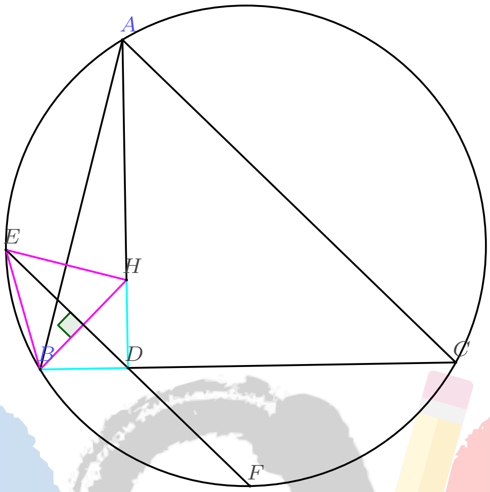
Soluções do TM2 Nível 3

Problema 1 - Escrito por Rafael Amiune

Problema. Seja ABC um triângulo com circuncírculo ω e ângulos $\angle A = 60°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 45°$. Sejam D um ponto sobre BC tal que $AD \perp BC$, e E o ponto sobre o arco menor $\widehat{AB}$ de ω tal que $CE \perp AB$. A reta ED intersecta ω pela segunda vez em F. Prove que F é o ponto médio do arco menor $\widehat{BC}$ de ω.

Solução.



Considere $H = AD \cap CE$. Sabemos que H é o ortocentro de $\triangle ABC$, logo $BH \perp AC$. Então, podemos calcular

$$\angle EBH = \angle EBA + \angle HBA = \angle ECA + \angle HBA = 2 \cdot (90° - \angle BAC) = 60°.$$

Também, temos $\angle HEB = \angle CEB = \angle CAB = 60°$, portanto, $\triangle BHE$ é equilátero. Além disso, sabemos que $\angle DBH = \angle CBH = 90° - \angle ACB = 45°$, que implica $\triangle HDB$ isósceles. Juntando que $EB = EH$ e $DB = DH$, concluimos que DE é a mediatriz de BH, e segue que $\angle FEB = \angle DEB = \frac{\angle CEB}{2}$, como queríamos. □

Problema 2 - Escrito por Rafael Amiune

Problema. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Defina a como o maior inteiro positivo tal que $2^a \mid 5^n - 3^n$, e defina b como o maior inteiro positivo tal que $2^b \leq n$. Prove que $a \leq b+3$.

Solução. Defina $v_2(x)$ como a quantidade de fatores 2 em x. Temos $a = v_2(5^n - 3^n)$. Afirmamos que, para n ímpar, $v_2(5^n - 3^n) = v_2(5-3) = 1$. Basta notar que

$$5^n - 3^n = (5-3)\underbrace{\left(5^{n-1} + 5^{n-2}3^1 + \cdots + 5^1 3^{n-2} + 3^{n-1}\right)}_{\text{ímpar}}.$$

Uma demonstração análoga nos dá que $v_2(5^n + 3^n) = v_2(5+3) = 3$. Agora, provaremos que, para n par, $v_2(5^n - 3^n) = v_2(n) + 3$. Escrevendo $n = 2^k m$, com $k = v_2(n)$, temos

$$5^n - 3^n = (5^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m})(5^{2^{k-2}m} + 3^{2^{k-2}m})\cdots(5^{2m} + 3^{2m})(5^m + 3^m)(5^m - 3^m).$$

Todas as parcelas que são somas de quadrados deixam resto 2 módulo 4, logo tem v_2 igual a 1. Combinando isso com que foi provado anteriormente, temos

$$v_2(5^n - 3^n) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1} + v_2(5^m + 3^m) + v_2(5^m - 3^m) = (k-1) + 3 + 1 = v_2(n) + 3.$$

Finalmente, se n é ímpar, o problema é trivial, logo suponhamos n par. Nesse caso, basta $2^{b+3} \geq 2^{v_2(n)+3} \iff b \geq v_2(n)$, que é verdade, pois $2^{v_2(n)} \leq n$. $\square$

Problema 3 - Escrito por Rafael Amiune

Problema. Encontre todos os pares de polinômios mônicos F e G, com coeficientes reais, tais que

$$F(1) + F(2) + \cdots + F(n) = G(1 + 2 + \cdots + n),$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Observação. Um polinômio é dito *mônico* se o coeficiente do seu termo de maior grau (dominante) é igual a 1. Por exemplo, o polinômio $x^5 + 2x^2 + 3x + 4$ é mônico.

Solução. Se F é constante, teria que ser $F(x) \equiv 1$, que implicaria $G(\frac{n(n+1)}{2}) = n$, que é claramente um absurdo. Portanto, suponhamos que F tem grau ao menos 1.

Lema. Para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, a expressão

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

é um polinômio de grau $k+1$ em n, cujo coeficiente líder é $\frac{1}{k+1}$.

Prova. Faremos indução em k, sendo o caso base $1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = n$ trivial. Podemos escrever

$$\begin{cases} n^{k+1} & = (n-1+1)^{k+1} \\ (n-1)^{k+1} & = (n-2+1)^{k+1} \\ & \cdots \\ 1^{k+1} & = (0+1)^{k+1}. \end{cases}$$

Somando, obtemos

$$n^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \cdot (1^i + 2^i + \cdots + n^i) \implies 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{1}{k+1}\left[n^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} \cdot (1^i + 2^i + \cdots + n^i)\right].$$

Como, pela hipótese de indução, o grau de $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} \cdot (1^i + 2^i + \cdots + n^i)$ em n é k, obtemos o desejado. $\square$

Agora, seja $F(x) = x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, veja que

$$F(1) + F(2) + \cdots + F(n) = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i \cdot (1^i + 2^i + \cdots + n^i),$$

é um polinômio de grau $\alpha + 1$ em n, cujo coeficiente líder é $\frac{1}{\alpha+1}$, pelo Lema. Sabemos que ambos os lados são polinômios em n, que assumem o mesmo valor para infinitos n e, portanto, devem ser o mesmo polinômio. Em particular, seus coeficientes líderes são iguais. Se o grau de G é β, então o grau do lado direito em n é 2β e seu coeficiente líder $\frac{1}{2^\beta}$. Temos as igualdades $\alpha + 1 = 2\beta$ e $\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{2^\beta}$, logo $\beta = 2^{\beta-1}$. Como o lado é exponencial e o esquerdo linear, podemos checar facilmente que as únicas soluções em $\mathbb{Z}_{>0}$ são $\beta = 1$ e $\beta = 2$.

Caso $\beta = 1$, temos $\alpha = 1$. Pode-se observar que o lado esquerdo da equação original não tem termo independente, logo $G(x) \equiv x$. Segue que $F(x) \equiv x$.

Caso $\beta = 2$, temos $\alpha = 3$. Escrevendo $G(x) \equiv x^2 + ax$ e $F(x) \equiv x^3 + bx^2 + cx + d$, obtemos a seguinte igualdade polinomial:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + b \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + c \cdot \frac{n(n+1)}{2} + d \cdot n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + a \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Simplificando, fica

$$n^3 \cdot \left(\frac{b}{3}\right) + n^2 \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) + n \cdot \left(d + \frac{c}{2} + \frac{b}{6} - \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Como todos os coeficientes devem zerar, obtemos $b = 0$, que implica $c = a$, quando olhamos para n^2. Agora, olhando para n, temos $d = 0$, que nos dá a resposta $F(x) \equiv x^3 + ax$, $G(x) = x^2 + ax$, para $a \in \mathbb{R}$. Juntando ambos os casos, obtemos todas os possíveis pares de polinômios. $\square$

Problema 4 - Escrito por Rafael Amiune

Problema. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Uma função

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

é dita uma n-*métrica* se satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(x, x) = 0$;

(ii) $f(x, y) = f(y, x)$;

(iii) $f(x, y) > 0$, para todo $x \neq y$;

(iv) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$.

Chamamos de f-*fantástico* um par (x, y), com $x < y$, se, para todo $z \in \{1, 2, \dots, n\}$ distinto de x e y, vale

$$f(x, y) < f(x, z) + f(z, y).$$

Determine, em função de n, todos os inteiros não negativos k para os quais existe uma n-métrica com exatamente k pares f-fantásticos.

Solução. Afirmamos que os valores de k são todos com $n - 1 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ sendo a cota superior trivial. Primeiro mostraremos que $k \geq n - 1$.

Considere um grafo G tendo os números de 1 a n como vértices, e cujas arestas são os pares f-fantásticos. Provaremos que G é conexo, que claramente implica $k \geq n - 1$. Faremos indução em $f(x, y)$ com a hipótese de que existe um caminho de x até y. O caso base é trivial, uma vez que $f(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$. Agora, caso exista uma aresta entre x e y estamos feitos, então suponha o contrário, isto é, existe z com

$$f(x, y) = f(x, z) + f(y, z).$$

Podemos concluir que $f(x, y) > f(x, z)$ e $f(x, y) > f(y, z)$. Logo, pela hipótese indutiva, existe um caminho de x até z e outro de y até z , então existe um caminho de x até y, concluindo a indução.

Para o exemplo, considere um grafo H conexo, tendo os números de 1 a n como vértices e k arestas de peso 1. Afirmamos que a função f definida de maneira que $f(x, y)$ seja a distância entre x e y é n-métrica e tem exatamente k pares f-fantásticos. De fato, f claramente é n-métrica, e como $f(x, y) = 1$ para toda aresta (x, y), esses k pares com $x < y$ são f-fantásticos. Para qualquer par (x, y) que não é uma aresta do grafo temos um ponto intermediário z no caminho de x para y. Portanto,

$$f(x, y) = f(x, z) + f(y, z),$$

o que conclui o problema. $\square$

Nota. Particularmente, o exemplo tomando $f(1, x) = 1$ para todo $x > 1$, $f(x, y) = 1$ para outros $k - (n - 1)$ pares $x < y$ quaisquer e $f(x, y) = 2$ para os restantes com $x < y$ funciona. Isso é verdade, pois, para os pares com $f(x, y) = 2$, temos $f(x, y) = f(x, 1) + f(y, 1)$.