

## Instruções Gerais

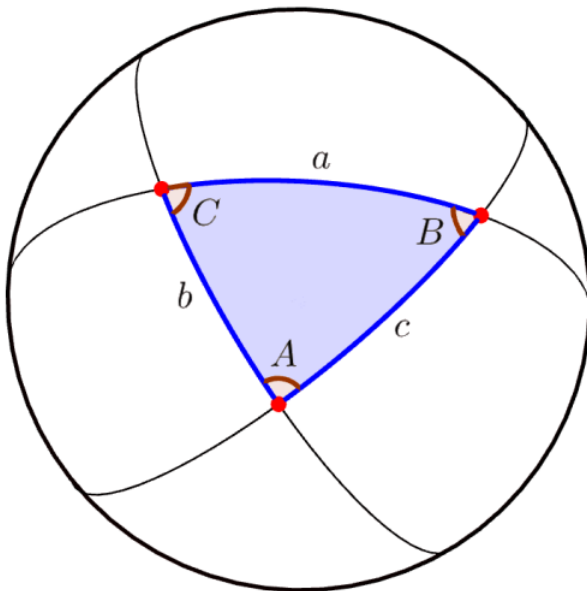
1. Não coloque nenhum meio de identificação pessoal nas suas resoluções;
2. A duração da prova é de 2 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 5 questões (totalizando 150 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. O uso de celulares e computadores é permitido apenas para visualizar as questões da prova, atender aos critérios de transparência exigidos e realizar o scan e a submissão das soluções ao final. Para quaisquer outros fins, não é permitido o uso de celulares, computadores ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos;
10. Mantenha seu microfone desligado durante toda a prova. Se precisar se comunicar com o fiscal, utilize o chat;
11. Deixe sua câmera com visão do seu ambiente de trabalho, em especial do computador que estiver utilizando para acessar a prova;
12. Ao final da prova, scaneie todas as folhas de resposta e faça a submissão pela plataforma Gradescope, selecionando com cuidado qual(is) página(s) pertence(m) a cada questão.
13. Uma tabela de constantes com informações relevantes para o Quiz está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	9,8 m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	23°27'	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	5,14°	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	32'	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	8,314 N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	67,8 km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Definição de ângulo sólido:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

- Lei de Gauss para gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot \vec{A} = -4\pi G m_{int}$$

- Para  $a \neq -1$ :

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

## Questões

1. **Koi (10 pontos)** Gustavinho estava sendo sugado pelo Instituto Tecnológico de Astrologia em seus estudos sobre anãs marrons...denso. Ele se deparou com uma protoestrela esfericamente simétrica, de massa total  $M$  e raio  $R$ , em contração quasiestática. Ele descobriu que sua densidade variava segundo a seguinte relação:

$$\rho(r) = \rho_c \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Onde  $\rho_c$  se refere à densidade no centro da protoestrela. Além disso, suas observações permitiram determinar que em seu centro a pressão é descrita pela seguinte equação de estado:

$$P_c = \frac{\rho_c k_B T_c}{\mu m_H} + K \rho_c^{5/3}$$

onde:

$$K = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e}$$

- (a) **(8 pontos)** Determine  $\rho_c(M, R)$  e, a partir do equilíbrio hidrostático, obtenha  $P_c(M, R)$ , sabendo que a pressão na superfície é igual a  $P_s = 0$ .  
 (b) **(2 pontos)** No limite degenerado ( $T_c = 0$ ), determine  $R(M)$ .

### Solução:

- (a) A massa total da estrela pode ser encontrada a partir da expressão:

$$M = \int_0^R \rho(r) dV = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_c \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr$$

Separando:

$$M = 4\pi \rho_c \left( \int_0^R r^2 dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R r^4 dr \right)$$

$$M = 4\pi \rho_c \left( \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2} \right) = 4\pi \rho_c \left( \frac{2R^3}{15} \right)$$

Logo:

$$\rho_c = \frac{15M}{8\pi R^3}$$

Agora usamos a expressão para o equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Primeiro, temos que:

$$M(r) = 4\pi\rho_c \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right)$$

Substituindo:

$$\frac{dP}{dr} = -4\pi G\rho_c^2 \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Expandindo:

$$\frac{dP}{dr} = -4\pi G\rho_c^2 \left( \frac{r}{3} - \frac{8r^3}{15R^2} + \frac{r^5}{5R^4} \right)$$

Integramos de  $R$  a  $0$ :

$$P_c - P_s = 4\pi G\rho_c^2 \left[ \frac{r^2}{6} - \frac{8r^4}{60R^2} + \frac{r^6}{30R^4} \right]_0^R$$

$$P_c = 4\pi G\rho_c^2 R^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{8}{60} + \frac{1}{30} \right)$$

$$P_c = 4\pi G\rho_c^2 R^2 \cdot \frac{1}{15}$$

Substituindo  $\rho_c$ :

$$P_c = \frac{15GM^2}{16\pi R^4}$$

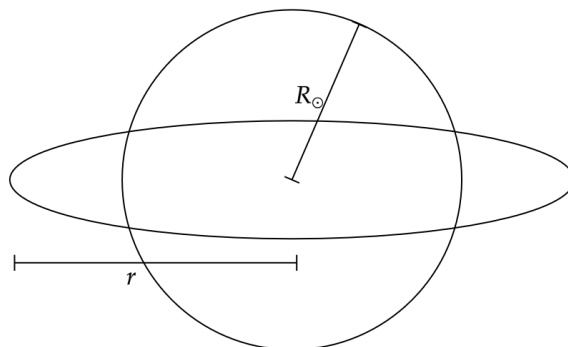
- (b) Para encontrar uma expressão que relaciona  $R$  e  $M$ , deve-se substituir a temperatura  $T_c = 0$ , na expressão do enunciado para a pressão no centro e igualar com o resultado encontrado anteriormente:

$$\frac{15GM^2}{16\pi R^4} = K \left( \frac{15M}{8\pi R^3} \right)^{5/3}$$

Simplificando a expressão:

$$R = \left[ \frac{2K}{G} \left( \frac{15}{8\pi} \right)^{2/3} \right] M^{-1/3}$$

2. **Cinturão de Dududson (20 pontos)** A civilização dos Duduzetes estava perto de sua extinção por falta de recursos energéticos e como última tentativa de salvar a todos, eles seguiram os ensinamentos de sua divindade Dududson e construíram um cinturão de placas solares circulando sua estrela natal, a qual possui as mesmas características de temperatura e raio que o Sol, para obterem energia suficiente para realizar suas atividades e sobreviver. A estrela dos Duduzetes e o cinturão para captação de energia colocado nela estão retratados a seguir, onde o cinturão está sendo representado como uma linha pela altura das placas ser muito menor que as dimensões da estrela:



- a) **(12 pontos)** Calcule a potência gerada pela estrela que é absorvida por um elemento infinitesimal  $dS$  de área do cinturão de painéis solares em função de  $T_{\odot}$ ,  $R_{\odot}$ ,  $r$  e  $dS$ . Considere que os painéis absorvem toda a energia que chega até eles.
- b) **(8 pontos)** Considerando que a temperatura do cinturão é homogênea e igual a  $\frac{T_{\odot}}{16}$ , a distância  $r = 25R_{\odot}$  e que as placas emitem como um corpo negro apenas para a direção contrária à estrela, sendo essa emissão a única fonte de perda de calor das placas. Encontre a porcentagem  $\eta$  da energia absorvida pelas placas solares que é convertida em energia útil para os Duduzetes, ou seja a energia que fica armazenada nas placas e pode ser utilizada pelos Duduzetes.

**Solução:**

- a) Para calcular a potência absorvida com máximo rigor radiométrico, devemos considerar a estrela como um emissor extenso e aplicar a Lei de Lambert. A intensidade específica  $I$ , que é a potência emitida por unidade de área projetada e por unidade de ângulo sólido, relaciona-se com a emitância estelar por:

$$I = \frac{\sigma T_{\odot}^4}{\pi}$$

Consideremos um elemento de área  $dA$  na superfície da estrela emitindo radiação em direção a um elemento infinitesimal de placa  $dS$ , situado a uma distância  $x$ . Seja  $\gamma$  o ângulo de emissão (entre a normal de  $dA$  e o raio de luz) e  $\theta$  o ângulo de incidência (entre a normal de  $dS$  e o mesmo raio de luz).

A potência diferencial transferida de  $dA$  para  $dS$  é dada pelo produto da intensidade, da área emissora projetada  $dA \cos \gamma$  e do ângulo sólido que a placa receptora subtende vista da estrela  $d\Omega_{\text{placa}}$ :

$$dP_{abs} = I \cdot (dA \cos \gamma) \cdot d\Omega_{\text{placa}}$$

Sabendo que o ângulo sólido da placa é  $d\Omega_{\text{placa}} = \frac{dS \cos \theta}{x^2}$ , podemos substituir e reorganizar a equação geométrica da troca radiativa:

$$dP_{abs} = I \cdot dA \cos \gamma \cdot \frac{dS \cos \theta}{x^2} = I \cdot \left( \frac{dA \cos \gamma}{x^2} \right) \cdot dS \cos \theta$$

Notamos que o termo entre parênteses é a exata definição geométrica do ângulo sólido diferencial  $d\Omega$  que o próprio pedaço da estrela subtende quando visto a partir da placa solar. Ou seja, a dependência do ângulo de emissão  $\gamma$  fica intrinsecamente incorporada à definição do ângulo sólido da fonte:

$$d\Omega = \frac{dA \cos \gamma}{x^2}$$

Substituindo na equação de potência, chegamos à expressão base para o cálculo da placa:

$$dP_{abs} = I \cdot dS \cos \theta \cdot d\Omega$$

Para obter a potência total absorvida, integramos essa expressão sobre todo o disco visível da estrela. Visto a uma distância  $r$ , o astro subtende um cone de semiângulo de abertura  $\alpha_0$ . Em coordenadas esféricas com origem na placa, o ângulo sólido diferencial é  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Substituindo na integral:

$$P_{abs} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_0} \left( \frac{\sigma T_{\odot}^4}{\pi} \right) dS \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

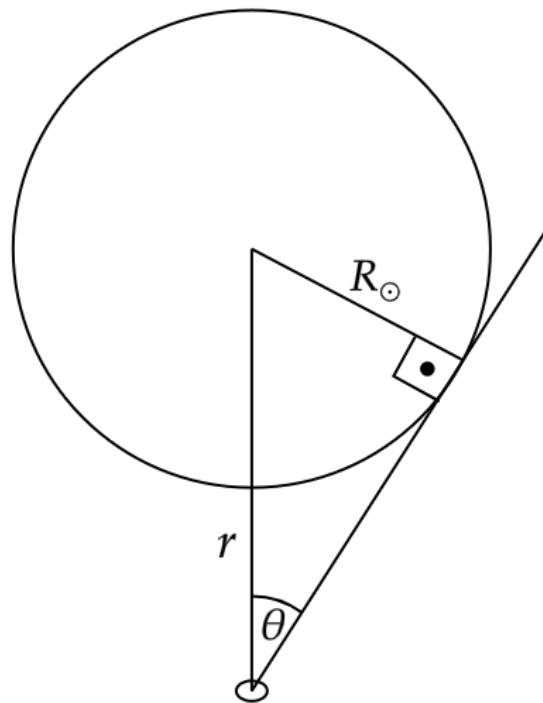
A integral no ângulo azimutal  $\phi$  é imediata e resulta em  $2\pi$ :

$$P_{abs} = 2\pi \left( \frac{\sigma T_{\odot}^4}{\pi} \right) dS \int_0^{\alpha_0} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Para resolver a integral restante em  $\theta$ , podemos usar a substituição  $u = \sin \theta$ , o que nos dá  $du = \cos \theta d\theta$ . Assim, a integral de  $\sin \theta \cos \theta d\theta$  torna-se  $\int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 \theta}{2}$ :

$$P_{abs} = 2\sigma T_{\odot}^4 dS \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\alpha_0} = \sigma T_{\odot}^4 dS \sin^2 \alpha_0$$

O ângulo sólido de abertura do cone que tangencia a circunferência da estrela está representado na imagem a seguir:



Pela geometria do triângulo retângulo formado na figura, temos que  $\sin \alpha_0 = \frac{R_{\odot}}{r}$ . Substituindo essa relação trigonométrica na expressão, chegamos ao resultado final:

$$P_{abs} = \sigma T_{\odot}^4 \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 dS$$

**Observação:** Esse resultado poderia ser obtido de maneira igualmente simples percebendo que a estrela como um todo emite de forma isotrópica no espaço. A luminosidade total da estrela é  $L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$ . Dessa maneira, o fluxo de energia espalhado em uma esfera de raio  $r$  é  $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ . A potência absorvida por um elemento  $dS$  cujo vetor área aponta para o centro da estrela será simplesmente a fração desse fluxo interceptada por ele, o que é proporcional ao ângulo sólido compreendido:

$$P_{abs} = F \cdot dS = \frac{4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4}{4\pi r^2} dS = \sigma T_{\odot}^4 dS \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2$$

- b) A expressão para a conservação de energia nas placas solares do cinturão estabelece que a potência total absorvida deve ser a soma da potência reemitida como calor pela placa e a potência útil convertida para os Duduzetes:

$$P_{emitida} + P_{\text{útil}} = P_{abs} \Rightarrow P_{emitida} = P_{abs}(1 - \eta)$$

Como a placa emite como um corpo negro apenas na direção contrária à estrela, a potência emitida pelo elemento de área é  $P_{emitida} = \sigma T_p^4 dS$ . Substituindo isso e o resultado correto do item anterior na equação:

$$\sigma T_p^4 dS = \sigma T_{\odot}^4 \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 dS (1 - \eta)$$

Podemos simplificar  $\sigma$  e  $dS$  de ambos os lados, restando apenas:

$$T_p^4 = T_{\odot}^4 \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 (1 - \eta)$$

Substituindo as informações dadas no enunciado ( $T_p = \frac{T_{\odot}}{16}$  e  $r = 25R_{\odot}$ ):

$$\left( \frac{T_{\odot}}{16} \right)^4 = T_{\odot}^4 \left( \frac{1}{25} \right)^2 (1 - \eta)$$

$$\frac{T_{\odot}^4}{16^4} = T_{\odot}^4 \left( \frac{1}{625} \right) (1 - \eta)$$

Cancelando a temperatura da estrela ( $T_{\odot}^4$ ) em ambos os lados e sabendo que  $16^4 = 65536$ :

$$\frac{1}{65536} = \frac{1}{625}(1 - \eta)$$

$$1 - \eta = \frac{625}{65536}$$

Isolando a porcentagem de energia convertida ( $\eta$ ):

$$\eta = 1 - \frac{625}{65536} = \frac{64911}{65536}$$

$$\boxed{\eta \approx 0,99046}$$

Portanto, aproximadamente 99,05% da energia absorvida pelas placas solares é convertida em energia útil.

- 3. Aproximações incomodam muito (30 pontos)** Dr. Henri Lebesgue está de volta, e, mais uma vez, profundamente incomodado com o uso indiscriminado de aproximações em modelos atmosféricos usuais. Reconhecendo, no entanto, a complexidade intrínseca da natureza (e os limites que uma simples questão avaliativa possui), ele decide deliberadamente restringir sua análise ao regime de pequenos efeitos, onde aproximações controladas ainda permitem extrair fenômenos físicos relevantes.

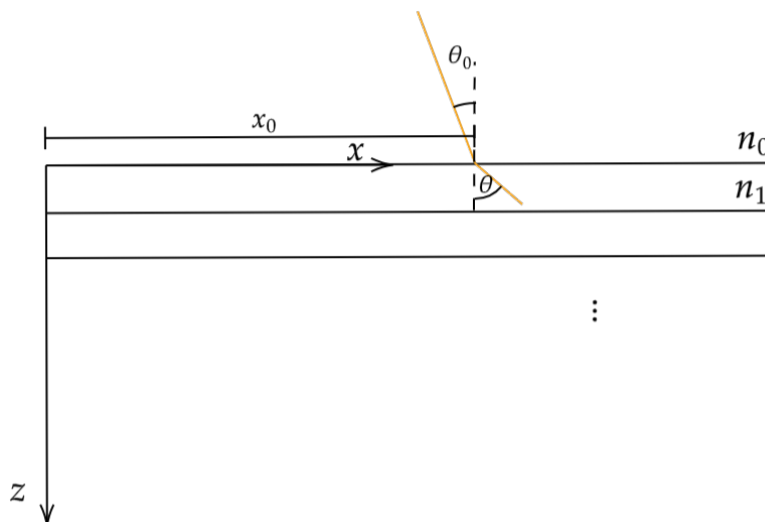
Nesse espírito, ele propõe estudar um modelo simplificado para os efeitos de refração atmosférica associados ao seeing.

Considere uma atmosfera plana e estratificada cujo índice de refração varia com a coordenada vertical  $z$  segundo

$$n(z) = n_0(1 + \beta z), \quad \beta z \ll 1.$$

Um feixe de luz proveniente de uma fonte distante entra na atmosfera em  $z = 0$ , com ângulo inicial  $\theta_0$  em relação à vertical, como representado na imagem a seguir. Adote a aproximação paraxial ( $\theta \ll 1$ ) e caso necessário utilize:

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$



- (a) (5 pontos) Mostre que a inclinação do raio satisfaz

$$\tan \theta = \frac{dx}{dz}.$$

- (b) (8 pontos) Utilizando a lei de Snell e assumindo  $\theta \ll 1$ , obtenha explicitamente a trajetória do raio na forma

$$x(z) = x(z; x_0, \theta_0, \beta),$$

onde  $x_0 = x(0)$ . Mostre que a trajetória é parabólica.

- (c) (5 pontos) Considere um detector pontual localizado em  $(x = 0, z = H)$ . Determine a relação

$$x_0 = x_0(\theta_0, \beta, H)$$

necessária para que o raio atinja o detector.

- (d) (12 pontos) Seja  $\tau$  o caminho óptico percorrido por um raio de luz, definido como

$$\tau = \int n ds.$$

Onde  $ds$  se refere a um deslocamento infinitesimal do raio de luz. Considere dois raios colimados que entram na atmosfera com ângulos  $\theta_0$  e  $\theta_0 + \delta\theta$ , com  $\delta\theta \ll \theta_0$ . Determine a diferença de caminho óptico

$$\Delta\tau = \tau(\theta_0 + \delta\theta) - \tau(\theta_0),$$

mantendo termos até primeira ordem em  $\beta$  e  $\delta\theta$ . Expresse o resultado final como função de  $n_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\delta\theta$ ,  $\beta$  e  $H$ .

**Solução:**

- (a) A trajetória do raio luminoso pode ser descrita por uma curva  $x(z)$ . Para um elemento infinitesimal de caminho  $ds$ , temos:

$$\tan \theta = \frac{dx}{dz}.$$

- (b) Pela lei de Snell:

$$n(z) \sin \theta(z) = n_0 \sin \theta_0$$

Com  $n(z) = n_0(1 + \beta z)$  e  $\sin \theta \approx \theta$ :

$$\theta(z) = \frac{\theta_0}{1 + \beta z} \approx \theta_0(1 - \beta z)$$

Logo,

$$\frac{dx}{dz} = \theta_0(1 - \beta z)$$

Integrando:

$$x(z) = x_0 + \theta_0 z - \frac{1}{2} \theta_0 \beta z^2$$

que é parabólica.

- (c) Impõe-se  $x(H) = 0$ :

$$0 = x_0 + \theta_0 H - \frac{1}{2} \theta_0 \beta H^2$$

Logo,

$$x_0 = -\theta_0 H \left( 1 - \frac{1}{2} \beta H \right)$$

- (d) O caminho óptico é

$$\tau = \int_0^H n(z) ds = \int_0^H n(z) \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2} dz$$

Na aproximação paraxial,

$$ds \approx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right] dz$$

Assim,

$$\tau \approx \int_0^H n(z) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right] dz$$

Agora substituimos

$$n(z) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right] \approx n_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \theta_0^2 + \beta z \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) \right]$$

Agora sim, integrando termo a termo:

$$\tau(\theta_0) = n_0 \int_0^H \left[ 1 + \frac{1}{2} \theta_0^2 + \beta z \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) \right] dz$$

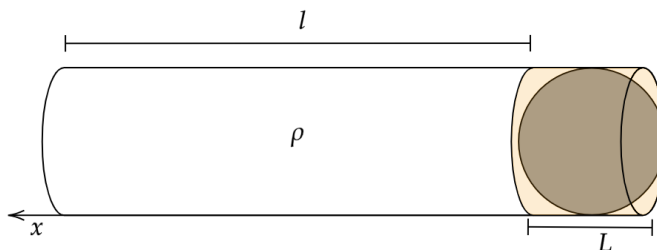
$$\tau(\theta_0) = n_0 \left[ H \left( 1 + \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) + \frac{1}{2} \beta H^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) \right]$$

$$\tau(\theta_0 + \delta\theta) = n_0 \left[ H \left( 1 + \frac{1}{2} (\theta_0^2 + 2\theta_0 \delta\theta) \right) + \frac{1}{2} \beta H^2 \left( 1 - \frac{1}{2} (\theta_0^2 + 2\theta_0 \delta\theta) \right) \right]$$

Por fim,

$$\Delta\tau = \tau(\theta_0 + \delta\theta) - \tau(\theta_0) \Rightarrow \Delta\tau = n_0 H \theta_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \beta H \right) \delta\theta$$

- 4. Laço cosmológico (40 pontos)** Franklin, depois de ficar muito tempo sem ter o que fazer e escrever infinitas questões, ficou sem novas ideias. Então, ele resolveu mudar a quantidade de planetas no Sistema Solar para ter mais tipos de fenômenos para trabalhar em questões. Para isso, ele desenvolveu um laço diferente, que em vez de você ter que puxar, basta adicionar um determinado material em um compartimento que a partir de efeitos cosmológicos a corda começa a contrair e o planeta se aproxima mais rapidamente da Terra, o planeta que está sendo puxado entra em uma espécie de túnel cosmológico, com raio muito maior que seu comprimento e que o raio do planeta. A imagem a seguir mostra o planeta preso em uma bolha espacial formada pelo laço para movê-lo, o qual possui um material de densidade  $\rho$  e comprimento descrito pela equação:  $l = d_0 a(t)$ .



Os itens a seguir irão analisar como o movimento do planeta irá funcionar dentro do laço cosmológico.

- a) **(8 pontos)** Encontre o campo gravitacional  $g$  na direção do movimento da bolha espacial nas proximidades do eixo do laço. Calcule o campo em função da coordenada  $x$  na direção do movimento. Considere que o raio do laço é muito maior que seu comprimento.
- b) **(8 pontos)** Usando uma partícula de teste na superfície da bolha espacial mostre que a aceleração do fator de escala  $a(t)$  é dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -C\rho$$

E encontre  $C$ .

- c) **(12 pontos)** O compartimento de substância é preenchido com um material que possui equação de estado  $P = w\rho c^2$ . A partir da 1ª Lei da Termodinâmica e considerando uma expansão adiabática no túnel gravitacional, encontre a expressão de  $\rho$  em função de  $a(t)$ ,  $a_0$ ,  $\rho_0$  e  $w$ , sendo que  $a_0$  e  $\rho_0$  se referem ao fator de escala e a densidade no tempo  $t = 0$ . Caso necessário, utilize:

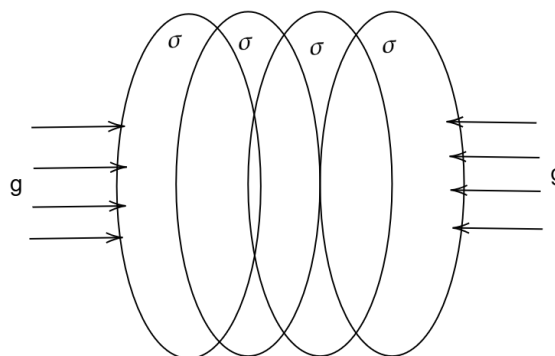
$$\int \frac{adx}{x} = a \ln x + C$$

- d) **(12 pontos)** Considerando que o material utilizado por Franklin para puxar o planeta é um sólido ( $w = 0$ ), encontre o tempo total para o planeta ser puxado  $T$  e a velocidade final do planeta  $v_f$  sabendo que  $a_0 = 1$  e que ele estava, inicialmente, em repouso.

### Solução:

- a) **Solução 1 ( $g$  em função de  $x$  dentro do laço):**

No regime analisado com o raio do laço muito maior que seu comprimento e que as dimensões do planeta, a situação pode ser analisada como vários planos infinitos com mesma densidade de área  $\sigma$  justapostos, como representado na imagem a seguir:



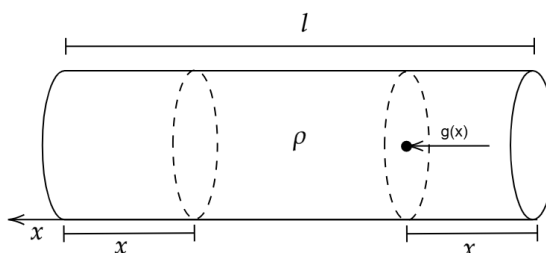
O campo gravitacional de um plano infinito, pode ser encontrado pela lei de Gauss para gravitação, resultando em:

$$\oint \vec{g} \cdot \vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

$$2dgA = -4\pi G d\sigma A$$

$$dg = -2\pi G d\sigma$$

Em que o  $dg$  e  $d\sigma$  foram utilizados para representar que cada plano, que possui massa  $d\sigma A$ , irá contribuir com um campo  $dg$  na situação analisada. Como o campo gravitacional de um plano infinito independe da distância ao plano, o campo dentro do laço que dista  $x$  da superfície será a resultante líquida retirando um comprimento  $x$  partindo de ambas as superfícies ao centro, como representado na imagem a seguir:



Ou seja, o campo resultante será apenas composto pelos planos infinitos dentro do espaço  $l - 2x$ :

$$g = \int_x^{l-x} dg = -2\pi G \int_x^{l-x} d\sigma$$

Pode-se relacionar o  $d\sigma$  com a densidade  $\rho$ , a partir da relação:

$$d\sigma A = \rho A dx$$

Substituindo na expressão para o campo gravitacional:

$$g(x) = -2\pi G\rho(l - 2x)$$

**Solução 2** ( $g$  na superfície da bolha em função da posição  $x$  dela):

Partindo da expressão anterior, pode-se chegar que na superfície da bolha o campo gravitacional será:

$$g(0) = -2\pi G\rho l$$

Então, considerando que a bolha se desloca uma distância  $x$  no espaço, o novo comprimento do laço será  $l = l_0 - x$ . Portanto, o campo gravitacional após um deslocamento  $x$  da bolha na direção do movimento será:

$$g = -2\pi G\rho(l_0 - x)$$

Que utilizando  $l_0 - x = x'$ , resulta em  $g = -2\pi G\rho x'$ .

- b) Utilizando a massa de prova, sua aceleração, ou  $\ddot{x} = \ddot{l}$  será igual ao campo gravitacional em  $x = 0$ , para a solução 1 ou  $l = l_0 - x$  para a solução 2. Além disso, pode-se escrever a segunda derivada em função do tempo de  $l$  como:

$$l = d_0 a \Rightarrow \ddot{l} = d_0 \ddot{a}$$

Dividindo as duas expressões mostradas entre si e substituindo  $l$  por  $x$ :

$$\frac{d_0 \ddot{a}}{d_0 a} = \frac{\ddot{l}}{l} = \frac{g(0)}{l} = -2\pi G\rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -2\pi G\rho$$

A expressão encontrada evidencia que  $C = 2\pi G$ .

- c) Pela 1ª Lei da Termodinâmica, tem-se a expressão:

$$U = Q - W$$

Que analisando uma variação infinitesimal no sistema, temos que  $dQ = 0$ , uma vez que a expansão é adiabática:

$$dU + dW = 0$$

Da expressão encontrada, ainda temos que  $dU = d(\rho V c^2)$  e  $dW = PdV$ , onde  $P$  é a pressão do componente analisado,  $V$  é o volume do sistema e  $\rho c^2$  se refere a densidade de energia do sistema. Substituindo esses valores na expressão anterior, resulta-se:

$$\begin{aligned} \rho c^2 dV + V c^2 d\rho + PdV &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} + \left( \frac{P}{\rho c^2} + 1 \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo a pressão pela equação de estado mencionada no item:

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} &= -(w + 1) \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} \\ \ln \frac{\rho}{\rho_0} &= \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^{-(w+1)} \end{aligned}$$

Substituindo  $V = Al$  e elevando ambos os lados por  $e$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{Ad_0 a(t)}{Ad_0 a_0} \right)^{-(w+1)}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^{(w+1)}}$$

d) Substituindo  $w = 0$  na expressão encontrada no item anterior:

$$\rho = \rho_0 \frac{a_0}{a(t)}$$

Utilizando essa expressão de  $\rho$  na equação diferencial que relaciona  $\ddot{a}$  e  $a$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -2\pi G \rho_0 \frac{a_0}{a} \\ \ddot{a} &= -2\pi G \rho_0 \end{aligned}$$

Conclui-se que a aceleração do fator de escala é constante. Possibilitando que se faça uma analogia com o MRUV, resultando nas seguintes expressões para  $a$  e suas derivadas:

$$\dot{a} = \dot{a}_0 + \ddot{a}t = -2\pi G\rho_0 t$$

$$a = a_0 + \dot{a}_0 t + \frac{\ddot{a}t^2}{2} = 1 - \pi G\rho_0 t^2$$

Com as expressões para  $a$ , basta substituir nas equações que se relacionam com o comprimento  $l$ . Desse modo, o tempo total para o planeta ser puxado pode ser encontrado pela expressão:

$$l = d_0 a = d_0 - d_0 \pi G \rho_0 t^2$$

$$0 = d_0 - d_0 \pi G \rho_0 T^2$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{\pi G \rho_0}}$$

E a velocidade se relaciona com o comprimento pela equação:

$$v = -\dot{l} = -d_0 \dot{a} = 2d_0 \pi G \rho_0 t$$

Portanto, a velocidade final será:

$$v_f = 2d_0 \pi G \rho_0 T$$

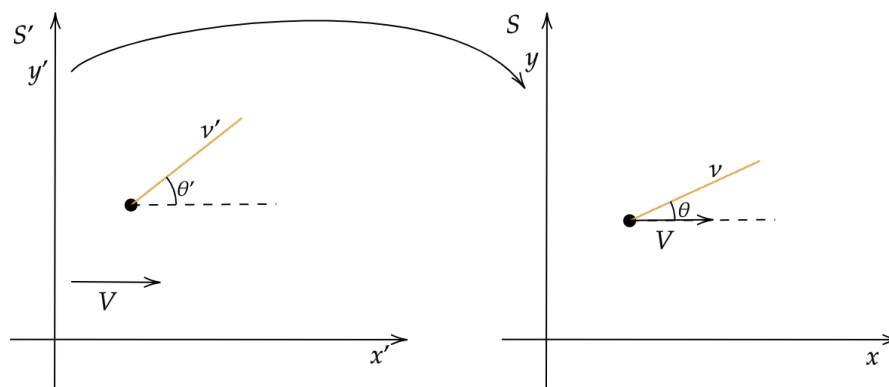
$$v_f = 2d_0 \sqrt{\pi G \rho_0}$$

- 5. Modela Aí: Termodinâmica relativística (50 pontos)** A noção de temperatura, tão familiar na física clássica, torna-se surpreendentemente sutil quando consideramos sistemas relativísticos. Em particular, não é claro, a priori, como a temperatura de um sistema deve se transformar entre referenciais inerciais em movimento relativo.

Uma maneira operacional de contornar essa dificuldade é estudar diretamente a radiação emitida por um corpo negro. Como o espectro de corpo negro depende explicitamente da temperatura, podemos investigar como esse espectro se transforma sob transformações de Lorentz e, a partir disso, inferir como a temperatura deve ser percebida em diferentes referenciais.

Considere uma esfera que, em seu referencial próprio  $S'$ , emite radiação isotrópica como um corpo negro à temperatura  $T$ . No referencial inercial  $S$ , essa esfera se

move com velocidade constante  $v$  ao longo do eixo  $x$ .



Seja um fóton emitido no referencial  $S'$  com frequência  $\nu'$  e formando um ângulo  $\theta'$  com o eixo  $x$ . No referencial  $S$ , esse mesmo fóton possui frequência  $\nu$  e forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .

As transformações relativísticas de energia e momento são dadas por:

$$E = \gamma(E' + vp'_x), \quad p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{v}{c^2}E'\right),$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  e  $\beta = v/c$ .

- (a) **(12 pontos)** Utilizando as transformações relativísticas dadas, prove que as transformações para a frequência e a direção de propagação do fóton entre os referenciais  $S'$  e  $S$  podem ser escritas na forma:

$$\nu = \gamma\nu'(1 + \beta \cos \theta'), \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}.$$

- (b) **(14 pontos)** O elemento de ângulo sólido é definido por

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

onde  $\phi$  é o ângulo azimutal em torno do eixo  $x$ . Prove que a transformação de elemento de ângulo sólido pode ser escrito como:

$$d\Omega = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1 + \beta \cos \theta')^2}.$$

- (c) **(14 pontos)** A intensidade espectral  $I_\nu$  da radiação é definida como a energia emitida por unidade de área transversal  $dA$ , tempo  $dt$ , frequência  $d\nu$  e ângulo sólido  $d\Omega$ , ou seja:

$$I_\nu = \frac{dE}{dA \, dt \, d\nu \, d\Omega}.$$

Sabendo que o número total de fótons de um feixe é um invariante relativístico, prove que a quantidade  $I_\nu/\nu^3$  é invariante sob transformações de Lorentz.

- (d) **(6 pontos)** No referencial próprio  $S'$ , a radiação é descrita de forma isotrópica pela lei de Planck:

$$B_{\nu'} = \frac{2h\nu'^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu'/kT} - 1}$$

Mostre que, no referencial  $S$ , a radiação deixa de ser isotrópica e passa a ser interpretada como proveniente de uma temperatura efetiva que depende estritamente da direção de observação. Prove que a expressão dessa temperatura angular aparente é dada por:

$$T(\theta) = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

- (e) **(4 pontos)** Com base na anisotropia térmica provada no item anterior, analise o corpo emissor em duas situações distintas: quando ele translada com velocidade inercial constante e quando ele rotaciona em torno de um eixo próprio. Justifique fisicamente quais são as consequências mecânicas e os efeitos dissipativos sobre o momento linear e o momento angular do sistema nos dois casos.

### Solução:

- (a) Para um fóton, temos:

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c}.$$

No referencial  $S'$ :

$$p'_x = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta'.$$

Aplicando a transformação de energia:

$$h\nu = \gamma \left( h\nu' + v \frac{h\nu'}{c} \cos \theta' \right),$$

de onde segue:

$$\nu = \gamma\nu'(1 + \beta \cos \theta').$$

Para a direção, usamos:

$$\cos \theta = \frac{p_x c}{E}.$$

Substituindo as transformações:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}.$$

(b) Escrevemos:

$$d\Omega = d\phi d(\cos \theta).$$

Derivando a relação obtida no item (a):

$$\frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta')} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2} = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta \cos \theta')^2}.$$

A transformação de Lorentz não afeta as coordenadas perpendiculares a ao eixo  $x$ , sendo assim  $d\phi = d\phi'$ , implicando

$$d\Omega = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1 + \beta \cos \theta')^2}.$$

(c) A energia do feixe é  $dE = Nh\nu$ . Sendo o número de fótons  $N$  invariante, temos que  $dE = dE'(\nu/\nu')$ . O tempo de passagem de um ciclo de onda é o seu período, que é inversamente proporcional à frequência  $dt \propto 1/\nu$ , resultando em  $dt = dt'(\nu'/\nu)$ . A área transversal de captação  $dA$  é perpendicular à direção de movimento do feixe; como a contração de Lorentz não afeta as direções ortogonais ao movimento relativo, a área é um invariante geométrico, ou seja,  $dA = dA'$ . A banda de frequência transforma-se da mesma forma que a própria frequência,  $d\nu = d\nu'(\nu/\nu')$ . Do item (b), sabemos também que  $d\Omega = d\Omega'(\nu'/\nu)^2$ .

Substituindo essas relações na definição da intensidade em  $S$ :

$$I_\nu = \frac{dE' \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)}{dA' \left[dt' \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)\right] \left[d\nu' \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)\right] \left[d\Omega' \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2\right]}.$$

Agrupando os termos de  $S'$  para recuperar a intensidade de repouso  $I'_{\nu'}$ :

$$I_\nu = I'_{\nu'} \frac{\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)}{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right) \left(\frac{\nu'}{\nu}\right) \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2}.$$

Simplificando os termos lineares no denominador:

$$I_\nu = I'_{\nu'} \frac{1}{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3} = I'_{\nu'} \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^3.$$

Dividindo a equação pelas respectivas frequências ao cubo, concluímos a demonstração geométrica da invariância:

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3}.$$

(d) No referencial  $S'$ , a radiação obedece à distribuição de Planck:

$$I'_{\nu'} = \frac{2h\nu'^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu'/kT} - 1}.$$

Aplicando a invariância ( $I_{\nu} = \nu^3 I'_{\nu'}/\nu'^3$ ), a intensidade no referencial  $S$  é:

$$I_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu'/kT} - 1}.$$

Para reescrever essa expressão em termos das coordenadas do observador em  $S$ , aplicamos a transformação inversa do Efeito Doppler relativístico (bastando inverter o sentido da velocidade,  $\beta \rightarrow -\beta$ ):

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta \cos \theta).$$

Substituindo  $\nu'$  na exponencial térmica:

$$I_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu\gamma(1-\beta \cos \theta)}{kT}\right] - 1}.$$

Para que a equação recaia formalmente na estrutura clássica da radiação de um corpo negro, a temperatura efetiva aparente  $T(\theta)$  deve absorver as correções cinemáticas:

$$T(\theta) = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}.$$

(e) **1. Translação inercial constante:** Para o observador estacionário, a temperatura da face frontal da esfera ( $\cos \theta > 0$ ) é aumentada pelo blueshift térmico, enquanto a face traseira ( $\cos \theta < 0$ ) sofre redshift e parece mais fria. Fisicamente, isso significa que a radiação ejetada para frente possui fótons com frequência muito maior e, conseqüentemente, muito mais momento linear. Haverá um fluxo líquido de momento linear sendo irradiado na direção do movimento. Pelo princípio da conservação do momento, a esfera deve sofrer um recuo na direção oposta, experimentando o que chamamos de freio de radiação. Esse é o princípio fundamental por trás do arrasto de Poynting-Robertson: a poeira interplanetária em órbita do Sol, ao absorver radiação radial e reemitir isotropicamente no seu referencial próprio, emite de forma anisotrópica no referencial do Sistema Solar, perdendo momento orbital e espiralando lentamente rumo à estrela.

**2. Rotação em torno do próprio eixo:** Imagine que a esfera possua um eixo de rotação ortogonal à nossa linha de visada. Devido à rotação, o equador do corpo terá um hemisfério avançando velozmente em direção ao

observador e um hemisfério recuando. A face que avança sofrerá o mesmo blueshift térmico, irradiando fótons mais energéticos e carregando maior quantidade de momento. A face que recua, por sua vez, irradiará de maneira "resfriada", com menor momento. Essa profunda assimetria transversal na ejeção térmica impõe forças de recuo desiguais nas bordas opostas da esfera, criando um torque térmico dissipativo. Este processo é um dos pilares do Efeito YORP (Yarkovsky–O’Keefe–Radzievskii–Paddack), capaz de acelerar ou frear a rotação de asteroides minúsculos de forma eficiente, sendo o responsável por moldar o spin e ditar a evolução rotacional de inúmeros pequenos corpos espalhados pelo nosso Sistema Solar.