

## Instruções Gerais

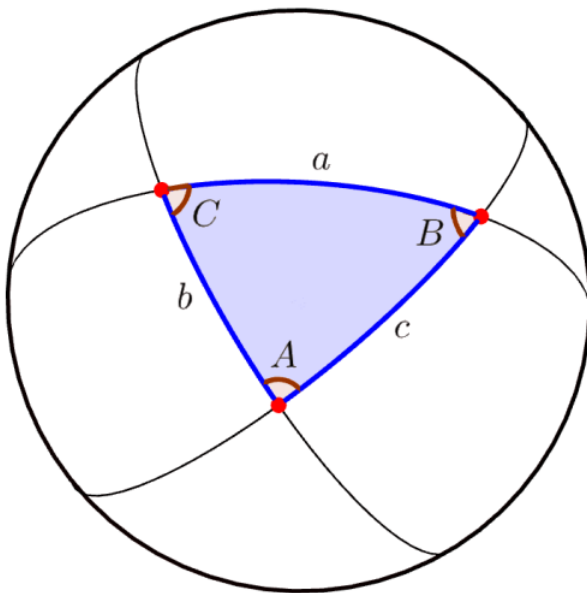
1. Não coloque nenhum meio de identificação pessoal nas suas resoluções;
2. A duração da prova é de 2 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 5 questões (totalizando 150 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. O uso de celulares e computadores é permitido apenas para visualizar as questões da prova, atender aos critérios de transparência exigidos e realizar o scan e a submissão das soluções ao final. Para quaisquer outros fins, não é permitido o uso de celulares, computadores ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos;
10. Mantenha seu microfone desligado durante toda a prova. Se precisar se comunicar com o fiscal, utilize o chat;
11. Deixe sua câmera com visão do seu ambiente de trabalho, em especial do computador que estiver utilizando para acessar a prova;
12. Ao final da prova, scaneie todas as folhas de resposta e faça a submissão pela plataforma Gradescope, selecionando com cuidado qual(is) página(s) pertence(m) a cada questão.
13. Uma tabela de constantes com informações relevantes para o Quiz está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	9,8 m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	23°27'	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	5,14°	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	32'	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	8,314 N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	67,8 km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Equação de Kepler:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

- Relação Trigonométrica da Elipse:

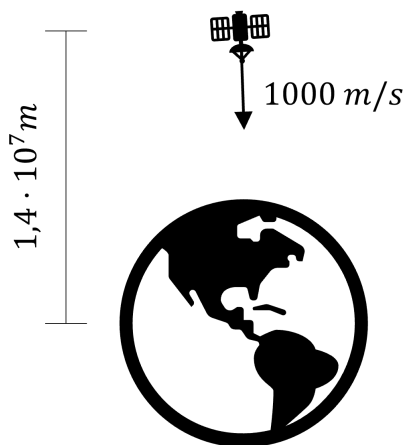
$$\cos(\nu) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cdot \cos(E)}$$

- Equação Polar da Elipse:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\nu)} = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$$

## Questões

1. **Queda Livre (10 pontos)** Considere um pequeno corpo em órbita de excentricidade  $e$  ao redor da Terra, de massa  $M$ . Em um dado momento, ele é observado com velocidade total  $v$  a uma distância  $r$  do centro do planeta.
- (a) **(5 pontos)** Encontre os possíveis pares  $(E_1, M_1)$  e  $(E_2, M_2)$  de anomalia excêntrica e anomalia média no momento de observação. Explique sucintamente por que dois pares são possíveis, e qual informação relacionada à velocidade poderia distinguir quais as anomalias no momento de observação.
- (b) **(5 pontos)** Um objeto foi arremessada de uma distância  $r$  em direção ao solo, com velocidade  $v$ . Calcule o tempo de queda livre até que ela atinja o solo.



### Solução:

- (a) Podemos encontrar o semi-eixo maior da órbita pela equação vis-viva:

$$v = \sqrt{GM \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$a = \frac{GM r}{2GM - v^2 r}$$

A equação polar das cônicas, em função da anomalia excêntrica, é dada por:

$$r = a \cdot (1 - e \cos(E))$$

$$\Rightarrow \cos(E) = \frac{1}{e} \cdot \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(E) = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)\right) \\ E_2 = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)\right) \end{cases}$$

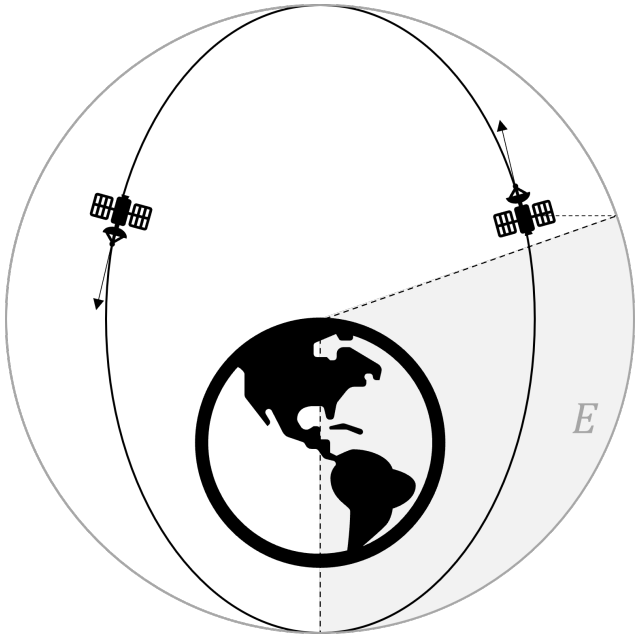
A anomalia média pode ser encontrada pela equação de Kepler:

$$M = E - e \sin(E)$$

Para  $E = \cos^{-1}(\dots)$ , o seno é positivo, e para  $E = 2\pi - \cos^{-1}(\dots)$ , o seno é negativo. Sendo assim,

$$\begin{cases} M_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)\right) - e \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)^2} \\ M_2 = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)\right) + e \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{v^2 r}{GM} - 1\right)^2} \end{cases}$$

Existem dois pares possíveis, pois existem dois momentos distintos na órbita em que o corpo está a mesma distância e com a mesma velocidade, um em sentido de afastamento, outro em sentido de aproximação. O par  $(E_1, M_1)$ , no intervalo de 0 a  $\pi$  se refere à situação de afastamento, e o par  $(E_2, M_2)$ , entre  $\pi$  e  $2\pi$  se refere à aproximação. Poderíamos distingui-los pelo sentido da velocidade radial.



(b) Os valores de  $r$  e  $v$  já são conhecidos para a situação inicial. Na colisão com o solo, a distância  $R$  é o próprio raio da Terra, e a velocidade  $V$  é encontrada por conservação de energia:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

$$V = \sqrt{v^2 + 2GM \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)} \approx 8300 \text{ m/s}$$

A queda livre é o limite de uma órbita elíptica quando a excentricidade tende a um. Nas duas situações, o corpo está em aproximação, portanto, podemos calcular a anomalia média substituindo a excentricidade no cálculo de  $M_2$ :

$$M_{inicial} = 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{v^2 r}{GM} - 1 \right) + \sqrt{1 - \left( \frac{v^2 r}{GM} - 1 \right)^2} \approx 3,67 \text{ rad}$$

$$M_{final} = 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{V^2 R}{GM} - 1 \right) + \sqrt{1 - \left( \frac{V^2 R}{GM} - 1 \right)^2} \approx 5,81 \text{ rad}$$

Para determinar o tempo, vamos primeiro determinar o semi-eixo maior da órbita degenerada:

$$a = \frac{GMr}{2GM - v^2r} \approx 7,13 \cdot 10^6 \text{ m}$$

O período pode ser encontrado pela terceira lei de Kepler como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 6,0 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Por fim, o tempo de queda é dado por:

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot (M_{final} - M_{inicial}) \approx 2,04 \cdot 10^3 \text{ s} \approx \boxed{34 \text{ min}}$$

**2. Hugo Observações (20 pontos)** Durante um dos treinamentos em Barra do Piraí, Hugo decidiu realizar fotografias solares com seus alunos. Para isso, ele utilizou um telescópio catadióptrico Schmidt-Cassegrain e instalou um filtro solar polimérico que bloqueia 99,98% da luz incidente. As especificações técnicas do conjunto são:

- Razão focal:  $f/10$
  - Diâmetro do espelho principal ( $D$ ):  $300 \text{ mm}$
  - Diâmetro da obstrução do espelho secundário ( $d_{obs}$ ):  $100 \text{ mm}$
  - Tamanho físico de cada pixel ( $l$ ):  $10 \mu\text{m}$
  - Diâmetro do sensor CCD (e de seu obturador):  $100 \text{ mm}$
- a) **(4 pontos)** Determine a distância focal do telescópio (em centímetros) e a escala de placa do sistema (em "/pixel).
- b) **(4 pontos)** Confira se o disco solar pode ser inteiramente capturado e calcule a quantidade de pixels ocupados por ele. Considere o diâmetro angular médio do Sol como sendo  $30'$ .
- c) **(12 pontos)** O último aluno da fila, em uma clara mostra de bom senso, terminou sua foto e então removeu o filtro solar antes de desapontar o telescópio.

O CCD é dotado de um obturador metálico (com o mesmo diâmetro que o CCD), que se fecha quando a câmera não está sendo utilizada, a fim de proteger o aparelho. Mesmo com essa proteção, esse descuido pode ser extremamente perigoso. Suponha que a chapa do obturador seja um disco fino que irradia calor por suas duas faces, e que se comporta como um corpo

cinza de albedo  $\alpha = 0,4$ . Se a temperatura ambiente era  $T_a = 27^\circ C$ , qual a temperatura de equilíbrio alcançada por essa peça?

**Solução:**

- a) A distância focal do telescópio pode ser calculada diretamente pela razão focal e diâmetro principal:

$$f = R \cdot D = 10 \cdot 300 = 3000 \text{ mm}$$

$$f = 300 \text{ cm}$$

A escala de placa em "/pixel é dada pela expressão:

$$p = \frac{206265 \cdot l}{f} = \frac{206265 \cdot 0,01}{3000}$$

$$p \approx 0,688 \text{ "/pixel}$$

- b) O diâmetro angular do Sol é  $30' = 1800''$ . Convertendo o diâmetro angular para número de pixels, temos:

$$d_{px} = \frac{1800}{0,688} \approx 2618 \text{ pixels}$$

O diâmetro físico da imagem solar no plano focal será:  $2616 \cdot 10\mu m \approx 26,2 \text{ mm}$ . Como o sensor e o obturador possuem  $100 \text{ mm}$  de diâmetro, **a imagem do Sol cabe no CCD.**

A área projetada (número de pixels sensibilizados) será a área do círculo:

$$N_{\odot} = \frac{\pi(2616)^2}{4}$$

$$N_{\odot} \approx 5,38 \cdot 10^6 \text{ pixels}$$

- c) A energia incidente considera a área de captação descontando a obstrução do espelho secundário:

$$E = F_{\odot} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d_{obs}^2) = 1367 \cdot \frac{\pi}{4} (0,3^2 - 0,1^2) \text{ W}$$

$$E \approx 85,9 \text{ W}$$

A parcela de energia absorvida pelo obturador metálico depende do seu albedo  $\alpha$ :

$$E_{abs} = (1 - \alpha)E = (1 - 0,4) \cdot 85,9 = 51,5 \text{ W}$$

No equilíbrio térmico, a potência absorvida é igual à irradiada pela Lei de Stefan-Boltzmann. A chapa metálica emite por ambas as faces, logo a área de emissão é duas vezes a área de um círculo de 100 mm:

$$E_{abs} = 2 \cdot \left( \frac{\pi D_{ccd}^2}{4} \right) \sigma (T_{eq}^4 - T_a^4)$$

$$T_{eq} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot E_{abs}}{\pi D_{ccd}^2 \sigma} + T_a^4}$$

$$T_{eq} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 51,5}{3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} + (300)^4}$$

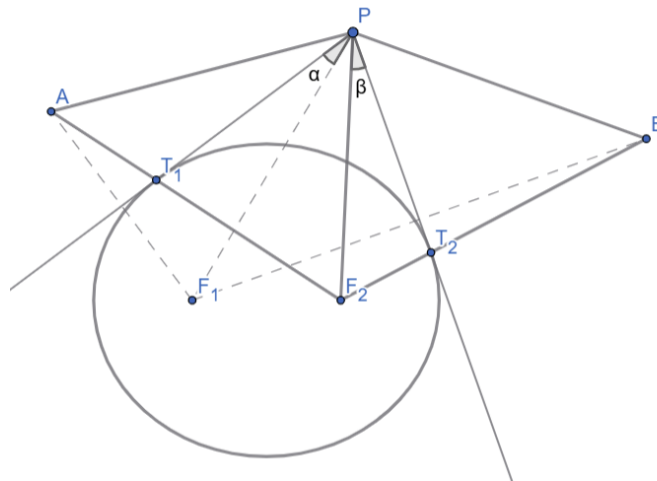
$$T_{eq} \approx 506,8 \text{ K}$$

A temperatura de  $\sim 233^\circ\text{C}$  é alta o suficiente para danificar componentes plásticos e derreter conexões soldadas da placa do CCD, ilustrando o perigo de remover o filtro solar antes de desapontar o instrumento.

**3. Dudu Geometrias (20 pontos)** Dudu está em um sistema estelar distante, observando a órbita elíptica de um planeta ao redor de sua estrela. A estrela estava no foco  $F$  da elipse; o outro foco era  $F'$ . Para observar o sistema, Dudu se posiciona em um ponto fixo  $P$ , distante 1 UA da estrela, no plano da órbita.

Ao longo de uma translação, Dudu observa máximas elongações de  $\theta_1 = 60^\circ$  a leste e  $\theta_2 = 30^\circ$  a oeste. Além disso, a análise espectral do planeta aponta que seu redshift se anula em toda elongação de  $\theta_3 = 15^\circ$  a leste, independente do planeta estar em movimento direto ou retrógrado.

- (a) **(8 pontos)** Na imagem a seguir,  $P$  é um ponto externo a uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Os pontos  $T_1$  e  $T_2$  são pontos de tangência, e os pontos  $A$  e  $B$  são reflexões do foco  $F_1$  sobre as retas  $\overline{PT_1}$  e  $\overline{PT_2}$ , respectivamente. Prove que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais. Esse resultado é conhecido como Teorema de Poncelet.



- (b) (12 pontos) Determine os valores do semi-eixo maior  $a$  e da excentricidade  $e$  da órbita.

### Solução:

- (a) Pela construção da reflexão geométrica, a reta tangente  $PT_1$  atua como a mediatriz do segmento  $F_1A$ , o que implica que a tangente é a bissetriz do ângulo  $\angle F_1T_1A$ . Consequentemente, prolongando a reta  $AT_1$ , o ângulo entre essa reta e a tangente é estritamente igual ao ângulo entre o raio focal  $F_1T_1$  e a própria tangente. Pela propriedade óptica fundamental das elipses, a tangente forma ângulos iguais com os raios focais no ponto de tangência. Para que essa condição angular seja satisfeita, a reta prolongada deve obrigatoriamente passar pelo segundo foco, provando que o foco refletido  $A$ , o ponto de tangência  $T_1$  e o foco  $F_2$  são colineares. Além disso, pela simetria da reflexão, temos que  $T_1F_1 = T_1A$ . Aproveitando a colinearidade, a distância total do segmento é  $AF_2 = AT_1 + F_2T_1$ . Substituindo a igualdade simétrica, obtemos  $AF_2 = T_1F_1 + F_2T_1 = 2a$ , de acordo com a própria definição de elipse. A propriedade que descreve este lugar geométrico dos focos refletidos, que sempre distam  $2a$  do segundo foco, é conhecida como círculo auxiliar.

Pela natureza da construção das reflexões utilizando os eixos das tangentes, a distância do observador exterior  $P$  aos pontos refletidos é conservada em relação à distância original de  $P$  ao foco  $F_1$ . Dessa forma, é garantido que  $PA = PB = PF_1$ .

Avaliando agora a geometria maior, focamos nos triângulos  $\triangle PAF_2$  e  $\triangle PBF_2$ . Nós temos que:  $PA = PB$  pela construção de isometria das reflexões;  $AF_2 = BF_2 = 2a$  pela constância do círculo diretor e o lado  $PF_2$  é compartilhado por ambos os triângulos.

Pelo caso de congruência Lado-Lado-Lado, concluímos que o triângulo  $\triangle PAF_2$  é estritamente congruente ao triângulo  $\triangle PBF_2$ . Uma consequência geométrica direta e necessária dessa congruência é a igualdade dos ângulos centrais no vértice  $P$ :

$$\angle F_2PA = \angle F_2PB$$

Definindo o ângulo fixo entre as linhas visuais dos focos a partir de  $P$  como  $\angle F_1PF_2 = \gamma$ , podemos compor a soma dos ângulos. Como a tangente atua como bissetriz no triângulo formado pela reflexão, o ângulo gerado  $\angle APF_1$  corresponde a duas vezes o ângulo original, isto é,  $2\alpha$ . Igualmente, para a outra tangente, o ângulo  $\angle BPF_1$  é exatamente  $2\beta$ .

Apoiando-se na disposição da figura e na construção angular, as equações dos ângulos totais assumem a forma:

$$\angle F_2PA = \angle F_1PF_2 + \angle APF_1 = \gamma + 2\alpha$$

$$\angle F_2PB = \angle F_1PF_2 + \angle BPF_1 = \gamma + 2\beta$$

Igualando as duas expressões a partir da congruência provada:

$$\gamma + 2\alpha = \gamma + 2\beta \implies \boxed{\alpha = \beta}$$

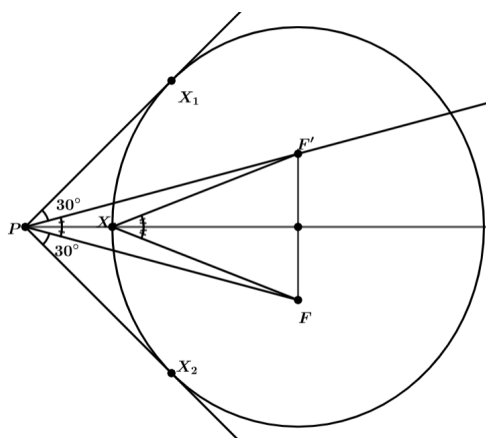
- (b) A observação espectroscópica constitui o fundamento físico para a resolução deste problema. Um redshift estritamente nulo indica que a componente radial da velocidade do planeta em relação ao observador é igual a zero. Como o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória geométrica, conclui-se que a linha de visão do observador no ângulo  $\theta_3 = 15^\circ$  deve ser perpendicular à tangente da órbita naquele instante. Em suma, a linha de visão coincide com a reta normal geométrica à elipse. Além disso, os ângulos de elongação máxima configuram os pontos de tangências entre a linha de visada e a órbita elíptica.

Adotamos a linha focal  $PF$  como eixo angular de referência ( $0^\circ$ ). As retas tangentes à órbita encontram-se aos ângulos de  $+60^\circ$  e  $-30^\circ$ , enquanto a reta normal está localizada a  $15^\circ$ .

Pela propriedade de isogonalidade das tangentes traçadas a partir de um ponto exterior a uma cônica, provada no item (a), a bissetriz do ângulo entre as tangentes coincide com a bissetriz do ângulo formado pelas linhas focais  $PF$  e  $PF'$  (onde  $F'$  representa o segundo foco da elipse), ou seja  $\angle X_2PF = \angle X_1PF'$ . A bissetriz das tangentes corresponde ao ângulo médio, cujo valor é exatamente  $15^\circ$ . Sabendo que o foco  $F$  encontra-se a  $0^\circ$ , a linha do foco  $PF'$  deve obrigatoriamente estar posicionada no ângulo de  $30^\circ$ .

Nota-se que a reta normal, a  $15^\circ$ , coincide perfeitamente com a bissetriz focal traçada a partir de  $P$ . Pela propriedade óptica da elipse, a normal em um dado ponto atua como a bissetriz do ângulo interno formado pelos raios focais no ponto de contato. Para que uma reta partindo do observador  $P$  seja, de forma simultânea, a bissetriz do ângulo  $\angle FPF'$  e a bissetriz do ângulo focal na elipse, por congruência de triângulos temos que as distâncias do observador a ambos os focos sejam idênticas:

$$PF' = PF = 1 \text{ UA}$$



Realizando a reflexão do foco  $F$  através da tangente de  $60^\circ$ , obtemos o ponto  $F^*$ , o qual forma um ângulo de  $120^\circ$  com a reta de referência. O triângulo  $\triangle F^*PF'$  possui, no vértice  $P$ , um ângulo interno  $\angle F^*PF' = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ .

Usando a propriedade do círculo diretor centrado em  $F'$ , a distância do foco refletido ao segundo foco corresponde à constante do eixo maior da elipse. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $\triangle F^*PF'$ , de catetos  $PF^* = 1$  e  $PF' = 1$ :

$$(2a)^2 = 1^2 + 1^2 \implies 4a^2 = 2 \implies a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ UA}$$

Para determinar a excentricidade, analisamos a distância focal geométrica  $FF' = 2ae$  no triângulo  $\triangle FPF'$ , cujo ângulo interno é de  $30^\circ$ . Aplicando a Lei dos Cossenos:

$$(2ae)^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos(30^\circ)$$

$$4a^2e^2 = 2 - \sqrt{3}$$

Substituindo o valor conhecido de  $a^2 = 1/2$ , obtemos:

$$4 \left( \frac{1}{2} \right) e^2 = 2 - \sqrt{3} \implies 2e^2 = 2 - \sqrt{3} \implies e^2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}$$

Extraindo a raiz quadrada, encontramos a excentricidade exata:

$$e = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

4. **Excesso de Cor (35 pontos)** Considere um modelo no qual a luz atravessa um meio com extinção. A cada trecho  $\Delta s$  percorrido por um fóton, existe uma chance  $\Delta p$  desse fóton ser absorvido durante o trecho. As grandezas  $\Delta s$  e  $\Delta p$  são muito pequenas, e a aproximação linear só vale para deslocamentos curtos.

(a) **(5 pontos)** Suponha um feixe de luz que atravessa uma distância razoável  $s$ , a qual pode ser subdividida em pequenos caminhos de comprimento  $\Delta s$ . Determine a extinção  $A$  entre o início e o fim de todo o percurso. Deixe sua resposta em função de  $s$  e de  $\Delta p/\Delta s$ .

**Nota:** A extinção é definida como a diferença de magnitude  $A = m - m_0$ .

- (b) **(5 pontos)** O resultado anterior nos motiva a definir um coeficiente de extinção  $\alpha = 2,5 \cdot \Delta p / \Delta s$ . Por conta da interação luz-matéria, esse coeficiente varia em função da frequência da radiação na forma:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \nu^{1,2}$$

Esse efeito gera o chamado avermelhamento, que pode ser mensurado por métricas conhecidas como excessos de cor. Considere as frequências efetivas da banda B ( $\nu_B = 675$  THz), da banda V ( $\nu_V = 540$  THz) e da banda I ( $\nu_I = 375$  THz). Os excessos de cor são definidos em função das extinções,  $E_{B-V} = A_B - A_V$  e  $E_{V-I} = A_V - A_I$ . Mostre que:

$$\frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} \approx 0,87$$

- (c) **(10 pontos)** Considere uma estrela como um corpo negro, descrita pela aproximação de Wien para a lei de Planck, a qual descreve a radiância emitida em uma determinada frequência.

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-h\nu/\kappa_B T}$$

Mostre que o índice de cor  $y = (B_0 - V_0)$  pode ser escrito em função do índice de cor  $x = (V_0 - I_0)$  como uma função afim do tipo:

$$y = 0,82 \cdot x + C$$

Em que C é uma constante que não precisa ser determinada.

**Nota:** As variáveis  $B_0$ ,  $V_0$  e  $I_0$  correspondem às magnitudes intrínsecas (isto é, desconsiderando extinção) da estrela nas bandas B, V e I, respectivamente.

- (d) **(15 pontos)** A função afim é uma correlação aproximada que enfrenta limitações em seu emprego prático. No entanto, para fins de simplificação, suponha que uma população estelar possa ser bem descrita pela função afim apresentada, com  $C = 0,25$ . Uma estrela foi observada com  $(B - V) = 1,95$  e  $(V - I) = 2,00$ ; estime seu índice de cor intrínseco ( $V_0 - I_0$ ).

### Solução:

- (a) Vamos subdividir o intervalo  $s$  em  $s/\Delta s$  pequenos trechos, cada um de comprimento  $\Delta s$ . A chance de não ser absorvido em cada um desses trechos é  $(1 - \Delta p)$ . Assim, a chance de não ser absorvido em todos eles, e portanto chegar ao final do percurso, é:

$$1 - p = (1 - \Delta p)^{s/\Delta s}$$

Como  $\Delta p \ll 1$ , é válido dizer que:

$$1 - \Delta p \approx e^{-\Delta p}$$

Portanto,

$$1 - p = e^{-s \cdot \Delta p / \Delta s}$$

A intensidade de luz no final em comparação com o início é diretamente relacionada com a probabilidade de cada fóton de chegar até o fim:

$$\frac{I}{I_o} = e^{-s \cdot \Delta p / \Delta s}$$

A variação de magnitude, portanto:

$$A = m - m_0 = -2,5 \cdot \log \left( \frac{I}{I_o} \right)$$

$$\Rightarrow A = \left( 2,5 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta s} \right) \cdot s$$

(b) Utilizando a definição, nós temos:

$$\frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} = \frac{A_B - A_V}{A_V - A_I}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} = \frac{\alpha_B \cdot s - \alpha_V \cdot s}{\alpha_V \cdot s - \alpha_I \cdot s} = \frac{\alpha_B - \alpha_V}{\alpha_V - \alpha_I}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} = \frac{\alpha_0 \cdot \nu_B^{1,2} - \alpha_0 \cdot \nu_V^{1,2}}{\alpha_0 \cdot \nu_V^{1,2} - \alpha_0 \cdot \nu_I^{1,2}} = \frac{\nu_B^{1,2} - \nu_V^{1,2}}{\nu_V^{1,2} - \nu_I^{1,2}}$$

Efetando os cálculos, obtemos:

$$\Rightarrow \frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} \approx 0,87$$

(c) Primeiro, é necessário entender o que o problema quer. Observando a equação fornecida, se fixarmos a temperatura de uma estrela, seus índices de cor já estarão definidos. No entanto, o exercício não pergunta os valores numéricos desses índices de cor, tampouco define uma temperatura.

Trata-se, portanto, de descobrir uma relação que é obedecida independente da temperatura. Para cada temperatura possível, existe um par de índices de cor, e variando essa temperatura, obtemos uma curva que representa todos os possíveis pares. Com isso em mente, vamos resolver o item.

A magnitude em uma banda pode ser escrita como:

$$m_0 = -2,5 \cdot \log(I) + c$$

Em que  $c$  é uma constante, e remonta ao fato de que existe uma incidência associada à magnitude zero. Efetuando o logaritmo da radiância, obtemos:

$$\log(I) = \log\left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right) - \frac{h\nu}{\kappa_B T}$$

A parte  $\log(2h\nu^3/c^2)$  vai entrar dentro da constante  $c$ , e a parte que nos interessa é a dependente da temperatura.

$$m_0 = \frac{2,5 h \cdot \nu}{\kappa_B T} + c(\nu)$$

Para as três bandas em questão, podemos escrever:

$$\begin{cases} B_0 = \frac{2,5 h \cdot \nu_B}{\kappa_B T} + c_B \\ V_0 = \frac{2,5 h \cdot \nu_V}{\kappa_B T} + c_V \\ I_0 = \frac{2,5 h \cdot \nu_I}{\kappa_B T} + c_I \end{cases}$$

Os índices de cor, portanto, são:

$$\begin{cases} B_0 - V_0 = \frac{2,5 h \cdot (\nu_B - \nu_V)}{\kappa_B T} + c_B - c_V \\ V_0 - I_0 = \frac{2,5 h \cdot (\nu_V - \nu_I)}{\kappa_B T} + c_V - c_I \end{cases}$$

Perceba que:

$$(B_0 - V_0) = \frac{\nu_B - \nu_V}{\nu_V - \nu_I} \cdot (V_0 - I_0) + C$$

Realizando os cálculos, encontramos que:

$$\frac{\nu_B - \nu_V}{\nu_V - \nu_I} \approx 0,82$$

Portanto:

$$\boxed{(B_0 - V_0) \approx 0,82 \cdot (V_0 - I_0) + C}$$

(d) Sabemos que:

$$\frac{E_{B-V}}{E_{V-I}} \approx 0,87$$

$$\Rightarrow \frac{A_B - A_V}{A_V - A_I} \approx 0,87$$

$$\Rightarrow \frac{(B - B_0) - (V - V_0)}{(V - V_0) - (I - I_0)} \approx 0,87$$

$$\Rightarrow \frac{(B - V) - (B_0 - V_0)}{(V - I) - (V_0 - I_0)} \approx 0,87$$

Vamos utilizar que:  $(B_0 - V_0) \approx 0,82 \cdot (V_0 - I_0) + 0,25$

$$\frac{(B - V) - 0,82 \cdot (V_0 - I_0) - 0,25}{(V - I) - (V_0 - I_0)} \approx 0,87$$

$$\Rightarrow (B - V) - 0,82 \cdot (V_0 - I_0) - 0,25 \approx 0,87 \cdot (V - I) - 0,87 \cdot (V_0 - I_0)$$

$$\Rightarrow (V_0 - I_0) = \frac{1}{0,87 - 0,82} \cdot [0,87 \cdot (V - I) - (B - V) + 0,25] \approx \boxed{0,68}$$

- 5. ITA Cube (65 pontos)** A ITA Cube é uma iniciativa estudantil do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), com membros desde o primeiro até o último ano da graduação. Ela tem por objetivo projetar, construir e lançar nanossatélites para fins educacionais, proporcionando contato dos discentes com a prática de

engenharia aeroespacial desde o início da graduação.

Suponha que Elias, um estudante universitário, esteja no Centro Espacial do ITA ( $\varphi_0 = 23^\circ 12' \text{ S}$ ,  $\lambda_0 = 45^\circ 52' \text{ O}$ ), monitorando um satélite recém-lançado em órbita baixa. O satélite orbita em sentido direto, e seus parâmetros orbitais seguem conforme o listado:

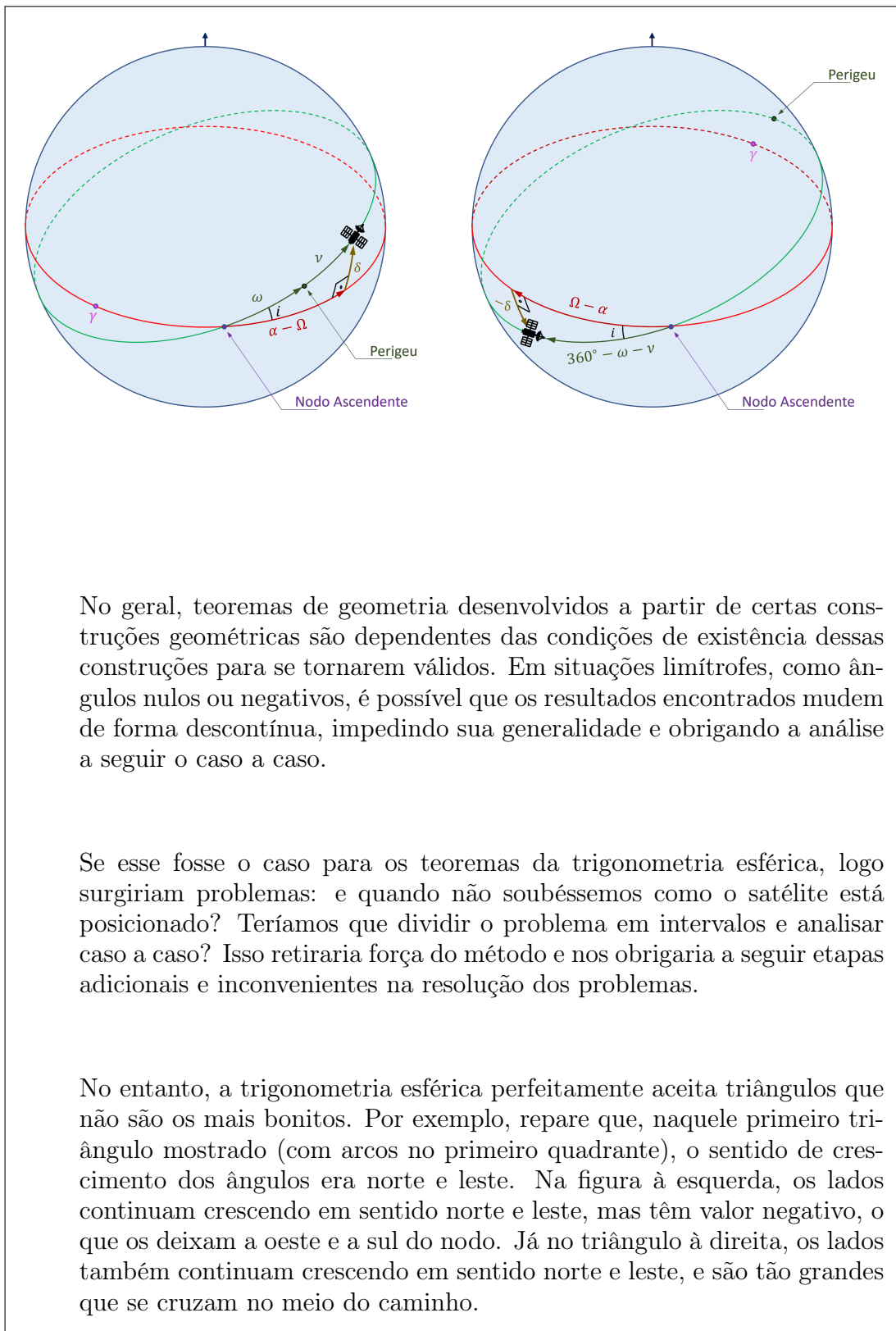
- Semi-eixo maior  $a = 7,20 \cdot 10^6 \text{ m}$ ;
- Excentricidade  $e = 0,051$ ;
- Inclinação (em relação ao Equador)  $i = 28^\circ 29'$ ;
- Longitude do Nodo Ascendente (em relação ao Equador)  $\Omega = 230^\circ 07'$ ;
- Argumento do periastro  $\omega = 129^\circ 53'$ ;

O satélite possui sensores e envia informações constantemente à estação de solo. Em determinado momento, Elias vê o satélite passar pelo seu zênite, viajando em sentido norte. Para continuar a comunicação com o satélite, ele precisa descobrir para onde deve apontar sua antena.

- (a) **(10 pontos)** Qual o tempo sideral local ( $TSL$ ) no momento de observação?
- (b) **(10 pontos)** Qual a anomalia verdadeira,  $\nu$ , no momento de observação?
- (c) **(15 pontos)** Qual a velocidade angular geocêntrica do satélite em ascensão reta ( $\mu_\alpha = d\alpha/dt$ ) e em declinação ( $\mu_\delta = d\delta/dt$ )?
- (d) **(15 pontos)** 6 minutos depois, o satélite estará sobrevoando sobre quais coordenadas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) na Terra?  
**Dica:** será que a anomalia excêntrica consegue ajudar a responder essa questão?
- (e) **(15 pontos)** Com que altura ( $h$ ) e que azimute ( $A$ ) Elias observará o satélite depois dos 6 minutos terem passado?

### Solução:

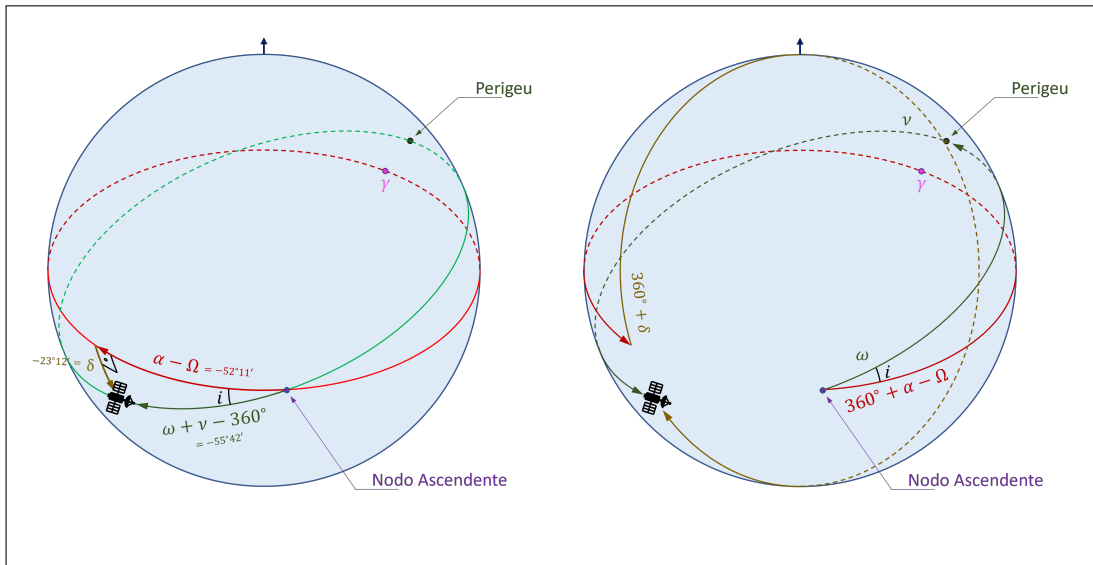
- (a) Vamos começar com uma representação do satélite em órbita. Na figura abaixo, observamos duas representações distintas. A primeira (à esquerda) representa todos os ângulos como se fossem pertencentes ao primeiro quadrante, o que facilita a visualização, mas não é fiel aos dados fornecidos. A segunda imagem (à direita) representa a posição do satélite de forma fiel ao enunciado. Vamos começar investigando se os resultados obtidos com a primeira representação perdem generalidade.



No geral, teoremas de geometria desenvolvidos a partir de certas construções geométricas são dependentes das condições de existência dessas construções para se tornarem válidos. Em situações limítrofes, como ângulos nulos ou negativos, é possível que os resultados encontrados mudem de forma descontínua, impedindo sua generalidade e obrigando a análise a seguir o caso a caso.

Se esse fosse o caso para os teoremas da trigonometria esférica, logo surgiriam problemas: e quando não soubéssemos como o satélite está posicionado? Teríamos que dividir o problema em intervalos e analisar caso a caso? Isso retiraria força do método e nos obrigaria a seguir etapas adicionais e inconvenientes na resolução dos problemas.

No entanto, a trigonometria esférica perfeitamente aceita triângulos que não são os mais bonitos. Por exemplo, repare que, naquele primeiro triângulo mostrado (com arcos no primeiro quadrante), o sentido de crescimento dos ângulos era norte e leste. Na figura à esquerda, os lados continuam crescendo em sentido norte e leste, mas têm valor negativo, o que os deixam a oeste e a sul do nodo. Já no triângulo à direita, os lados também continuam crescendo em sentido norte e leste, e são tão grandes que se cruzam no meio do caminho.



A trigonometria esférica não vê problema em nenhum dos dois triângulos. Poderíamos, inclusive, misturar as coisas, e ter um arco negativo e outro dando a volta. Sendo assim, todas as equações deduzidas para aquele nosso primeiro triângulo (com tudo no primeiro quadrante) mantêm sua validade, desde que os sentidos de crescimento se conservem.

Pela lei das cotangentes:

$$\cos(\alpha - \Omega) \cos(90^\circ) = \sin(\alpha - \Omega) \cot(\delta) - \sin(90^\circ) \cot(i)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \Omega) \cot(\delta) = \cot(i)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \Omega) = \tan(\delta) \cot(i)$$

Como o satélite está no hemisfério sul, viajando em sentido norte,  $-90^\circ < \alpha - \Omega < 0^\circ$ , ou seja, podemos aplicar a operação de arcosseno:

$$\Rightarrow \alpha = \Omega + \sin^{-1}(\tan(\delta) \cot(i))$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 177^\circ 56'$$

Como o satélite passa pelo zênite, seu ângulo horário é nulo. Sendo assim,

$$TSL = H + \alpha = \alpha \approx \boxed{11^h 52^m}$$

(b) Pela lei dos cossenos:

$$\cos(\nu_0 + \omega) = \cos(\alpha - \Omega) \cos(\delta) + \sin(\alpha - \Omega) \sin(\delta) \cos(90^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos(\nu_0 + \omega) = \cos(\alpha - \Omega) \cos(\delta)$$

Pela posição do satélite (ao sul, deslocando-se em direção ao norte), sabemos que  $270^\circ < \nu_0 + \omega < 360^\circ$ . Ou seja, devemos corrigir o quadrante depois de usar o arccosseno:

$$\nu_0 = 360^\circ - \cos^{-1}(\cos(\alpha - \Omega) \cos(\delta)) - \omega \approx \boxed{174^\circ 25'}$$

(c) O momento angular específico do satélite é dado por:

$$h = \sqrt{GM \cdot a(1 - e^2)} \approx 5,35 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}$$

A distância até o satélite pode ser encontrada por meio de sua anomalia, segundo a equação polar da elipse:

$$r_0 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu_0)} \approx 7,57 \cdot 10^6 \text{ m}$$

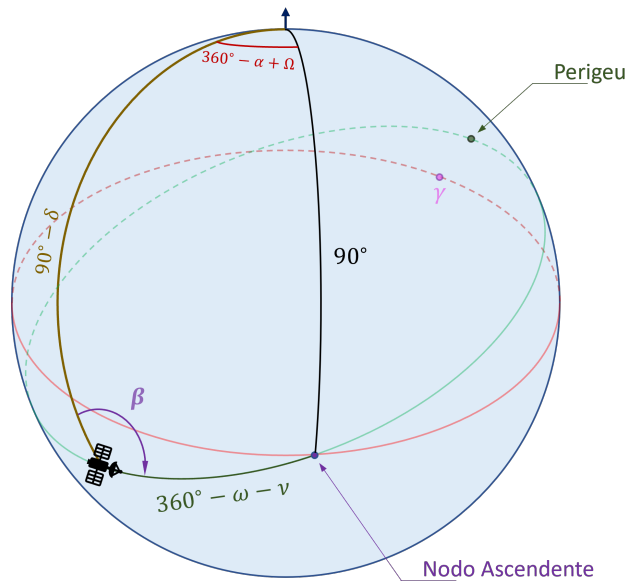
Desse modo, a velocidade tangencial é dada por:

$$v_t = \frac{h}{r_0} \approx 7,07 \text{ km/s}$$

Enquanto a velocidade angular é dada por:

$$\mu = \frac{v_t}{r_0} \approx 9,34 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

Para decompor essa velocidade, vamos encontrar o ângulo  $\beta$ , que parte do norte em direção à trajetória em sentido retrógrado. Essa definição é útil porque, para qualquer ponto da órbita direta,  $0^\circ < \beta < 180^\circ$ , o que nos permite utilizar o arccosseno.



Pela lei dos cossenos:

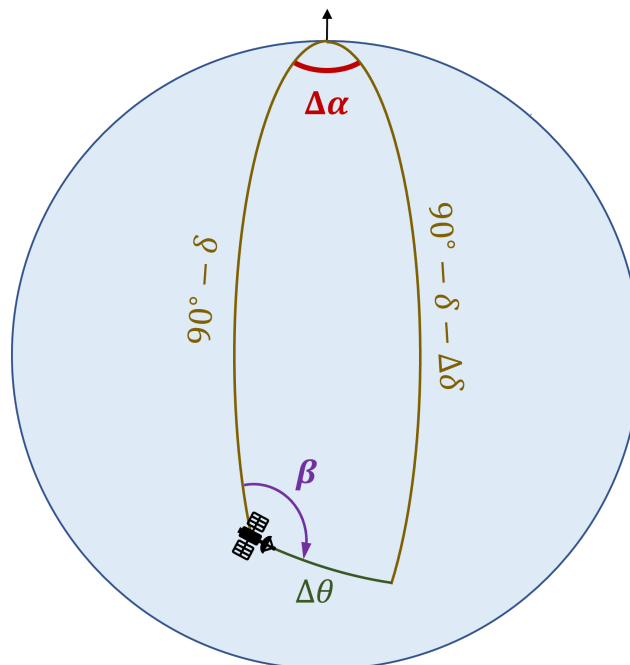
$$\cos(90^\circ) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(360^\circ - \nu_0 - \omega) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(360^\circ - \nu_0 - \omega) \cos(\beta)$$

$$0 = \sin(\delta) \cos(\nu_0 + \omega) - \cos(\delta) \sin(\nu_0 + \omega) \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \tan(\delta) \cot(\nu_0 + \omega)$$

$$\beta = \cos^{-1}(\tan(\delta) \cot(\nu_0 + \omega)) = 73^\circ 00'$$

Diferente da projeção em geometria euclidiana, a projeção em geometria esférica deve tomar alguns cuidados. A figura abaixo representa um pequeno deslocamento angular feito de modo inclinado.



Pela lei das cotangentes:

$$\cos(90^\circ - \delta) \cos(\beta) = \sin(90^\circ - \delta) \cot(\Delta\theta) - \sin(\beta) \cot(\Delta\alpha)$$

$$\Rightarrow \sin(\delta) \cos(\beta) = \cos(\delta) \cot(\Delta\theta) - \sin(\beta) \cot(\Delta\alpha)$$

Perceba que o termo  $\sin(\delta) \cos(\beta)$  enquanto os termos com cotangente divergem. Embora, para valores reais, a diferença sempre retorne um resultado; a única solução para a divergência é que, no limite, o segundo membro da equação seja identicamente nulo. Isso não significa que ele se anule para valores reais, mas que os termos que compõem essa diferença podem tornar-se arbitrariamente maiores do que a diferença em si.

$$\cos(\delta) \cot(\Delta\theta) = \sin(\beta) \cot(\Delta\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\delta) \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} = \sin(\beta) \cdot \frac{\cos(\Delta\alpha)}{\sin(\Delta\alpha)}$$

No limite,  $\sin(\Delta x) \approx \Delta x$  e  $\cos(\Delta x) \approx 1$ . Assim:

$$\Delta\alpha = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{cos}(\delta)} \cdot \mu \approx \boxed{9,72 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}}$$

Perceba que a decomposição em uma superfície esférica, diferentemente da decomposição no plano, carrega o fator  $\text{cos}(\delta)$ . Já a decomposição da componente em declinação é similar ao análogo euclidiano. Pela lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta - \Delta\delta) &= \cos(90^\circ - \delta) \cos(\Delta\theta) + \text{sen}(90^\circ - \delta) \text{sen}(\Delta\theta) \cos(\beta) \\ \Rightarrow \text{sen}(\delta + \Delta\delta) &= \text{sen}(\delta) \cos(\Delta\theta) + \cos(\delta) \text{sen}(\Delta\theta) \cos(\beta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\delta) \cos(\Delta\delta) + \cos(\delta) \text{sen}(\Delta\delta) = \text{sen}(\delta) \cos(\Delta\theta) + \cos(\delta) \text{sen}(\Delta\theta) \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\delta) + \cos(\delta) \cdot \Delta\delta \approx \text{sen}(\delta) + \cos(\delta) \cos(\beta) \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\delta \approx \cos(\beta) \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \mu_\delta = \cos(\beta) \cdot \mu \approx \boxed{2,73 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}}$$

- (d) Vamos começar determinando o período de translação pela terceira lei de Kepler:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 6,08 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 40 \text{ min}$$

Anteriormente, determinamos  $\nu_0 \approx 174^\circ 25'$ . Podemos encontrar a anomalia excêntrica pela relação:

$$\cos(\nu) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cdot \cos(E)}$$

$$\Rightarrow \cos(E) = \frac{\cos(\nu) + e}{1 + e \cdot \cos(\nu)}$$

Como  $0^\circ < \nu_0 < 180^\circ$ , então  $0^\circ < E_0 < 180^\circ$ . Sendo assim, podemos utilizar o arcocosseno:

$$E_0 = \cos^{-1} \left( \frac{\cos(\nu) + e}{1 + e \cdot \cos(\nu)} \right) \approx 174^\circ 08'$$

Já a anomalia média é determinada pela equação de Kepler:

$$M_0 \approx E_0 - e \cdot \text{sen}(E_0) = 173^\circ 50'$$

Depois de um tempo  $\Delta t$ , a anomalia média será

$$M \approx M_0 + \frac{2\pi\Delta t}{T} = 195^\circ 08'$$

A nova anomalia excêntrica pode ser determinada por muitos métodos, por exemplo, por iteração, tentativa e erro, ou aproximação por  $E \approx M + e \cdot \text{sen}(M)$ . Por qualquer um dos modos, descobrimos que  $E \approx 194^\circ 25'$

Assim, podemos encontrar a anomalia média

$$\cos(\nu) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cdot \cos(E)}$$

Como  $180^\circ < E < 360^\circ$ , então  $180^\circ < \nu < 360^\circ$ , e é necessário corrigir o quadrante:

$$\nu = 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cdot \cos(E)} \right) \approx 193^\circ 42'$$

Finalmente, podemos converter essa anomalia de volta para coordenadas equatoriais. Pela lei das cotangentes:

$$\cos(\alpha - \Omega) \cos(i) = \text{sen}(\alpha - \Omega) \cot(\nu + \omega) - \text{sen}(i) \cot(90^\circ)$$

$$\cot(\alpha - \Omega) = \frac{\cot(\nu + \omega)}{\cos(i)}$$

Sabemos que  $\nu + \omega \approx 323^\circ 35'$ , ou seja,  $180^\circ < \nu + \omega < 360^\circ$ . Poderíamos afirmar que  $180^\circ < \alpha - \Omega < 360^\circ$ , mas, sendo  $\Omega = 230^\circ 07'$ , o ângulo  $\alpha$  seria maior do que  $360^\circ$ . Ao invés disso, vamos corrigir o quadrante e afirmar que  $-180^\circ < \alpha - \Omega < 0^\circ$ . Sendo assim:

$$\alpha = \Omega + \cot^{-1} \left( \frac{\cot(\nu + \omega)}{\cos(i)} \right) - \pi \approx 197^\circ 09'$$

Pela lei das cotangentes:

$$\cos(\alpha - \Omega) \cos(90^\circ) = \text{sen}(\alpha - \Omega) \cot(\delta) - \text{sen}(90^\circ) \cot(i)$$

$$\tan(\delta) = \text{sen}(\alpha - \Omega) \tan(i)$$

Como  $-90^\circ < \delta < 90^\circ$ , podemos utilizar arcotangente:

$$\delta = \tan^{-1}(\text{sen}(\alpha - \Omega) \tan(i)) \approx -16^\circ 27'$$

A latitude sobre a qual o satélite estará é a própria declinação  $\varphi' = \delta \approx \boxed{16^\circ 27' \text{ S}}$ . Já em termos de longitude, devemos considerar tanto o deslocamento do satélite quanto a rotação da Terra. Na convenção abaixo, a longitude está sendo considerada positiva em sentido direto.

$$\lambda' = \lambda_0 + \alpha' - \alpha_0 - \frac{2\pi \Delta t}{\text{dia sideral}} \approx \boxed{28^\circ 09' \text{ O}}$$

- (e) Vamos considerar um sistema de coordenadas com eixo  $e_3$  apontado para o polo norte, eixo  $e_1$  apontado para o meridiano do observador, e eixo  $e_2$  tornando o sistema direto. A posição do observador pode ser descrita por:

$$\vec{P} = (R_\oplus \cdot \cos(\varphi_0), 0, R_\oplus \cdot \text{sen}(\varphi_0))$$

$$\vec{P} = (58,6; 0; -25,1) \cdot 10^5 \text{ m}$$

A nova distância ao satélite é dada por:

$$r' = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\nu')} \approx 7,56 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Já a posição do satélite é dada por:

$$\vec{S} = (r' \cdot \cos(\lambda' - \lambda_0) \cos(\varphi'), r' \cdot \text{sen}(\lambda' - \lambda_0) \cos(\varphi'), r' \cdot \text{sen}(\varphi'))$$

$$\vec{S} = (69,0; 22,0; -21,4) \cdot 10^5 \text{ m}$$

O vetor posição relativa é dado por:

$$\vec{R} = \vec{S} - \vec{P}$$

$$\vec{R} \approx (10,4; 22,0; 3,7) \cdot 10^5 \text{ m}$$

A distância zenital pode ser encontrada pelo produto escalar entre a distância relativa e o versor na direção do zênite, bem como o azimute pode ser encontrado pela decomposição da distância relativa nos versores leste e norte. O versor zenital é dado por:

$$\hat{z} = \frac{1}{\|\vec{P}\|} \cdot \vec{P}$$

$$\hat{z} = (\cos(\varphi_0), 0, \text{sen}(\varphi_0))$$

O versor leste é sempre perpendicular ao versor zenital e ao versor polo norte. Como esses versores (polo norte e zenital) não são perpendiculares, é necessário normalizar após calcular o produto vetorial:

$$\hat{l} = \frac{1}{\|\hat{e}_3 \times \hat{z}\|} \cdot (\hat{e}_3 \times \hat{z})$$

$$\hat{l} = (0, 1, 0)$$

Já o versor norte é perpendicular aos versores zenital e leste. Nesse caso, como os versores zenital e leste são perpendiculares, é indiferente normalizar:

$$\hat{n} = \hat{z} \times \hat{l}$$

$$\hat{n} = (-\text{sen}(\varphi_0), 0, \cos(\varphi_0))$$

Por fim, podemos decompor a distância relativa,  $R$ , nesses três versores:

$$\begin{cases} \cos(z) = \frac{1}{\|\vec{R}\|} \cdot (\vec{R} \cdot \hat{z}) \\ \text{sen}(z) \cos(A) = \frac{1}{\|\vec{R}\|} \cdot (\vec{R} \cdot \hat{n}) \\ \text{sen}(z) \text{sen}(A) = \frac{1}{\|\vec{R}\|} \cdot (\vec{R} \cdot \hat{l}) \end{cases}$$

O que nos leva a:

$$\begin{cases} z \approx 70^\circ 53' \\ A \approx 71^\circ 09' \end{cases}$$