



LISTA 4
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

Instruções Gerais

1. A lista é composta por 5 problemas não avaliativos
2. Pratique escrever soluções **legíveis**.
3. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

1. Universo Filamentar Em cosmologia, o princípio cosmológico assume que, em escalas suficientemente grandes, o universo é homogêneo e isotrópico. No entanto, em escalas menores, a matéria organiza-se numa “teia cósmica” composta por filamentos, vazios e aglomerados. Nesta questão, idealizamos um universo alternativo no qual *toda* a massa está concentrada ao longo de um único filamento cósmico infinito, retilíneo, com densidade linear de massa constante λ . A gravitação é descrita pela teoria newtoniana. Este modelo exótico permite explorar as consequências dinâmicas de uma distribuição de matéria unidimensional.

A questão está dividida em três partes. Na Parte I, consideramos o filamento imerso em um espaço tridimensional. Na Parte II, passamos a um modelo efetivamente unidimensional da gravitação.

Parte I: Campo e potencial gravitacionais (3D)

- a) Usando a simetria do problema (translação ao longo do filamento e rotação em torno dele), determine o campo gravitacional $\vec{g}(r)$ a uma distância radial r do filamento.

Dica: lei de Gauss para a gravitação

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{\text{int}}$$

- b) Determine o potencial gravitacional $\Phi(r)$, sabendo que:

$$g(r) = -\frac{d\Phi}{dr}$$

Escolha a constante de integração tal que $\Phi(1) = 0$. Compare com o potencial do universo convencional e discuta por que $\Phi(r)$ diverge tanto em $r \rightarrow 0$ quanto em $r \rightarrow \infty$. O que isso implica para a existência de órbitas ligadas?

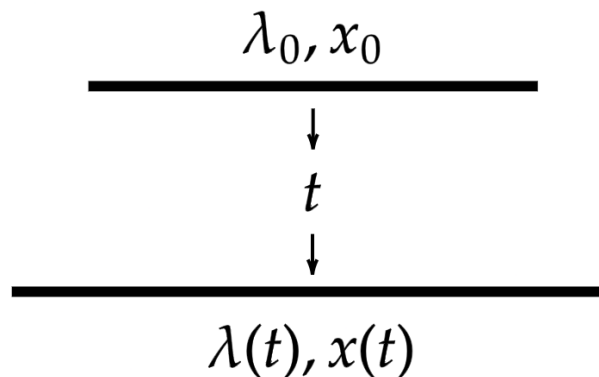
- c) Uma partícula parte do repouso em $r = r_0$. Use conservação de energia para obter $\dot{r}(r)$, obtenha o tempo de queda até o filamento e discuta se esse tempo é finito ou infinito.

Dica:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{-\ln u}} = \sqrt{\pi}$$

Parte II: Evolução cosmológica (modelo efetivo 1D)

Nesta parte, consideramos um modelo efetivamente unidimensional, no qual a gravitação é descrita ao longo de uma única coordenada espacial, como representado na imagem a seguir.



- d) Defina o fator de escala $a(t)$ tal que $x(t) = a(t)x_0$. Mostre que a conservação da massa implica

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0}{a(t)}$$

- e) A equação de Poisson em 1D leva a

$$\frac{dg}{dx} = -2G' \lambda,$$

em que G' se trata do equivalente à constante gravitacional para este universo, com dimensões diferentes.

Use a simetria de reflexão para obter $g(x)$ e, em seguida, mostre que a equação de movimento de uma partícula comóvel implica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2G'\lambda_0}{a}$$

Por fim, compare com o caso tridimensional

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho_0}{a^3},$$

discutindo o papel da dimensionalidade na evolução da densidade.

- f) Multiplicando a equação obtida no item e) para o universo 1D por \dot{a} e integrando, mostre que

$$\dot{a}^2 = -4G'\lambda_0 a + C$$

Interprete C como energia total por unidade de massa e determine a condição para que o universo colapse, isto é, para que $a(t) = 0$ em um instante finito de tempo.

Solução:

- a) Pela simetria do problema (translação ao longo do filamento e rotação em torno dele), o campo gravitacional \vec{g} é radial e depende apenas da distância r ao filamento. Utilizamos a lei de Gauss para a gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Como superfície gaussiana, escolhemos um cilindro de raio r e comprimento L coaxial ao filamento. O fluxo através das tampas é nulo (pois \vec{g} é paralelo às tampas), e na superfície lateral $|\vec{g}|$ é constante e perpendicular à superfície. Assim:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = g(r) \cdot (2\pi r L)$$

A massa interna é a massa contida no trecho do filamento de comprimento L :

$$M_{\text{int}} = \lambda L$$

Substituindo na lei de Gauss:

$$g(r) \cdot 2\pi r L = -4\pi G(\lambda L) \Rightarrow g(r) = -\frac{2G\lambda}{r}$$

O sinal negativo indica que o campo aponta radialmente para dentro (sentido oposto ao vetor radial \hat{r}). Portanto, em módulo:

$$|\vec{g}(r)| = \frac{2G\lambda}{r}$$

b) O campo gravitacional obtido no item (a) é radial:

$$\vec{g}(r) = -\frac{2G\lambda}{r} \hat{r}$$

Assim,

$$-\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{2G\lambda}{r} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{2G\lambda}{r}$$

Integrando:

$$\Phi(r) = 2G\lambda \ln r + C,$$

onde C é uma constante de integração. Escolhemos a condição $\Phi(1) = 0$:

$$0 = 2G\lambda \ln 1 + C \Rightarrow C = 0$$

Portanto,

$$\Phi(r) = 2G\lambda \ln r$$

Comparação com o potencial de uma massa pontual em 3D: Para uma massa pontual M em três dimensões, $\Phi_{3D}(r) = -\frac{GM}{r}$. Enquanto o potencial newtoniano tridimensional tende a 0 quando $r \rightarrow \infty$ e a $-\infty$ quando $r \rightarrow 0$, o potencial do filamento diverge para $+\infty$ quando $r \rightarrow \infty$ e para $-\infty$ quando $r \rightarrow 0$. Essa diferença decorre da distribuição unidimensional da massa.

Divergências: - Em $r \rightarrow 0$: $\Phi \rightarrow -\infty$, indicando uma atração muito forte nas proximidades do filamento. - Em $r \rightarrow \infty$: $\Phi \rightarrow +\infty$, o que significa que uma partícula em repouso no infinito teria energia potencial infinita – na prática, isso indica que não é possível afastar a partícula indefinidamente sem fornecer energia.

Implicação para órbitas ligadas: Para uma partícula com momento angular não nulo, o potencial efetivo é $U_{\text{ef}}(r) = 2G\lambda m \ln r + L^2/(2mr^2)$. Este potencial possui um mínimo em $r_c = L/(m\sqrt{2G\lambda})$, onde a segunda derivada é positiva, indicando uma órbita circular estável.

c) Uma partícula de massa m parte do repouso em $r = r_0$. O movimento ocorre sob a ação do campo gravitacional do filamento, cujo potencial é $\Phi(r) = 2G\lambda \ln r$ (com $\Phi(1) = 0$). A energia total se conserva.

A energia cinética é $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ (movimento radial apenas, pois não há velocidade angular inicial). A energia potencial gravitacional é $U(r) = m\Phi(r) = 2G\lambda m \ln r$.

Como a partícula parte do repouso em $r = r_0$, a energia total é:

$$E = U(r_0) = 2G\lambda m \ln r_0$$

Para uma posição r qualquer, a conservação da energia dá:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + 2G\lambda m \ln r = 2G\lambda m \ln r_0$$

Cancelando m e isolando \dot{r}^2 :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = 2G\lambda(\ln r_0 - \ln r) = 2G\lambda \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Portanto,

$$\dot{r}^2 = 4G\lambda \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Como a partícula está caindo em direção ao filamento, $\dot{r} < 0$, logo:

$$\dot{r}(r) = -\sqrt{4G\lambda \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}$$

O tempo necessário para a partícula ir de $r = r_0$ até o filamento ($r \rightarrow 0$) é:

$$t_{\text{queda}} = \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\dot{r}} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{4G\lambda \ln(r_0/r)}}$$

Fazendo a mudança de variável $u = r/r_0$ ($0 < u \leq 1$), temos $dr = r_0 du$ e $\ln(r_0/r) = -\ln u$. Assim:

$$t_{\text{queda}} = \int_0^1 \frac{r_0 du}{\sqrt{4G\lambda(-\ln u)}} = \frac{r_0}{2\sqrt{G\lambda}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{-\ln u}}$$

Portanto,

$$t_{\text{queda}} = \frac{r_0}{2\sqrt{G\lambda}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$t_{\text{queda}} = \frac{\sqrt{\pi} r_0}{2\sqrt{G\lambda}}$$

Conclusão: O tempo de queda é **finito**. Diferentemente do que ocorreria se a força fosse constante ou se houvesse uma singularidade muito forte, o potencial logarítmico leva a uma aceleração que cresce suficientemente quando $r \rightarrow 0$ de modo que a partícula atinge o filamento em um intervalo de tempo finito. Esse resultado contrasta com o caso de uma massa pontual em 3D, onde o tempo de queda para $r = 0$ também é finito (embora a dependência com r_0 seja diferente).

- d) Definimos o fator de escala $a(t)$ tal que a coordenada física $x(t)$ de uma partícula comóvel se relaciona com sua coordenada comóvel x_0 por:

$$x(t) = a(t) x_0$$

Considere um segmento comóvel de comprimento dx_0 . O comprimento físico correspondente é $dx = a(t) dx_0$. A massa contida nesse segmento é conservada, pois não há fluxo de matéria através de suas bordas (as partículas são comóveis). Seja $\lambda(t)$ a densidade linear de massa (massa por unidade de comprimento físico) no instante t . A massa no segmento é:

$$dm = \lambda(t) dx = \lambda(t) a(t) dx_0$$

No instante inicial $t = 0$, adotamos $a(0) = 1$, de modo que $x(0) = x_0$ e a densidade linear inicial é $\lambda_0 = \lambda(0)$. A massa inicial no mesmo segmento comóvel é:

$$dm = \lambda_0 dx_0$$

Igualando as duas expressões para dm (conservação da massa):

$$\lambda(t) a(t) dx_0 = \lambda_0 dx_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) a(t) = \lambda_0$$

Portanto,

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0}{a(t)}$$

e) A equação de Poisson em 1D é dada por

$$\frac{dg}{dx} = -2G'\lambda(t)$$

Pela simetria de reflexão em torno da origem ($x = 0$), o campo gravitacional deve ser ímpar, isto é,

$$g(-x) = -g(x),$$

e, portanto, aponta sempre em direção à origem. Integrando a equação de Poisson, obtemos:

$$g(x) = -2G'\lambda(t)x$$

Agora, consideramos uma partícula comóvel cuja posição é dada por

$$x(t) = a(t)x_0$$

Derivando duas vezes em relação ao tempo:

$$\ddot{x} = \ddot{a}x_0$$

Por outro lado, pela equação de movimento (segunda lei de Newton),

$$\ddot{x} = g(x) = -2G'\lambda(t)x = -2G'\lambda(t)a(t)x_0$$

Igualando as expressões para \ddot{x} :

$$\ddot{a} x_0 = -2G' \lambda(t) a(t) x_0$$

Cancelando x_0 (não nulo):

$$\ddot{a} = -2G' \lambda(t) a(t)$$

Utilizando o resultado do item (d), $\lambda(t) = \lambda_0/a(t)$, obtemos:

$$\ddot{a} = -2G' \frac{\lambda_0}{a(t)} a(t) = -2G' \lambda_0$$

Dividindo ambos os lados por $a(t)$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2G' \lambda_0}{a}$$

Comparando com o caso tridimensional:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G \rho_0}{a^3},$$

vemos que, no caso 1D, a dependência com o fator de escala é $1/a$, enquanto no caso 3D é $1/a^3$.

Isso reflete o fato de que, em 1D, a densidade linear escala como $\lambda \propto 1/a$, enquanto em 3D a densidade volumétrica escala como $\rho \propto 1/a^3$. Portanto, a dimensionalidade do espaço altera diretamente a forma da evolução gravitacional do universo.

f) Partimos da equação obtida no item anterior:

$$\ddot{a} = -2G' \lambda_0$$

Multiplicando ambos os lados por \dot{a} :

$$\ddot{a} \dot{a} = -2G' \lambda_0 \dot{a}$$

Observamos que o lado esquerdo pode ser escrito como:

$$\ddot{a} \dot{a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{a}^2)$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{a}^2) = -2G' \lambda_0 \dot{a}$$

Integrando em relação ao tempo:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = -2G' \lambda_0 a + C',$$

ou, redefinindo a constante de integração,

$$\dot{a}^2 = -4G' \lambda_0 a + C$$

Podemos interpretar essa equação como uma equação de conservação de energia por unidade de massa:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = E,$$

onde o potencial efetivo é

$$V(a) = 2G'\lambda_0 a,$$

e a energia total por unidade de massa é

$$E = \frac{C}{2}$$

Para que o universo colapse (isto é, atinja $a = 0$ em tempo finito), é necessário que exista um ponto de retorno, isto é, um valor máximo a_{\max} tal que $\dot{a} = 0$. Da equação acima:

$$0 = -4G'\lambda_0 a_{\max} + C \Rightarrow a_{\max} = \frac{C}{4G'\lambda_0}$$

Para que exista uma solução física com $\dot{a}^2 \geq 0$, é necessário que

$$C - 4G'\lambda_0 a \geq 0,$$

o que implica $C > 0$.

Nesse caso, o universo atinge um valor máximo

$$a_{\max} = \frac{C}{4G'\lambda_0}$$

e, portanto, inevitavelmente colapsa em tempo finito.

Assim, todo universo fisicamente permitido neste modelo (com $C > 0$) sofre colapso.

2. A Grande Quicada A Cosmologia busca compreender, além de todo o caminho que o universo teve para chegar até aqui, quais os possíveis finais (ou não) ele pode ter. Um dos finais mais interessantes atualmente estudados é o Big Bounce (Grande Quicada). Nesse modelo, o universo tem uma densidade maior que a densidade crítica, e, eventualmente passa a contrair (ou seja, a gravidade ganha o balanço de forças). Contudo, ao diminuir para uma escala muito pequena, diferentemente do modelo do Big Crunch (Grande Esmagamento), o universo não se torna uma singularidade, mas sim, devido a interações gravitacionais quânticas, o universo retoma sua expansão, entrando em um ciclo infinito de expansões e contrações.

- Considere um universo com curvatura positiva e que contém apenas energia escura (constante cosmológica). Encontre uma expressão para o fator de escala mínimo a_m desse universo, ou seja, o fator de escala no momento exato em que ele deixa de contrair e passa a se expandir novamente. Sua expressão deve estar em função apenas do fator de densidade Ω_0 .
- Assumindo que a_m ocorre no tempo $t = t_m$, encontre uma expressão para o fator de escala do universo em um tempo t . Sua expressão deve estar em função de t, t_m, a_m, H_0 e Ω_0 . Dado:

$$\int_b^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{b}\right)$$

- c) Encontre a expressão para o tempo entre o presente e a última quicada desse universo em função de H_0 e Ω_0

Solução:

- a) Para esse universo, a equação de Friedmann pode ser escrita como:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_0 + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

No ponto em que a é minimizado:

$$\begin{aligned} H &= 0 \\ 0 &= \Omega_0 + \frac{1 - \Omega_0}{a_m^2} \\ a_m &= \sqrt{\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}} \end{aligned}$$

- b) Manipulando a equação de Friedmann:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_0 + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_0} = \Omega_0 + \left(-\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}\right) \cdot \frac{\Omega_0}{a^2}$$

$$H^2 = H_0^2 \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{a_m^2}{a^2}}$$

Substituindo $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ e separando as variáveis:

$$H_0 \sqrt{\Omega_0} dt = \frac{da}{\sqrt{a^2 - a_m^2}}$$

Integrando de $a(t_m) = a_m$ até $a(t) = a$, utilizando a integral dada no enunciado:

$$H_0 \sqrt{\Omega_0} (t - t_m) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{a}{a_m} \right)$$

Por fim, isolando a :

$$a = a_m \cosh H_0 \sqrt{\Omega_0} (t - t_m)$$

- c) Esse intervalo de tempo é simplesmente a diferença entre t_0 e t_m . Como $a(t_0) = 1$ por definição:

$$t_0 - t_m = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_0}} \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}} \right)$$

3. Foguetinho Após anos de rivalidade intensa na lendária Batalha de Aura, Bibucha e o Bibrasil finalmente percebem que existem desafios maiores do que suas diferenças. Em uma reviravolta inesperada, eles decidem unir forças no projeto mais ambicioso já concebido: Ballus V: Em busca da lambada cósmica.

O objetivo? Levar um foguete experimental até regiões cada vez mais distantes do universo em expansão, investigando os limites do espaço observável e testando os efeitos da Relatividade em um cenário cosmológico extremo.

Sua missão é analisar o movimento desse foguete e entender como a expansão do universo influencia (ou não) sua dinâmica. Considere um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker, restrita a movimentos radiais,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2.$$

Nesta métrica, a coordenada t corresponde ao tempo cosmológico, isto é, ao tempo próprio medido por observadores comóveis que participam da expansão do universo. A coordenada radial r é uma coordenada comóvel, que permanece constante para partículas que seguem o fluxo de expansão. Ballus parte do repouso e move-se radialmente ao longo dessa geometria, mantendo aceleração própria constante g , medida em seu referencial instantaneamente em repouso.

- a) Mostre que a distância física real entre dois eventos separados radialmente é dada por

$$D(t) = a(t) r(t).$$

e explique por que essa quantidade, e não a coordenada comóvel r , corresponde à separação espacial fisicamente observável.

- b) Prove que a velocidade do foguete medida por um observador comóvel local é dada por

$$v(t) = a(t) \dot{r}(t).$$

Explique por que essa velocidade, e não \dot{r} , é a quantidade fisicamente relevante para descrever o movimento local do foguete.

- c) Usando exclusivamente as leis relativísticas de contração do espaço e de dilatação do tempo da Relatividade Especial, deduza a relação entre a aceleração própria g , o tempo próprio τ do foguete e a velocidade v medida por observadores comóveis locais. A expansão do universo modifica essa relação local? Justifique sua resposta.
- d) Expresse a velocidade v em função do tempo próprio τ do foguete.
- e) Determine o tempo cosmológico t como função de τ .
- f) Considerando um sistema de coordenadas em que o foguete está inicialmente no centro do sistema, expresse explicitamente D em função de τ para $a(t) = a(t_0) \frac{t}{t_0}$.

Solução:

- a) A distância física entre dois pontos é definida como o comprimento de uma curva espacial tomada em um instante de tempo cosmológico fixo, isto é, sobre uma hipersuperfície $t = \text{constante}$. Impor simultaneidade para observadores comóveis implica $dt = 0$, de modo que a métrica se reduz a

$$dl = a(t) dr.$$

Como a integração é realizada mantendo o tempo fixo, o fator de escala $a(t)$ permanece constante ao longo do caminho espacial. Assim, a distância física real entre a origem e o foguete é

$$D(t) = \int_0^{r(t)} a(t) dr = a(t) r(t).$$

A coordenada comóvel r não representa uma distância observável, pois permanece fixa para observadores que participam da expansão do universo. A quantidade fisicamente mensurável é $D(t)$, que incorpora explicitamente o efeito da expansão espacial.

- b) Um observador comóvel local mede intervalos espaciais e temporais definidos pela métrica em sua vizinhança imediata. Para eventos separados radialmente e ocorrendo em um mesmo instante de tempo cosmológico, o elemento de comprimento físico é

$$dl = a(t) dr.$$

O tempo medido por esse observador coincide com o tempo cosmológico local, uma vez que observadores comóveis estão em queda livre e sincronizados pelo tempo t da métrica.

A velocidade do foguete medida por esse observador é, por definição,

$$v \equiv \dot{l}t = a(t) \dot{r}(t).$$

A quantidade \dot{r} isoladamente não corresponde a uma velocidade fisicamente mensurável, pois depende da escolha de coordenadas e não incorpora a escala física do espaço. Já $v = a\dot{r}$ representa a velocidade relativa local entre o foguete e o observador comóvel no mesmo ponto espacial, sendo, portanto, a grandeza relevante para descrever o movimento local do foguete.

- c) Considere dois observadores comóveis infinitesimalmente próximos ao longo da trajetória do foguete. Em uma vizinhança suficientemente pequena do espaço-tempo, os efeitos da expansão podem ser desprezados, e cada observador comóvel define um referencial local aproximadamente inercial. Assim, as relações cinemáticas da Relatividade Especial podem ser aplicadas localmente. Seja v a velocidade do foguete medida por um observador comóvel local em um instante, e $v + dv$ a velocidade medida por um segundo observador comóvel infinitesimalmente à frente, após um intervalo de tempo próprio $d\tau$ do foguete. No referencial instantaneamente em repouso do foguete, que está parado nesse instante, o observador que estava à frente do foguete se aproxima do foguete com velocidade de módulo aproximadamente v , enquanto o observador que estava atrás se afasta com velocidade de módulo aproximadamente v .

No referencial do foguete, a separação espacial $d\ell_0$ entre os dois observadores sofre contração de Lorentz quando observada no referencial comóvel,

$$d\ell = \frac{d\ell_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Além disso, o intervalo de tempo dt medido pelo observador comóvel relaciona-se ao tempo próprio do foguete por dilatação temporal,

$$dt = \gamma d\tau.$$

A variação da velocidade relativa entre os dois observadores comóveis é dada por

$$dv = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell_0}{\gamma^2 d\tau}.$$

No referencial do foguete, a aceleração própria é definida por

$$g = \frac{d^2\ell_0}{d\tau^2}.$$

Identificando $d^2\ell_0 = g d\tau^2$, obtemos

$$\boxed{v\tau = \frac{g}{\gamma^2}}.$$

A expansão do universo não modifica essa relação, pois toda a dedução é realizada localmente, onde a métrica pode ser aproximada pela métrica de Minkowski. A aceleração própria e a velocidade v são quantidades definidas por medições locais e, portanto, obedecem às leis da Relatividade Especial independentemente da expansão global do espaço.

Observação: O motivo profundo pelo qual foi possível utilizar relações da Relatividade Especial ao longo da questão está ligado à estrutura geométrica do espaço-tempo. Em Relatividade Geral, o espaço-tempo é uma variedade diferenciável equipada com uma métrica, o que garante que, em uma vizinhança suficientemente pequena de qualquer evento, a geometria pode ser aproximada pela de Minkowski. Fisicamente, isso assegura que qualquer observador em queda livre pode sempre construir um laboratório local no qual as leis da Relatividade Especial são válidas.

d) Defina a rapidez relativística ϕ por

$$v = c \tanh \phi, \quad \gamma = \cosh \phi.$$

Da relação obtida no item anterior,

$$v\tau = \frac{g}{\gamma^2}.$$

Por outro lado,

$$v\tau = c^2 \phi \dot{\phi} \tau.$$

Substituindo $\gamma = \cosh \phi$, obtemos

$$\phi \tau = \frac{g}{c}.$$

Integrando e assumindo repouso inicial,

$$\phi(\tau) = \frac{g}{c} \tau,$$

de onde resulta

$$v(\tau) = c \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

Solução alternativa: Partimos da relação obtida no item anterior,

$$v\tau = \frac{g}{\gamma^2} = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Separando variáveis,

$$\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = g d\tau.$$

A integral do lado esquerdo é

$$\int \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c}{2} \ln \left(\frac{c+v}{c-v} \right).$$

Assim,

$$\frac{c}{2} \ln \left(\frac{c+v}{c-v} \right) = g\tau + C.$$

Impondo a condição inicial $v(0) = 0$, obtemos $C = 0$. Logo,

$$\ln \left(\frac{c+v}{c-v} \right) = \frac{2g\tau}{c}.$$

Resolvendo para v ,

$$\frac{c+v}{c-v} = e^{\frac{2g\tau}{c}},$$

de onde segue

$$v(\tau) = c \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

e) A relação entre o tempo cosmológico e o tempo próprio é

$$t\tau = \gamma(\tau) = \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right),$$

de onde

$$t(\tau) = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

f) Sabemos que $v(\tau) = a(t)rt$. Reescrevendo em função do tempo próprio τ da nave,

$$r\tau = \frac{v(\tau)}{a(t(\tau))}t\tau = \frac{\gamma(\tau)v(\tau)}{a(t(\tau))}.$$

Substituindo $v(\tau)$ e $\gamma(\tau)$, obtemos

$$r\tau = \frac{c}{a(t(\tau))} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

Integrando de τ_0 a τ ,

$$r(\tau) = c \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{a(t(u))} \sinh\left(\frac{g u}{c}\right) u.$$

Como $a(t) = a_0 \frac{t}{t_0}$, substituindo $t(\tau)$, obtemos

$$a(\tau) = a_0 \frac{c}{gt_0} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

Portanto,

$$r(\tau) = \frac{gt_0}{a_0}(\tau - \tau_0).$$

Finalmente, a distância física é

$$D(\tau) = c(\tau - \tau_0) \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

4. Se quiser colidir O espaço intergaláctico não é um vácuo perfeito; ele é permeado pela Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (CMB), alguns fótons aí, com menos energia do que o criador da questão, que é o resquício direto do Big Bang. Quando raios cósmicos de altíssima energia (como prótons) viajam por distâncias cosmológicas, eles eventualmente interagem com esses fótons. Se quiser, pode interagir.

Devido a efeitos relativísticos, no referencial de um próton ultra-veloz, os pacatos fótons da CMB sofrem um forte blueshift e aparentam ter energia suficiente para iniciar a fotoprodução de píons neutros (π^0). Esse processo extrai energia cinética do próton, criando um limite teórico para a energia máxima que um raio cósmico pode ter ao chegar à Terra vindo de fontes muito distantes. Esse é conhecido como o Limite Greisen–Zatsepin–Kuzmin (GZK).

Nesta questão, adotaremos a assinatura da métrica de Minkowski como $(+, -, -, -)$, de modo que o quadrado do quadrimomento de uma partícula seja expresso como $P^2 = P^\mu P_\mu = (E/c)^2 - |\vec{p}|^2$.

- (a) Seja $P = (E/c, \vec{p})$ o quadrimomento de uma partícula isolada de massa de repouso m . A partir da relação relativística fundamental entre energia total e momento, demonstre que o quadrado do quadrimomento (P^2) é um invariante relativístico e encontre o seu valor em função de m e da velocidade da luz c .

- (b) Considere um próton de massa m_p e energia ultra-alta E_p colidindo frontalmente com um fóton da CMB de energia E_γ no referencial do laboratório (o espaço intergaláctico). Escreva a expressão exata para o quadrado do quadrimomento total do sistema, $(P_{tot})^2$, neste referencial. Em seguida, simplifique a expressão assumindo o limite ultra-relativístico para o próton $E_p \gg m_p c^2$.
- (c) Considere a reação de fotoprodução: $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$. A energia mínima E_{th} que o próton deve ter no referencial do laboratório para que essa reação ocorra corresponde à exata situação em que, no referencial do Centro de Massa do sistema, o próton resultante e o pión criado (de massa m_π) acabam em repouso. Utilizando a invariância do quadrimomento total demonstrada nos itens anteriores, prove que:

$$E_{th} \approx \frac{(m_\pi c^2)^2 + 2m_p m_\pi c^4}{4E_\gamma}$$

- (d) Assumindo que a temperatura atual da CMB é $T_{CMB} = 2,725$ K, a energia média de um fóton da CMB pode ser aproximada pela energia térmica da distribuição, $E_\gamma \approx 2,82k_B T_{CMB}$. Calcule o valor numérico do limite GZK E_{th} em elétron-volts eV.

Dados úteis: $m_p c^2 = 938$ MeV, $m_\pi c^2 = 135$ MeV. Onde 1 MeV = 10^6 eV.

- (e) Em 1991, detectou-se na atmosfera terrestre a "Partícula Oh-My-God", com uma energia impressionante de aproximadamente 3×10^{20} eV. Com base no seu resultado, comente brevemente se essa partícula poderia ter viajado livremente pelo Universo desde os primórdios da formação galáctica ou se ela deve ter se originado em nossa "vizinhança" cósmica.

Solução:

- (a) Pela relatividade restrita, a energia total de uma partícula é dada por:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Dividindo toda a equação por c^2 , rearranjamos para:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2$$

Como a definição do quadrado do quadrimomento na assinatura $(+, -, -, -)$ é exatamente $P^2 = (E/c)^2 - p^2$, concluímos que:

$$P^2 = m^2 c^2$$

Como m e c são constantes universais independentes do referencial, provamos que o quadrado do quadrimomento é um invariante relativístico.

- (b) O quadrimomento total no referencial do laboratório é a soma dos quadrimomentos: $P_{tot} = P_p + P_\gamma$. Assumindo a colisão frontal (movimentos no eixo x), temos:

$$P_p = \left(\frac{E_p}{c}, p_p, 0, 0\right)$$

$$P_\gamma = \left(\frac{E_\gamma}{c}, -\frac{E_\gamma}{c}, 0, 0\right)$$

O quadrimomento total é:

$$P_{tot} = \left(\frac{E_p + E_\gamma}{c}, p_p - \frac{E_\gamma}{c}, 0, 0\right)$$

Calculando o quadrado $(P_{tot})^2$:

$$(P_{tot})^2 = \left(\frac{E_p + E_\gamma}{c}\right)^2 - \left(p_p - \frac{E_\gamma}{c}\right)^2$$

$$(P_{tot})^2 = \left(\frac{E_p}{c}\right)^2 + \frac{2E_p E_\gamma}{c^2} + \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 - \left(p_p^2 - \frac{2p_p E_\gamma}{c} + \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2\right)$$

$$(P_{tot})^2 = \underbrace{\left(\frac{E_p}{c}\right)^2}_{m_p^2 c^2} - p_p^2 + \frac{2E_\gamma}{c} \left(\frac{E_p}{c} + p_p\right)$$

Para o limite ultra-relativístico ($E_p \gg m_p c^2$), a energia de repouso do próton torna-se negligenciável em relação à energia cinética, de modo que $p_p \approx E_p/c$. Substituindo na expressão:

$$(P_{tot})^2 \approx m_p^2 c^2 + \frac{2E_\gamma}{c} \left(\frac{E_p}{c} + \frac{E_p}{c}\right)$$

$$(P_{tot})^2 \approx m_p^2 c^2 + \frac{4E_p E_\gamma}{c^2}$$

- (c) No referencial do Centro de Massa (CM) exato no limiar da reação ($E_p = E_{th}$ no ref. do laboratório), o próton resultante e o pión não possuem energia cinética, estando em repouso. O quadrimomento total no CM é simplesmente as suas massas de repouso:

$$P'_{tot} = ((m_p + m_\pi)c, 0, 0, 0)$$

O quadrado do quadrimomento no CM é:

$$(P'_{tot})^2 = (m_p + m_\pi)^2 c^2$$

Como $(P_{tot})^2$ é um invariante relativístico, seu valor deve ser igual em qualquer referencial. Igualando o resultado do item (b) com o CM:

$$(m_p + m_\pi)^2 c^2 \approx m_p^2 c^2 + \frac{4E_{th} E_\gamma}{c^2}$$

$$m_p^2 c^2 + 2m_p m_\pi c^2 + m_\pi^2 c^2 \approx m_p^2 c^2 + \frac{4E_{th} E_\gamma}{c^2}$$

Cancelando $m_p^2 c^2$ de ambos os lados e isolando E_{th} :

$$\frac{4E_{th} E_\gamma}{c^2} \approx 2m_p m_\pi c^2 + m_\pi^2 c^2$$

$$E_{th} \approx \frac{(m_\pi c^2)^2 + 2m_p m_\pi c^4}{4E_\gamma}$$

- (d) Primeiro, calculamos a energia média de um fóton da CMB:

$$E_\gamma \approx 2,82 \cdot k_B \cdot T_{CMB} \approx 6,62 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

Agora, aplicamos a fórmula do limiar E_{th} , com as massas dadas em MeV :

$$E_{th} \approx 1,02 \times 10^{20} \text{ eV}$$

(e) O limite calculado de aproximadamente (10^{20} eV) mostra a energia necessária para que a interação aconteça. A Partícula "Oh-My-God" com 3×10^{20} eV possui energia que ultrapassa esse limiar. Se ela tivesse viajado distâncias cosmológicas gigantescas, desde o início do universo ou além do nosso superaglomerado, ela teria colidido com a CMB, perdido energia fotoproduzindo píons e chegaria à Terra com energia abaixo de E_{th} . O fato de a detectarmos com essa energia implica que sua fonte deve ser local, a uma distância menor que o livre caminho médio intergaláctico, da ordem de 50 Megaparsecs.

5. The Dark Side of the Sun Esta questão trata da análise de um conjunto de dados astronômicos associados ao eclipse solar total de 2 de agosto de 2027. A partir de tabelas temporais contendo coordenadas equatoriais do Sol e da Lua, será investigado como observações discretas ao longo do tempo podem ser utilizadas para construir a geometria tridimensional do sistema Terra–Lua–Sol.

A resolução é estruturada em duas etapas. Na primeira, os dados são processados para construção vetorial completa do sistema e determinação da trajetória da sombra sobre a superfície terrestre. Na segunda, os resultados são analisados sob uma abordagem estatística, explorando a evolução temporal da separação angular entre Sol e Lua.

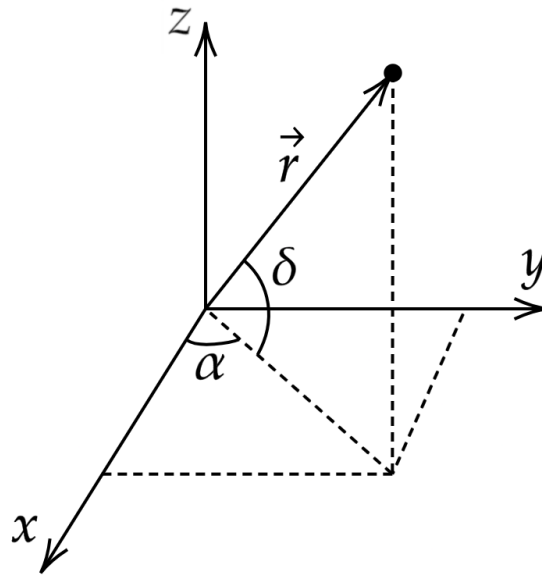
Parte I: Plotando o Caminho da Totalidade

Para a análise do eclipse solar total de 2 de agosto de 2027, será adotado um sistema de coordenadas equatoriais geocêntricas, no qual a Terra é considerada no centro do referencial. Neste sistema, o eixo x está na direção do ponto Vernal e o eixo z aponta para o Polo Norte Celeste. Nesse sentido, a posição de um corpo celeste é descrita pela sua Ascensão Reta (AR), Declinação (Dec) e distância ao observador geocêntrico.

A Ascensão Reta é medida ao longo do equador celeste a partir do ponto vernal, enquanto a Declinação corresponde ao ângulo entre o objeto e o plano do equador celeste. A distância fornece a escala tridimensional do sistema, permitindo construir vetores posição no espaço.

Assim, cada corpo celeste pode ser representado pelo vetor posição no referencial geocêntrico:

$$\vec{r} = r(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta),$$



onde α é a Ascensão Reta, δ é a Declinação e r é a distância ao centro da Terra.

Logo abaixo estão tabelas temporais com as coordenadas do Sol e da Lua ao longo do dia do eclipse, bem como os tempos siderais de Greenwich (TSG) em cada um desses momentos:

Tabela 1: Coordenadas geocêntricas do Sol

Tempo (UTC)	TSG (HMS)	RA (HMS)	Dec (DMS)	Dist (km)
2027-08-02 08:30	05h12m52.34s	08h47m37.97s	17°52'47.85"	151829874.69
2027-08-02 08:45	05h27m54.82s	08h47m40.36s	17°52'38.31"	151829675.14
2027-08-02 09:00	05h42m57.29s	08h47m42.17s	17°52'38.31"	151829475.49
2027-08-02 09:15	05h57m59.74s	08h47m44.59s	17°52'09.69"	151829275.75
2027-08-02 09:30	06h13m02.21s	08h47m46.71s	17°52'28.77"	151829075.91
2027-08-02 09:45	06h28m04.68s	08h47m48.51s	17°51'49.26"	151828875.97
2027-08-02 10:00	06h43m07.13s	08h47m50.05s	17°51'60.14"	151828675.93
2027-08-02 10:15	06h58m09.60s	08h47m51.38s	17°51'50.60"	151828475.81
2027-08-02 10:30	07h13m12.07s	08h47m52.52s	17°51'41.05"	151828275.58
2027-08-02 10:45	07h28m14.52s	08h47m53.59s	17°51'41.05"	151828075.26
2027-08-02 11:00	07h43m16.99s	08h47m54.54s	17°51'31.50"	151827874.84
2027-08-02 11:15	07h58m19.46s	08h47m55.40s	17°51'21.94"	151827674.32
2027-08-02 11:30	08h13m21.94s	08h47m56.17s	17°51'21.94"	151827473.71

Tabela 2: Coordenadas geocêntricas da Lua

Tempo (UTC)	TSG (HMS)	RA (HMS)	Dec (DMS)	Dist (km)
2027-08-02 08:30	05h12m52.34s	08h44m04.52s	18°21'29.42"	357367.58
2027-08-02 08:45	05h27m54.82s	08h44m42.17s	18°18'09.56"	357369.54
2027-08-02 09:00	05h42m57.29s	08h45m19.79s	18°14'49.26"	357371.73
2027-08-02 09:15	05h57m59.74s	08h45m57.39s	18°11'28.48"	357374.12
2027-08-02 09:30	06h13m02.21s	08h46m34.97s	18°14'49.26"	357376.73
2027-08-02 09:45	06h28m04.68s	08h47m12.52s	18°11'28.48"	357379.54
2027-08-02 10:00	06h43m07.13s	08h47m50.05s	18°11'28.48"	357382.57
2027-08-02 10:15	06h58m09.60s	08h48m27.55s	17°56'28.48"	357385.82
2027-08-02 10:30	07h13m12.07s	08h49m05.03s	17°54'09.56"	357389.27
2027-08-02 10:45	07h28m14.52s	08h49m42.48s	17°51'41.05"	357392.94
2027-08-02 11:00	07h43m16.99s	08h50m19.91s	17°51'41.05"	357396.82
2027-08-02 11:15	07h58m19.46s	08h50m57.31s	17°50'19.91"	357400.91
2027-08-02 11:30	08h13m21.94s	08h51m34.68s	17°49'41.05"	357405.21

- a) Para cada instante de tempo fornecido nas tabelas, converta as coordenadas equatoriais do Sol e da Lua em coordenadas cartesianas no referencial geocêntrico, isto é, obtenha:

$$\vec{r}_S = (x, y, z)_S \quad \text{e} \quad \vec{r}_L = (x, y, z)_L$$

E organize esses dados em uma tabela para cada corpo celeste.

Essas tabelas serão utilizadas nas etapas subsequentes para a análise geométrica do alinhamento Sol–Lua e para a determinação da trajetória da sombra lunar sobre a superfície terrestre.

- b) Utilizando os vetores posição calculados no item anterior, determine, para cada instante de tempo fornecido, o vetor unitário $\vec{u}(t)$ que define a direção do eixo central do cone de sombra da Lua em direção à Terra.

Assuma que a direção da sombra pode ser aproximada pela linha que une o centro do Sol ao centro da Lua. Expresse $\vec{u}(t)$ como um vetor unitário no referencial geocêntrico.

- c) Considere o vetor unitário $\vec{u}(t)$ obtido no item anterior, que define a direção do eixo central do cone de sombra da Lua. A trajetória desse eixo pode ser descrita pela reta

$$\vec{r}(k, t) = \vec{r}_L(t) + k \vec{u}(t),$$

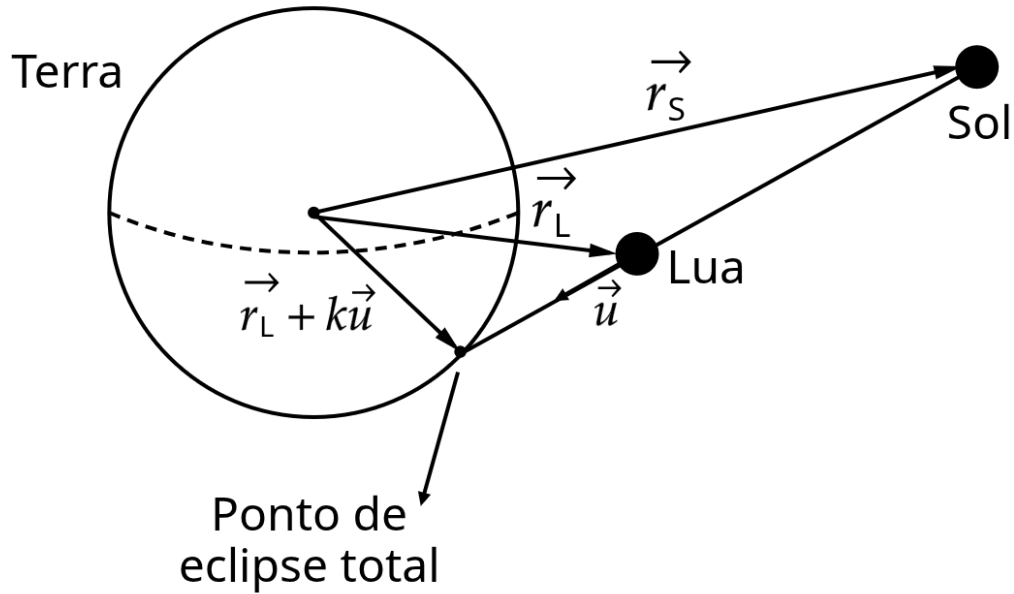
onde $k \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real.

Assuma a Terra como uma esfera de raio R_\oplus , centrada na origem do referencial geocêntrico. Deseja-se determinar os valores de k para os quais a reta intercepta a superfície terrestre, isto é, quando

$$\|\vec{r}(k, t)\| = R_\oplus.$$

A partir desta condição geométrica, demonstre que a seguinte equação é válida:

$$k^2 + 2k(\vec{u} \cdot \vec{r}_L) + \|\vec{r}_L\|^2 - R_\oplus^2 = 0.$$



Com base no resultado obtido, calcule os valores de k para todos os instantes de tempo considerados.

Dica: Sejam \vec{a} e \vec{b} dois vetores expressos em uma base ortonormal $B = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Então, o produto escalar é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- d) Para cada instante de tempo, determine o ponto de interseção obtido no item anterior e expresse suas coordenadas no sistema geográfico terrestre.

A partir das coordenadas cartesianas do ponto de impacto (x, y, z) , obtenha a latitude φ e a longitude λ correspondentes utilizando:

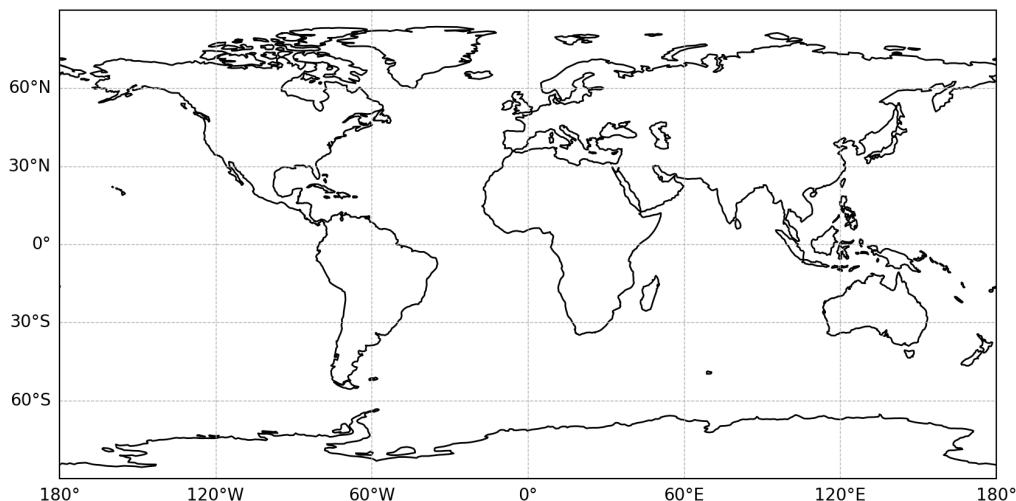
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{z}{R_{\oplus}}\right), \quad \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

com a longitude ajustada de acordo com o quadrante:

$$\lambda = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \text{ e } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Organize os resultados para os instantes de tempo em uma tabela contendo (t, φ, λ) , que será utilizada para a construção da trajetória da sombra lunar sobre a superfície terrestre.

- e) Utilizando as coordenadas geográficas (φ, λ) obtidas no item anterior, construa a trajetória da sombra lunar sobre a superfície terrestre utilizando o mapa geográfico de projeção **equirretangular** fornecido.



Parte II: Análise estatística do alinhamento Sol–Lua

A qualidade de um eclipse solar total pode ser quantitativamente descrita pela separação angular entre os centros aparentes do Sol e da Lua no céu. Para um observador geocêntrico, esta separação pode ser definida como:

$$\theta(t) = \arccos(\hat{r}_S(t) \cdot \hat{r}_L(t)),$$

onde \hat{r}_S e \hat{r}_L são os vetores unitários posição do Sol e da Lua no sistema de coordenadas equatoriais geocêntricas.

Utilizando os dados fornecidos na Parte I, devemos analisar a evolução temporal do alinhamento entre os dois astros ao longo do dia do eclipse.

- f) Para cada instante da tabela, calcule a separação angular $\theta(t)$ entre o Sol e a Lua. Em seguida, construa um gráfico de $\theta(t)$ em função do tempo (UTC), utilizando, idealmente, papel milimetrado.
- g) Determine o instante aproximado em que ocorre o mínimo de $\theta(t)$, correspondendo ao máximo alinhamento dos astros. Interprete este resultado no contexto do eclipse solar total.
- h) Calcule o valor médio μ_θ e o desvio padrão amostral σ_θ da separação angular ao longo do intervalo de tempo fornecido.
- i) Com o objetivo de refinar a determinação do instante de máximo alinhamento entre o Sol e a Lua, considere os valores de $\theta(t)$ obtidos na etapa anterior.

Podemos aproximar o comportamento de $\theta(t)$ nas vizinhanças do mínimo por uma função quadrática:

$$\theta(t) \approx at^2 + bt + c$$

Utilizando os **cinco pontos de menor distância angular**, realize um ajuste parabólico e determine o valor de t_0 . Compare o resultado obtido com a estimativa discreta do item anterior e discuta a precisão do método.

Dica: Muitas calculadoras científicas (como modelos da Casio) possuem uma função de regressão que permite ajustar diretamente uma função quadrática.

Procedimento geral:

- I Acesse o modo de estatística (geralmente indicado por MODE → STAT).

- II Escolha o tipo de regressão quadrática (frequentemente indicado como Quad, $A+Bx+Cx^2$ ou similar).
 - III Insira os dados (x_i, y_i) nas colunas correspondentes.
 - IV Utilize a opção de cálculo/regressão (como CALC, REG ou SHIFT + tecla específica) para obter os coeficientes.
 - V A calculadora fornecerá os valores de a, b e c do ajuste.
- j) Com base no ajuste parabólico obtido no item anterior, estime a duração do intervalo em que o alinhamento Sol–Lua é suficientemente preciso para permitir a ocorrência de eclipse total em alguma região da superfície terrestre.
- Considere que a condição de totalidade está associada ao fato de a separação angular entre os centros aparentes do Sol e da Lua satisfazer

$$\theta(t) \leq \theta_c,$$

onde θ_c é um limiar angular correspondente ao raio aparente do Sol.
 Utilizando a parábola ajustada para $\theta(t)$, determine os instantes t_1 e t_2 tais que

$$\theta(t_1) = \theta(t_2) = \theta_c,$$

e, a partir disso, calcule a duração do intervalo de alinhamento crítico:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Solução:

- a) Pela fórmula fornecida no início do enunciado:

$$\vec{r} = r(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta)$$

Temos:

Tabela 3: Coordenadas cartesianas geocêntricas do Sol

Tempo (UTC)	X ($\times 10^7$ km)	Y ($\times 10^7$ km)	Z ($\times 10^7$ km)
2027-08-02 08:30	-9.6515	10.7540	4.6615
2027-08-02 08:45	-9.6535	10.7520	4.6609
2027-08-02 09:00	-9.6556	10.7510	4.6602
2027-08-02 09:15	-9.6576	10.7490	4.6595
2027-08-02 09:30	-9.6596	10.7470	4.6588
2027-08-02 09:45	-9.6616	10.7460	4.6582
2027-08-02 10:00	-9.6637	10.7440	4.6575
2027-08-02 10:15	-9.6657	10.7430	4.6568
2027-08-02 10:30	-9.6677	10.7410	4.6561
2027-08-02 10:45	-9.6697	10.7400	4.6555
2027-08-02 11:00	-9.6718	10.7380	4.6548
2027-08-02 11:15	-9.6738	10.7370	4.6541
2027-08-02 11:30	-9.6758	10.7350	4.6534

Tabela 4: Coordenadas cartesianas geocêntricas da Lua

Tempo (UTC)	X ($\times 10^5$ km)	Y ($\times 10^5$ km)	Z ($\times 10^5$ km)
2027-08-02 08:30	-2.2261	2.5591	1.1256
2027-08-02 08:45	-2.2338	2.5538	1.1223
2027-08-02 09:00	-2.2415	2.5485	1.1190
2027-08-02 09:15	-2.2492	2.5432	1.1157
2027-08-02 09:30	-2.2569	2.5379	1.1124
2027-08-02 09:45	-2.2645	2.5326	1.1091
2027-08-02 10:00	-2.2722	2.5272	1.1057
2027-08-02 10:15	-2.2798	2.5218	1.1024
2027-08-02 10:30	-2.2874	2.5164	1.0991
2027-08-02 10:45	-2.2950	2.5110	1.0957
2027-08-02 11:00	-2.3026	2.5056	1.0924
2027-08-02 11:15	-2.3102	2.5001	1.0890
2027-08-02 11:30	-2.3177	2.4947	1.0857

- b) A direção do eixo central do cone de sombra da Lua pode ser aproximada pelo vetor que liga o centro da Lua ao centro do Sol. Assim, define-se o vetor direção como

$$\vec{d}(t) = \vec{r}_S(t) - \vec{r}_L(t)$$

O vetor unitário associado a essa direção é dado por

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{d}(t)}{\|\vec{d}(t)\|}$$

Fisicamente, este vetor aponta ao longo do eixo central do cone de sombra (umbra), indicando a direção na qual a sombra da Lua é projetada no espaço.

A partir dos dados fornecidos no item anterior, calcula-se a diferença vetorial entre as posições do Sol e da Lua em cada instante de tempo. Em seguida, normaliza-se esse vetor, obtendo-se um vetor unitário que representa exclusivamente a direção do alinhamento Sol-Lua, independentemente da escala do sistema.

Os resultados obtidos estão apresentados na tabela a seguir, onde cada componente de $\vec{u}(t)$ foi calculada a partir da normalização de $\vec{d}(t)$ em cada instante considerado.

Tabela 5: Diferença Lua – Sol (componentes cartesianas geocêntricas)

Tempo (UTC)	ΔX (10^5 km)	ΔY (10^5 km)	ΔZ (10^5 km)
2027-08-02 08:30	962.93	-1072.80	-465.03
2027-08-02 08:45	963.12	-1072.70	-464.96
2027-08-02 09:00	963.32	-1072.50	-464.90
2027-08-02 09:15	963.51	-1072.40	-464.84
2027-08-02 09:30	963.71	-1072.20	-464.77
2027-08-02 09:45	963.90	-1072.10	-464.71
2027-08-02 10:00	964.09	-1071.90	-464.64
2027-08-02 10:15	964.29	-1071.80	-464.58
2027-08-02 10:30	964.48	-1071.60	-464.51
2027-08-02 10:45	964.68	-1071.50	-464.45
2027-08-02 11:00	964.87	-1071.30	-464.39
2027-08-02 11:15	965.07	-1071.20	-464.32
2027-08-02 11:30	965.26	-1071.00	-464.26

Tabela 6: Vetor unitário na direção Lua – Sol (componentes cartesianas geocêntricas)

Tempo (UTC)	u_x	u_y	u_z
2027-08-02 08:30	0.6357	-0.7083	-0.3070
2027-08-02 08:45	0.6358	-0.7082	-0.3070
2027-08-02 09:00	0.6360	-0.7081	-0.3070
2027-08-02 09:15	0.6361	-0.7080	-0.3069
2027-08-02 09:30	0.6363	-0.7079	-0.3069
2027-08-02 09:45	0.6364	-0.7078	-0.3069
2027-08-02 10:00	0.6365	-0.7077	-0.3068
2027-08-02 10:15	0.6367	-0.7076	-0.3068
2027-08-02 10:30	0.6368	-0.7075	-0.3068
2027-08-02 10:45	0.6370	-0.7074	-0.3068
2027-08-02 11:00	0.6371	-0.7073	-0.3067
2027-08-02 11:15	0.6373	-0.7072	-0.3067
2027-08-02 11:30	0.6374	-0.7071	-0.3067

c) A reta que representa o eixo central do cone de sombra da Lua é dada por

$$\vec{r}(k,t) = \vec{r}_L(t) + k \vec{u}(t),$$

onde $\vec{u}(t)$ é o vetor unitário na direção de $\vec{r}_L - \vec{r}_S$ (ou seja, \vec{u} aponta da Lua em direção ao Sol, e consequentemente para a sombra).

Para que essa reta intersecte a superfície terrestre, devemos ter

$$|\vec{r}(k,t)| = R_{\oplus}$$

Substituindo a expressão de $\vec{r}(k,t)$ e usando que \vec{u} é unitário ($\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$):

$$|\vec{r}_L + k\vec{u}|^2 = R_{\oplus}^2,$$

$$(\vec{r}_L + k\vec{u}) \cdot (\vec{r}_L + k\vec{u}) = R_{\oplus}^2,$$

$$\vec{r}_L \cdot \vec{r}_L + 2k(\vec{r}_L \cdot \vec{u}) + k^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) = R_{\oplus}^2,$$

$$r_L^2 + 2k(\vec{u} \cdot \vec{r}_L) + k^2 = R_{\oplus}^2$$

Reorganizando os termos, obtemos a equação quadrática em k :

$$k^2 + 2k(\vec{u} \cdot \vec{r}_L) + r_L^2 - R_{\oplus}^2 = 0$$

Resolvendo a equação, podemos então montar a tabela com os valores de k :

Tabela 7: Parâmetro k : distância da Lua ao ponto de interseção com a Terra

Tempo (UTC)	k ($\times 10^5$ km)
2027-08-02 08:30	3.5536
2027-08-02 08:45	3.5357
2027-08-02 09:00	3.5258
2027-08-02 09:15	3.5192
2027-08-02 09:30	3.5148
2027-08-02 09:45	3.5121
2027-08-02 10:00	3.5108
2027-08-02 10:15	3.5109
2027-08-02 10:30	3.5124
2027-08-02 10:45	3.5154
2027-08-02 11:00	3.5200
2027-08-02 11:15	3.5270
2027-08-02 11:30	3.5375

- d) Com os valores de $k(t)$ obtidos no item anterior, podemos determinar os pontos de interseção entre o eixo central do cone de sombra e a superfície terrestre.

Substituindo cada valor de $k(t)$ na equação da reta

$$\vec{r}(k,t) = \vec{r}_L(t) + k(t)\vec{u}(t),$$

obtem-se diretamente o vetor posição do ponto de impacto da umbra na superfície terrestre para cada instante de tempo considerado.

Como a Terra é modelada como uma esfera de raio R_{\oplus} , esses pontos satisfazem automaticamente a condição

$$\|\vec{r}(k,t)\| = R_{\oplus}.$$

Assim, para cada instante t , o vetor $\vec{r}(k,t)$ fornece as coordenadas cartesianas do ponto de interseção da linha central da sombra com a superfície terrestre.

Tabela 8: Coordenadas cartesianas geocêntricas dos pontos de interseção da umbra central

Tempo (UTC)	X (km)	Y (km)	Z (km)
2027-08-02 08:30	3.3018e+03	4.2222e+03	3.4569e+03
2027-08-02 08:45	1.4371e+03	4.9975e+03	3.6931e+03
2027-08-02 09:00	8.0529e+01	5.2061e+03	3.6837e+03
2027-08-02 09:15	-1.0626e+03	5.1766e+03	3.5710e+03
2027-08-02 09:30	-2.0660e+03	4.9913e+03	3.3908e+03
2027-08-02 09:45	-2.9602e+03	4.6844e+03	3.1579e+03
2027-08-02 10:00	-3.7599e+03	4.2722e+03	2.8794e+03
2027-08-02 10:15	-4.4708e+03	3.7613e+03	2.5580e+03
2027-08-02 10:30	-5.0926e+03	3.1514e+03	2.1938e+03
2027-08-02 10:45	-5.6186e+03	2.4351e+03	1.7834e+03
2027-08-02 11:00	-6.0328e+03	1.5949e+03	1.3193e+03
2027-08-02 11:15	-6.3016e+03	5.9361e+02	7.8532e+02
2027-08-02 11:30	-6.3421e+03	-6.6058e+02	1.4175e+02

Essas coordenadas são então convertidas para o sistema geográfico (latitude e longitude), utilizando as relações

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{z}{R_{\oplus}}\right), \quad \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

permitindo a construção da trajetória da umbra sobre a superfície da Terra.

Os resultados obtidos foram organizados na tabela 9, que descreve o deslocamento da sombra lunar ao longo do tempo.

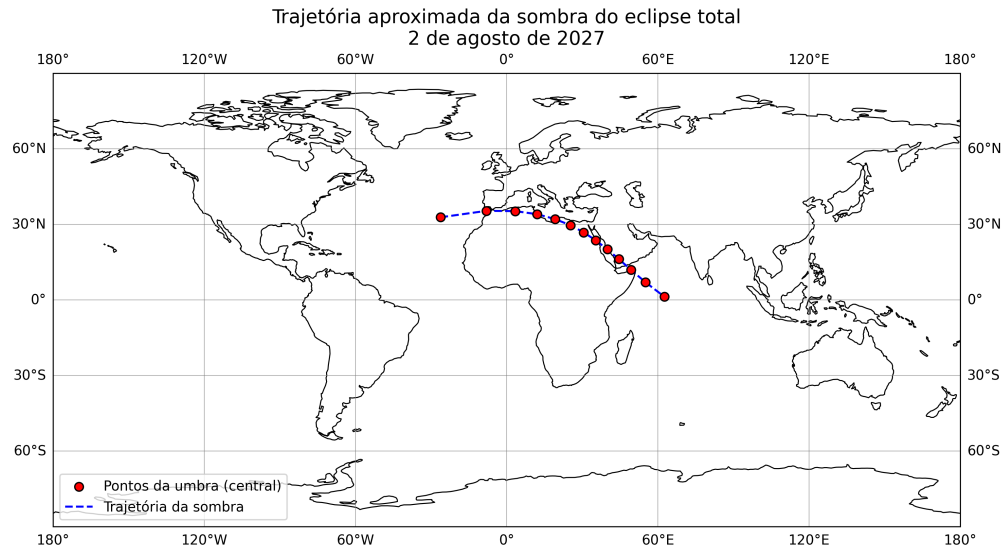
Importante lembrar que devemos corrigir a longitude obtida utilizando o TSG correspondente, dado que a rotação da Terra influencia no resultado. Ou seja:

$$\lambda_{\text{corrigida}} = \lambda_{\text{calculada}} - TSG$$

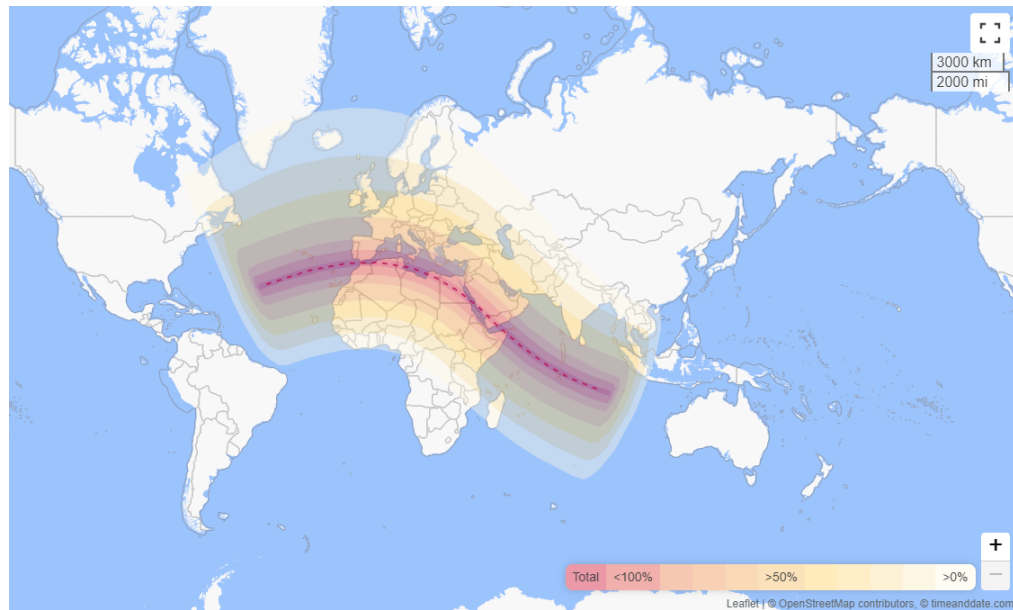
Tabela 9: Coordenadas geográficas dos pontos de interseção da umbra central

Tempo (UTC)	Latitude (°)	Longitude (°)
2027-08-02 08:30	32.819907	-26.243401
2027-08-02 08:45	35.382740	-8.021476
2027-08-02 09:00	35.278886	3.375125
2027-08-02 09:15	34.048875	12.101170
2027-08-02 09:30	32.116758	19.226108
2027-08-02 09:45	29.678304	25.270628
2027-08-02 10:00	26.837025	30.570768
2027-08-02 10:15	23.645164	35.386148
2027-08-02 10:30	20.118281	39.949855
2027-08-02 10:45	16.237260	44.507281
2027-08-02 11:00	11.937758	49.370245
2027-08-02 11:15	7.072766	55.037521
2027-08-02 11:30	1.273481	62.604958

e) O gráfico da trajetória da umbra sobre a superfície terrestre está representado abaixo, obtido a partir das coordenadas geográficas calculadas no item anterior.



A título de comparação, abaixo está representada uma versão ainda mais precisa do mapa do eclipse, a qual foi obtida através do site Time and Date:



f) A partir das posições unitárias do Sol e da Lua em cada instante de tempo, calcula-se a separação angular geocêntrica entre os dois astros por meio do produto escalar

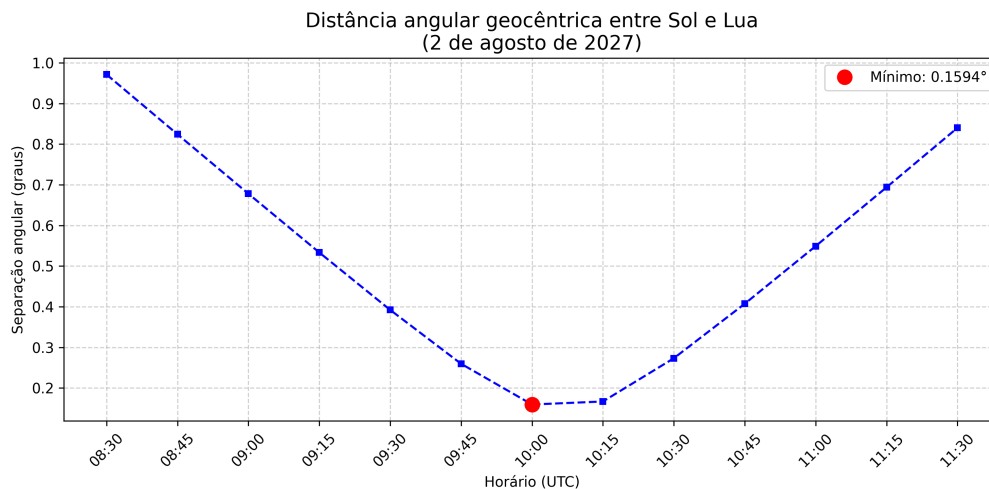
$$\theta(t) = \arccos(\hat{r}_S(t) \cdot \hat{r}_L(t))$$

Tabela 10: Separação angular Sol–Lua (geocêntrica) via produto escalar

Tempo (UTC)	Separação angular (graus)
2027-08-02 08:30:00	0,971 218
2027-08-02 08:45:00	0,824 188
2027-08-02 09:00:00	0,678 021
2027-08-02 09:15:00	0,533 423
2027-08-02 09:30:00	0,392 133
2027-08-02 09:45:00	0,259 606
2027-08-02 10:00:00	0,159 432
2027-08-02 10:15:00	0,166 843
2027-08-02 10:30:00	0,273 215
2027-08-02 10:45:00	0,407 241
2027-08-02 11:00:00	0,549 026
2027-08-02 11:15:00	0,693 827
2027-08-02 11:30:00	0,840 085

Os valores obtidos podem ser organizados em função do tempo UTC e representados graficamente, permitindo visualizar a evolução do alinhamento Sol–Lua ao longo do evento.

O gráfico de $\theta(t)$ está apresentado abaixo.



- g) Analisando os valores da tabela do item anterior, observamos que a separação angular $\theta(t)$ decresce continuamente de 0.971218° às 08:30 UTC até um valor mínimo de 0.159432° às 10:00 UTC. A partir desse instante, $\theta(t)$ volta a aumentar, atingindo 0.840085° às 11:30 UTC. Portanto, o mínimo ocorre aproximadamente às **10:00 UTC**.

O mínimo da separação angular entre os centros do Sol e da Lua corresponde ao momento de máximo alinhamento geométrico dos três corpos (Sol–Lua–Terra) sob a perspectiva geocêntrica. Esse instante representa o ápice do eclipse solar total para um observador hipotético no centro da Terra. Quanto menor o valor de θ_{\min} , mais perfeito é o alinhamento e, conseqüentemente, maior a duração e a qualidade da totalidade para os observadores na superfície terrestre situados na faixa da umbra.

h) Utilizando os 13 valores de $\theta(t)$:

$$\mu_\theta = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} \theta_i$$

$$\mu_\theta = \frac{0.971218 + 0.824188 + \dots + 0.840085}{13} \approx 0.5234^\circ$$

O desvio padrão amostral é dado por:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{13} (\theta_i - \mu_\theta)^2}$$

$$\sigma_\theta \approx 0.3115^\circ$$

i) Para refinar a determinação do instante de máximo alinhamento, assume-se que, nas vizinhanças do mínimo, a separação angular pode ser aproximada por uma parábola.

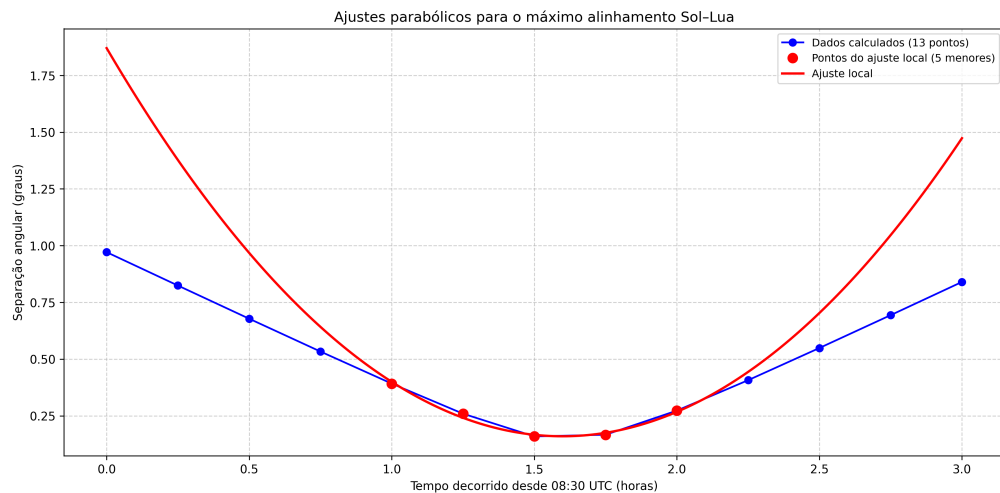
Escolhendo os cinco pontos de menor separação angular, centrados em torno do mínimo observado na tabela, temos:

t (UTC)	$\theta(t)$ ($^\circ$)
09:30	0.392133
09:45	0.259606
10:00	0.159432
10:15	0.166843
10:30	0.273215

Utilizando uma regressão quadrática, obtemos a seguinte função:

$$\theta(t) \approx 0.6690t^2 - 13.51t + 68.39$$

Essa função é representada graficamente pela seguinte imagem:



Podemos obter o instante de máxima aproximação entre os astros calculando o vértice da parábola:

$$t_0 \approx -\frac{b}{2a}$$

$$t_0 \approx 10\text{h } 06\text{min}$$

No item anterior, o mínimo foi estimado diretamente como ocorrendo em aproximadamente 10:00 UTC por inspeção discreta dos dados. O ajuste parabólico confirma esse resultado, refinando-o e reduzindo a incerteza associada à discretização temporal.

j) Defina a constante θ_c e reescreva a inequação:

$$0,6690 t^2 - 13,51 t + 68,123 \leq 0$$

A igualdade ocorre nos limites do intervalo de totalidade:

$$0,6690 t^2 - 13,51 t + 68,123 = 0$$

Para a parábola genérica $\theta(t) = at^2 + bt + c$, o vértice ocorre em

$$t_0 = -\frac{b}{2a}, \quad \theta_{\min} = c - \frac{b^2}{4a}$$

Com $a = 0,6690$, $b = -13,51$, $c = 68,39$:

$$\theta_{\min} = 68,39 - \frac{(13,51)^2}{4 \cdot 0,6690} = 68,39 - \frac{182,5201}{2,676} \approx 68,39 - 68,202 = 0,188^\circ$$

O valor mínimo é cerca de $0,188^\circ$, inferior a $\theta_c = 0,267^\circ$; logo existe um intervalo em torno de t_0 onde a totalidade ocorre.

Como a parábola é simétrica, os dois instantes satisfazem

$$t_{1,2} = t_0 \pm \sqrt{\frac{\theta_c - \theta_{\min}}{a}}$$

Calculando:

$$\theta_c - \theta_{\min} = 0,267 - 0,188 = 0,079^\circ,$$

$$\sqrt{\frac{0,079}{0,6690}} = \sqrt{0,1181} \approx 0,3436 \text{ horas.}$$

Portanto,

$$t_1 = 10,100 - 0,3436 \approx 9,7564 \text{ h}, \quad t_2 = 10,100 + 0,3436 \approx 10,4436 \text{ h.}$$

Duração da totalidade:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2 \times 0,3436 = 0,6872 \text{ horas.}$$

Convertendo para minutos:

$$\Delta t = 41,2 \text{ minutos}$$