QUIZ 2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

Instruções Gerais

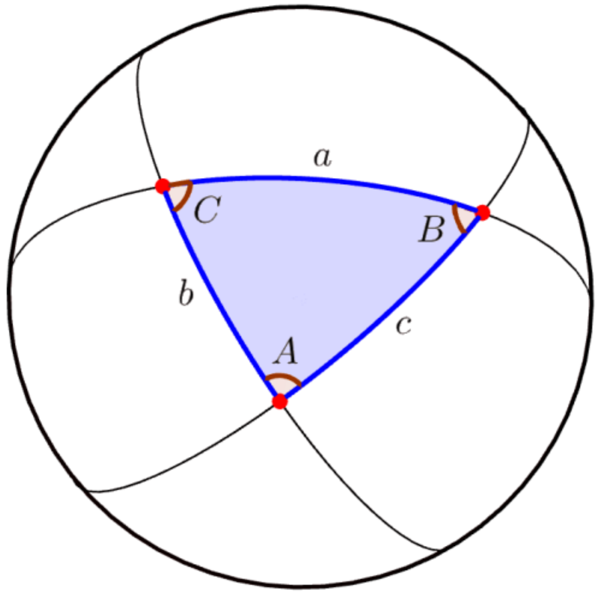
1. Não coloque nenhum meio de identificação pessoal nas suas resoluções;
2. A duração da prova é de 2 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 5 questões (totalizando 150 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. O uso de celulares e computadores é permitido apenas para visualizar as questões da prova, atender aos critérios de transparência exigidos e realizar o scan e a submissão das soluções ao final. Para quaisquer outros fins, não é permitido o uso de celulares, computadores ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., "não respondi à Q1 e à Q2";
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos;
10. Mantenha seu microfone desligado durante toda a prova. Se precisar se comunicar com o fiscal, utilize o chat;
11. Deixe sua câmera com visão do seu ambiente de trabalho, em especial do computador que estiver utilizando para acessar a prova;
12. Ao final da prova, scaneie todas as folhas de resposta e faça a submissão pela plataforma Gradescope, selecionando com cuidado qual(is) página(s) pertence(m) a cada questão.
13. Uma tabela de constantes com informações relevantes para o Quiz está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Definição de ângulo sólido:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi(1 - \cos\theta)$$

- Lei de Gauss para gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot \vec{A} = -4\pi G m_{int}$$

- Para $a \neq -1$:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

Questões

1. **Koi (10 pontos)** Gustavinho estava sendo sugado pelo Instituto Tecnológico de Astrologia em seus estudos sobre anãs marrons...denso. Ele se deparou com uma protoestrela esfericamente simétrica, de massa total M e raio R, em contração quasiestática. Ele descobriu que sua densidade variava segundo a seguinte relação:

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Onde ρ_c se refere à densidade no centro da protoestrela. Além disso, suas observações permitiram determinar que em seu centro a pressão é descrita pela seguinte equação de estado:

$$P_c = \frac{\rho_c k_B T_c}{\mu m_H} + K\rho_c^{5/3}$$

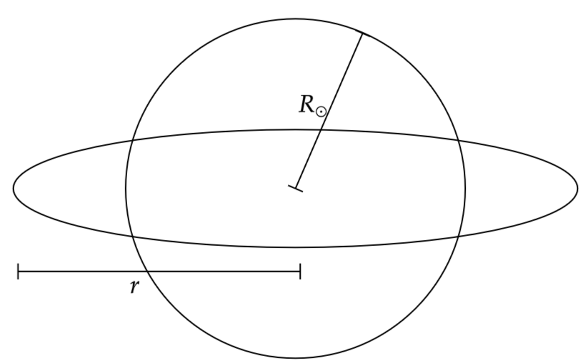
onde:

$$K = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m_e}$$

(a) **(8 pontos)** Determine $\rho_c(M,R)$ e, a partir do equilíbrio hidrostático, obtenha $P_c(M,R)$, sabendo que a pressão na superfície é igual a $P_s = 0$.

(b) **(2 pontos)** No limite degenerado ($T_c = 0$), determine $R(M)$.

2. **Cinturão de Dududson (20 pontos)** A civilização dos Duduzetes estava perto de sua extinção por falta de recursos energéticos e como última tentativa de salvar a todos, eles seguiram os ensinamentos de sua divindade Dududson e construíram um cinturão de placas solares circulando sua estrela natal, a qual possui as mesmas características de temperatura e raio que o Sol, para obterem energia suficiente para realizar suas atividades e sobreviver. A estrela dos Duduzetes e o cinturão para captação de energia colocado nela estão retratados a seguir, onde o cinturão está sendo representando como uma linha pela altura das placas ser muito menor que as dimensões da estrela:



a) **(12 pontos)** Calcule a potência gerada pela estrela que é absorvida por um elemento infinitesimal dS de área do cinturão de painéis solares em função de $T_\odot$, $R_\odot$, r e dS. Considere que os painéis absorvem toda a energia que chega até eles.

b) **(8 pontos)** Considerando que a temperatura do cinturão é homogênea e igual a $\frac{T_\odot}{16}$, a distância $r = 25R_\odot$ e que as placas emitem como um corpo negro apenas para a direção contrária à estrela, sendo essa emissão a única fonte de perda de calor das placas. Encontre a porcentagem η da energia absorvida pelas placas solares que é convertida em energia útil para os Duduzetes, ou seja a energia que fica armazenada nas placas e pode ser utilizada pelos Duduzetes.

3. Aproximações incomodam muito (30 pontos) Dr. Henri Lebesgue está de volta, e, mais uma vez, profundamente incomodado com o uso indiscriminado de aproximações em modelos atmosféricos usuais. Reconhecendo, no entanto, a complexidade intrínseca da natureza (e os limites que uma simples questão avaliativa possui), ele decide deliberadamente restringir sua análise ao regime de pequenos efeitos, onde aproximações controladas ainda permitem extrair fenômenos físicos relevantes.

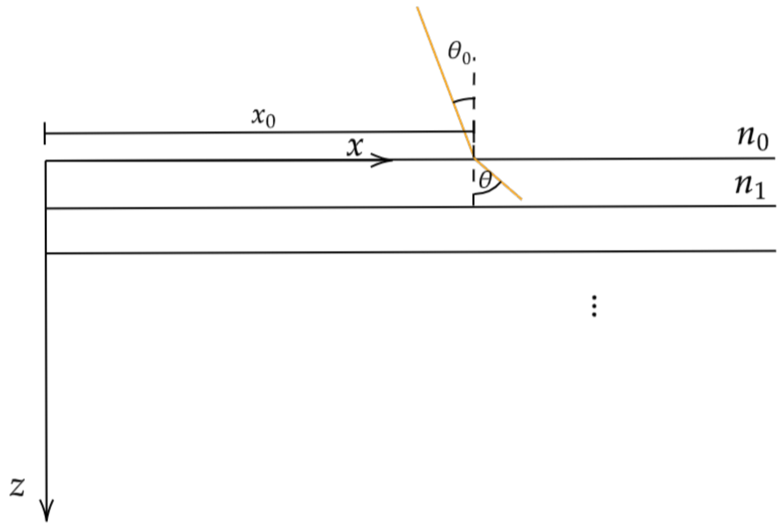
Nesse espírito, ele propõe estudar um modelo simplificado para os efeitos de refração atmosférica associados ao seeing.

Considere uma atmosfera plana e estratificada cujo índice de refração varia com a coordenada vertical z segundo

$$n(z) = n_0(1 + \beta z), \qquad \beta z \ll 1.$$

Um feixe de luz proveniente de uma fonte distante entra na atmosfera em $z = 0$, com ângulo inicial θ_0 em relação à vertical, como representado na imagem a seguir. Adote a aproximação paraxial ($\theta \ll 1$) e caso necessário utilize:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$$



(a) **(5 pontos)** Mostre que a inclinação do raio satisfaz

$$\tan\theta = \frac{dx}{dz}.$$

(b) **(8 pontos)**Utilizando a lei de Snell e assumindo $\theta \ll 1$, obtenha explicitamente a trajetória do raio na forma

$$x(z) = x(z; x_0, \theta_0, \beta),$$

onde $x_0 = x(0)$. Mostre que a trajetória é parabólica.

(c) **(5 pontos)** Considere um detector pontual localizado em $(x = 0, z = H)$. Determine a relação

$$x_0 = x_0(\theta_0, \beta, H)$$

necessária para que o raio atinja o detector.

(d) **(12 pontos)** Seja τ o caminho óptico percorrido por um raio de luz, definido como

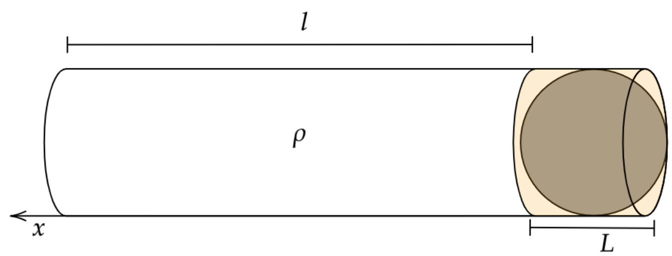
$$\tau = \int n\,ds.$$

Onde ds se refere a um deslocamento infinitesimal do raio de luz. Considere dois raios colimados que entram na atmosfera com ângulos θ_0 e $\theta_0 + \delta\theta$, com $\delta\theta \ll \theta_0$. Determine a diferença de caminho óptico

$$\Delta\tau = \tau(\theta_0 + \delta\theta) - \tau(\theta_0),$$

mantendo termos até primeira ordem em β e $\delta\theta$. Expresse o resultado final como função de n_0, θ_0, $\delta\theta$, β e H.

4. **Laço cosmológico (40 pontos)** Franklin, depois de ficar muito tempo sem ter o que fazer e escrever infinitas questões, ficou sem novas ideias. Então, ele resolveu mudar a quantidade de planetas no Sistema Solar para ter mais tipos de fenômenos para trabalhar em questões. Para isso, ele desenvolveu um laço diferente, que em vez de você ter que puxar, basta adicionar um determinado material em um compartimento que a partir de efeitos cosmológicos a corda começa a contrair e o planeta se aproxima mais rapidamente da Terra, o planeta que está sendo puxado entra em uma espécie de túnel cosmológico, com raio muito maior que seu comprimento e que o raio do planeta. A imagem a seguir mostra o planeta preso em uma bolha espacial formada pelo laço para movê-lo, o qual possui um material de densidade ρ e comprimento descrito pela equação: $l = d_0 a(t)$.



Os itens a seguir irão analisar como o movimento do planeta irá funcionar dentro do laço cosmológico.

a) **(8 pontos)**Encontre o campo gravitacional g na direção do movimento da bolha espacial nas proximidades do eixo do laço. Calcule o campo em função da coordenada x na direção do movimento. Considere que o raio do laço é muito maior que seu comprimento.

b) **(8 pontos)** Usando uma partícula de teste na superfície da bolha espacial mostre que a aceleração do fator de escala $a(t)$ é dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -C\rho$$

E encontre C.

c) **(12 pontos)**O compartimento de substância é preenchido com um material que possui equação de estado $P = w\rho c^2$. A partir da 1° Lei da Termodinâmica e considerando uma expansão adiabática no túnel gravitacional, encontre a expressão de ρ em função de $a(t)$, a_0, ρ_0 e w, sendo que a_0 e ρ_0 se referem ao fator de escala e a densidade no tempo $t = 0$. Caso necessário, utilize:

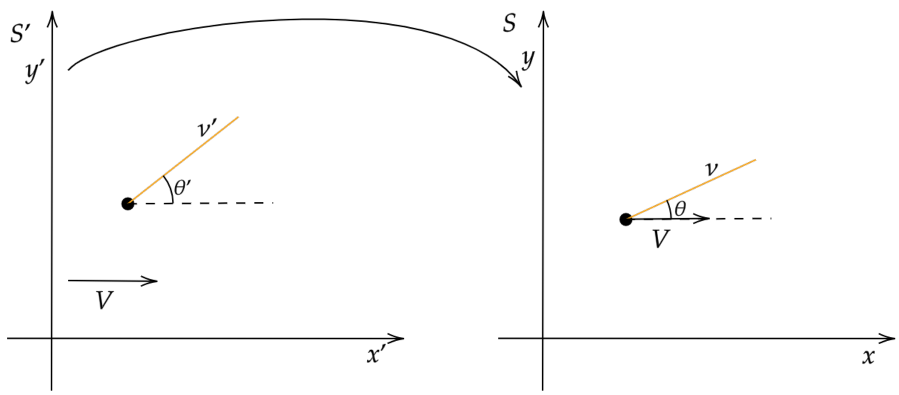
$$\int \frac{a dx}{x} = a \ln x + C$$

d) **(12 pontos)** Considerando que o material utilizado por Franklin para puxar o planeta é um sólido ($w = 0$), encontre o tempo total para o planeta ser puxado T e a velocidade final do planeta v_f sabendo que $a_0 = 1$ e que ele estava, inicialmente, em repouso.

5. **Modela Aí: Termodinâmica relativística (50 pontos)** A noção de temperatura, tão familiar na física clássica, torna-se surpreendentemente sutil quando consideramos sistemas relativísticos. Em particular, não é claro, a priori, como a temperatura de um sistema deve se transformar entre referenciais inerciais em movimento relativo.

Uma maneira operacional de contornar essa dificuldade é estudar diretamente a radiação emitida por um corpo negro. Como o espectro de corpo negro depende explicitamente da temperatura, podemos investigar como esse espectro se transforma sob transformações de Lorentz e, a partir disso, inferir como a temperatura deve ser percebida em diferentes referenciais.

Considere uma esfera que, em seu referencial próprio S', emite radiação isotrópica como um corpo negro à temperatura T. No referencial inercial S, essa esfera se move com velocidade constante v ao longo do eixo x.



Seja um fóton emitido no referencial S' com frequência ν' e formando um ângulo θ' com o eixo x. No referencial S, esse mesmo fóton possui frequência ν e forma um ângulo θ com o eixo x.

As transformações relativísticas de energia e momento são dadas por:

$$E = \gamma(E' + vp'_x), \quad p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{v}{c^2}E'\right),$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\beta = v/c$.

(a) **(12 pontos)** Utilizando as transformações relativísticas dadas, prove que as transformações para a frequência e a direção de propagação do fóton entre os referenciais S' e S podem ser escritas na forma:

$$\nu = \gamma\nu'(1 + \beta\cos\theta'), \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}.$$

(b) **(14 pontos)** O elemento de ângulo sólido é definido por

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi,$$

onde ϕ é o ângulo azimutal em torno do eixo x. Prove que a transformação de elemento de ângulo sólido pode ser escrito como:

$$d\Omega = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1 + \beta\cos\theta')^2}.$$

(c) **(14 pontos)** A intensidade espectral I_ν da radiação é definida como a energia emitida por unidade de área transversal dA, tempo dt, frequência $d\nu$ e ângulo sólido $d\Omega$, ou seja:

$$I_\nu = \frac{dE}{dA \, dt \, d\nu \, d\Omega}.$$

Sabendo que o número total de fótons de um feixe é um invariante relativístico, prove que a quantidade I_ν/ν^3 é invariante sob transformações de Lorentz.

(d) **(6 pontos)** No referencial próprio S', a radiação é descrita de forma isotrópica pela lei de Planck:

$$B_{\nu'} = \frac{2h\nu'^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu'/kT} - 1}$$

Mostre que, no referencial S, a radiação deixa de ser isotrópica e passa a ser interpretada como proveniente de uma temperatura efetiva que depende estritamente da direção de observação. Prove que a expressão dessa temperatura angular aparente é dada por:

$$T(\theta) = \frac{T}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$

(e) **(4 pontos)** Com base na anisotropia térmica provada no item anterior, analise o corpo emissor em duas situações distintas: quando ele translada com velocidade inercial constante e quando ele rotaciona em torno de um eixo próprio. Justifique fisicamente quais são as consequências mecânicas e os efeitos dissipativos sobre o momento linear e o momento angular do sistema nos dois casos.