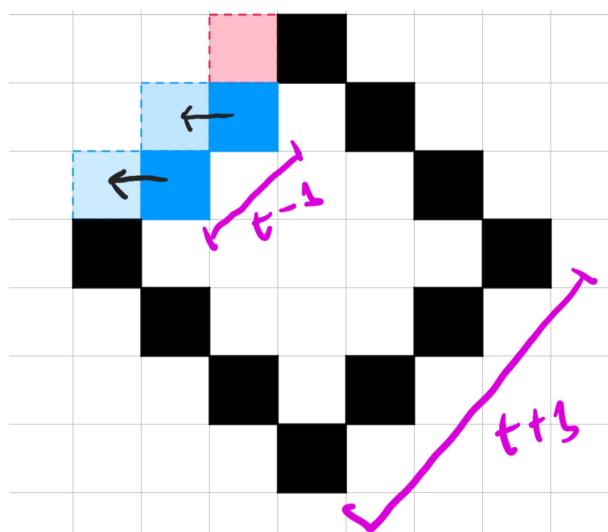


Figura 16: área interna máxima para $n = 4t + 1$.

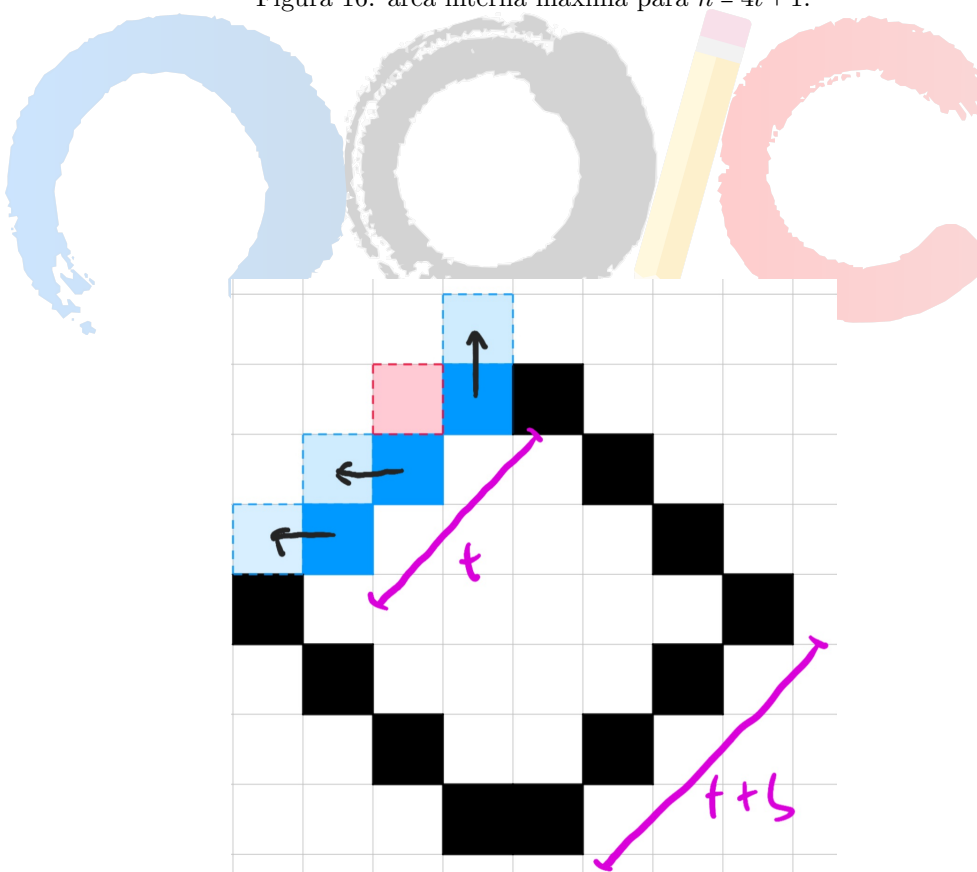


Figura 17: área interna máxima para $n = 4t + 3$.