



ANÁLISE DE DADOS  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

---

## Instruções Gerais

1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 2 horas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
9. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
10. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

## Formulário

Para encontrar a incerteza  $\sigma_\omega$  de uma função genérica  $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$	Expressões para $\sigma_\omega$
$\omega = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega =  mx^{m-1}  \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right  = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax$	$\sigma_\omega =  a  \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right  = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega =  a  \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \sin(bx)$	$\sigma_\omega =  ab \cos(bx)  \sigma_x$
$\omega = b \log_a x$	$\sigma_\omega = \left \frac{b}{\ln a}\right  \frac{\sigma_x}{x}$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta  $y = A + Bx$  são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$$

Em que  $r$  é o coeficiente de correlação linear,  $A$  e  $B$  são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e  $N$  é o número de pontos.

## Questões

### 1. Várias Pedrinhas Orbitando Suspeitamente (50 pontos)

A Via Láctea é rodeada por diversas galáxias satélites, pequenas companheiras gravitacionalmente ligadas que orbitam seu centro ao longo de bilhões de anos. Em um cenário simples, seria esperado que essas galáxias estivessem distribuídas de forma aproximadamente isotrópica ao redor da Galáxia, refletindo um processo de formação caótico e tridimensional.

No entanto, observações indicam que uma fração significativa dessas galáxias pode estar organizada em uma estrutura aproximadamente planar. Essa possível configuração é frequentemente chamada de **Vast Polar Structure (VPOS)**.

A tabela a seguir apresenta as coordenadas esféricas de uma pequena parte do conjunto de galáxias satélites da Via Láctea, no sistema de coordenadas galácticas **heliocêntrico**. Nesse sistema, a origem coincide com o Sol e os eixos cartesianos são definidos como:

- Eixo  $x$ : aponta do Sol para o Centro Galáctico (direção  $l = 0^\circ$ ,  $b = 0^\circ$ ).
- Eixo  $z$ : aponta para o Polo Norte Galáctico (direção  $b = 90^\circ$ ).
- Eixo  $y$ : completa o sistema cartesiano direito, apontando na direção  $l = 90^\circ$ ,  $b = 0^\circ$  (sentido da rotação galáctica).

Tabela 1: Coordenadas galácticas e distâncias heliocêntricas de galáxias satélites

Galáxia	$l$ ( $^\circ$ )	$b$ ( $^\circ$ )	$d_{\text{helio}}$ (kpc)
Large Magellanic Cloud	280.4651	-32.8878	49.97
Small Magellanic Cloud	302.7966	-44.2993	62.44
Sagittarius dSph	5.5682	-14.1648	26.30
Fornax dSph	237.1043	-65.6525	147.00
Leo I dSph	225.9855	49.1120	254.00
Sculptor dSph	287.5452	-83.1569	85.90
Leo II dSph	220.1697	67.2320	233.00
Sextans dSph	243.4985	42.2724	95.50

**Observação:** Exclusivamente para essa questão, não será necessária análise de erros associados às medidas.

Assumindo que essas galáxias definem aproximadamente um disco plano no espaço tridimensional, responda:

- (a) **(6 pontos)** Demonstre que as coordenadas cartesianas heliocêntricas  $(x, y, z)$  de um objeto em coordenadas esféricas  $(l, b, d_{\text{helio}})$  são dadas por:

$$x = d_{\text{helio}} \cos b \cos l, \quad y = d_{\text{helio}} \cos b \sin l, \quad z = d_{\text{helio}} \sin b$$

- (b) **(12 pontos)** A partir dos valores de  $l$ ,  $b$  e  $d_{\text{helio}}$  fornecidos na tabela, determine as coordenadas cartesianas **galactocêntricas**  $(x, y, z)$  de cada galáxia.

**Dado:** Distância do Sol ao Centro Galáctico:  $R_0 \approx 8,18$  kpc.

**Observação:** O sistema galactocêntrico possui origem no Centro Galáctico (CG) e eixos paralelos aos do sistema heliocêntrico (ou seja, mesma orientação, apenas translação).

- (c) **(8 pontos)** Determine o vetor  $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ , em coordenadas galactocêntricas, do ponto central do disco, definido como o centróide da distribuição espacial das galáxias.

(d) (24 pontos) Estime a inclinação  $i$  do disco em relação ao plano  $xy$  do sistema galactocêntrico.

**Dica 1:** Para isso, considere que as coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  das galáxias obtidas no item (a) definem aproximadamente um plano no espaço. Ajustaremos, pelo método dos mínimos quadrados, um plano da forma

$$z = ax + by + c,$$

onde  $a$  e  $b$  são os coeficientes angulares (responsáveis pela inclinação do plano) e  $c$  é o coeficiente linear (intercepto). O ajuste consiste em minimizar a soma dos quadrados dos resíduos.

Calcule as somas dos desvios:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

$$S_{xz} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}), \quad S_{yz} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}).$$

Os coeficientes angulares são dados por:

$$a = \frac{S_{xz}S_{yy} - S_{yz}S_{xy}}{S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2}, \quad b = \frac{S_{yz}S_{xx} - S_{xz}S_{xy}}{S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2}$$

O intercepto é obtido por:

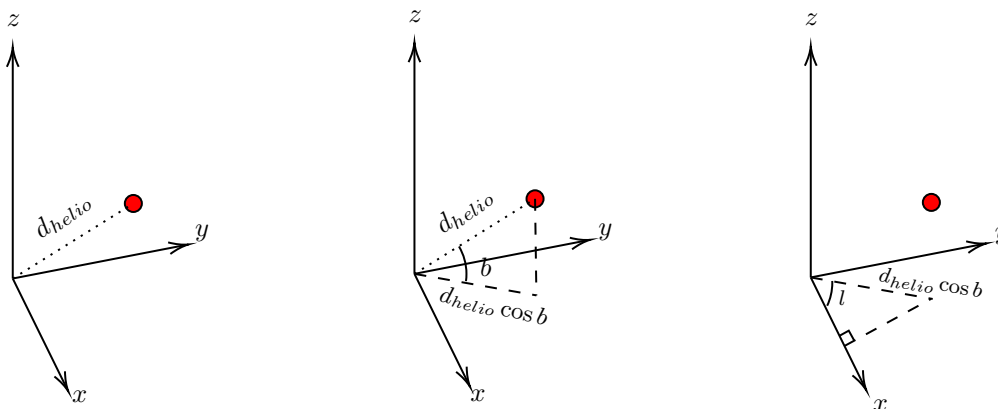
$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y}$$

**Dica 2:** Para o plano definido anteriormente, temos que a inclinação deste com relação ao plano fundamental  $xy$  será dada por:

$$i = \arctan\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

**Solução:**

(a) Esquemmatizando a situação:



Podemos encontrar que:

$$x = d_{\text{helio}} \cos b \cos l, \quad y = d_{\text{helio}} \cos b \sin l, \quad z = d_{\text{helio}} \sin b$$

- (b) As coordenadas fornecidas na Tabela estão no sistema galáctico heliocêntrico, isto é, centradas no Sol. Para obter as coordenadas cartesianas no referencial galactocêntrico, devemos realizar duas etapas: (i) converter  $(l, b, d_{\text{helio}})$  em coordenadas cartesianas heliocêntricas e (ii) transladar a origem do sistema do Sol para o centro da Galáxia.

Primeiramente, escrevemos o vetor posição de uma galáxia em coordenadas esféricas galácticas como:

$$\vec{r}_{\odot} = d_{\text{helio}} (\cos b \cos l, \cos b \sin l, \sin b)$$

onde  $l$  é a longitude galáctica,  $b$  é a latitude galáctica e  $d_{\text{helio}}$  é a distância ao Sol.

No entanto, esse vetor está centrado no Sol. Para obter o vetor posição no referencial galactocêntrico, devemos somar o vetor posição do Sol em relação ao centro da Galáxia.

$$\vec{r}_{\text{GC}} = \vec{r}_{\odot} + \vec{r}_{\text{Sol}}, \quad \text{com} \quad \vec{r}_{\text{Sol}} = (-R_0, 0, 0)$$

Portanto, as coordenadas cartesianas galactocêntricas são dadas por:

$$x = d_{\text{helio}} \cos b \cos l - R_0, \quad y = d_{\text{helio}} \cos b \sin l, \quad z = d_{\text{helio}} \sin b$$

Aplicando essas expressões para cada galáxia da tabela, obtemos as coordenadas cartesianas galactocêntricas apresentadas na Tabela abaixo.

Tabela 2: Coordenadas cartesianas galactocêntricas das galáxias satélites

Galáxia	$x$ (kpc)	$y$ (kpc)	$z$ (kpc)
Large Magellanic Cloud	-0.56	-41.26	-27.13
Small Magellanic Cloud	16.03	-37.57	-43.61
Sagittarius dSph	17.20	2.47	-6.44
Fornax dSph	-41.09	-50.89	-133.93
Leo I dSph	-123.71	-119.57	192.02
Sculptor dSph	-5.09	-9.76	-85.29
Leo II dSph	-77.08	-58.17	214.84
Sextans dSph	-39.71	-63.24	64.24

- (c) Para um conjunto discreto de pontos no espaço tridimensional, o centróide é dado pela média aritmética das coordenadas cartesianas,

$$\vec{r}_c = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$$

e  $N = 8$  é o número total de galáxias consideradas.

A soma das coordenadas fornecidas na tabela resulta em

$$\sum_{i=1}^N x_i = -254,01 \text{ kpc}, \quad \sum_{i=1}^N y_i = -377,98 \text{ kpc}, \quad \sum_{i=1}^N z_i = 174,71 \text{ kpc}$$

Dessa forma, as coordenadas do centróide são

$$\bar{x} = -31,75 \text{ kpc}, \quad \bar{y} = -47,25 \text{ kpc}, \quad \bar{z} = 21,84 \text{ kpc}$$

Assim, o ponto central do disco é dado por

$$\vec{r}_c \approx (-31,75; -47,25; 21,84) \text{ kpc}$$

- (d) Com base nas coordenadas  $(x,y,z)$  e no centróide calculados anteriormente, podemos calcular as somas dos desvios:

$$S_{xx} = 17023,97 \text{ kpc}^2, \quad S_{yy} = 9626,12 \text{ kpc}^2, \quad S_{xy} = 11389,33 \text{ kpc}^2,$$

$$S_{xz} = -32174,99 \text{ kpc}^2, \quad S_{yz} = -20875,32 \text{ kpc}^2$$

Podemos, agora, calcular os coeficientes da equação do plano:

$$a = -2,107; \quad b = 0,3241; \quad c = -29,75$$

Dessa forma, o ajuste planar final é dado por:

$$z = -2,107x + 0,3241y - 29,75$$

Por fim, podemos calcular a inclinação com base na fórmula fornecida:

$$i \approx 64,87^\circ$$

### Grade de Correção

- a)
  - +6 pontos: Ilustrar o esquema de conversão de coordenadas.
- b)
  - +2 pontos: Conceitualizar corretamente o vetor de posição no referencial galactocêntrico.
  - +2 pontos: Encontrar a fórmula das coordenadas cartesianas galactocêntricas.
  - +1 ponto por trio ordenado correto na tabela. Anulação de um ponto a cada trio errado.
- c)
  - +1 pontos: Conceitualizar corretamente o vetor centróide.
  - +6 pontos: Cálculo correto dos valores médios das coordenadas cartesianas.
  - +1 ponto: Valor correto do vetor centróide.
- d)
  - +2 pontos por cada uma (das 6) somas dos desvios.
  - +4 ponto por cada um (dos 3) coeficientes da equação do plano.
  - +2 pontos: cálculo da inclinação

## 2. Fotografando o Inobservável: A Sombra do Buraco Negro (100 pontos)

Em abril de 2019, a colaboração do *Event Horizon Telescope* (EHT) publicou a primeira imagem da sombra de um buraco negro supermassivo, localizado no centro da galáxia M87. O EHT é um interferômetro

de longa base (VLBI) que opera no comprimento de onda  $\lambda = 1,3$  mm.

Em interferometria, os telescópios não capturam uma imagem direta. Eles medem a **Visibilidade Complexa**  $V$ , cuja amplitude  $|V|$  nos diz o quanto a fonte se parece com um padrão de franjas de um determinado tamanho. Esse tamanho é ditado pela linha de base projetada  $B$  entre dois telescópios, medida em comprimentos de onda ( $\lambda$ ). A linha de base é calculada a partir das coordenadas espaciais de frequência  $u$  e  $v$  dos telescópios:

$$B = \sqrt{u^2 + v^2}$$

A estrutura de M87\* pode ser modelada por dois componentes principais:

- **Fluxo de Acreção Estendido:** Um brilho difuso que domina as linhas de base curtas. Sua amplitude de visibilidade segue um perfil Gaussiano:

$$|V_{ext}(B)| = V_0 \exp\left(-\frac{\pi^2 \theta_{ext}^2 B^2}{4 \ln 2}\right)$$

onde  $V_0$  é o fluxo total da emissão estendida e  $\theta_{ext}$  é a largura à meia altura (FWHM) angular dessa fonte, em radianos.

- **O Anel de Fótons:** Um anel fino e brilhante causado por fótons orbitando o buraco negro, que domina as linhas de base longas. Sua visibilidade segue uma função de Bessel do primeiro tipo de ordem zero,  $|J_0(x)|$ , onde  $x = \pi \theta_{ring} B$ . O primeiro ponto onde o brilho desse anel zera (o primeiro mínimo, ou "primeiro nulo") ocorre quando:

$$x \approx 2,4048$$

Devido à turbulência atmosférica e ao ruído instrumental, os dados reais apresentam dispersão. Abaixo, você recebe uma tabela de dados observacionais ruidosos, listando as coordenadas da linha de base  $u$  e  $v$  (medidas em **Giga-lambdas**,  $G\lambda = 10^9\lambda$ ) e a amplitude de visibilidade  $|V|$  (em Janskys, Jy).

Obs.	$u$ ( $G\lambda$ )	$v$ ( $G\lambda$ )	$ V $ (Jy)
1	0,20	0,15	1,95
2	0,30	0,40	1,68
3	0,60	0,45	1,55
4	0,80	0,60	1,42
5	0,90	0,85	1,22
6	1,20	0,90	1,06
7	1,40	1,05	0,82
8	1,60	1,20	0,63
9	1,80	1,35	0,42
10	2,00	1,50	0,33

Obs.	$u$ ( $G\lambda$ )	$v$ ( $G\lambda$ )	$ V $ (Jy)
11	2,16	1,62	0,20
12	2,32	1,74	0,14
13	2,48	1,86	0,10
14	2,64	1,98	0,06
15	2,80	2,10	0,03
16	2,88	2,16	0,01
17	3,04	2,28	0,02
18	3,20	2,40	0,07
19	3,36	2,52	0,12
20	3,52	2,64	0,15

- (a) **(10 pontos)** Na folha de respostas, construa uma tabela auxiliar calculando  $B^2$  (em  $G\lambda^2$ ) e  $\ln |V|$  para as **Observações de 1 a 10**, que são dominadas pelo Fluxo de Acreção Estendido.
- (b) **(15 pontos)** Manipule a equação de  $|V_{ext}(B)|$  para linearizá-la. Usando a calculadora científica para as **Observações de 1 a 10**, determine o coeficiente angular  $a$ , o coeficiente linear  $b$  e o coeficiente de correlação de Pearson  $r$  da reta de melhor ajuste.
- (c) **(25 pontos)** Em seguida, determine a incerteza estatística do coeficiente angular ( $\sigma_a$ ) e, utilizando o método de propagação de incertezas, calcule o tamanho angular do fluxo de acreção expresso como  $\theta_{ext} \pm \sigma_{\theta_{ext}}$  em  $\mu\text{as}$ .

**Dica:** Se variáveis  $x$  e  $y$  tem erros associados  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  então uma função  $f(x,y)$  terá um erro associado:

$$\sigma_{f(x,y)}^2 = \left(\sigma_x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\sigma_y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2$$

- (d) **(15 pontos)** Inspeccionando visualmente a tabela, identifique a observação (entre 11 e 20) que mais se aproxima do primeiro nulo do Anel de Fótons. Calcule a linha de base  $B_{nulo}$  desta observação. Assuma que a incerteza associada a essa leitura de linha de base é  $\sigma_B = 0,10 \text{ G}\lambda$ . Determine o diâmetro angular da sombra do buraco negro, expresso como  $\theta_{ring} \pm \sigma_{\theta_{ring}}$ , em  $\mu\text{as}$ .
- (e) **(15 pontos)** Segundo a Relatividade Geral, para um buraco negro de Schwarzschild, o diâmetro físico  $D_{ring}$  do anel de fótons é  $D_{ring} = \sqrt{27} \frac{2GM}{c^2}$ . Sabendo que M87 está a uma distância  $d = 16,4 \text{ Mpc}$  da Terra (assuma essa distância como exata para fins de cálculo de erro), calcule a massa do buraco negro M87\* expressa como  $M \pm \sigma_M$  em massas solares ( $M_\odot$ ).
- (f) **(16 pontos)** Na folha milimetrada, construa o gráfico linearizado correspondente ao modelo de Fluxo de Acreção para as **Observações de 1 a 10**. O gráfico deve conter os eixos nomeados com unidades, os 10 pontos dispersos e a reta de regressão ajustada no item (b).

Dados:  $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ ,  $1 \text{ Mpc} = 3,086 \cdot 10^{22} \text{ m}$ ,  $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ rad} = 2,06265 \cdot 10^5 \text{ as}$ .

**Solução:**

- a) Tabela auxiliar para linearização (Obs 1 a 10), usando  $B = \sqrt{u^2 + v^2}$ :

Obs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B^2 \text{ (G}\lambda^2)$	0,06	0,25	0,56	1,00	1,53	2,25	3,06	4,00	5,06	6,25
$\ln  V $	0,67	0,52	0,44	0,35	0,20	0,06	-0,20	-0,46	-0,87	-1,11

- b) Partindo da equação dada:

$$|V_{ext}| = V_0 \exp\left(-\frac{\pi^2 \theta_{ext}^2 B^2}{4 \ln 2}\right) \implies \ln |V| = \ln(V_0) - \left(\frac{\pi^2 \theta_{ext}^2}{4 \ln 2}\right) B^2$$

A equação tem a forma  $y = ax + b$ , com  $x = B^2$  e  $y = \ln |V|$ . O coeficiente angular é  $a = -\frac{\pi^2 \theta_{ext}^2}{4 \ln 2}$ . Inserindo os 10 pares de dados na calculadora (regressão linear), obtemos os valores (aproximados):

$$a \approx -0,283 \text{ G}\lambda^{-2}, \quad b \approx 0,639, \quad r \approx -0,997$$

- c) Calculando o erro do coeficiente angular ( $n = 10$ ) pela relação padrão com  $r$ :

$$\sigma_a = |a| \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n - 2}} = |-0,296| \sqrt{\frac{1/(-0,996)^2 - 1}{8}} \approx 0,009 \text{ G}\lambda^{-2}$$

Isolando o tamanho angular  $\theta_{ext}$ :

$$\theta_{ext} = \sqrt{\frac{-a \cdot 4 \ln 2}{\pi^2}} \approx \sqrt{0,0831} \approx 0,288 \cdot 10^{-9} \text{ rad} \approx 59,4 \mu\text{as}$$

Propagando o erro usando derivadas parciais:

$$\sigma_\theta = \left| \frac{\partial \theta_{ext}}{\partial a} \right| \sigma_a = \left| \frac{1}{2\sqrt{-a}} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi^2}} \right| \sigma_a = \theta_{ext} \frac{\sigma_a}{2|a|}$$

$$\sigma_\theta = 59,4 \cdot \frac{0,009}{2 \cdot 0,296} \approx 0,9 \mu\text{as}$$

$$\boxed{\theta_{ext} = 59,4 \pm 0,9 \mu\text{as}}$$

- d) O menor valor de visibilidade ocorre na **Observação 16** ( $|V| = 0,01$  Jy). Calculando o baseline da Obs 16:

$$B_{nulo} = \sqrt{2,88^2 + 2,16^2} = \sqrt{12,96} = 3,60 \text{ G}\lambda$$

Usando a condição do primeiro nulo da função de Bessel:

$$\pi \cdot \theta_{ring} \cdot B_{nulo} = 2,4048 \implies \theta_{ring} = \frac{2,4048}{\pi \cdot 3,60 \cdot 10^9} \approx 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ rad} \approx 44,0 \text{ } \mu\text{as}$$

Propagando o erro de  $B_{nulo}$  para  $\theta_{ring}$ :

$$\sigma_{\theta_{ring}} = \left| \frac{\partial \theta_{ring}}{\partial B} \right| \sigma_B = \frac{2,4048}{\pi B_{nulo}^2} \sigma_B = \theta_{ring} \frac{\sigma_B}{B_{nulo}}$$

$$\sigma_{\theta_{ring}} = 44,0 \cdot \frac{0,10}{3,60} \approx 1,2 \text{ } \mu\text{as}$$

$$\boxed{\theta_{ring} = 44,0 \pm 1,2 \text{ } \mu\text{as}}$$

- e) Determinamos o tamanho físico  $D_{ring}$ :

$$D_{ring} = d \cdot \theta_{ring} = (16,4 \cdot 3,086 \cdot 10^{22}) \cdot 2,13 \cdot 10^{-10} \approx 1,08 \cdot 10^{14} \text{ m}$$

A massa isolada é:

$$M = \frac{D_{ring} c^2}{2G\sqrt{27}} = \frac{d \cdot \theta_{ring} c^2}{2G\sqrt{27}}$$

$$M = \frac{(1,08 \cdot 10^{14}) \cdot (9 \cdot 10^{16})}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,196} \approx 1,40 \cdot 10^{40} \text{ kg} \approx 7,04 \cdot 10^9 M_{\odot}$$

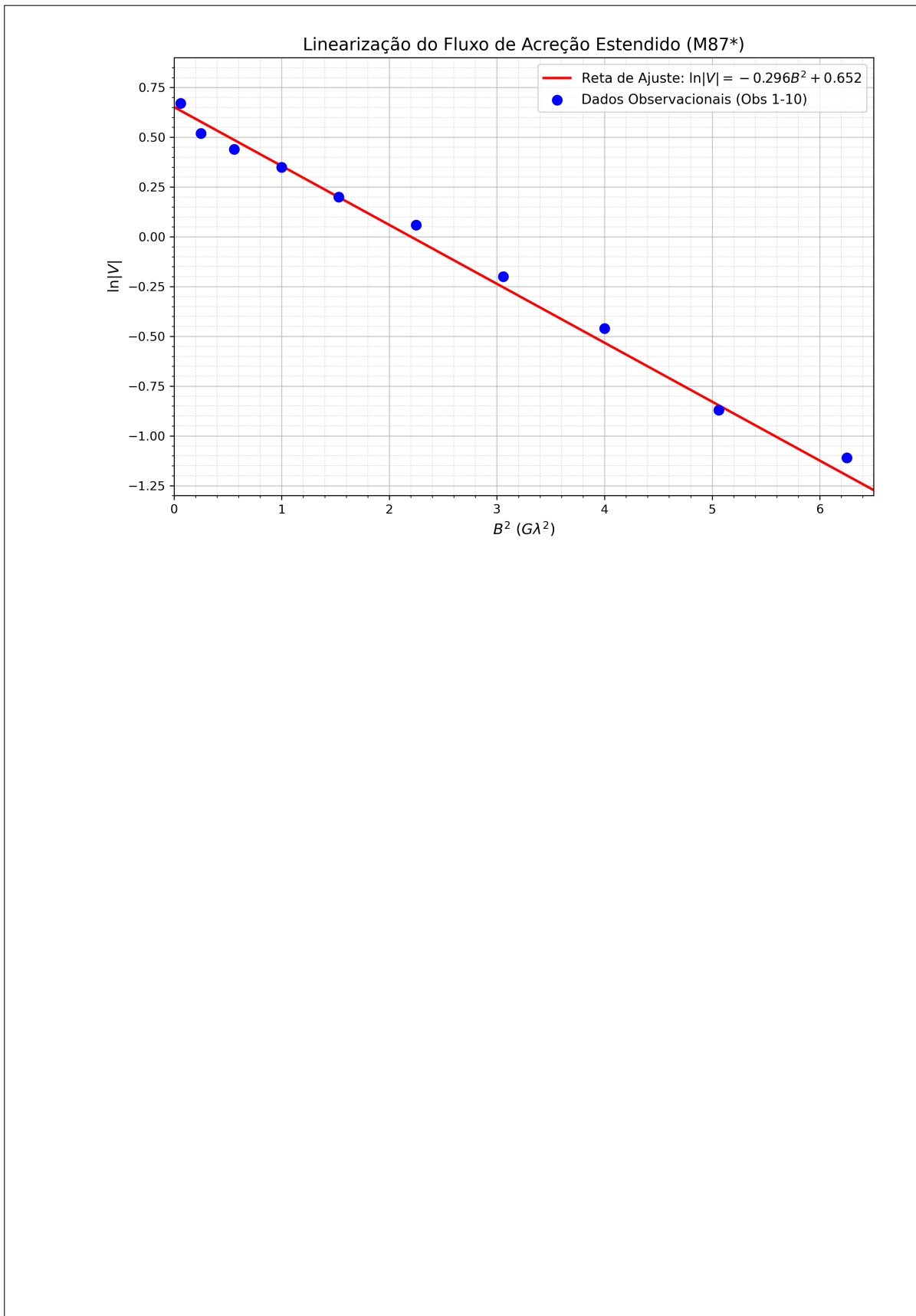
Como  $M$  é linearmente proporcional a  $\theta_{ring}$  (e  $d$  é considerado exato), o erro relativo se mantém:

$$\frac{\sigma_M}{M} = \frac{\sigma_{\theta_{ring}}}{\theta_{ring}} = \frac{1,2}{44,0} \approx 0,0273$$

$$\sigma_M = 7,04 \cdot 10^9 \cdot 0,0273 \approx 0,19 \cdot 10^9 M_{\odot}$$

$$\boxed{M = (7,0 \pm 0,2) \cdot 10^9 M_{\odot}}$$

- f) Gráfico e a reta de melhor ajuste.





## Grade de Correção

- a)
- +0,5 ponto por ponto correto. Desconto de meio ponto a cada erro.
- b)
- +3 pontos: Linearizar corretamente a equação  $|V_{ext}(B)|$ .
  - +4 pontos: Encontrar o coeficiente angular como  $a = -0,296 \pm 0,03 G\lambda^{-2}$ .
  - +4 pontos: Encontrar o coeficiente linear como  $b = 0,652 \pm 0,01$
  - +4 pontos: encontrar o coeficiente de correlação de Person  $r$  da reta de melhor ajuste como:  $r = -0,996 \pm 0,001$
- c)
- +5 pontos: Calcular corretamente o erro associado ao coeficiente angular como:  $\sigma_a = 0,009 \pm 0,001 G\lambda^{-2}$ .
  - +5 pontos: Calcular corretamente o tamanho angular como:  $\theta_{ext} = 59,4 \pm 1,5 \mu as$
  - +10 pontos: Fazer corretamente a propagação de erro com as derivadas parciais, encontrando  $\sigma_\theta = \theta_{ext} \frac{\sigma_a}{2|a|}$
  - +5 pontos: Calcular corretamente o erro como:  $\sigma_\theta = 0,9 \mu as$
- d)
- +1 ponto: Identificar corretamente a Observação 16 como a de menor visibilidade.
  - +3 pontos: Calcular corretamente o baseline da Obs 16 como:  $B_{nulo} = 3,60 G\lambda$
  - +6 pontos: Usar a condição de primeiro nulo do Bessel e encontrar  $\theta_{ring} \approx 44,0 \mu as$
  - +2 ponto: Fazer corretamente a propagação de erro com as derivadas parciais e encontrar:  $\sigma_{\theta_{ring}} = \theta_{ring} \frac{\sigma_B}{B_{nulo}}$
  - +3 pontos: Encontrar  $\sigma_{\theta_{ring}} \approx 1,2 \mu as$
- e)
- +2 pontos: Calcular o tamanho físico  $D_{ring} \approx 1,08 \cdot 10^{14} m$
  - +2 pontos: Calcular a massa isolada como  $M \approx 7,04 \cdot 10^9 M_\odot$
  - +8 pontos: Notar que como  $M$  é linearmente proporcional a  $\theta_{ring}$ , o erro relativo se mantém.
  - +3 pontos: Encontrar  $\sigma_M \approx 0,19 \cdot 10^9 M_\odot$
- f)
- Menos de seis pontos: Não terá pontuação atribuída.
  - Entre seis e nove pontos: sessenta por cento da pontuação será atribuída.
  - +0,5 ponto para cada ponto posicionado de maneira correta.
  - -0,5 ponto para cada ponto incorreto.
  - +5 pontos: Título do gráfico
  - +5 pontos: Unidade e título nos eixos.
  - +2 pontos: escalas regulares
  - Gráficos que ocupam menos de cinquenta por cento da folha não serão considerados
  - Pontos que ocupam menos de cinquenta por cento do gráfico: metade da pontuação será atribuída.
  - -4 pontos: Marcação com excesso de algarismos significativos.
    - **Obs:** Nas questões de valores numéricos, não propagamos os erros duas vezes, analisamos a coerência de cada valor numérico com tolerância de dez por cento.