

O Teorema Esquecido da Coaxialidade e Suas Aplicações

Por Rodolfo Rodrigues

Convenções

Vamos usar (XYZ) para se referir ao circuncírculo do triângulo $\triangle XYZ$, R_{XYZ} para o raio de (XYZ) , e $\text{Pot}_C(P)$ a potência de ponto de P em relação a circunferência C .

Introdução

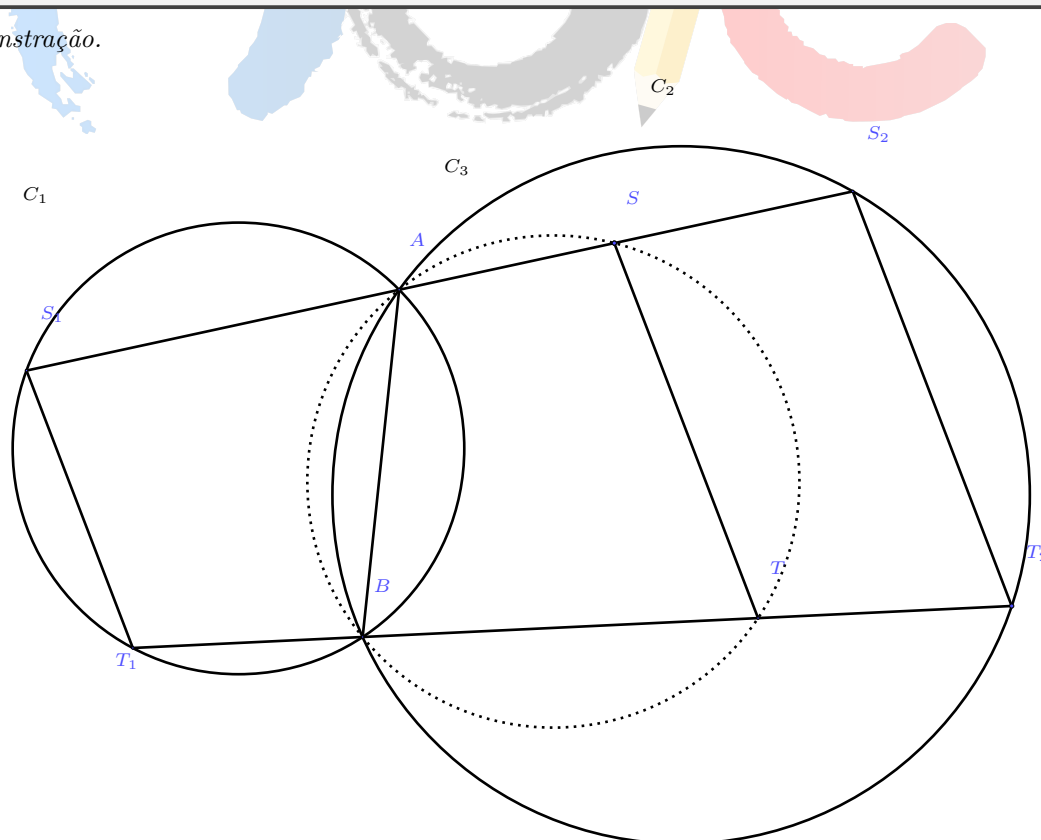
O Teorema Esquecido da Coaxialidade, ou “Forgotten” como é conhecido em fóruns como AoPS, é uma ferramenta poderosa para problemas onde precisamos provar que três circunferências são coaxiais. Usando ele conseguimos converter a dificuldade do problema para o cálculo de algumas razões.

Teorema 1 (Teorema Esquecido da Coaxialidade). Sejam C_1 e C_2 circunferências que se intersectam em A e B . Seja C_3 uma circunferência passando por A e B . Então, C_3 é o lugar geométrico dos pontos P tais que:

$$\frac{\text{Pot}_{C_1}(P)}{\text{Pot}_{C_2}(P)} = k$$

onde k é uma constante.

Demonstração.



Sejam S e T pontos quaisquer, $S_1 = AS \cap C_1$, $S_2 = AS \cap C_2$, $T_1 = BT \cap C_1$, $T_2 = BT \cap C_2$. Primeiro assumamos que S e T estão ambos em C_3 . Basta mostrar que:

$$\frac{\text{Pot}_{C_1}(S)}{\text{Pot}_{C_2}(S)} = \frac{SA \cdot SS_1}{SA \cdot SS_2} = \frac{TB \cdot TT_1}{TB \cdot TT_2} = \frac{\text{Pot}_{C_1}(T)}{\text{Pot}_{C_2}(T)} \iff \frac{SS_1}{SS_2} = \frac{TT_1}{TT_2}$$

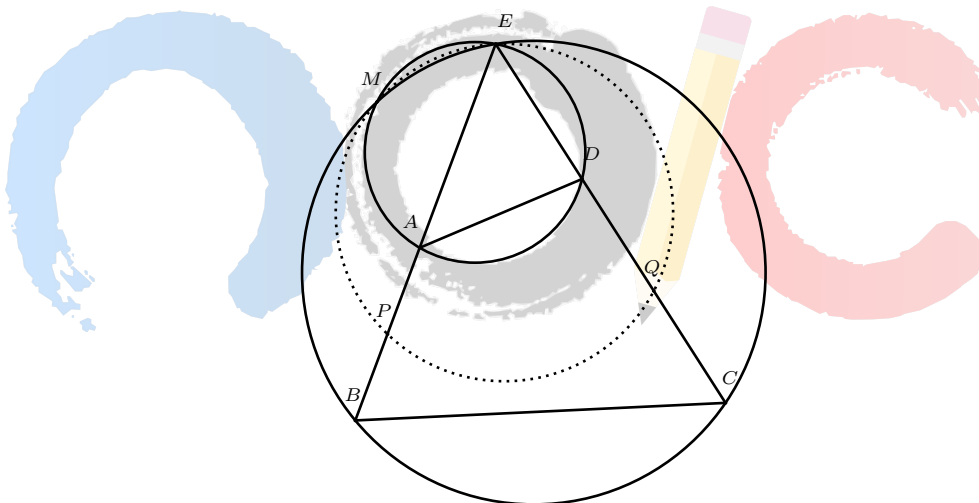
Que é verdade pois uma breve marcação de ângulo revela $S_1T_1 \parallel ST \parallel S_2T_2$ devido aos três segmentos serem concíclicos com AB .

Agora, resta mostrar que se $\frac{\text{Pot}_{C_1}(S)}{\text{Pot}_{C_2}(S)} = \frac{\text{Pot}_{C_1}(T)}{\text{Pot}_{C_2}(T)}$, vale que $ABST$ é cíclico, mas como a demonstração é análoga, fica como exercício para o leitor.

Problemas exemplo

Exemplo 1 (Miquel com Forgotten). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, M seu ponto de Miquel e E a interseção das retas AB e CD . Demonstre que os pontos médio AB e CD estão sobre uma circunferência que passa por M e E .

Solução.

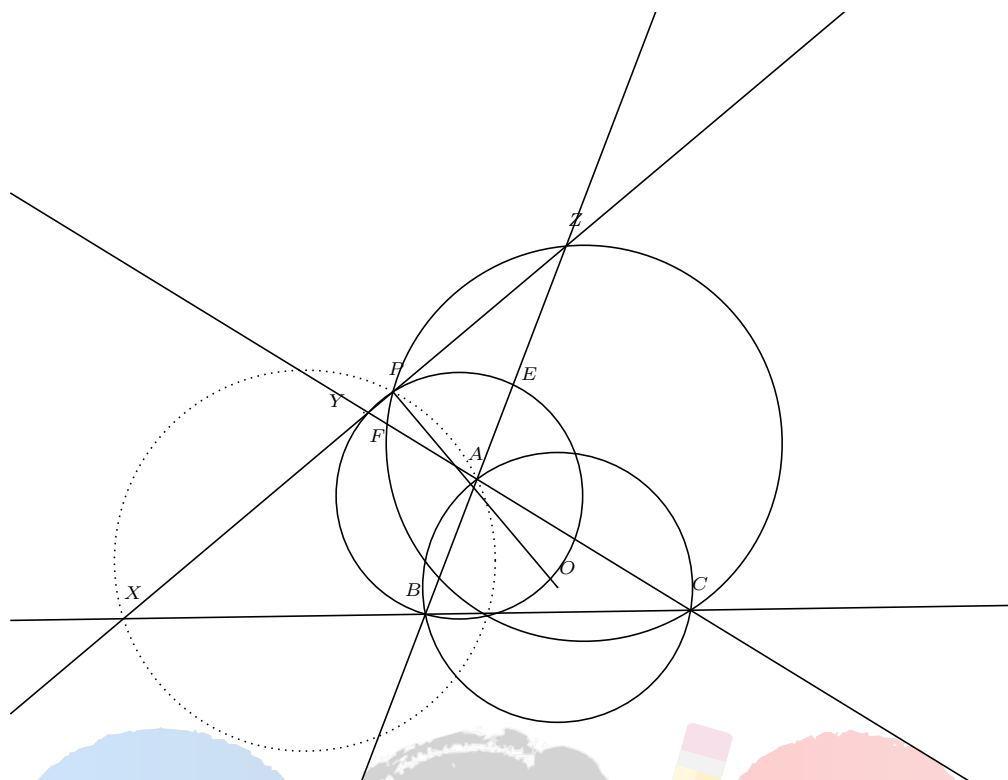


Sejam P e Q os pontos médios de AB e CD respectivamente. Perceba que, por Forgotten, basta que:

$$\frac{\text{Pot}_{(ADE)}(P)}{\text{Pot}_{(BCE)}(P)} = \frac{\text{Pot}_{(ADE)}(Q)}{\text{Pot}_{(BCE)}(Q)} \iff \frac{PA \cdot PE}{PE \cdot PB} = \frac{QD \cdot QE}{QE \cdot QC} \iff 1 = 1$$

OK!

Exemplo 2 (G8 IMO Shortlist 2012). Seja ABC um triângulo com circuncírculo ω e ℓ uma reta que não intersecta ω . Denote por P o pé da perpendicular do centro de ω até ℓ . As retas BC , CA , e AB intersectam ℓ nos pontos X , Y , e Z diferentes de P . Prove que os circuncírculos dos triângulos AXP , BYP , e CZP tem um ponto comum diferente de P ou são tangentes em P .



Solução.

Sejam E e F as interseções das retas AB e AC com os circuncírculos de CPZ e BPY , respectivamente. Pelo **Teorema 1**, o problema se reduz a mostrarmos que:

$$\frac{\text{Pot}_{(BPY)}(X)}{\text{Pot}_{(CPZ)}(X)} = \frac{\text{Pot}_{(BPY)}(A)}{\text{Pot}_{(CPZ)}(A)}$$

$$\frac{XY \cdot XP}{XP \cdot XZ} = \frac{AB \cdot AE}{AC \cdot AF}$$

Para provar esse tipo de equação de razões, somos motivados a buscar algum triângulo para aplicar Menelaus. Nesse caso, o triângulo mais promissor é o AYZ , que nos dá:

$$\frac{XY}{XZ} \cdot \frac{BZ}{BA} \cdot \frac{CA}{CY} = 1$$

Assim basta que:

$$\frac{CY}{BZ} = \frac{AE}{AF} \iff$$

$$AE \cdot BZ = AF \cdot CY \iff$$

$$(BE - AB) \cdot BZ = (CF - AC) \cdot CY \iff$$

$$BE \cdot BZ - AB \cdot BZ = CF \cdot CY - AC \cdot CY \iff$$

$$ZP \cdot YZ - AB \cdot BZ = YP \cdot YZ - AC \cdot CY \iff$$

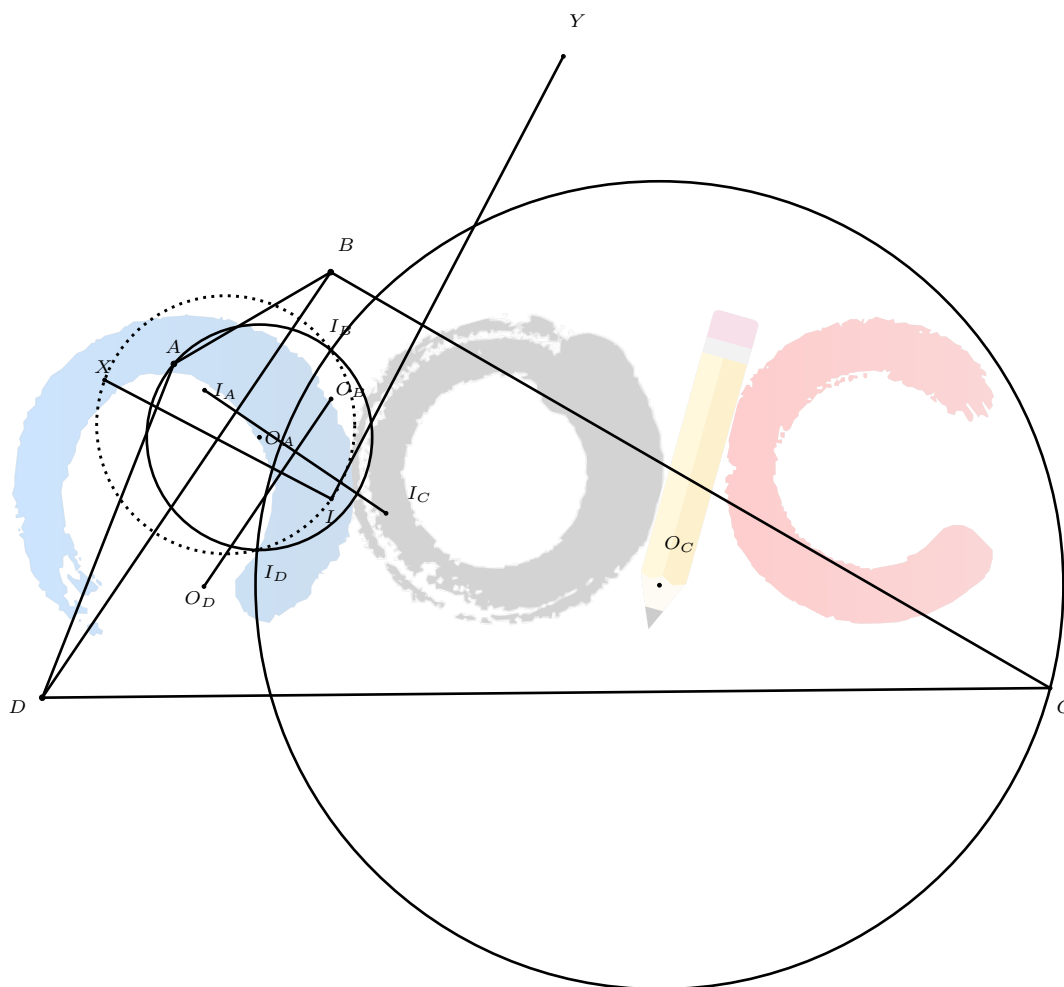
$$ZP \cdot YZ - YP \cdot YZ = AB \cdot BZ - AC \cdot CY = \text{Pot}_{(ABC)}(Z) - \text{Pot}_{(ABC)}(Y) \iff$$

$$ZP^2 - YP^2 = OZ^2 - OY^2$$

OK!

Exemplo 3 (G7 IMO Shortlist 2017). Um quadrilátero convexo $ABCD$ possui um círculo inscrito de centro I . Sejam $I_a, I_b, I_c,$ e I_d os incentros dos triângulos $DAB, ABC, BCD,$ e $CDA,$ respectivamente. Suponha que as tangentes comuns externas dos círculos AI_bI_d e CI_bI_d se encontram em $X,$ e as tangentes comuns externas dos círculos BI_aI_c e DI_aI_c se encontram em $Y.$ Prove que $\angle XIY = 90^\circ.$

Solução.



Primeiramente vamos mostrar que $I_aI_c \perp BD.$ Sejam $P, Q,$ e T_a os pontos de tangência do incírculo de ABD em $DA, AB,$ e $BD,$ respectivamente. Analogamente sejam $R, S,$ e T_c os pontos de tangência do incírculo de BCD em $BC, CD,$ e $BD.$ Pelo teorema de Pitot:

$$\begin{aligned} AB + CD &= BC + AD \\ AQ + QB + CS + SD &= BR + RC + AP + PD \\ QB + SD &= BR + PD \\ BT_a + DT_c &= BT_c + DT_a. \end{aligned}$$

Sabemos também que:

$$BT_a + DT_a = BD = BT_c + DT_c \implies BT_a = BT_c \implies T_a \equiv T_c \square.$$

Analogamente também vale que $I_b I_d \perp AC$.

Sejam $O_A, O_B, O_C,$ e O_D os centros das circunferências $AI_b I_d, BI_a I_c, CI_b I_d$ e $DI_a I_c$. Pelo nosso diagrama, somos motivados a provar que $A - O_A - I, B - O_B - I, C - O_C - I,$ e $D - O_D - I$ colineares.

Verdade, uma vez que:

$$\angle I_a D O_D = 90^\circ - \angle I_a I_c D = \angle I_c D B = \frac{1}{2} \angle BDC = \frac{1}{2} (\angle ADC - \angle ADB) = \angle ADI - \angle ADI_a = \angle I_a D I$$

Agora, para que tenhamos alguma forma de calcular $\angle XIY$, é natural neste ponto termos que provar alguma ciclicidade. Por isso, somos motivados a demonstrar $XI_b I_d$ cíclicos.

Por conta do **Teorema 1**, basta que:

$$\frac{\text{Pot}_{(AI_b I_d)}(X)}{\text{Pot}_{(CI_b I_d)}(X)} = \frac{\text{Pot}_{(AI_b I_d)}(I)}{\text{Pot}_{(CI_b I_d)}(I)}$$

Pela condição da tangência, sabemos:

$$\frac{\text{Pot}_{(AI_b I_d)}(X)}{\text{Pot}_{(CI_b I_d)}(X)} = \frac{R_{AI_b I_d}^2}{R_{CI_b I_d}^2}$$

Além disso, como $I_b I_d \perp AC$ pelo que provamos e $I_b I_d \perp O_A O_C$ pelo eixo radical, segue que $AC \parallel O_A O_C$, assim $\frac{IO_A}{IO_C} = \frac{AO_A}{CO_C} = \frac{R_{AI_b I_d}}{R_{CI_b I_d}}$ e portanto:

$$\frac{\text{Pot}_{(AI_b I_d)}(I)}{\text{Pot}_{(CI_b I_d)}(I)} = \frac{IO_A^2 - R_{AI_b I_d}^2}{IO_C^2 - R_{CI_b I_d}^2} = \frac{R_{AI_b I_d}^2}{R_{CI_b I_d}^2}$$

Note também que, usando $XI_b = XI_d$ juntamente com a ciclicidade vale que $\angle XII_b = \angle XII_d$ por enxergarem arcos de mesmo tamanho.

Analogamente podemos provar também que $\angle YII_a = \angle YII_c$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} \angle XIY &= \angle XII_b + \angle YII_a - \angle I_a I I_b \\ &= \frac{1}{2} \angle I_d I I_b + \frac{1}{2} \angle I_c I I_a - \angle A I B \\ &= \frac{1}{2} (\angle D I B + \angle C I A - 2 \angle A I B) \\ &= \frac{1}{2} (\angle D I A + \angle A I B + \angle C I B + \angle A I B - 2 \angle A I B) \\ &= \frac{1}{2} (\angle D I A + \angle C I B) \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A D I - \angle D A I + 180^\circ - \angle B C I - \angle C B I) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A D I + \angle D A I + \angle B C I + \angle C B I) \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

OK!

Problemas propostos

Alguns dos problemas, assim como no exemplo 3, necessitam de observações sintéticas antes da aplicação direta do teorema. Dicas de alguns na última página. Bons estudos!

Problema 1 (Existência dos pontos isodinâmicos). No triângulo $\triangle ABC$, defina o círculo de Apolônio referente ao vértice A como o lugar geométrico dos pontos P onde $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$. Prove que os três círculos de Apolônio de um triângulo não equilátero são coaxiais.

Problema 2 (G5 IMO Shortlist 2005). Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo onde $AB \neq AC$. Seja H o ortocentro do triângulo ABC , e seja M o ponto médio do lado BC . Seja D um ponto no lado AB e E um ponto no lado AC de modo que $AE = AD$ e os pontos D, H, E estão na mesma reta. Prove que a reta HM é perpendicular ao eixo radical dos circuncírculos de $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$.

Problema 3 (CGMO 2017/7). Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com circuncírculo ω_1 . As retas AC e BD se intersectam no ponto E , e as retas AD e BC no ponto F . A circunferência ω_2 é tangente aos segmentos EB, EC nos pontos M e N , respectivamente, e intersecta ω_1 em Q e R . Retas BC e AD intersectam a reta MN em S e T , respectivamente. Mostre que Q, R, S e T são concíclicos.

Problema 4 (G6 IMO Shortlist 2015). Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo com $AB > AC$. Seja Γ seu circuncírculo, H seu ortocentro, e F o pé da altura de A . Seja M o ponto médio de BC . Seja Q o ponto em Γ de modo que $\angle HQA = 90^\circ$ e seja K o ponto em Γ de modo que $\angle HKQ = 90^\circ$. Assuma que os pontos A, B, C, K e Q são todos distintos e estão sobre Γ nessa ordem. Prove que os circuncírculos de KQH e FKM são tangentes.

Problema 5 (AoPS). Em $\triangle ABC$, sejam D, E , e F os pontos de contato do incírculo com BC, CA e AB , respectivamente. Se P é o pé da altura de D em EF , $X = AB \cap CP$ e $Y = AC \cap BP$, então prove que $(AXY), (AEF)$ e (ABC) se encontram em um ponto diferente de A .

Problema 6 (Vi em um sonho). Sejam AD, BE, CF as alturas do triângulo escaleno $\triangle ABC$ com circuncentro O . Prove que $(AOD), (BOE)$ e (COF) são coaxiais e que seu eixo radical é a reta de Euler.

Problema 7 (SMO 2020/5). No triângulo $\triangle ABC$, sejam E e F pontos nos lados AC e AB , respectivamente, de modo que $BFEC$ é cíclico. Seja P a interseção das retas BE e CF , e M e N os pontos médios de BF e CE , respectivamente. Se U é o pé da perpendicular de P até BC , e os circuncírculos de $\triangle BMU$ e $\triangle CNU$ se intersectam em $V \neq U$, prove que A, P e V são colineares.

Problema 8 (G6 IMO SL 2024). Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$, e seja Γ o circuncírculo de ABC . Pontos X e Y estão em Γ , de modo que XY e BC se intersectam na bissetriz externa de $\angle BAC$. Suponha que as tangentes a Γ em X e Y se intersectam no ponto T no mesmo lado de BC que A , e que TX e TY intersectam BC em U e V , respectivamente. Seja J o centro do exincírculo do triângulo TUV oposto ao vértice T .

Prove que AJ bissecta $\angle BAC$.

Problema 9 (European Mathematical Cup 2016/4). Sejam C_1, C_2 círculos se intersectando em X e Y . Sejam A, D pontos em C_1 e B, C em C_2 de modo que A, X, C são colineares e D, X, B são colineares. A tangente a C_1 por D intersecta BC e a tangente a C_2 por B em P, R respectivamente. A tangente a C_2 por C intersecta AD e a tangente a C_1 por A em Q, S respectivamente. Seja W a interseção de AD com a tangente a C_2 por B e Z a interseção de BC com a tangente a C_1 por A . Prove que os circuncírculos dos triângulos YWZ, RSY e PQY possuem dois pontos em comum ou são tangentes no mesmo ponto.

Problema 10 (ELMO 2017/2). Seja ABC um triângulo com ortocentro H , e seja M ponto médio de BC . Suponha que P e Q são pontos distintos no círculo de diâmetro AH diferentes de A de modo que M está na reta PQ . Prove que o ortocentro de $\triangle APQ$ está no circuncírculo de $\triangle ABC$.

Problema 11 (Mandacaru Fase 3 2023). Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AB = BD$. Seja K um ponto em AB diferente de A , de modo que $KD = AD$. Seja M o ponto simétrico a C com respeito a K , e N o ponto simétrico a B com respeito a A . Prove que $DM = DN$.

Problema 12 (China Southeast 2017). Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e D o ponto médio de BC . Sejam E e F os pés das alturas de D em AB e AC respectivamente. Seja K o ponto médio de AD . As retas KE, KF intersectam a reta BC em M, N , respectivamente. Prove que a reta BC é paralela à reta pelos circuncentros dos triângulos DEM e DFN .

Problema 13 (USA TST 2022/2). Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja M o ponto médio do lado BC e sejam E e F os pés das alturas de B e C , respectivamente. Suponha que as tangentes externas comuns dos circuncírculos de BME e CMF se intersectam em K , e que K está no circuncírculo de ABC . Prove que AK é perpendicular a BC .

Problema 14 (USAMO 2023/6). Seja ABC um triângulo com incentro I e exincentros I_a, I_b, I_c opostos a A, B, C , respectivamente. Dado um ponto D no circuncírculo de $\triangle ABC$ que não está sobre as retas II_a, I_bI_c , ou BC , suponha que os circuncírculos de $\triangle DII_a$ e $\triangle DI_bI_c$ intersectam em dois pontos distintos D e F . Se E é a interseção das retas DF e BC , prove que $\angle BAD = \angle EAC$.

Problema 15 (Reta de Gauss-Bodenmiller). Seja $ABCDEF$ um quadrilátero completo. Mostre que as circunferências de diâmetros AC, BD e EF são coaxiais.



Dicas

Problema 2. Seja Q o Queue point, isto é, a interseção do círculo de diâmetro AH com (ABC) . É bem conhecido que AQ é perpendicular a HM em Q . Marque alguns pontos úteis e escolha as circunferências adequadas para o forgotten.

Problema 6. Tente descobrir qual será o ponto de concorrência.

Problema 8. Defina N como o ponto médio do arco \widehat{BC} . Sejam W e Z as interseções da reta BC com NX e NY .

Problema 10. Seja X o pé de A em QP . Mostre que X está no círculo de diâmetro \overline{AM} , denotado de (AM) . Calcule $\frac{\text{Pot}_{(AH)}(Z)}{\text{Pot}_{(AM)}(Z)}$ para três escolhas úteis de ponto Z , um deles ainda não está no diagrama.

Problema 11. Marque ângulo para mostrar que CK é tangente a (AKD) e que AD é tangente a $(BCDK)$.

Problema 15. Calcule vários alguns senos usando trigonometria para demonstrar que $\frac{EA}{ED} \cdot \frac{EC}{EB} = \frac{FD}{FC} \cdot \frac{FA}{FB}$.

Referências

- A Forgotten Coaxiality Lemma, Stanisor Stefan Dan
- Different Perspectives on Power of a Point, Yerkebulan Bolat

Quaisquer dúvidas ou sugestões podem enviar para o meu e-mail: rorcf2010@gmail.com

