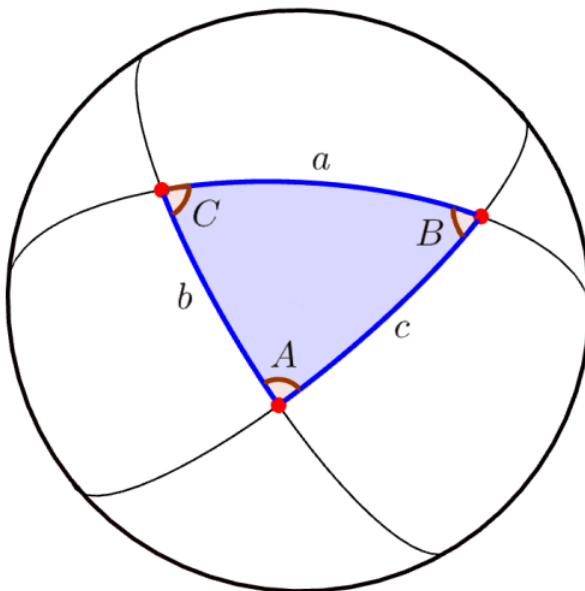


Instruções Gerais

1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. A duração da prova é de 2 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
11. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
12. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento
13. Se não for explicitado o contrário assuma que as cartas estão em projeção azimutal equi-distante, na qual a borda da carta representa o horizonte, e a distância zenital de um ponto é diretamente proporcional à distância entre sua representação e o centro da carta.
14. Ao final da prova, devolva o caderno de respostas.

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

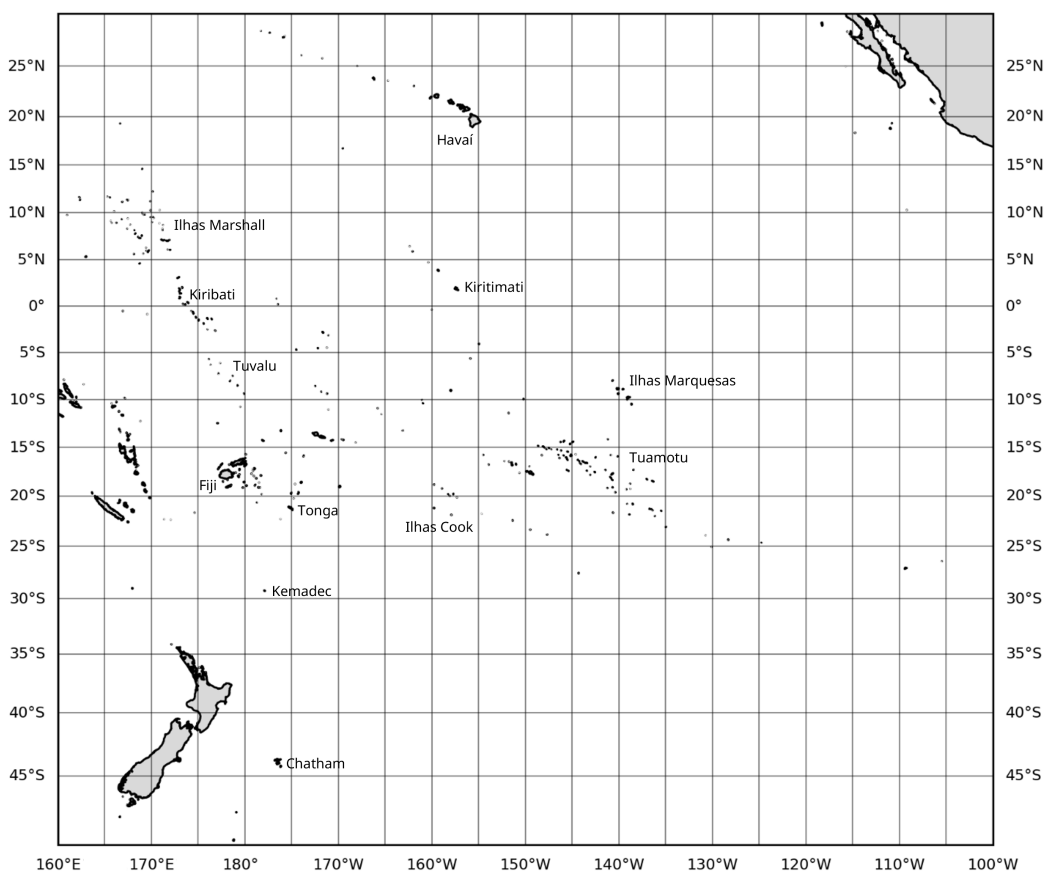
$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Coordenadas de algumas estrelas importantes:

| Estrela | Declinação | Ascensão Reta |
|---------------|-----------------|----------------|
| α -Aql | + 08° 52' 12,1" | 19h 50m 47,48s |
| α -Boo | + 19° 10' 56,7" | 14h 15m 39,70s |
| α -Cen | - 60° 50' 02,4" | 14h 39m 36,49s |
| α -Eri | - 57° 14' 12,3" | 01h 37m 42,84s |
| α -Lyr | + 38° 47' 01,3" | 18h 36m 56,34s |
| α -Ori | + 07° 24' 25,4" | 05h 55m 10,31s |
| β -Ori | - 08° 12' 05,9" | 05h 14m 32,27s |
| α -Vir | - 11° 09' 40,8" | 13h 25m 11,58s |

Questões

1. **Navegação Polinésia (80 pontos)** Os povos tradicionais da Polinésia são habitantes de pequenas ilhas do Pacífico, dispersas por dezenas de milhões de quilômetros quadrados. Historicamente, navegar nessa imensidão foi como procurar agulhas em um palheiro... mas sem GPS, nem trigonometria esférica, num palheiro do tamanho do oceano! (Uma versão maior do mapa a seguir pode ser visualizada no anexo)

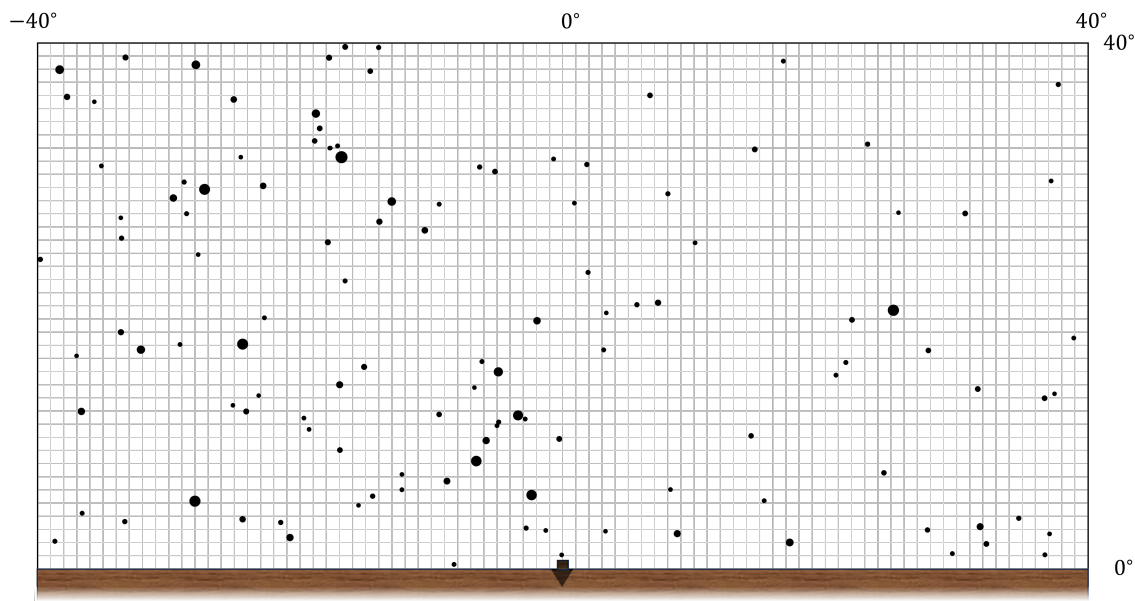


Mapa da Polinésia em Projeção de Mercator, representando algumas das ilhas.

Essa cultura desenvolveu métodos de navegação impressionantes, capazes de lidar com grandes variações de latitude sem o auxílio de aritmética complexa ou de instrumentação moderna. Na tradição polinésia, o navegador guia-se pelo nascente e poente de estrelas de referência, ajustando-as conforme avança de latitude, e determina a latitude pela estrela que cruza seu zênite. A estratégia consiste em atingir a mesma latitude do destino, mas propositalmente um pouco a leste, para então aproveitar os ventos alísios, que sopram em sentido oeste. Se o navegador erra o rumo e chega a oeste do alvo, ou ele não percebe e navega a oeste

em direção a nada, ou terá que remar diretamente contra os ventos alísios com força sobre-humana; qualquer um dos casos é possivelmente sinônimo de morte à deriva.

Considere um navegador partindo de Nuku Hiva ($\varphi = 8^{\circ}52' \text{ S}$, $\lambda = 140^{\circ}08'$), nas Ilhas Marquesas. Em um dado momento, o navegador percebe que está em uma latitude próxima a de seu alvo. Abaixo, está representado o horizonte em grade alto-azimutal equirretangular; com uma marcação no casco da *waka* (canoa).



- Aponte as estrelas Mirach (β -And) e Mirfak (α -Per) com setas e identifique cada uma de forma clara.
- Marque com X os Objetos de Céu Profundo M34, M76 e M103, identificando cada marcação.
- Marque os Pontos Cardeais (N, S, L ou O) e Colaterais (NE, NO, SE, SO) visíveis. Identifique cada marcação.
- Achird (η -Cas) é a quinta estrela mais brilhante de Cassiopeia. Ela está localizada entre Schedar (α -Cas) e Navi (γ -Cas) e seu cruzamento com o horizonte ocorre exatamente sobre a marcação do casco na imagem. Qual o azimute desse cruzamento com o horizonte? Trata-se do nascente ou do poente? Aponte a estrela com uma seta, identifique-a e trace toda sua trajetória visível no céu.
- Determine a latitude do navegador, bem como sua ilha de destino. Se ele observasse seu zênite durante a noite, qual estrela poderia indicar que ele chegou na latitude certa?

Uma nova carta é disponível em branco. Essa carta deve ser marcada conforme ela teria sido vista pelo navegador **no início da viagem** (em Nuku Hiva). Considere

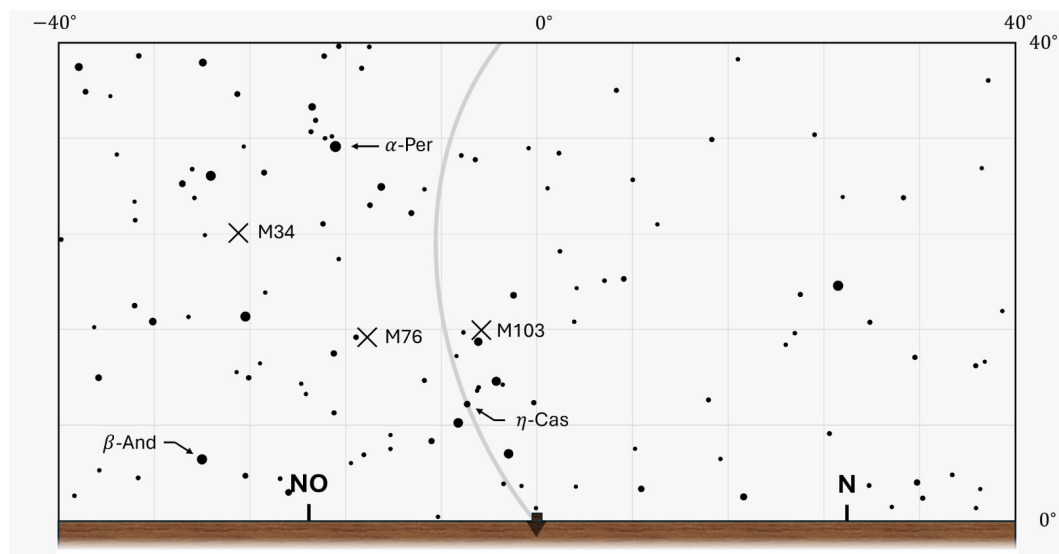
que a marca no casco aponta para o mesmo azimute e que a observação ocorre quando Achird atinge a mesma altura que na carta anterior.



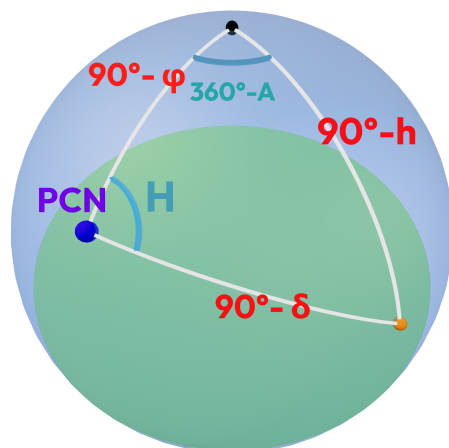
- (f) Na nova carta, marque as cinco estrelas mais brilhantes de Cassiopeia, e trace toda a trajetória visível de Achird no céu. Qual a diferença de azimute entre os pontos em que a estrela cruza com o horizonte nas duas cartas?
- (g) Suponha que o navegador tenha seguido sua viagem inteira em direção a um azimute constante, ajustando sua estrela guia para manter a direção da *waka*. Se esse azimute for aquele com que ele observa Achird cruzar o horizonte no final da viagem, ele chegará à leste ou à oeste de seu destino? Justifique.
- (h) Suponha agora que o navegador tenha sempre seguido a direção em que Achird cruza com o horizonte, ajustando a direção da *waka* nas diferentes latitudes para manter o rumo na estrela. Ele chegará à leste ou à oeste de seu destino? Justifique.

Solução:

(a,b) Marcações na figura abaixo:



- (c) Marcações na figura. O ponto cardinal norte pode ser encontrado pela projeção de Polaris. Os demais seguem das posições relativas, com ângulo de 45° entre cada ponto cardinal e colateral adjacente.
- (d) Marcação na figura acima. Podemos medir o azimute diretamente pela grade, no caso, como a marcação está 26° a oeste do norte, seu azimute é $A = 334^\circ$. Trata-se do poente da estrela, pois está no horizonte oeste.
- (e) A latitude do observador pode ser medida diretamente pela altura de Polaris, visível na carta. São $19,5^\circ$ N. Pelo mapa, a ilha que possui essa latitude é o Haváí. A estrela que passa sobre o zênite nessa latitude é Arcturus.
- (f) Para marcar as estrelas, é necessário encontrar encontrar suas coordenadas altazimutais, transformá-las em coordenadas horárias, descobrir a variação de ângulo horário em relação à nova observação, e então converter novamente para coordenadas altazimutais, utilizando o horário e a latitude da nova carta. Para isso, utilizaremos o triângulo de posição:



Pela lei dos cossenos:

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(h)\text{sen}(\varphi) + \cos(h) \cos(\varphi) \cos(A)$$

Como $-90^\circ < \delta < 90^\circ$:

$$\delta = \text{sen}^{-1} (\text{sen}(h)\text{sen}(\varphi) + \cos(h) \cos(\varphi) \cos(A))$$

Pela lei das cotangentes:

$$\text{sen}(\varphi) \cos(A) = \cos(\varphi) \tan(h) + \text{sen}(A) \cot(H)$$

Como está no horizonte oeste, $0 < H < 12^h$, ou seja, pode-se usar o inverso da cotangente:

$$H = \cot^{-1} \left(\frac{\text{sen}(\varphi) \cos(A) - \cos(\varphi) \tan(h)}{\text{sen}(A)} \right)$$

Assim, temos:

| Estrela | Declinação ($^\circ$) | Ângulo Horário ($^\circ$) |
|---------|-------------------------|-----------------------------|
| Schedar | 56,5 | 105,2 |
| Caph | 59,1 | 113,0 |
| Navi | 60,7 | 101,1 |
| Ruchbah | 60,2 | 93,8 |
| Achird | 57,8 | 103,0 |

Tabela 1: Declinação e Ângulo Horário das estrelas de Cassiopeia.

Na nova latitude, se Achird está na mesma altura que estava originalmente, então, pela lei dos cossenos:

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(H)$$

Em se tratando do horizonte oeste, novamente temos $0 < H < 12^h$, o que significa que podemos utilizar o inverso do cosseno:

$$H = \cos^{-1} \left(\frac{\text{sen}(h) - \text{sen}(\delta)\text{sen}(\varphi)}{\cos(\delta) \cos(\varphi)} \right)$$

Sabendo que a diferença de ângulo horário é a mesma para todas as estrelas, podemos calcular o ângulo horário de cada estrela do conjunto na segunda observação:

| Estrela | Declinação (°) | Ângulo Horário (°) |
|---------|----------------|--------------------|
| Schedar | 56,5 | 57,4 |
| Caph | 59,1 | 65,2 |
| Navi | 60,7 | 53,4 |
| Ruchbah | 60,2 | 46,1 |
| Achird | 57,8 | 55,3 |

Tabela 2: Declinação e Ângulo Horário na segunda observação.

Por fim, podemos converter de coordenada horária para altazimutal. Pela lei dos cossenos:

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(H)$$

Como $-90^\circ < h < 90^\circ$:

$$h = \text{sen}^{-1} (\text{sen}(\delta)\text{sen}(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(H))$$

Pela lei das cotangentes:

$$\text{sen}(\varphi) \cos(H) = \cos(\varphi) \tan(\delta) + \text{sen}(H) \cot(A)$$

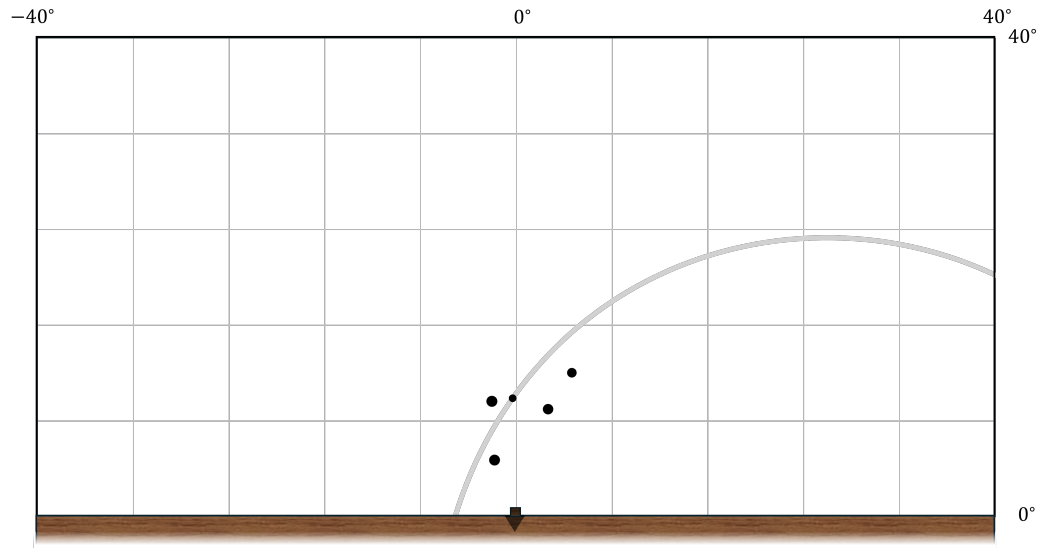
Como está no horizonte oeste, $180^\circ < A < 360^\circ$, e a função não pode ser simplesmente invertida, mas precisa de ajuste de quadrante:

$$A = \cot^{-1} \left(\frac{\text{sen}(\varphi) \cos(H) - \cos(\varphi) \tan(\delta)}{\text{sen}(H)} \right) + 180^\circ$$

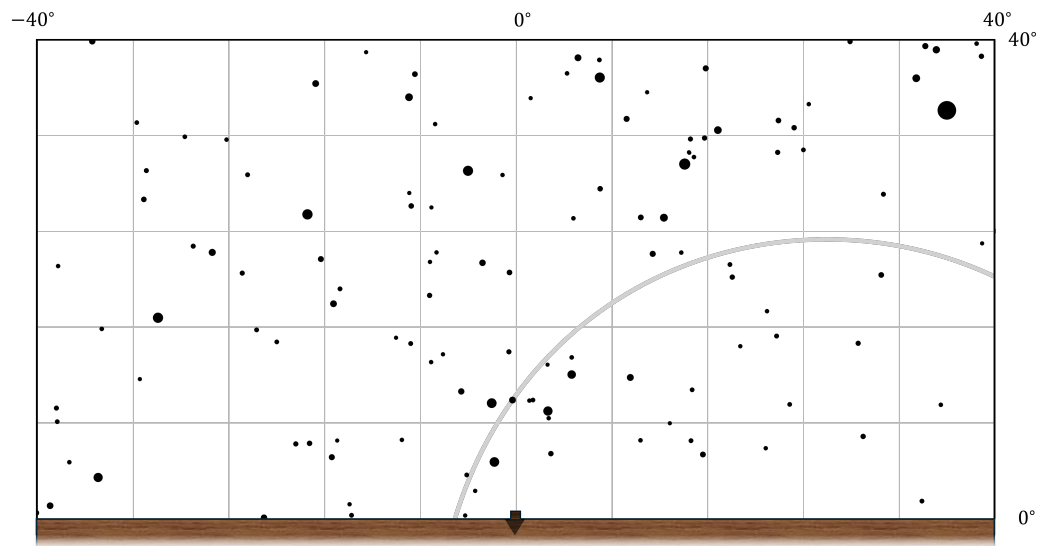
Por fim:

| Estrela | Altura (°) | Azimute (°) |
|---------|------------|-------------|
| Schedar | 9,49 | 331,90 |
| Caph | 4,58 | 332,15 |
| Navi | 8,86 | 336,59 |
| Ruchbah | 11,91 | 338,56 |
| Achird | 9,75 | 333,63 |

Tabela 3: Altura e Azimute das estrelas na nova observação.



Completando com as demais estrelas do céu, ficaria:

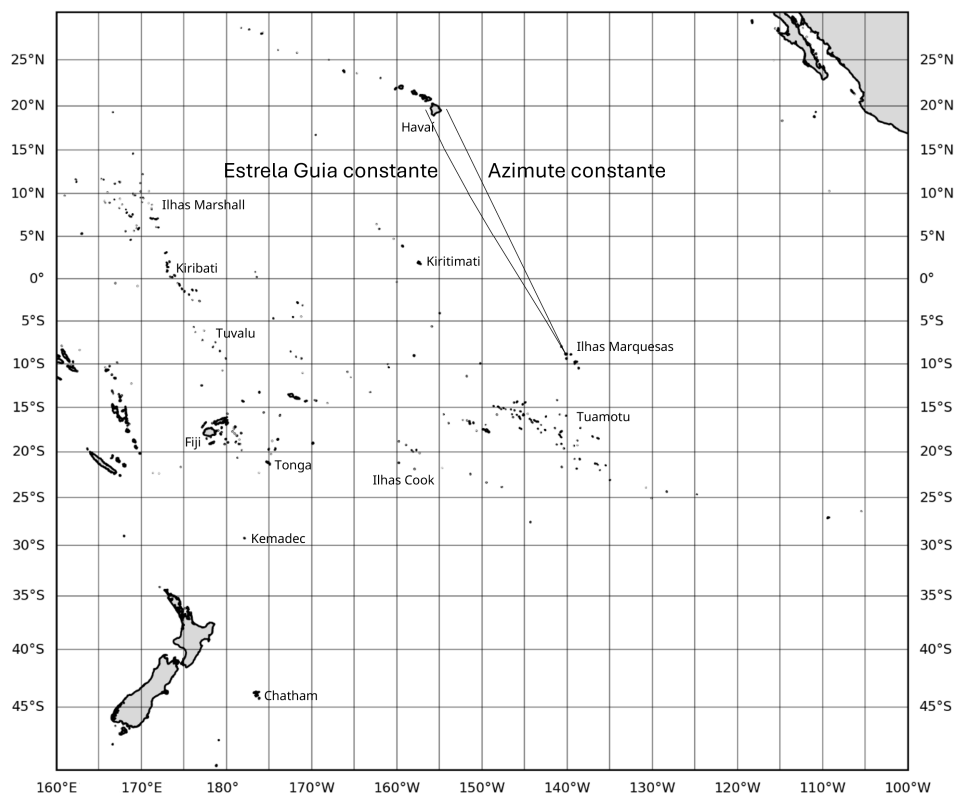


A diferença de azimute, como se percebe, é de

(g,h) Seguir um azimute constante corresponde a marcar uma reta na projeção de Mercator. Já a curva de “perseguir uma estrela” não tem uma representação tão simples, mas, se aproveitarmos a divisão da carta em faixas de latitude, podemos trabalhar com um azimute aproximadamente constante em cada faixa. O azimute de poente de uma estrela é calculado por:

$$A = 360^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(\varphi)} \right)$$

Perceba que, se a latitude for menor, em módulo, a estrela irá se pôr mais a oeste. Para realizar nossa estimativa, vamos sempre adotar o poente mais a leste possível dentro de cada faixa de latitude. Se mesmo forçando o resultado o mais a leste possível, o navegador ainda chegar à oeste da ilha, então, no caminho verdadeiro que ele vai seguir, ele certamente também chegará a oeste dela. Observando a figura, vemos que, nesse exemplo, o navegador precisaria trocar sua estrela guia para chegar a leste da ilha, como desejado.

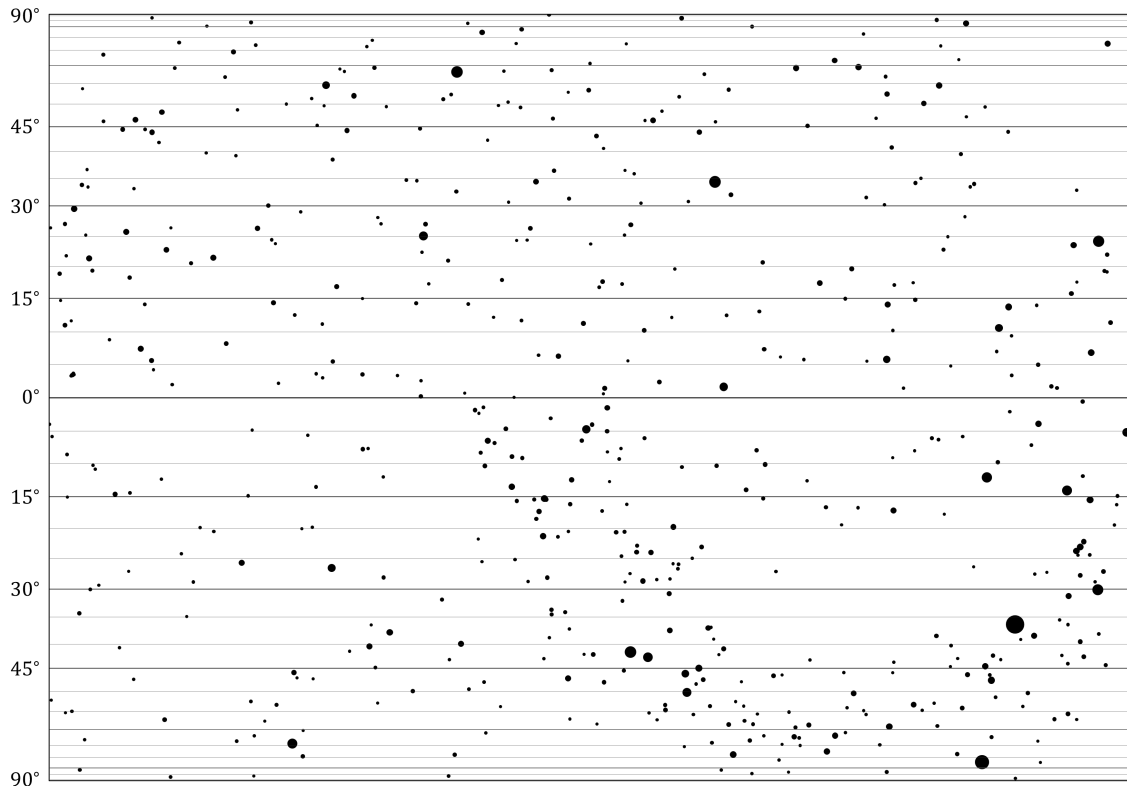


2. Calendário Vietnamita (70 pontos) O Vietnã, diferente da Polinésia, era uma sociedade agrária, baseada mais em “que dia é hoje?” para prever monções e pragas do que “aonde estou e para onde vou?”. O calendário vietnamita foi profundamente influenciado pelo calendário chinês. Basicamente, a longitude eclíptica do Sol determina a divisão do ano em 24 termos solares, segundo a tabela a seguir:

| L_{\odot} | Termo Solar | Tradução | L_{\odot} | Termo Solar | Tradução |
|-------------|-----------------|----------------------|-------------|-----------------|----------------------|
| 315° | Lp xuân (立春) | Início da Primavera | 135° | Lp thu (立秋) | Início do Outono |
| 330° | Vũ thủy (雨水) | Água da Chuva | 150° | X th (處暑) | Fim do Calor |
| 345° | Kinh trp (驚蟄) | Levantar dos Insetos | 165° | Bạch l (白露) | Orvalho Branco |
| 0° | Xuân phân (春分) | Equinócio Vernal | 180° | Thu phân (秋分) | Equinócio de Outono |
| 15° | Thanh minh (清明) | Limpo e Brilhante | 195° | Hàn l (寒露) | Orvalho Frio |
| 30° | C'c vũ (穀雨) | Chuva do Milho | 210° | Sng giáng (霜降) | Geada |
| 45° | Lp hạ (立夏) | Início do Verão | 225° | Lp đông (立冬) | Início do Inverno |
| 60° | Tiu mãn (小滿) | Formação do Milho | 240° | Tiu tuy' t (小雪) | Neve Fraca |
| 75° | Mang chung (芒種) | Espiga de Milho | 255° | Đại tuy' t (大雪) | Neve Forte |
| 90° | Hạ chí (夏至) | Solstício de Verão | 270° | Đông chí (冬至) | Solstício de Inverno |
| 105° | Tiu th (小暑) | Calor Moderado | 285° | Tiu hàn (小寒) | Frio Moderado |
| 120° | Đại th (大暑) | Calor Intenso | 300° | Đại hàn (大寒) | Frio Intenso |

Já o dia sino-vietnamita inicia-se na Hora do Rato, às 23h de tempo solar verdadeiro. A Lua define a dinâmica dos meses e do ano novo: o primeiro dia de cada mês é aquele em que ocorre a Lua Nova verdadeira (geocêntrica), e o primeiro mês do ano (consequentemente o ano novo) é escolhido para que o solstício de inverno do hemisfério norte caia sempre no mês 11.

Na China, a Hora do Rato usava tradicionalmente a referência de Pequim (39°55' N, 116°23' L), enquanto, no Vietnã, a referência era Hanói (21°02' N, 105°55' L). Com a modernização e o sistema de fuso-horário, a referência da China passou a ser o UTC+8, e a do Vietnã, o UTC+7, com o dia iniciando-se à meia-noite, e não mais na Hora do Rato. A seguir, está uma carta celeste, em **projeção de Peters**, centrada na órbita da Lua em determinado momento, nove dias antes de um eclipse solar.



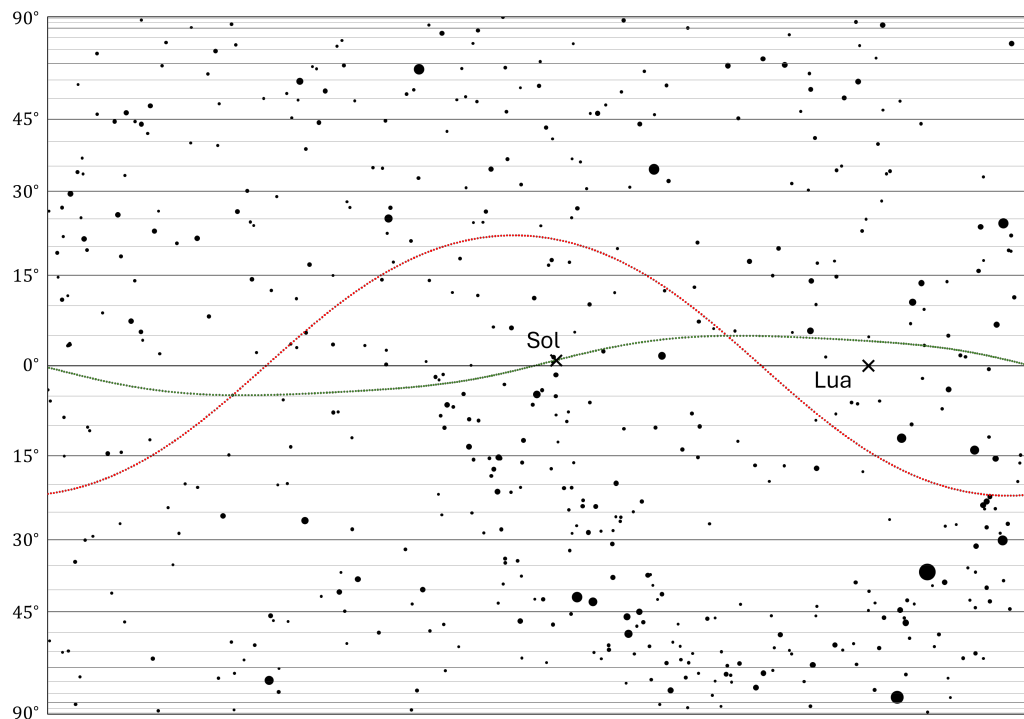
Para os itens a seguir, considere que a Lua possui órbita circular de período sideral $T = 27,32$ dias. Também despreze os efeitos da equação do tempo.

- (a) Na carta, marque a Eclíptica (identifique-a por EC) e o Equador (identifique-o por EQ).
- (b) Sabendo que a Lua está ao sul da Eclíptica, marque com X as posições da Lua e do Sol.
- (c) Qual o termo solar mais próximo do momento de observação? Qual o mês no calendário ocidental (gregoriano)?
- (d) A Lua está crescente ou minguante?

Nove dias depois, um observador em Bangkok ($13^{\circ}45' N$, $100^{\circ}29' L$) observa o ápice do eclipse às $23^h 12^m$ horas de tempo solar verdadeiro.

- (e) Determine se o início do mês será no mesmo dia na China e no Vietnã, (i) utilizando o calendário tradicional e (ii) utilizando o calendário modernizado.
- (f) Em quanto tempo (após o eclipse) ocorrerá o ano novo sino-vietnamita?

Solução:



- (a) Marcações na carta.
- (b) Sabemos que são 9 dias antes de um eclipse solar. A ocorrência do eclipse solar só ocorre nos nodos, mas é necessário determinar em qual nodo ela ocorrerá. Perceba que, se a Lua está a sul da Eclíptica então, em 9 dias, ela estará passando pelo seu nodo ascendente, que está representado no centro da carta. Durante esse intervalo, a lua percorrerá $118,6^\circ$ em sentido leste, ou seja, basta marcar o ponto $118,6^\circ$ a oeste.

Já o Sol percorrerá $8,9^\circ$. Como a inclinação da Eclíptica é pequena em relação à órbita da lua, é possível medir essa distância com régua e projetar sobre a Eclíptica.

As posições estão marcadas na carta. Lembre-se de que cada corpo deve ser marcado em sua respectiva órbita, com a linha central representando a órbita da Lua.

Solução:

- (c) A longitude eclíptica do Sol pode ser estimada pela posição dos pontos de equinócio ou de solstício, e vale aproximadamente 238° , ou seja, o termo solar mais próximo é da neve fraca. No calendário gregoriano, observamos que o Sol está no serpentário, próximo da fronteira com escorpião, representando o mês de dezembro ou novembro.
- (d) Lua está minguante, pois o momento da observação é 9 dias antes de um eclipse solar, fenômeno que ocorre na fase de lua nova
- (e) (i) A lua nova ocorre junto ao eclipse. Se um observador em Bangkok observa um eclipse depois das 23 h de tempo solar verdadeiro, então, para os observadores em Hanói e Pequim (mais à leste), definitivamente já passou das 23 h (Hora do Rato). Sendo assim, a lua nova ocorre quando o dia já virou para ambos, e esse novo dia é o primeiro dia do mês em ambos os calendários.
- (ii) Se Bangkok tem longitude $100^\circ 29' L$, então o tempo solar verdadeiro em Greenwich é $16^h 30^m$. Sendo assim, a lua nova ocorre às $23^h 30^m$ (antes do dia virar) para o observador em Hanói e às $00^h 30^m$ (depois do dia virar) para o observador em Pequim. Nesse caso, o Vietnã comemora o primeiro dia do mês um dia antes da China.
- (f) O solstício de inverno ocorrerá em menos de 11 meses depois do eclipse. Sendo assim, o próximo ano novo terá como referência o solstício de inverno depois deste, a fim de que ocorra no mês 11. O eclipse ocorre com a longitude eclíptica do Sol em cerca de 350° , ou seja, ele ainda deve percorrer 370° até esse último solstício, o que deve demorar cerca de 380 dias.

O período sinódico de translação da Lua pode ser calculado como:

$$\frac{1}{T_{sin}} = \frac{1}{27,32 \text{ dias}} - \frac{1}{365,25 \text{ dias}}$$

$$\Rightarrow T_{sin} \approx 29,5 \text{ dias}$$

Vamos dividir o tempo até a ocorrência do equinócio pelo intervalo entre luas novas:

$$\frac{380}{29,5} \approx 12,8$$

Ou seja, se a próxima lua nova for o início do ano, marcando o mês 1, vão ocorrer mais 11 luas novas, e o solstício ocorrerá no mês 12. Para

que o solstício ocorra no mês 11, o ano novo deve ocorrer na lua nova em seguida, depois de 59 dias, aproximadamente.

