



LISTA 4  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

---

### Instruções Gerais

1. A lista é composta por 5 problemas não avaliativos
2. Pratique escrever soluções **legíveis**.
3. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo ( $\mu_0$ )	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio ( $r_H$ )	37 pm	

**1. Universo Filamentar** Em cosmologia, o princípio cosmológico assume que, em escalas suficientemente grandes, o universo é homogêneo e isotrópico. No entanto, em escalas menores, a matéria organiza-se numa “teia cósmica” composta por filamentos, vazios e aglomerados. Nesta questão, idealizamos um universo alternativo no qual *toda* a massa está concentrada ao longo de um único filamento cósmico infinito, retilíneo, com densidade linear de massa constante  $\lambda$ . A gravitação é descrita pela teoria newtoniana. Este modelo exótico permite explorar as consequências dinâmicas de uma distribuição de matéria unidimensional.

A questão está dividida em três partes. Na Parte I, consideramos o filamento imerso em um espaço tridimensional. Na Parte II, passamos a um modelo efetivamente unidimensional da gravitação.

**Parte I: Campo e potencial gravitacionais (3D)**

- a) Usando a simetria do problema (translação ao longo do filamento e rotação em torno dele), determine o campo gravitacional  $\vec{g}(r)$  a uma distância radial  $r$  do filamento.

**Dica:** lei de Gauss para a gravitação

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{\text{int}}$$

- b) Determine o potencial gravitacional  $\Phi(r)$ , sabendo que:

$$g(r) = -\frac{d\Phi}{dr}$$

Escolha a constante de integração tal que  $\Phi(1) = 0$ . Compare com o potencial do universo convencional e discuta por que  $\Phi(r)$  diverge tanto em  $r \rightarrow 0$  quanto em  $r \rightarrow \infty$ . O que isso implica para a existência de órbitas ligadas?

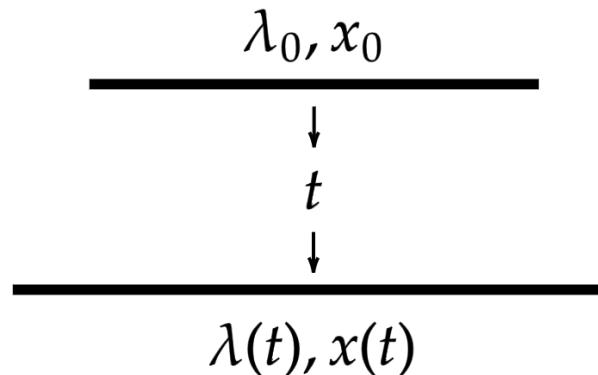
- c) Uma partícula parte do repouso em  $r = r_0$ . Use conservação de energia para obter  $\dot{r}(r)$ , obtenha o tempo de queda até o filamento e discuta se esse tempo é finito ou infinito.

**Dica:**

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{-\ln u}} = \sqrt{\pi}$$

**Parte II: Evolução cosmológica (modelo efetivo 1D)**

Nesta parte, consideramos um modelo efetivamente unidimensional, no qual a gravitação é descrita ao longo de uma única coordenada espacial, como representado na imagem a seguir.



- d) Defina o fator de escala  $a(t)$  tal que  $x(t) = a(t)x_0$ . Mostre que a conservação da massa implica

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0}{a(t)}$$

- e) A equação de Poisson em 1D leva a

$$\frac{dg}{dx} = -2G' \lambda,$$

em que  $G'$  se trata do equivalente à constante gravitacional para este universo, com dimensões diferentes.

Use a simetria de reflexão para obter  $g(x)$  e, em seguida, mostre que a equação de movimento de uma partícula comóvel implica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2G'\lambda_0}{a}$$

Por fim, compare com o caso tridimensional

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho_0}{a^3},$$

discutindo o papel da dimensionalidade na evolução da densidade.

- f) Multiplicando a equação obtida no item f) para o universo 1D por  $\dot{a}$  e integrando, mostre que

$$\dot{a}^2 = -4G'\lambda_0 a + C$$

Interprete  $C$  como energia total por unidade de massa e determine a condição para que o universo colapse, isto é, para que  $a(t) = 0$  em um instante finito de tempo.

**2. A Grande Quicada** A Cosmologia busca compreender, além de todo o caminho que o universo teve para chegar até aqui, quais os possíveis finais (ou não) ele pode ter. Um dos finais mais interessantes atualmente estudados é o Big Bounce (Grande Quicada). Nesse modelo, o universo tem uma densidade maior que a densidade crítica, e, eventualmente passa a contrair (ou seja, a gravidade ganha o balanço de forças). Contudo, ao diminuir para uma escala muito pequena, diferentemente do modelo do Big Crunch (Grande Esmagamento), o universo não se torna uma singularidade, mas sim, devido a interações gravitacionais quânticas, o universo retoma sua expansão, entrando em um ciclo infinito de expansões e contrações.

- a) Considere um universo com curvatura positiva e que contém apenas energia escura (constante cosmológica). Encontre uma expressão para o fator de escala mínimo  $a_m$  desse universo, ou seja, o fator de escala no momento exato em que ele deixa de contrair e passa a se expandir novamente. Sua expressão deve estar em função apenas do fator de densidade  $\Omega_0$ .
- b) Assumindo que  $a_m$  ocorre no tempo  $t = t_m$ , encontre uma expressão para o fator de escala do universo em um tempo  $t$ . Sua expressão deve estar em função de  $t, t_m, a_m, H_0$  e  $\Omega_0$ . Dado:

$$\int_b^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{b}\right)$$

- c) Encontre a expressão para o tempo entre o presente e a última quicada desse universo em função de  $H_0$  e  $\Omega_0$

**3. Foguetinho** Após anos de rivalidade intensa na lendária Batalha de Aura, Bibucha e o Bibrasil finalmente percebem que existem desafios maiores do que suas diferenças. Em uma reviravolta inesperada, eles decidem unir forças no projeto mais ambicioso já concebido: Ballus V: Em busca da lambada cósmica.

O objetivo? Levar um foguete experimental até regiões cada vez mais distantes do universo em expansão, investigando os limites do espaço observável e testando os efeitos da Relatividade em um cenário cosmológico extremo.

Sua missão é analisar o movimento desse foguete e entender como a expansão do universo influencia (ou não) sua dinâmica. Considere um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker, restrita a movimentos radiais,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2.$$

Nesta métrica, a coordenada  $t$  corresponde ao tempo cosmológico, isto é, ao tempo próprio medido por observadores comóveis que participam da expansão do universo. A coordenada radial  $r$  é uma coordenada comóvel, que permanece constante para partículas que seguem o fluxo de expansão. Ballus parte do repouso e move-se radialmente ao longo dessa geometria, mantendo aceleração própria constante  $g$ , medida em seu referencial instantaneamente em repouso.

a) Mostre que a distância física real entre dois eventos separados radialmente é dada por

$$D(t) = a(t) r(t).$$

e explique por que essa quantidade, e não a coordenada comóvel  $r$ , corresponde à separação espacial fisicamente observável.

b) Prove que a velocidade do foguete medida por um observador comóvel local é dada por

$$v(t) = a(t) \dot{r}(t).$$

Explique por que essa velocidade, e não  $\dot{r}$ , é a quantidade fisicamente relevante para descrever o movimento local do foguete.

c) Usando exclusivamente as leis relativísticas de contração do espaço e de dilatação do tempo da Relatividade Especial, deduza a relação entre a aceleração própria  $g$ , o tempo próprio  $\tau$  do foguete e a velocidade  $v$  medida por observadores comóveis locais. A expansão do universo modifica essa relação local? Justifique sua resposta.

d) Expresse a velocidade  $v$  em função do tempo próprio  $\tau$  do foguete.

e) Determine o tempo cosmológico  $t$  como função de  $\tau$ .

f) Considerando um sistema de coordenadas em que o foguete está inicialmente no centro do sistema, expresse explicitamente  $D$  em função de  $\tau$  para  $a(t) = a(t_0) \frac{t}{t_0}$ .

**4. Se quiser colidir** O espaço intergaláctico não é um vácuo perfeito; ele é permeado pela Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (CMB), alguns fótons aí, com menos energia do que o criador da questão, que é o resquício direto do Big Bang. Quando raios cósmicos de altíssima energia (como prótons) viajam por distâncias cosmológicas, eles eventualmente interagem com esses fótons. Se quiser, pode interagir.

Devido a efeitos relativísticos, no referencial de um próton ultra-veloz, os pacatos fótons da CMB sofrem um forte blueshift e aparentam ter energia suficiente para iniciar a fotoprodução de píons neutros ( $\pi^0$ ). Esse processo extrai energia cinética do próton, criando um limite teórico para a energia máxima que um raio cósmico pode ter ao chegar à Terra vindo de fontes muito distantes. Esse é conhecido como o Limite Greisen–Zatsepin–Kuzmin (GZK).

Nesta questão, adotaremos a assinatura da métrica de Minkowski como  $(+, -, -, -)$ , de modo que o quadrado do quadrimomento de uma partícula seja expresso como  $P^2 = P^\mu P_\mu = (E/c)^2 - |\vec{p}|^2$ .

- (a) Seja  $P = (E/c, \vec{p})$  o quadrimomento de uma partícula isolada de massa de repouso  $m$ . A partir da relação relativística fundamental entre energia total e momento, demonstre que o quadrado do quadrimomento ( $P^2$ ) é um invariante relativístico e encontre o seu valor em função de  $m$  e da velocidade da luz  $c$ .
- (b) Considere um próton de massa  $m_p$  e energia ultra-alta  $E_p$  colidindo frontalmente com um fóton da CMB de energia  $E_\gamma$  no referencial do laboratório (o espaço intergaláctico). Escreva a expressão exata para o quadrado do quadrimomento total do sistema,  $(P_{tot})^2$ , neste referencial. Em seguida, simplifique a expressão assumindo o limite ultra-relativístico para o próton  $E_p \gg m_p c^2$ .
- (c) Considere a reação de fotoprodução:  $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ . A energia mínima  $E_{th}$  que o próton deve ter no referencial do laboratório para que essa reação ocorra corresponde à exata situação em que, no referencial do Centro de Massa do sistema, o próton resultante e o pión criado (de massa  $m_\pi$ ) acabam em repouso. Utilizando a invariância do quadrimomento total demonstrada nos itens anteriores, prove que:

$$E_{th} \approx \frac{(m_\pi c^2)^2 + 2m_p m_\pi c^4}{4E_\gamma}$$

- (d) Assumindo que a temperatura atual da CMB é  $T_{CMB} = 2,725$  K, a energia média de um fóton da CMB pode ser aproximada pela energia térmica da distribuição,  $E_\gamma \approx 2,82k_B T_{CMB}$ . Calcule o valor numérico do limite GZK  $E_{th}$  em elétron-volts eV.

**Dados úteis:**  $m_p c^2 = 938$  MeV,  $m_\pi c^2 = 135$  MeV. Onde  $1$  MeV =  $10^6$  eV.

- (e) Em 1991, detectou-se na atmosfera terrestre a "Partícula Oh-My-God", com uma energia impressionante de aproximadamente  $3 \times 10^{20}$  eV. Com base no seu resultado, comente brevemente se essa partícula poderia ter viajado livremente pelo Universo desde os primórdios da formação galáctica ou se ela deve ter se originado em nossa "vizinhança" cósmica.

**5. The Dark Side of the Sun** Esta questão trata da análise de um conjunto de dados astronômicos associados ao eclipse solar total de 2 de agosto de 2027. A partir de tabelas temporais contendo coordenadas equatoriais do Sol e da Lua, será investigado como observações discretas ao longo do tempo podem ser utilizadas para construir a geometria tridimensional do sistema Terra-Lua-Sol.

A resolução é estruturada em duas etapas. Na primeira, os dados são processados para construção vetorial completa do sistema e determinação da trajetória da sombra sobre a superfície terrestre. Na segunda, os resultados são analisados sob uma abordagem estatística, explorando a evolução temporal da separação angular entre Sol e Lua.

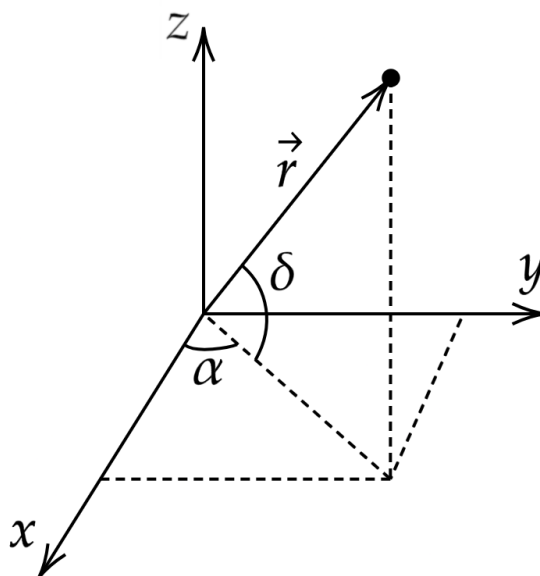
### Parte I: Plotando o Caminho da Totalidade

Para a análise do eclipse solar total de 2 de agosto de 2027, será adotado um sistema de coordenadas equatoriais geocêntricas, no qual a Terra é considerada no centro do referencial. Neste sistema, o eixo  $x$  está na direção do ponto Vernal e o eixo  $z$  aponta para o Polo Norte Celeste. Nesse sentido, a posição de um corpo celeste é descrita pela sua Ascensão Reta (AR), Declinação (Dec) e distância ao observador geocêntrico.

A Ascensão Reta é medida ao longo do equador celeste a partir do ponto vernal, enquanto a Declinação corresponde ao ângulo entre o objeto e o plano do equador celeste. A distância fornece a escala tridimensional do sistema, permitindo construir vetores posição no espaço.

Assim, cada corpo celeste pode ser representado pelo vetor posição no referencial geocêntrico:

$$\vec{r} = r(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta),$$



onde  $\alpha$  é a Ascensão Reta,  $\delta$  é a Declinação e  $r$  é a distância ao centro da Terra.

Logo abaixo estão tabelas temporais com as coordenadas do Sol e da Lua ao longo do dia do eclipse, bem como os tempos siderais de Greenwich (TSG) em cada um desses momentos:

Tabela 1: Coordenadas geocêntricas do Sol

Tempo (UTC)	TSG (HMS)	RA (HMS)	Dec (DMS)	Dist (km)
2027-08-02 08:30	05h12m52.34s	08h47m37.97s	17°52'47.85"	151829874.69
2027-08-02 08:45	05h27m54.82s	08h47m40.36s	17°52'38.31"	151829675.14
2027-08-02 09:00	05h42m57.29s	08h47m42.17s	17°52'38.31"	151829475.49
2027-08-02 09:15	05h57m59.74s	08h47m44.59s	17°52'09.69"	151829275.75
2027-08-02 09:30	06h13m02.21s	08h47m46.71s	17°52'28.77"	151829075.91
2027-08-02 09:45	06h28m04.68s	08h47m48.51s	17°51'49.26"	151828875.97
2027-08-02 10:00	06h43m07.13s	08h47m50.05s	17°51'60.14"	151828675.93
2027-08-02 10:15	06h58m09.60s	08h47m51.38s	17°51'50.60"	151828475.81
2027-08-02 10:30	07h13m12.07s	08h47m52.52s	17°51'41.05"	151828275.58
2027-08-02 10:45	07h28m14.52s	08h47m53.59s	17°51'41.05"	151828075.26
2027-08-02 11:00	07h43m16.99s	08h47m54.54s	17°51'31.50"	151827874.84
2027-08-02 11:15	07h58m19.46s	08h47m55.40s	17°51'21.94"	151827674.32
2027-08-02 11:30	08h13m21.94s	08h47m56.17s	17°51'21.94"	151827473.71

Tabela 2: Coordenadas geocêntricas da Lua

Tempo (UTC)	TSG (HMS)	RA (HMS)	Dec (DMS)	Dist (km)
2027-08-02 08:30	05h12m52.34s	08h44m04.52s	18°21'29.42"	357367.58
2027-08-02 08:45	05h27m54.82s	08h44m42.17s	18°18'09.56"	357369.54
2027-08-02 09:00	05h42m57.29s	08h45m19.79s	18°14'49.26"	357371.73
2027-08-02 09:15	05h57m59.74s	08h45m57.39s	18°11'28.48"	357374.12
2027-08-02 09:30	06h13m02.21s	08h46m34.97s	18°14'49.26"	357376.73
2027-08-02 09:45	06h28m04.68s	08h47m12.52s	18°11'28.48"	357379.54
2027-08-02 10:00	06h43m07.13s	08h47m50.05s	18°11'28.48"	357382.57
2027-08-02 10:15	06h58m09.60s	08h48m27.55s	17°56'28.48"	357385.82
2027-08-02 10:30	07h13m12.07s	08h49m05.03s	17°54'09.56"	357389.27
2027-08-02 10:45	07h28m14.52s	08h49m42.48s	17°51'41.05"	357392.94
2027-08-02 11:00	07h43m16.99s	08h50m19.91s	17°51'41.05"	357396.82
2027-08-02 11:15	07h58m19.46s	08h50m57.31s	17°50'19.91"	357400.91
2027-08-02 11:30	08h13m21.94s	08h51m34.68s	17°49'41.05"	357405.21

- a) Para cada instante de tempo fornecido nas tabelas, converta as coordenadas equatoriais do Sol e da Lua em coordenadas cartesianas no referencial geocêntrico, isto é, obtenha:

$$\vec{r}_S = (x, y, z)_S \quad \text{e} \quad \vec{r}_L = (x, y, z)_L$$

E organize esses dados em uma tabela para cada corpo celeste.

Essas tabelas serão utilizadas nas etapas subsequentes para a análise geométrica do alinhamento Sol-Lua e para a determinação da trajetória da sombra lunar sobre a superfície terrestre.

- b) Utilizando os vetores posição calculados no item anterior, determine, para cada instante de tempo fornecido, o vetor unitário  $\vec{u}(t)$  que define a direção do eixo central do cone de sombra da Lua em direção à Terra.

Assuma que a direção da sombra pode ser aproximada pela linha que une o centro do Sol ao centro da Lua. Expresse  $\vec{u}(t)$  como um vetor unitário no referencial geocêntrico.

- c) Considere o vetor unitário  $\vec{u}(t)$  obtido no item anterior, que define a direção do eixo central do cone de sombra da Lua. A trajetória desse eixo pode ser descrita pela reta

$$\vec{r}(k, t) = \vec{r}_L(t) + k\vec{u}(t),$$

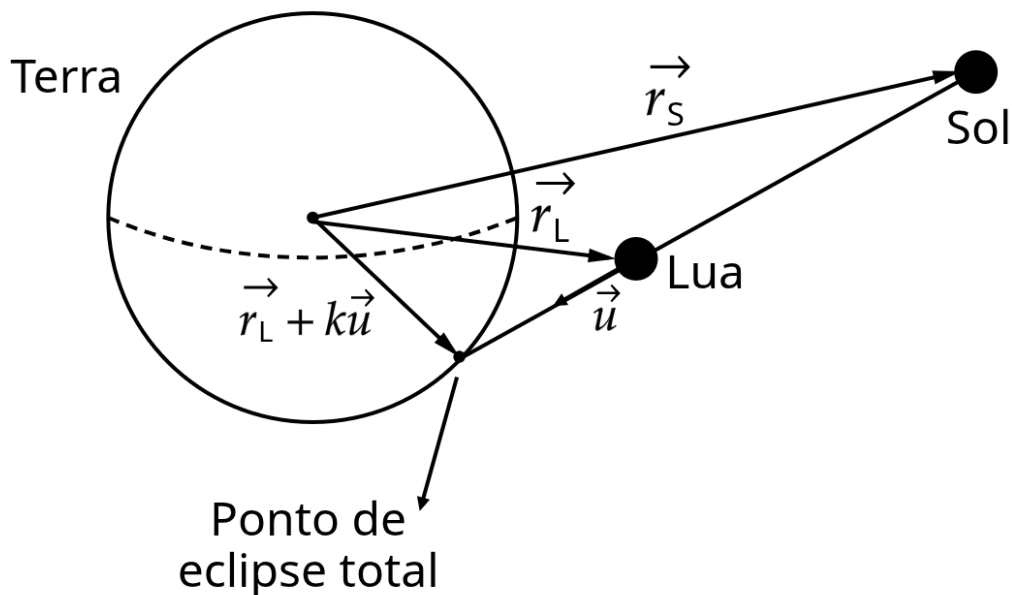
onde  $k \in \mathbb{R}$  é um parâmetro real.

Assuma a Terra como uma esfera de raio  $R_\oplus$ , centrada na origem do referencial geocêntrico. Deseja-se determinar os valores de  $k$  para os quais a reta intercepta a superfície terrestre, isto é, quando

$$\|\vec{r}(k, t)\| = R_\oplus.$$

A partir desta condição geométrica, demonstre que a seguinte equação é válida:

$$k^2 + 2k(\vec{u} \cdot \vec{r}_L) + \|\vec{r}_L\|^2 - R_\oplus^2 = 0.$$



Com base no resultado obtido, calcule os valores de  $k$  para todos os instantes de tempo considerados.

**Dica:** Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  dois vetores expressos em uma base ortonormal  $B = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Então, o produto escalar é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- d) Para cada instante de tempo, determine o ponto de interseção obtido no item anterior e expresse suas coordenadas no sistema geográfico terrestre.

A partir das coordenadas cartesianas do ponto de impacto  $(x, y, z)$ , obtenha a latitude  $\varphi$  e a longitude  $\lambda$  correspondentes utilizando:

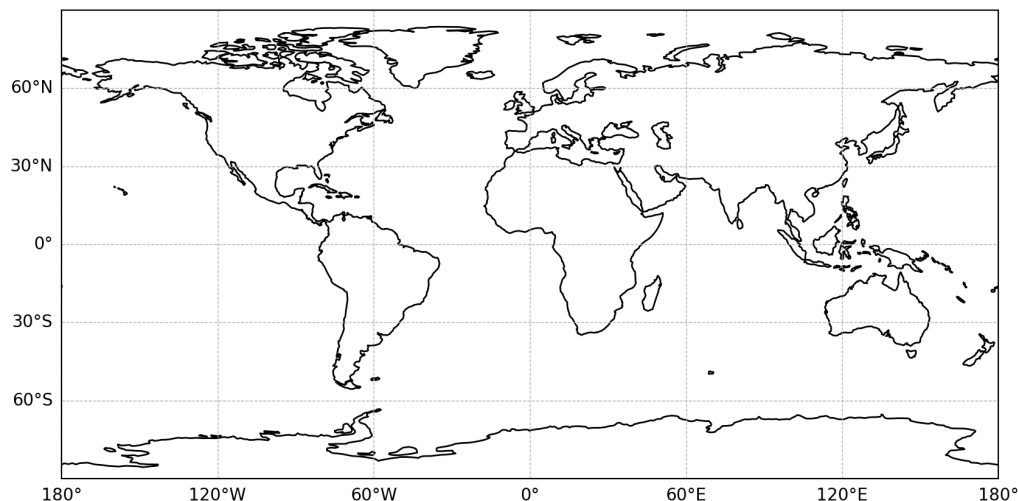
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{z}{R_{\oplus}}\right), \quad \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

com a longitude ajustada de acordo com o quadrante:

$$\lambda = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \text{ e } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Organize os resultados para os instantes de tempo em uma tabela contendo  $(t, \varphi, \lambda)$ , que será utilizada para a construção da trajetória da sombra lunar sobre a superfície terrestre.

- e) Utilizando as coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$  obtidas no item anterior, construa a trajetória da sombra lunar sobre a superfície terrestre utilizando o mapa geográfico de projeção **equirretangular** fornecido.



## Parte II: Análise estatística do alinhamento Sol–Lua

A qualidade de um eclipse solar total pode ser quantitativamente descrita pela separação angular entre os centros aparentes do Sol e da Lua no céu. Para um observador geocêntrico, esta separação pode ser definida como:

$$\theta(t) = \arccos(\hat{r}_S(t) \cdot \hat{r}_L(t)),$$

onde  $\hat{r}_S$  e  $\hat{r}_L$  são os vetores unitários posição do Sol e da Lua no sistema de coordenadas equatoriais geocêntricas.

Utilizando os dados fornecidos na Parte I, devemos analisar a evolução temporal do alinhamento entre os dois astros ao longo do dia do eclipse.

- Para cada instante da tabela, calcule a separação angular  $\theta(t)$  entre o Sol e a Lua. Em seguida, construa um gráfico de  $\theta(t)$  em função do tempo (UTC), utilizando, idealmente, papel milimetrado.
- Determine o instante aproximado em que ocorre o mínimo de  $\theta(t)$ , correspondendo ao máximo alinhamento dos astros. Interprete este resultado no contexto do eclipse solar total.
- Calcule o valor médio  $\mu_\theta$  e o desvio padrão amostral  $\sigma_\theta$  da separação angular ao longo do intervalo de tempo fornecido.
- Com o objetivo de refinar a determinação do instante de máximo alinhamento entre o Sol e a Lua, considere os valores de  $\theta(t)$  obtidos na etapa anterior.

Podemos aproximar o comportamento de  $\theta(t)$  nas vizinhanças do mínimo por uma função quadrática:

$$\theta(t) \approx at^2 + bt + c$$

Utilizando os **cinco pontos de menor distância angular**, realize um ajuste parabólico e determine o valor de  $t_0$ . Compare o resultado obtido com a estimativa discreta do item anterior e discuta a precisão do método.

**Dica:** Muitas calculadoras científicas (como modelos da Casio) possuem uma função de regressão que permite ajustar diretamente uma função quadrática.

### Procedimento geral:

- Acesse o modo de estatística (geralmente indicado por MODE → STAT).

- II Escolha o tipo de regressão quadrática (frequentemente indicado como Quad,  $A+Bx+Cx^2$  ou similar).
  - III Insira os dados  $(x_i, y_i)$  nas colunas correspondentes.
  - IV Utilize a opção de cálculo/regressão (como CALC, REG ou SHIFT + tecla específica) para obter os coeficientes.
  - V A calculadora fornecerá os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  do ajuste.
- j) Com base no ajuste parabólico obtido no item anterior, estime a duração do intervalo em que o alinhamento Sol–Lua é suficientemente preciso para permitir a ocorrência de eclipse total em alguma região da superfície terrestre.
- Considere que a condição de totalidade está associada ao fato de a separação angular entre os centros aparentes do Sol e da Lua satisfazer

$$\theta(t) \leq \theta_c,$$

onde  $\theta_c$  é um limiar angular correspondente ao raio aparente do Sol.

Utilizando a parábola ajustada para  $\theta(t)$ , determine os instantes  $t_1$  e  $t_2$  tais que

$$\theta(t_1) = \theta(t_2) = \theta_c,$$

e, a partir disso, calcule a duração do intervalo de alinhamento crítico:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$