



LISTA 3  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

---

### Instruções Gerais

1. A lista é composta por 4 problemas não avaliativos
2. Pratique escrever soluções **legíveis**.
3. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo ( $\mu_0$ )	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio ( $r_H$ )	37 pm	

### 1. Modela Af: Protoestrela

Considere uma protoestrela esférica e homogênea de massa  $M$  e raio  $R$ , inteiramente composta de um gás ideal com coeficiente de Poisson  $\gamma$  e massa molecular média  $\mu$ . Nosso objetivo é deduzir, a partir de um modelo físico simplificado, a evolução temporal no diagrama HR desse corpo enquanto sua luminosidade é sustentada pelo mecanismo de Kelvin–Helmholtz. O processo pode ser tratado como quasiestático, ou seja, a estrela se contrai lentamente de modo que, em cada instante, ela esteja praticamente em equilíbrio hidrostático. Durante toda a questão você não precisa se preocupar com casos que surgem de valores ou relações específicas para as constantes.

- (a) Deduza as expressões para os perfis internos de  $P(r)$  e  $T(r)$  no corpo em função da pressão na superfície  $P_s$ , densidade  $\rho$ , raio  $R$  e constantes físicas relevantes.

No mecanismo de Kelvin–Helmholtz, a estrela em contração libera energia gravitacional que é convertida em energia térmica e irradiada na forma de luminosidade. Esse processo de liberação de energia é responsável por sustentar temporariamente a luminosidade da protoestrela antes do início da fusão nuclear. Para realizar os próximos itens, você pode usar o teorema de Virial modificado, que correlaciona a energia autopotencial gravitacional  $\Omega$  e a energia interna do gás  $U$  como

$$\Omega + 3(\gamma - 1)U = 4\pi P_s R^3.$$

- b) Deduza a expressão para a energia autopotencial gravitacional do corpo em função de  $M$ ,  $R$  e constantes físicas.  
 c) Deduza a expressão para a energia total do gás  $E$  em função de  $M$ ,  $R$ ,  $P_c$  e constantes físicas relevantes.

Para estrelas de baixa massa, o envelope superficial é altamente convectivo, de modo que a temperatura efetiva da superfície muda muito pouco. Nesse regime, podemos assumir aproximadamente  $T_s$  constante.

- (d) Determine a relação  $R(t)$  da estrela durante a contração Kelvin–Helmholtz, considerando que inicialmente a nuvem tem raio  $R_0$ . Deixe sua resposta em função de  $R_0$ ,  $\gamma$ ,  $T_s$ ,  $M$  e constantes físicas.  
 (e) Calcule o tempo necessário  $\Delta t$  para que a protoestrela comece o seu processo de ignição, ou seja, que tenha temperatura o suficiente para iniciar o processo de fusão de hidrogênio em seu núcleo. **Dados:**  $R_0 = 4.5R_\odot$ ,  $M = M_\odot$ ,  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\mu = 0.61m_p$ ,  $T_{\text{fusão do H}} = 10^7$  K e  $T_s = 4000$  K.

Mesmo sob essa aproximação, a superfície do corpo ainda apresenta uma fina zona radiativa, responsável por regular a emissão de energia para o espaço. A pressão na superfície pode ser aproximada pela condição de Eddington:

$$P_s = \frac{2g}{3\kappa},$$

onde  $g$  é a gravidade superficial e  $\kappa$  a opacidade.

- (f) Mostre que a opacidade deve variar com a temperatura e a densidade de tal forma que existam  $a_1$  e  $a_2$  tais que  $\kappa \propto \rho^{a_1} T^{a_2}$  e calcule os valores desses expoentes.

Em protoestrelas mais massivas ou em fases posteriores da evolução, a temperatura superficial pode variar significativamente e o envelope pode ser parcialmente radiativo. Nesse caso, a evolução de  $R(t)$  precisa levar em conta a variação da energia térmica interna, e a opacidade pode seguir uma lei de potência do tipo

$$\kappa = \kappa_0 \rho^n T_s^m.$$

- (g) Derive uma relação para  $R$  em função de  $T_s$ ,  $n$ ,  $m$  e constantes, e determine a inclinação da trajetória da estrela no diagrama HR, a seguir está representado um diagrama HR para referência.

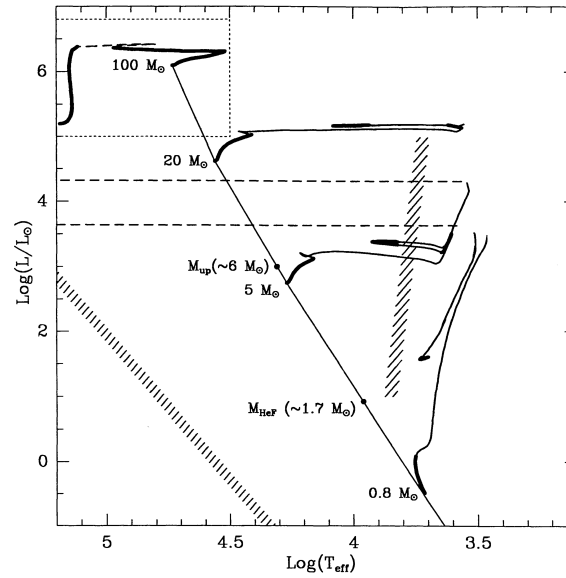


Figura 1: Diagrama HR, modificado a partir de (CHIOSI, Cesare; BERTELLI, Gianpaolo; BRESSAN, Alessandro)

**Solução:**

- (a) Pelo enunciado, podemos assumir a densidade como homogênea,  $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ , e como o processo é quasiestático, podemos tomar que o corpo está sempre em equilíbrio hidrostático.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}, \quad M_r = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \Rightarrow$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\rho^2}{3}r.$$

Resolvendo a equação, chegamos a:

$$P(r) = P_s + \frac{2\pi G\rho^2}{3}(R^2 - r^2),$$

onde  $P_s$  é a pressão na superfície. A temperatura segue a equação de estado do gás ideal:

$$T(r) = \frac{\mu}{k_B} \frac{P(r)}{\rho} = \frac{\mu}{k_B\rho} \left( \frac{P_s}{\rho} + \frac{2\pi G\rho}{3}(R^2 - r^2) \right).$$

- (b) Seja uma casca esférica de massa  $dm$  e raio  $r$ , com uma massa  $M_r$  contida dentro dela. A energia potencial dessa casca é:

$$d\Omega = -\frac{GM_r}{r} dm.$$

Para uma densidade homogênea  $\rho$ , temos:

$$d\Omega = -\frac{4\pi Gr^2\rho^2}{3} dV.$$

O volume da casca é:

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Substituindo, obtemos:

$$d\Omega = -\frac{16\pi^2 G \rho^2}{3} r^4 dr \Rightarrow d\Omega = -\frac{3GM^2}{R^6} r^4 dr.$$

Integrando do centro até a superfície:

$$\Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

(c) Usando o teorema de Virial modificado:

$$E = U + \Omega = \frac{4\pi P_s R^3 - \Omega}{3(\gamma - 1)} + \Omega.$$

Substituindo  $\Omega = -\frac{3}{5}GM^2/R$ , temos:

$$E = -\frac{3\gamma - 4}{5(\gamma - 1)} \frac{GM^2}{R} + \frac{4\pi}{3(\gamma - 1)} P_s R^3.$$

(d) O termo  $4\pi P_s R^3$  na energia total  $E$  corresponde basicamente à contribuição da superfície, que está relacionada à temperatura efetiva  $T_s$ . De fato, avaliando a equação na superfície  $r = R$ , temos:

$$T_s = \frac{\mu}{k_B} \frac{P_s}{\rho} = \frac{4\pi\mu}{3Mk_B} P_s R^3.$$

Portanto, a energia total pode ser reescrita como:

$$E = -\frac{3\gamma - 4}{5(\gamma - 1)} \frac{GM^2}{R} + \frac{k_B M}{\mu(\gamma - 1)} T_s.$$

Assumindo  $T_s$  constante, a variação temporal da energia é apenas gravitacional:

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{3\gamma - 4}{5(\gamma - 1)} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt}.$$

Igualando à luminosidade superficial radiada,

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_s^4,$$

e realizando manipulações puramente algébricas, temos a seguinte equação:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{20\pi(\gamma - 1)}{3\gamma - 4} \frac{\sigma T_s^4}{GM^2} R^4.$$

Integrando esta equação, obtemos  $R(t)$  durante a fase de contração Kelvin–Helmholtz:

$$R(t) = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{60\pi(\gamma-1)}{3\gamma-4} \frac{\sigma T_s^4 R_0^3}{GM^2} t\right)}}.$$

(e) A temperatura central da protoestrela, considerando a contribuição da pressão superficial  $P_s$ , é:

$$T_c = T_s + \frac{\mu GM}{2k_B R}.$$

A ignição ocorre quando  $T_c = T_{\text{fus}}$ , ou seja:

$$T_{\text{fus}} = T_s + \frac{\mu GM}{2k_B R_{\text{fus}}} \Rightarrow R_{\text{fus}} = \frac{\mu GM}{2k_B (T_{\text{fus}} - T_s)}.$$

Invertendo a equação para obter o tempo de contração até  $R_{\text{fus}}$ :

$$t_{\text{ign}} = \frac{\left(\frac{2k_B R_0 (T_{\text{fus}} - T_s)}{\mu GM}\right)^3 - 1}{\frac{60\pi(\gamma-1)}{3\gamma-4} \frac{\sigma T_s^4 R_0^3}{GM^2}} = 5.3 \times 10^7 \text{ anos.}$$

(f) A pressão na superfície segue a condição de Eddington:

$$P_s = \frac{2g}{3\kappa}, \quad g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow P_s = \frac{2GM}{3R^2} \frac{1}{\kappa}.$$

Substituindo  $R$  em função da densidade homogênea  $\rho$ , obtemos:

$$P_s = \frac{2GM}{3} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{2/3}.$$

Do perfil de temperatura, a pressão também é:

$$P_s = \frac{k_B}{\mu} \rho T_s.$$

Igualando as duas expressões de  $P_s$  e isolando  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{2GM\mu}{3k_B} \left(\frac{4\pi}{3M}\right)^{2/3} \rho^{-1/3} T_s^{-1}.$$

Ou seja, explicitamente:

$$\kappa \propto \rho^{-1/3} T^{-1} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = -1.$$

(g) Começamos substituindo a lei de potência da opacidade na pressão de superfície de Eddington e substituindo a densidade homogênea  $\rho$ :

$$P_s = \frac{2GM}{3\kappa_0} \left(\frac{4\pi}{3M}\right)^n R^{3n-2} T_s^{-m}.$$

Por outro lado, usando a equação de estado do gás ideal na superfície:

$$P_s = \frac{3Mk_B}{4\pi\mu} \frac{1}{R^3} T_s.$$

Igualando as duas expressões de  $P_s$  e isolando  $R$ :

$$R_s = \left[ \frac{3k_B\kappa_0}{2GM\mu} \left(\frac{4M}{4\pi}\right)^{1+n} \right]^{\frac{1}{3n+1}} T_s^{\frac{m+1}{3n+1}}.$$

Colocando na equação de luminosidade  $L = 4\pi R^2 \sigma T_s^4$ :

$$L = 4\pi\sigma \left[ \frac{3k_B\kappa_0}{2GM\mu} \left(\frac{4M}{4\pi}\right)^{1+n} \right]^{\frac{2}{3n+1}} T_s^{4 + \frac{2m+2}{3n+1}}.$$

Portanto, a inclinação da trajetória da protoestrela no diagrama HR será:

$$-\frac{d \log L}{d \log T_s} = -\frac{12n + 2m + 6}{3n + 1}.$$

## 2. Equação de Lane-Emden e Estrelas de Nêutrons

Estrelas são sistemas autogravitantes em equilíbrio hidrostático, nos quais a tendência de colapso gravitacional é equilibrada por gradientes de pressão interna. Esse equilíbrio pode ser descrito, no regime clássico (newtoniano), por duas equações fundamentais: a equação de equilíbrio hidrostático e a equação de conservação de massa.

Explicitamente, essas equações são dadas por:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r),$$

onde:

- $P(r)$  representa a pressão local a uma distância  $r$  do centro da estrela;
- $\rho(r)$  é a densidade de massa;
- $m(r)$  é a massa contida dentro de uma esfera de raio  $r$ ;

Essas equações, por si só, não formam um sistema fechado. Para resolvê-las, é necessário especificar uma equação de estado, que relacione pressão e densidade. Um dos modelos utilizados em astrofísica é o modelo politrópico, no qual se assume:

$$P = K\rho^{1+1/n},$$

onde  $K$  é uma constante (dependente da física do sistema) e  $n$  é o chamado índice politrópico, que caracteriza o tipo de matéria estelar.

Esse modelo permite descrever, de forma aproximada, diferentes regimes físicos (desde gases ideais até matéria degenerada em estrelas compactas).

### Parte I: Equação de Lane-Emden

Para simplificar o problema, podemos introduzir algumas variáveis adimensionais. Defina:

$$\rho(r) = \rho_c \theta(\xi)^n, \quad r = \alpha \xi,$$

onde:

- $\rho_c = \rho(0)$  é a densidade central da estrela;
- $\theta(\xi)$  é uma função adimensional que descreve o perfil de densidade;
- $\xi$  é a coordenada radial adimensional;
- $\alpha$  é um fator de escala definido por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}}$$

Essas transformações permitem reduzir o sistema original a uma única equação diferencial adimensional.

- (a) Mostre, a partir das equações de equilíbrio hidrostático e conservação de massa, juntamente com a equação de estado politrópica e as variáveis adimensionais acima, que a função  $\theta(\xi)$  satisfaz a equação de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

- (b) Analise o comportamento físico da solução próxima ao centro da estrela. Quais são as condições de contorno apropriadas para  $\theta(\xi)$  em  $\xi = 0$ ? Justifique sua resposta com base em regularidade física e simetria esférica.  
Além disso, explique como se define a superfície da estrela em termos da função  $\theta(\xi)$ . Qual é o significado físico do primeiro zero de  $\theta$ ?
- (c) Utilizando as definições introduzidas, mostre que a massa total  $M$  e o raio  $R$  da estrela podem ser escritos como:

$$M = 4\pi\alpha^3\rho_c(-\xi_1^2\theta'(\xi_1)), \quad R = \alpha\xi_1,$$

onde  $\xi_1$  é o primeiro zero de  $\theta(\xi)$ .

Interprete fisicamente o fator  $-\xi_1^2\theta'(\xi_1)$ .

- (d) A partir das expressões obtidas, elimine  $\rho_c$  e deduza a seguinte relação:

$$M \propto R^{(3-n)/(1-n)}, \quad (n \neq 1)$$

### Parte II: Aplicação a uma estrela de nêutrons

Estrelas de nêutrons são objetos extremamente compactos formados após o colapso gravitacional de estrelas massivas. Uma aproximação simplificada consiste em modelá-las como um sistema politrópico com índice  $n = 1$ , isto é:

$$P = K\rho^2$$

Para esse caso especial, a equação de Lane-Emden possui solução analítica:

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi},$$

com:

$$\xi_1 = \pi, \quad -\xi_1^2\theta'(\xi_1) = \pi$$

Observações astrofísicas indicam que estrelas de nêutrons típicas possuem massa da ordem de  $1,4 M_\odot$  e raio da ordem de 10 km.

- (e) Utilizando os resultados da Parte I, obtenha uma expressão explícita para a constante  $K$  em termos da massa total  $M$  e do raio  $R$  da estrela.
- (f) Calcule numericamente o valor de  $K$  para:

$$M = 1,4 M_\odot, \quad R = 10 \text{ km}$$

- (g) A partir dos resultados obtidos, estime a densidade central  $\rho_c$  da estrela. Em seguida, determine a pressão central  $P_c$ .  
Ademais, compare a densidade encontrada com a densidade nuclear típica:

$$\rho_{\text{nuc}} \sim 10^{17} \text{ a } 10^{18} \text{ kg/m}^3$$

### Parte III: Correções relativísticas

Para estrelas extremamente compactas, como estrelas de nêutrons, a descrição newtoniana não se mostra suficientemente adequada. Nesse regime, deve-se utilizar a relatividade geral. A equação de equilíbrio hidrostático é então substituída pela equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}$$

Essa equação pode ser vista como sendo a versão newtoniana multiplicada por três fatores corretivos associados a efeitos relativísticos no sistema.

(h) Discuta o papel físico de cada um dos fatores corretivos:

- O termo  $1 + \frac{P}{\rho c^2}$ : interprete o papel relativístico da pressão no desequilíbrio hidrostático.
- O termo  $1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2}$ : discuta sua relação com a energia interna do fluido.
- O fator  $\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1}$ : relacione com a curvatura do espaço-tempo e com o raio de Schwarzschild.

#### Solução:

a) Substituindo  $\rho = \rho_c \theta(\xi)^n$  na equação de estado politrópica, temos:

$$P = K \rho_c^{1+\frac{1}{n}} \theta^{n+1}$$

Derivando em relação a  $r$ ,

$$\frac{dP}{dr} = K \rho_c^{1+\frac{1}{n}} (n+1) \theta^n \frac{d\theta}{dr}$$

Como  $r = \alpha \xi$ , temos:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\theta}{d\xi}$$

Assim,

$$\frac{dP}{dr} = \frac{K(n+1)\rho_c^{1+\frac{1}{n}}}{\alpha} \theta^n \frac{d\theta}{d\xi}$$

Agora, substituímos na equação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{K(n+1)\rho_c^{1+\frac{1}{n}}}{\alpha} \theta^n \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{Gm(r)\rho_c \theta^n}{(\alpha \xi)^2}$$

Cancelando  $\theta^n$ :

$$\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1}{n}}}{\alpha} \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{Gm(r)}{\alpha^2 \xi^2}$$

Agora derivamos novamente em relação a  $\xi$  e utilizamos a equação da massa:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \Rightarrow \frac{dm}{d\xi} = 4\pi \alpha^3 \xi^2 \rho_c \theta^n$$

Derivando a equação anterior e substituindo  $dm/d\xi$ , obtemos:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = - \frac{4\pi G \rho_c \alpha^2}{K(n+1) \rho_c^{\frac{1}{n}}} \theta^n$$

Finalmente, usando a definição de  $\alpha$ , o fator multiplicativo reduz-se a 1, resultando em:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n}$$

b) Próximo ao centro da estrela ( $\xi \rightarrow 0$ ), a solução deve ser fisicamente regular. Em particular:

- A densidade deve permanecer finita:  $\rho(0) = \rho_c$ ;
- Não pode haver direção privilegiada (simetria esférica);
- Todas as grandezas físicas devem ser suaves (deriváveis).

Como  $\rho(r) = \rho_c \theta(\xi)^n$ , segue que:

$$\theta(0) = 1$$

Além disso, pela simetria esférica, o gradiente de qualquer grandeza escalar no centro deve ser nulo, caso contrário haveria uma direção preferencial. Logo:

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$$

Portanto, as condições de contorno apropriadas são:

$$\boxed{\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0}$$

### Superfície da estrela:

A superfície da estrela é definida como a posição onde a densidade se anula. Como:

$$\rho(r) = \rho_c \theta(\xi)^n,$$

isso ocorre quando:

$$\theta(\xi_1) = 0$$

O valor  $\xi_1$  corresponde ao primeiro zero da função  $\theta(\xi)$ .

### Interpretação física:

- Para  $\xi < \xi_1$ , temos  $\theta > 0$  e, portanto,  $\rho > 0$ , caracterizando o interior da estrela;
- Em  $\xi = \xi_1$ , a densidade se anula, definindo o limite físico do objeto;

- Para  $\xi > \xi_1$ , a solução matemática pode continuar, mas não possui significado físico no contexto estelar.

Assim, o primeiro zero de  $\theta$  determina o raio da estrela via:

$$R = \alpha \xi_1$$

- c) A massa total da estrela é obtida integrando a equação de conservação de massa:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Substituindo as variáveis adimensionais:

$$r = \alpha \xi, \quad \rho = \rho_c \theta^n,$$

temos:

$$\frac{dm}{d\xi} = 4\pi(\alpha\xi)^2 \rho_c \theta^n \alpha = 4\pi\alpha^3 \rho_c \xi^2 \theta^n$$

Integrando do centro ( $\xi = 0$ ) até a superfície ( $\xi = \xi_1$ ):

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi$$

Para simplificar a integral, utilizamos a equação de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

Multiplicando ambos os lados por  $\xi^2$ :

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \theta^n$$

Logo:

$$\xi^2 \theta^n = -\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)$$

Substituindo na expressão da massa:

$$M = -4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi$$

A integral se resolve diretamente:

$$M = -4\pi\alpha^3 \rho_c \left[ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_0^{\xi_1}$$

No centro ( $\xi = 0$ ), temos  $\xi^2 = 0$ , então o termo inferior se anula. Assim:

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c (-\xi_1^2 \theta'(\xi_1))$$

Portanto:

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c (-\xi_1^2 \theta'(\xi_1))$$

e, pela definição de coordenada radial:

$$R = \alpha \xi_1$$

Interpretação física de  $-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)$ :

- Esse fator depende apenas da solução adimensional da equação de Lane-Emden, ou seja, apenas do índice politrópico  $n$ ;
- Ele codifica como a densidade decai até a superfície da estrela;
- Valores maiores indicam uma queda mais acentuada da densidade próxima à borda;
- Assim, esse termo funciona como um fator estrutural que determina como a massa está distribuída no interior da estrela.

d) Das expressões obtidas no item anterior:

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c (-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)), \quad R = \alpha \xi_1,$$

e da definição de  $\alpha$ :

$$\alpha = \left( \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-1)}$$

Primeiramente, escrevemos  $R$  em função de  $\rho_c$ :

$$R = \alpha \xi_1 \Rightarrow R \propto \rho_c^{\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-1)}$$

Logo:

$$\rho_c \propto R^{\frac{2n}{1-n}}$$

Agora substituímos na expressão da massa:

$$M \propto \alpha^3 \rho_c$$

Como:

$$\alpha^3 \propto \rho_c^{\frac{3}{2}(\frac{1}{n}-1)},$$

temos:

$$M \propto \rho_c^{\frac{3}{2}(\frac{1}{n}-1)} \cdot \rho_c = \rho_c^{\frac{3}{2n} - \frac{3}{2} + 1} = \rho_c^{\frac{3}{2n} - \frac{1}{2}}$$

Substituindo a dependência de  $\rho_c$  em função de  $R$ :

$$M \propto \left( R^{\frac{2n}{1-n}} \right)^{\frac{3}{2n} - \frac{1}{2}}$$

Simplificando o expoente:

$$\left( \frac{2n}{1-n} \right) \left( \frac{3}{2n} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3-n}{1-n}$$

Portanto:

$$M \propto R^{\frac{3-n}{1-n}}, \quad (n \neq 1)$$

e) Para o caso  $n = 1$ , temos a solução analítica da equação de Lane-Emden:

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \xi_1 = \pi, \quad -\xi_1^2 \theta'(\xi_1) = \pi$$

Do item (c), a massa total é:

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c (-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)) = 4\pi\alpha^3 \rho_c \pi = 4\pi^2 \alpha^3 \rho_c$$

Além disso, o raio é:

$$R = \alpha \xi_1 = \alpha \pi \Rightarrow \alpha = \frac{R}{\pi}$$

Substituindo na expressão da massa:

$$M = 4\pi^2 \left( \frac{R}{\pi} \right)^3 \rho_c = \frac{4R^3}{\pi} \rho_c$$

Logo, podemos isolar a densidade central:

$$\rho_c = \frac{M\pi}{4R^3}$$

Agora usamos a definição de  $\alpha$  para  $n = 1$ :

$$\alpha = \left( \frac{2K}{4\pi G} \right)^{1/2} = \left( \frac{K}{2\pi G} \right)^{1/2}$$

Substituindo  $\alpha = R/\pi$ :

$$\frac{R}{\pi} = \left( \frac{K}{2\pi G} \right)^{1/2}$$

Elevando ao quadrado:

$$\frac{R^2}{\pi^2} = \frac{K}{2\pi G}$$

Finalmente, isolando  $K$ :

$$K = \frac{2GR^2}{\pi}$$

Com isso, podemos ver que a constante politrópica  $K$  depende apenas do raio da estrela (e não da massa), refletindo o fato de que, para  $n = 1$ , o raio é independente da densidade central.

f) Do item anterior, temos:

$$K = \frac{2GR^2}{\pi}$$

Substituímos os valores numéricos:

$$M = 1,4 M_{\odot} = 1,4 \times 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R = 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m},$$

Calculando:

$$K = \frac{2 \cdot (6,67 \times 10^{-11}) \cdot (10^4)^2}{\pi}$$

$$K = \frac{2 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 10^8}{\pi} = \frac{1,334 \times 10^{-2}}{\pi}$$

$$K \approx \frac{1,334 \times 10^{-2}}{3,1416} \approx 4,25 \times 10^{-3}$$

Portanto:

$$K \approx 4,25 \times 10^{-3} \text{ m}^5 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

g) Do item (e), obtivemos a relação entre massa, raio e densidade central:

$$\rho_c = \frac{\pi M}{4R^3}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$M = 1,4 \times 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \approx 2,79 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R = 10^4 \text{ m}$$

Calculando:

$$\rho_c = \frac{(2,79 \times 10^{30})\pi}{4 \times (10^4)^3} = \frac{2,79\pi \times 10^{30}}{4 \times 10^{12}} = \frac{2,79\pi}{4} \times 10^{18}$$

$$\rho_c \approx \frac{8,76}{4} \times 10^{18} \approx 2,19 \times 10^{18} \text{ kg/m}^3$$

Portanto:

$$\rho_c \approx 2,2 \times 10^{18} \text{ kg/m}^3$$

Agora, a pressão central é dada pela equação de estado politrópica ( $n = 1$ ):

$$P = K\rho^2$$

Logo:

$$P_c = K\rho_c^2$$

Substituindo os valores:

$$P_c = (4,25 \times 10^{-3}) \cdot (2,19 \times 10^{18})^2$$

$$P_c = 4,25 \times 10^{-3} \cdot 4,80 \times 10^{36} \approx 2,04 \times 10^{34} \text{ Pa}$$

Portanto:

$$P_c \approx 2,0 \times 10^{34} \text{ Pa}$$

A densidade nuclear típica é da ordem de:

$$\rho_{\text{nuc}} \sim 10^{17} \text{ a } 10^{18} \text{ kg/m}^3$$

Comparando:

- A densidade central obtida é da ordem de  $10^{18} \text{ kg/m}^3$ ;
- Portanto, é compatível com a densidade nuclear;
- Isso confirma que o modelo é fisicamente consistente com a natureza extremamente compacta das estrelas de nêutrons.

h) Cada um dos fatores corretivos tem um significado físico importante:

- Fator  $\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)$ : Na relatividade geral, a pressão também contribui para a fonte do campo gravitacional, uma vez que a densidade efetiva de energia inclui o termo  $\rho c^2 + P$  (na métrica, a componente  $T_{00}$  do tensor energia-momento é  $\rho c^2$  e as componentes espaciais envolvem a pressão). Esse fator mostra que a pressão atua como uma “fonte adicional de gravidade”, aumentando o gradiente de pressão necessário para sustentar a estrela. Em outras palavras, quanto maior a pressão, mais forte é o campo gravitacional gerado, o que tende a favorecer o colapso.
- Fator  $\left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2}\right)$ : Esse termo está relacionado à energia interna do fluido. Ele surge porque a massa total dentro de um raio  $r$  na relatividade geral não é simplesmente a integral da densidade de massa de repouso, mas também inclui a contribuição da energia interna e da pressão. A quantidade  $4\pi r^3 P/c^2$  representa aproximadamente a contribuição da pressão para a massa gravitacional dentro da esfera de raio  $r$ . Esse fator realça ainda mais o efeito da pressão como fonte de gravidade.

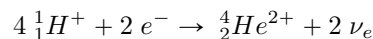
- Fator  $\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}$ : Esse é um fator puramente geométrico, proveniente da curvatura do espaço-tempo. A quantidade  $r_s(r) = \frac{2Gm(r)}{c^2}$  é o raio de Schwarzschild associado à massa  $m(r)$ . Quando  $r$  se aproxima desse valor, o denominador tende a zero, indicando uma forte curvatura. Esse fator amplifica o gradiente de pressão, mostrando que em regiões mais compactas o equilíbrio hidrostático exige um gradiente ainda maior. Ele é responsável pela existência de um limite máximo de massa para estrelas de nêutrons (limite de TOV), pois quando a estrela se torna compacta o suficiente, nenhum gradiente de pressão consegue equilibrar a gravidade e o colapso é inevitável.

Na descrição newtoniana, esses efeitos estão ausentes, de modo que não há um limite superior para a massa de uma estrela sustentada pela pressão degenerada de nêutrons. A inclusão dos fatores relativísticos torna o gradiente de pressão mais íngreme, dificultando o equilíbrio e levando à existência de uma massa máxima (tipicamente da ordem de  $2-3 M_\odot$ ) para estrelas de nêutrons. Esse é um dos resultados centrais da teoria de TOV e contrasta fortemente com o caso newtoniano, no qual uma estrela de nêutrons poderia ter massa arbitrariamente grande para um dado raio.

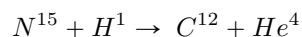
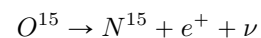
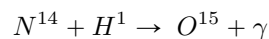
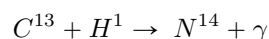
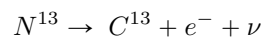
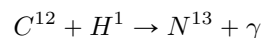
### 3. O Sol queima?

Diferentemente da crença popular, o Sol e as estrelas não são bolas de fogo que emitem energia por combustão. Em vez disso, elas produzem sua energia a partir de reações entre núcleos atômicos, chamadas de fusão nuclear. Como essas reações produzem novos elementos, esse processo também é conhecido como nucleossíntese estelar. Entre as reações de nucleossíntese estelar, as principais cadeias de reações são a cadeia próton-próton, ciclo CNO e reação triplo-alfa, representadas a seguir:

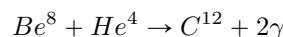
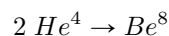
- Cadeia próton-próton (Cadeia pp):



- Ciclo Carbono-Nitrogênio-Oxigênio (Ciclo CNO):

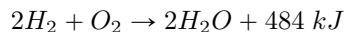


- Reação triplo-alfa:



- Encontre as reações reduzidas para o ciclo CNO e a reação triplo-alfa.
- Determine a energia total por reação emitida em cada tipo de cadeia reacionária. Desconsidere a energia das partículas liberadas que já estão representadas. Dados:  $A_H = 1.008 u$ ;  $A_{He} = 4.003 u$ ;  $A_C = 12 u$ ;  $A_p = 1 u$ .

- c) Agora, indique qual reação possui maior razão energia produzida por mol de  $H$  entre a cadeia pp e a combustão do  $H_2$  descrita pela equação química:



Entre as reações nucleares estelares a predominante em determinada estrela pode ser prevista a partir de sua temperatura sendo a cadeia pp mais comum próximo a  $4 \cdot 10^6 K$ , o ciclo CNO em temperaturas da ordem de  $1,7 \cdot 10^7 K$  e, por fim, a reação triplo-alpha necessitando de temperaturas ainda maiores, próximas de  $10^8 K$ . Essa mudança ocorre porque o aumento da temperatura eleva a velocidade das partículas na estrela, permitindo que núcleos com maior repulsão eletrostática consigam se aproximar e reagir. Além disso, temperaturas mais altas aumentam a razão entre íons e átomos neutros, fenômeno descrito pela equação de ionização de Saha, a qual será analisada no resto da questão.

No equilíbrio termodinâmico local entre dois estados A e B de uma partícula, o número de partículas nesses estados  $N_A$  e  $N_B$  é descrito pela equação de Boltzmann:

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{g_A}{g_B} \exp \frac{-(E_A - E_B)}{kT}$$

Onde  $E_i$  é a energia do estado  $i$ ,  $g_i$  é o peso estatístico do estado  $i$ ,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura do sistema. A partir dessa expressão, iremos derivar a equação de ionização de Saha. Considere o estado A como o átomo ionizado (estado +) e o estado B como o átomo neutro (estado 0).

- d) Encontre a diferença de energia entre os estados 0 e + ( $E_+ - E_0$ ) em função da energia de ionização  $\chi$ , do momento  $p$  do elétron livre, da massa  $m_e$  do elétron e constantes. Considere o caso semiclassico.

Agora, iremos entender os pesos estatísticos de cada estado. Para o estado 0, seu peso estatístico será simplesmente  $g_0$ . No entanto, para seu estado ionizado, seu peso estatístico será a multiplicação entre o peso estatístico próprio do íon  $g_+$  e o peso estatístico dos elétrons  $dg_e$ , onde o caráter infinitesimal surge porque estamos considerando elétrons com momento específico  $p$  em vez de todos os possíveis valores. O peso estatístico dos elétrons equivale a todos os estados que elétrons podem assumir no espaço de fase considerando que seu momento  $p$  pode ser decomposto em  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  e o princípio de exclusão de Pauli. A imagem a seguir mostra uma representação da existência de vários vetores com mesmo módulo (mesma energia), mas diferentes componentes.

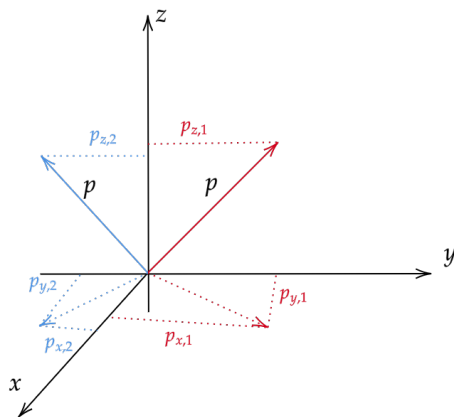


Figura 2: Imagem da decomposição de dois vetores momento com mesmo módulo, mas diferentes componentes

Além de um mesmo valor de momento possuir diversos conjuntos de componentes, o espaço de fase quântico que estamos analisando corresponde a um espaço de seis dimensões, cujas coordenadas são as posições  $(x, y, z)$  e os momentos  $(p_x, p_y, p_z)$ . Um fato muito importante desse espaço é que ele não é contínuo, pois podemos dividi-lo em pequenos cubos de dimensões  $h$ , de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg. A situação para os eixos  $p_x$  e  $x$  está representada na imagem a seguir:

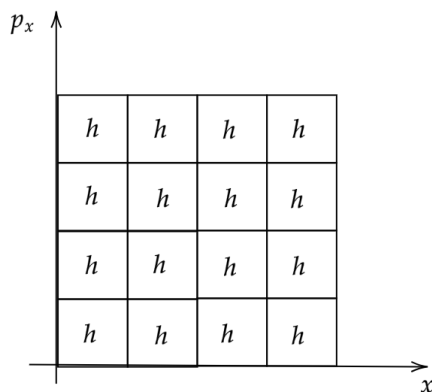


Figura 3: Imagem da representação do espaço de fase em uma dimensão dividido em pequenos compartimentos  $h$

- e) Com o auxílio das imagens e seus conhecimentos, escreva uma expressão para o número total de estados disponíveis (células ocupadas por elétrons vezes o número máximo de elétrons em cada célula) que elétrons com momento entre  $p$  e  $p + dp$  podem possuir no espaço de fase em função de  $p$ , da densidade de elétrons no espaço ordinário (real)  $n_e$  e constantes. Esse valor é o peso estatístico  $dg_e$  dos elétrons.

- f) Com todas as informações encontradas até agora, encontre uma expressão para a razão entre as densidades de íons  $n_+$  e a densidade de átomos neutros  $n_0$  em função de  $n_e$ ,  $g_0$ ,  $g_+$ , a energia de ionização  $\chi$ , a temperatura do sistema  $T$ , a massa  $m_e$  do elétron e constantes.

Dica:  $\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

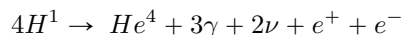
A expressão encontrada é a chamada equação de Saha. Essa expressão possui diversos usos em Astronomia, podendo ser utilizada para explicar a classificação espectral de estrelas, entender sua composição e estimar a idade do universo. A seguir, iremos utilizá-la em alguns contextos:

- g) Utilize a equação de Saha derivada anteriormente para encontrar uma expressão que relacione o estado neutro com o estado  $-$  do átomo em função da densidade  $n_-$ , o peso estatístico  $g_-$  do estado  $-$ ,  $n_0$ ,  $n_e$ ,  $g_0$ ,  $\chi_{ion}$  a energia de ligação do elétron no estado  $-$ ,  $T$ ,  $m_e$  e constantes.
- h) Sabendo que a energia de ionização do hidrogênio é  $\chi_+ = 13.54 \text{ eV}$ , a energia de ligação do elétron no  $H^-$  é  $0.7 \text{ eV}$ , a temperatura da fotosfera do Sol é  $T = 6000 \text{ K}$  e o termo  $P_e = n_e k T$  é a pressão eletrônica que para a fotosfera do Sol tem valor  $P_e = 30 \text{ Pa}$ , encontre as razões  $\frac{H^+}{H}$  e  $\frac{H^-}{H}$  entre as densidades do hidrogênio neutro e de suas formas ionizada e negativa na fotosfera solar. **Dica:** Para encontrar os pesos estatísticos dos estados do hidrogênio pense nas combinações de spin que os elétrons ligados ao átomo em cada estado podem ter. **Dado:**  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

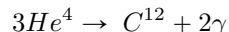
**Solução:**

- a) Somando todas as semirreações para os dois ciclos temos:

- Ciclo CNO:



- Reação triplo-alfa:



- b) Desconsiderando a energia das partículas  $\gamma$  e  $\nu$  emitidas, a energia da reação é resultado da variação de massa entre os produtos e reagentes. Utilizando os valores de massa atômica dados na questão temos que a energia emitida em cada uma será:

$$\Delta E_{pp} = \Delta E_{CNO} = (4 \cdot 1.008 - 4.003)m_p c^2 = 4.36 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 27.3 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_{ta} = (3 \cdot 4.003 - 12)m_p c^2 = 1.35 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 8.45 \text{ MeV}$$

- c) Como a energia encontrada anteriormente se refere a cada reação unitária, deve-se multiplicar o resultado anterior pelo número de avogrado:

$$\Delta E_{pp} N_a = 2.62 \cdot 10^{12} \text{ J/mol}_{\text{reação}}$$

Como queremos a razão de energia por mol de H, é necessário dividir o resultado anterior por 4, encontrando:

$$\frac{E_{pp}}{4} = 6.6 \cdot 10^{11} \text{ J} > \frac{484 \text{ kJ}}{2} = 2,42 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Portanto, a reação nuclear possui um maior aproveitamento para geração de energia por mol de H.

- d) A energia do estado + será a energia de ionização somada a energia cinética do elétron, que no caso semiclassico é escrita como  $\frac{p^2}{2m}$ . Portanto, a diferença de energia entre os estados é:

$$\Delta E_{0,+} = \chi + \frac{p^2}{2m_e}$$

- e) Os elétrons que possuem momento entre  $p$  e  $p+dp$  podem ocupar uma região formada por uma casca esférica no espaço de momento, ou seja, eles ocupam um volume de  $4\pi p^2 dp$  no espaço de momento. Como queremos esse volume no espaço real, deve-se perceber que um volume unitário (volume de uma célula) no espaço de fase é  $h \cdot h \cdot h = h^3$ , mas esse volume é formado por um produto entre os volumes unitários do momento e espaço:

$$V_p V = h^3 \Rightarrow V_p = \frac{h^3}{V}$$

Portanto, o número de células ocupadas pelos elétrons no espaço de fase será o volume do espaço de momento analisado dividido pelo volume unitário:

$$N_c = \frac{4\pi p^2 dp}{V_p} = \frac{4\pi p^2 V dp}{h^3}$$

Ainda, pelo princípio da exclusão de Pauli, cada célula só pode ser ocupada por dois elétrons, um com spin up e outro com spin down. Então, considerando o volume ocupado por um elétron no espaço sendo  $V = \frac{1}{n_e}$ , o número total de estados disponíveis para os elétrons será:

$$dg_e = 2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{h^3 n_e}$$

- f) Como a expressão anterior equivale a um infinitesimal, é preciso integrá-la junto com a diferença de energia entre os estados, que também depende do momento, em todos os valores de momento disponíveis para o elétron, ou seja, de 0 a  $\infty$ . Para isso, primeiro deve-se escrever a equação de Boltzmann para essa situação:

$$\frac{N_+}{N_0} = \int_0^\infty \frac{2g_+}{g_0} \frac{4\pi p^2 dp}{h^3 n_e} e^{-\left(\chi + \frac{p^2}{2m_e}\right) / kT}$$

$$\frac{V}{V} \cdot \frac{N_+}{N_0} = \frac{2g_+}{g_0} \frac{4\pi}{h^3 n_e} e^{-\frac{\chi}{kT}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2m_e kT}} dp$$

Substituindo  $\frac{N_+}{V} = n_+$  e  $\frac{N_0}{V} = n_0$ , e fazendo uma substituição de  $u = \frac{p^2}{2m_e kT}$  e  $dp = \frac{m_e kT}{p} du$  para conseguir resolver a integral da forma que é dada no item:

$$\frac{n_+}{n_0} = \frac{2g_+}{g_0} \frac{4\pi}{h^3 n_e} e^{-\frac{\chi}{kT}} \int_0^\infty 2^{\frac{1}{2}} (mkT)^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du$$

$$\frac{n_+}{n_0} = \frac{2g_+}{g_0} \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n_e} \exp\left(\frac{\chi_{ion}}{kT}\right)$$

- g) Para encontrar a expressão entre os estados 0 e  $-$ , basta substituir os índices  $+$  por 0 e os índices 0 por  $-$  na expressão original, uma vez que seria uma situação análoga de uma partícula perdendo um elétron:

$$\frac{n_0}{n_-} = \frac{2g_0}{g_-} \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n_e} \exp\left(\frac{-\chi}{kT}\right)$$

- h) Primeiro, iremos pensar sobre os pesos estatísticos dos estados  $+$ , 0 e  $-$ . Como o estado  $+$  não possui elétrons para poder alterarem o tipo de spin, então seu peso estatístico será 1. Enquanto que o do estado neutro 0 será 2, pois ele possui um elétron que pode possuir spin up ou down. Por fim, o estado ionizado  $-$  possuirá peso estatístico também 1, pois em uma mesma órbita os elétrons precisam ter spin opostos, ou seja, os elétrons desse estado sempre serão um up e o outro down. Com os pesos estatísticos, pode-se substituir os valores numéricos nas fórmulas encontradas anteriormente:

$$\frac{H_+}{H} = \frac{2g_+}{g_0} \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n_e} \exp\left(\frac{-\chi}{kT}\right) = \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot 3.13 \cdot 10^6 \cdot 4.34 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{H_+}{H} = 1.36 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{H}{H^-} = \frac{2g_0}{g_-} \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n_e} \exp\left(\frac{\chi_{ion}}{kT}\right) = \frac{2 \cdot 2}{1} \cdot 3.13 \cdot 10^6 \cdot 3.87$$

$$\frac{H^-}{H} = 2.06 \cdot 10^{-8}$$

#### 4. Moto Moto observações

Moto Moto decidiu fazer uma observação de 2 dias. Naturalizado em Fortaleza, ele decide observar o céu no meio do Parque do Cocó, envolto pela iluminação da cidade. Ele observou uma estrela com um telescópio motorizado (o motor mantém a estrela sempre centrada no mesmo conjunto de pixels do CCD). O CCD mede o sinal vindo de uma estrela a uma **taxa**  $R(t)$  em unidades proporcionais a  $e^-/s$  (elétrons acumulados em um pixel por segundo).

**Dia 1 (com estrela):** Moto Moto acompanhou a estrela desde o nascer até o pôr e registrou a taxa total  $R_1(t)$ . **Dia 2 (sem estrela):** ele repetiu a mesma trajetória de apontamento (mesmos horários), mas sem a estrela no campo (céu “vazio”), obtendo uma medida associada à poluição luminosa.

Assuma que:

- o detector tem um termo de ruído instrumental **constante** na leitura de qualquer sinal  $R_c$  (independente do tempo);
- no dia 2, Moto Moto obteve a tabela de  $R_p(t)$  (a forma do comportamento urbano);
- o ruído total efetivo (em taxa) é a sobreposição do ruído associado ao instrumento e um ruído desconhecido;
- O sol fica abaixo do horizonte durante todo o tempo de observação.

Além disso, neste experimento a estrela passa pelo zênite na culminação: Moto Moto estava aproximadamente no equador ( $\phi \simeq 0^\circ$ ) e escolheu uma estrela com declinação  $\delta \simeq 0^\circ$ .

**Tabela (dados).** Horários de 30 em 30 min (18:00–06:00). No Dia 1 mede-se  $R_1(t)$ ; no Dia 2 mede-se  $R_2(t)$ .

- (a) Esboce o gráfico  $R_1(t) \times t$  (todos os pontos do Dia 1).
- (b) O que a tabela do Dia 2 (valores de  $R_2$ ) representa fisicamente?
- (c) Estime o valor do ruído constante por segundo  $R_c$  do telescópio. Justifique.
- (d) Dê um motivo coerente para uma flutuação **para cima** em  $R_1(t)$  e um motivo coerente para uma flutuação **para baixo** em  $R_1(t)$  em relação a tendência dos dados.
- (e) Monte uma tabela do termo desconhecido “puro”  $R_3$  (isto é, **excluindo** o termo constante do telescópio) e explicita sua relação com  $R_2$ .
- (f) Explique de forma qualitativa o comportamento de  $R_3(t)$  ao longo da noite e identifique a fonte dominante.
- (g) Monte uma tabela com os dados do sinal vindo unicamente da estrela, **excluindo** os dados contaminados por fatores externos (justifique quais pontos excluiu).
- (h) Encontre uma expressão que relacione  $S(t)$  com o ângulo horário da estrela  $H(t)$  com base em extinção atmosférica. Deduza uma **linearização** adequada para encontrar a profundidade óptica vertical  $\tau$  da atmosfera e o sinal que incide na atmosfera vindo da estrela  $S_0$ .

Tabela 1: Taxa observada pelo CCD. Dia 1:  $R_1(t)$ ; Dia 2:  $R_2(t)$ .

Hora	$R_1$	$R_2$
18:00	592.340	230.489
18:30	643.637	180.369
19:00	663.478	139.471
19:30	669.502	107.266
20:00	670.242	83.320
20:30	669.465	66.570
21:00	670.368	57.355
21:30	742.652	126.593
22:00	739.483	119.330
22:30	674.252	50.122
23:00	674.759	50.013
23:30	674.890	50.000
00:00	674.900	50.000

Hora	$R_1$	$R_2$
00:30	674.890	50.000
01:00	674.759	50.013
01:30	674.252	50.122
02:00	268.464	50.589
02:30	268.242	51.551
03:00	267.954	53.400
03:30	660.250	57.355
04:00	670.242	83.320
04:30	669.502	107.266
05:00	663.478	139.471
05:30	643.637	180.369
06:00	592.340	230.489

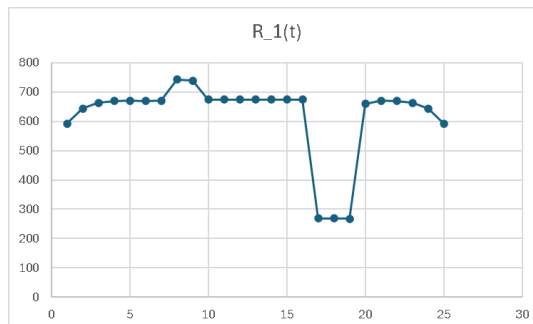
- (i) Monte a tabela dos dados linearizados e faça o gráfico linearizado.  
 (j) A partir do gráfico linearizado, estime a profundidade óptica vertical  $\tau$  da atmosfera na banda observada e o Sinal que incide na atmosfera vindo da estrela  $S_0$ .

**Solução:**

**(a) Esboço de  $R_1(t) \times t$**

O gráfico deve mostrar:

- crescimento do início da noite até o meio (estrela subindo  $\Rightarrow$  menor extinção);
- máximo próximo da culminação (zênite);
- simetria aproximada na descida;
- duas medidas anormalmente altas por volta de 21:30–22:00 (pico);
- queda abrupta em 02:00–03:00 (3 pontos), incompatível com variação suave.



**(b) Interpretação física de  $R_2(t)$** 

$R_2(t)$  representa o **fundo efetivo medido na mesma trajetória** sem a estrela no campo: contribuição do instrumento + céu urbano (poluição luminosa espalhada), sob condições atmosféricas semelhantes (ruído).

**(c) Determinação de  $R_c$** 

Perceba que o  $R_2$  se mantém constante nos horários 23h até 1h, quando a estrela está mais perto do zênite. Portanto:  $R_2(t) \approx \sqrt{R_c^2 + 0} = R_c$ .

Pela tabela, o valor mínimo observado é  $R_2 = 50.000$  (em torno de 23:30–00:30). Logo

$$R_c = 50 \text{ (na unidade de taxa do problema).}$$

**(d) Uma flutuação para cima e uma para baixo**

**Para cima (pico em 21:30–22:00):** aumento temporário do fundo  $R_u$  (ex.: refletor/farol, variação local de iluminação urbana, aerossóis iluminados), o que eleva  $R_2$  e  $R_1$  portanto deve ser algo fixo como um poste ou torre de transmissão.

**Para baixo (queda em 02:00–03:00):** atenuação súbita de  $S(t)$  (ex.: nuvem fina atravessando a linha de visada;). Note que o evento aparece em  $R_1$  mas não de modo compatível com o comportamento suave de  $R_2$  portanto tem que ser algo móvel já que há em um dia e em outro não.

**(e) Tabela do termo desconhecido “puro”  $R_u$  e relação com  $R_2$** 

Com  $R_c = 50$ :

$$R_u(t) = \sqrt{R_2(t)^2 - 50^2}.$$

A tabela abaixo (valores arredondados) fornece  $R_u(t)$ :

Hora	$R_u$	Hora	$R_u$
18:00	225.00	00:30	0.15
18:30	173.30	01:00	1.15
19:00	130.20	01:30	3.50
19:30	94.90	02:00	7.70
20:00	66.65	02:30	12.55
20:30	43.95	03:00	18.75
21:00	28.10	03:30	28.10
21:30	116.30	04:00	66.65
22:00	108.35	04:30	94.90
22:30	3.50	05:00	130.20
23:00	1.15	05:30	173.30
23:30	0.15	06:00	225.00
00:00	0.00		

**(f) Comportamento de  $R_u(t)$  e fonte dominante**

$R_u(t)$  é mínimo quando a estrela está alta (perto do zênite) e cresce fortemente perto do horizonte, validando como uma fonte de poluição luminosa como uma cidade, já que para ângulos perto do zênite poucos raios conseguem refratar e espalhar nessa direção diferente do horizonte.

**(g) Tabela do sinal estelar  $S(t)$  e exclusão de contaminados**

Compute:

$$S(t) = R_1(t) - R_2(t).$$

Os pontos 02:00, 02:30 e 03:00 devem ser excluídos do ajuste por serem **incompatíveis com a variação suave** esperada (evento externo: nuvem/tracking).

Tabela (com arredondamento; pontos contaminados marcados com ×):

Hora	$S = R_1 - R_2$	Hora	$S = R_1 - R_2$
18:00	361.851	00:30	624.890
18:30	463.268	01:00	624.746
19:00	524.007	01:30	624.130
19:30	562.236	02:00	217.875 ×
20:00	586.922	02:30	216.691 ×
20:30	602.895	03:00	214.554 ×
21:00	613.013	03:30	602.895
21:30	616,057	04:00	586.922
22:00	620,151	04:30	562.236
22:30	624.130	05:00	524.007
23:00	624.746	05:30	463.268
23:30	624.890	06:00	361.851
00:00	624.900		

**(h) Comportamento de  $S(t)$  e linearização**

Extinção atmosférica (atmosfera plano-paralela):

$$S(t) = S_0 e^{-\tau X(t)}.$$

Logo,

$$\ln S(t) = \ln S_0 - \tau X(t).$$

É necessário obter  $X(t)$  via geometria celeste.

Como  $\phi \simeq 0^\circ$  e  $\delta \simeq 0^\circ$ :

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \Rightarrow \sin h = \cos H.$$

Com  $X \simeq \sec z = \frac{1}{\sin h}$ , vem

$$X(t) = \sec H(t).$$

O ângulo horário varia linearmente:

$$H(t) = \omega(t - t_0), \quad \omega = 15^\circ/\text{h}.$$

O instante  $t_0$  é a culminação (máximo de  $S$ ), aqui  $t_0 \approx 00:00$ .

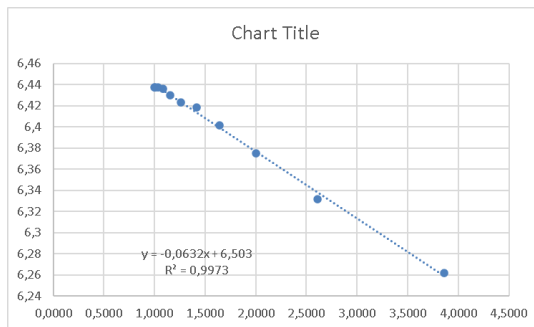
### (i) Tabela linearizada e gráfico

Para evitar divergência de  $X$  muito perto do horizonte e manter a aproximação plano-paralela válida, use (por exemplo)  $|H| \leq 75^\circ$ , isto é, horários de 19:00 a 05:00, e descarte 02:00–03:00 (contaminados).

A seguir,  $X = \sec H$  e  $y = \ln S$ :

Hora	$H$ (deg)	$X = \sec H$	$\ln S$
19:00	-75	3.8637	6.261505
19:30	-67.5	2.6131	6.331922
20:00	-60	2.0000	6.374892
20:30	-52.5	1.6427	6.401743
21:00	-45	1.4142	6.418386
21:30	-37.5	1.2605	6.423343
22:00	-30	1.1547	6.429966
22:30	-22.5	1.0824	6.436359
23:00	-15	1.0353	6.437345
23:30	-7.5	1.0086	6.437576
00:00	0	1.0000	6.437592
00:30	+7.5	1.0086	6.437576
01:00	+15	1.0353	6.437345
01:30	+22.5	1.0824	6.436359
03:30	+52.5	1.6427	6.401743
04:00	+60	2.0000	6.374892
04:30	+67.5	2.6131	6.331922
05:00	+75	3.8637	6.261505

O gráfico  $y = \ln S$  versus  $X$  deve ser aproximadamente uma reta.



**(j) Estimativa de  $\tau$**

Ajuste linear:

$$\ln S = a + bX.$$

Comparando com  $\ln S = \ln S_0 - \tau X$ :

$$\tau = -b, \quad S_0 = e^a.$$

Com os pontos acima (19:00–05:00, excluindo 02:00–03:00), obtém-se um ajuste típico:

$$\ln S \approx 6,503 - 0,0632 X \quad \Rightarrow \quad \tau \approx 0.0632.$$

(Consequentemente,  $S_0 \approx e^{6.6241} \approx 6.67 \times 10^2$  na unidade de taxa do problema.)

Para incerteza:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{(\frac{1}{r})^2 - 1}{N - 2}} \tau = \pm 0,004; \quad \sigma_b = \sigma_\tau \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x}^2\right)} = \pm 0,008$$

Logo:  $\sigma_{S_0} = \frac{\sigma_b}{b} e^b = \pm 1$