

Instruções Gerais

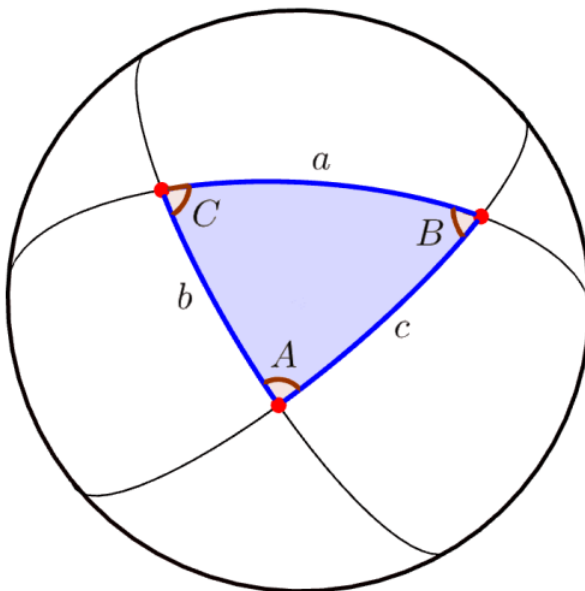
1. Não coloque nenhum meio de identificação pessoal nas suas resoluções;
2. A duração da prova é de 2 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 5 questões (totalizando 150 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. O uso de celulares e computadores é permitido apenas para visualizar as questões da prova, atender aos critérios de transparência exigidos e realizar o scan e a submissão das soluções ao final. Para quaisquer outros fins, não é permitido o uso de celulares, computadores ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos;
10. Mantenha seu microfone desligado durante toda a prova. Se precisar se comunicar com o fiscal, utilize o chat;
11. Deixe sua câmera com visão do seu ambiente de trabalho, em especial do computador que estiver utilizando para acessar a prova;
12. Ao final da prova, scaneie todas as folhas de resposta e faça a submissão pela plataforma Gradescope, selecionando com cuidado qual(is) página(s) pertence(m) a cada questão.
13. Uma tabela de constantes com informações relevantes para o Quiz está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Equação de Kepler:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

- Relação Trigonométrica da Elipse:

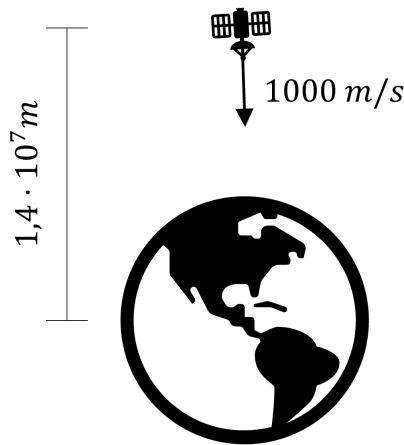
$$\cos(\nu) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cdot \cos(E)}$$

- Equação Polar da Elipse:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\nu)} = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$$

Questões

1. **Queda Livre (10 pontos)** Considere um pequeno corpo em órbita de excentricidade e ao redor da Terra, de massa M . Em um dado momento, ele é observado com velocidade total v a uma distância r do centro do planeta.
- (a) **(5 pontos)** Encontre os possíveis pares (E_1, M_1) e (E_2, M_2) de anomalia ex-cêntrica e anomalia média no momento de observação. Explique sucintamente por que dois pares são possíveis, e qual informação relacionada à velocidade poderia distinguir quais as anomalias no momento de observação.
- (b) **(5 pontos)** Um objeto foi arremessada de uma distância r em direção ao solo, com velocidade v . Calcule o tempo de queda livre até que ela atinja o solo.



2. **Hugo Observações (20 pontos)** Durante um dos treinamentos em Barra do Piraí, Hugo decidiu realizar fotografias solares com seus alunos. Para isso, ele utilizou um telescópio catadióptrico Schmidt-Cassegrain e instalou um filtro solar polimérico que bloqueia 99,98% da luz incidente. As especificações técnicas do conjunto são:
- Razão focal: $f/10$
 - Diâmetro do espelho principal (D): $300 mm$
 - Diâmetro da obstrução do espelho secundário (d_{obs}): $100 mm$
 - Tamanho físico de cada pixel (l): $10 \mu m$
 - Diâmetro do sensor CCD (e de seu obturador): $100 mm$
- a) **(4 pontos)** Determine a distância focal do telescópio (em centímetros) e a escala de placa do sistema (em "/pixel).

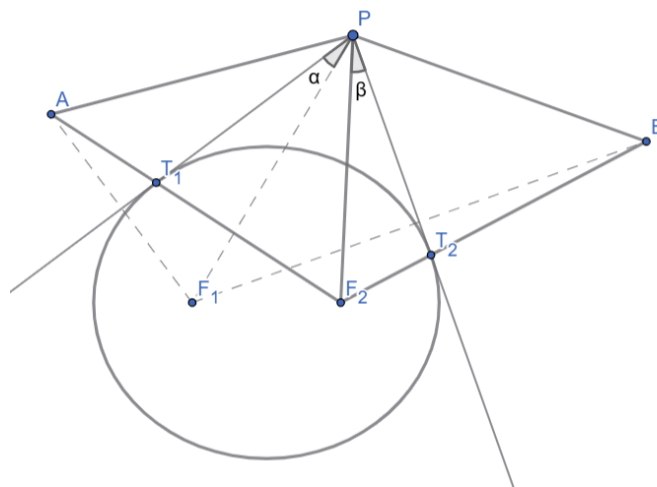
- b) **(4 pontos)** Confira se o disco solar pode ser inteiramente capturado e calcule a quantidade de pixels ocupados por ele. Considere o diâmetro angular médio do Sol como sendo $30'$.
- c) **(12 pontos)** O último aluno da fila, em uma clara mostra de bom senso, terminou sua foto e então removeu o filtro solar antes de desapontar o telescópio.

O CCD é dotado de um obturador metálico (com o mesmo diâmetro que o CCD), que se fecha quando a câmera não está sendo utilizada, a fim de proteger o aparelho. Mesmo com essa proteção, esse descuido pode ser extremamente perigoso. Suponha que a chapa do obturador seja um disco fino que irradia calor por suas duas faces, e que se comporta como um corpo cinza de albedo $\alpha = 0,4$. Se a temperatura ambiente era $T_a = 27^\circ C$, qual a temperatura de equilíbrio alcançada por essa peça?

- 3. Dudu Geometrias (20 pontos)** Dudu está em um sistema estelar distante, observando a órbita elíptica de um planeta ao redor de sua estrela. A estrela estava no foco F da elipse; o outro foco era F' . Para observar o sistema, Dudu se posiciona em um ponto fixo P , distante 1 UA da estrela, no plano da órbita.

Ao longo de uma translação, Dudu observa máximas elongações de $\theta_1 = 60^\circ$ a leste e $\theta_2 = 30^\circ$ a oeste. Além disso, a análise espectral do planeta aponta que seu redshift se anula em toda elongação de $\theta_3 = 15^\circ$ a leste, independente do planeta estar em movimento direto ou retrógrado.

- (a) **(8 pontos)** Na imagem a seguir, P é um ponto externo a uma elipse de focos F_1 e F_2 . Os pontos T_1 e T_2 são pontos de tangência, e os pontos A e B são reflexões do foco F_1 sobre as retas $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$, respectivamente. Prove que os ângulos α e β são iguais. Esse resultado é conhecido como Teorema de Poncelet.



(b) **(12 pontos)** Determine os valores do semi-eixo maior a e da excentricidade e da órbita.

4. **Excesso de Cor (35 pontos)** Considere um modelo no qual a luz atravessa um meio com extinção. A cada trecho Δs percorrido por um fóton, existe uma chance Δp desse fóton ser absorvido durante o trecho. As grandezas Δs e Δp são muito pequenas, e a aproximação linear só vale para deslocamentos curtos.

(a) **(5 pontos)** Suponha um feixe de luz que atravessa uma distância razoável s , a qual pode ser subdividida em pequenos caminhos de comprimento Δs . Determine a extinção A entre o início e o fim de todo o percurso. Deixe sua resposta em função de s e de $\Delta p/\Delta s$.

Nota: A extinção é definida como a diferença de magnitude $A = m - m_0$.

(b) **(5 pontos)** O resultado anterior nos motiva a definir um coeficiente de extinção $\alpha = 2,5 \cdot \Delta p/\Delta s$. Por conta da interação luz-matéria, esse coeficiente varia em função da frequência da radiação na forma:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \nu^{1,2}$$

Esse efeito gera o chamado avermelhamento, que pode ser mensurado por métricas conhecidas como excessos de cor. Considere as frequências efetivas da banda B ($\nu_B = 675$ THz), da banda V ($\nu_V = 540$ THz) e da banda I ($\nu_I = 375$ THz). Os excessos de cor são definidos em função das extinções, $E_{B-V} = A_B - A_V$ e $E_{V-I} = A_V - A_I$. Mostre que:

$$\frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} \approx 0,87$$

(c) **(10 pontos)** Considere uma estrela como um corpo negro, descrita pela aproximação de Wien para a lei de Planck, a qual descreve a radiância emitida em uma determinada frequência.

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-h\nu/\kappa_B T}$$

Mostre que o índice de cor $y = (B_0 - V_0)$ pode ser escrito em função do índice de cor $x = (V_0 - I_0)$ como uma função afim do tipo:

$$y = 0,82 \cdot x + C$$

Em que C é uma constante que não precisa ser determinada.

Nota: As variáveis B_0 , V_0 e I_0 correspondem às magnitudes intrínsecas (isto é, desconsiderando extinção) da estrela nas bandas B, V e I, respectivamente.

- (d) **(15 pontos)** A função afim é uma correlação aproximada que enfrenta limitações em seu emprego prático. No entanto, para fins de simplificação, suponha que uma população estelar possa ser bem descrita pela função afim apresentada, com $C = 0,25$. Uma estrela foi observada com $(B - V) = 1,95$ e $(V - I) = 2,00$; estime seu índice de cor intrínseco $(V_0 - I_0)$.

5. ITA Cube (65 pontos) A ITA Cube é uma iniciativa estudantil do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), com membros desde o primeiro até o último ano da graduação. Ela tem por objetivo projetar, construir e lançar nanossatélites para fins educacionais, proporcionando contato dos discentes com a prática de engenharia aeroespacial desde o início da graduação.

Suponha que Elias, um estudante universitário, esteja no Centro Espacial do ITA ($\varphi_0 = 23^\circ 12' \text{ S}$, $\lambda_0 = 45^\circ 52' \text{ O}$), monitorando um satélite recém-lançado em órbita baixa. O satélite orbita em sentido direto, e seus parâmetros orbitais seguem conforme o listado:

- Semi-eixo maior $a = 7,20 \cdot 10^6 \text{ m}$;
- Excentricidade $e = 0,051$;
- Inclinação (em relação ao Equador) $i = 28^\circ 29'$;
- Longitude do Nodo Ascendente (em relação ao Equador) $\Omega = 230^\circ 07'$;
- Argumento do periastro $\omega = 129^\circ 53'$;

O satélite possui sensores e envia informações constantemente à estação de solo. Em determinado momento, Elias vê o satélite passar pelo seu zênite, viajando em sentido norte. Para continuar a comunicação com o satélite, ele precisa descobrir para onde deve apontar sua antena.

- (a) **(10 pontos)** Qual o tempo sideral local (TSL) no momento de observação?
- (b) **(10 pontos)** Qual a anomalia verdadeira, ν , no momento de observação?
- (c) **(15 pontos)** Qual a velocidade angular geocêntrica do satélite em ascensão reta ($\mu_\alpha = d\alpha/dt$) e em declinação ($\mu_\delta = d\delta/dt$)?
- (d) **(15 pontos)** 6 minutos depois, o satélite estará sobrevoando sobre quais coordenadas (φ , λ) na Terra?
Dica: será que a anomalia excêntrica consegue ajudar a responder essa questão?
- (e) **(15 pontos)** Com que altura (h) e que azimute (A) Elias observará o satélite depois dos 6 minutos terem passado?