Snake Oil

Fábio Medeiros

1 Introdução

O método do Snake Oil permite o cálculo de somatórios que, à primeira vista, parecem desafiadores! Desse modo, originou-se o nome: óleo de cobra, como uma cura milagrosa a contas doentias...

Ele pode ser aplicado tanto em problemas de bijeção quanto em contagens, sendo uma técnica necessária para atacar muitos problemas da Combinatória Moderna.

Obs: esse material tem como pré-requisito noções em funções geratrizes. Você pode aprender ou revisar esse tema no Curso Noic clicando aqui!

A ideia por trás dessa técnica é bem simples, mas antes vamos relembrar algumas identidades que serão úteis na resolução de problemas!

1.1 *Identidades*

Lembre-se que sempre trabalhamos com séries formais. Assim, caso um somatório esteja sem indíces, adote como $\sum_{n=0}^{\infty}$.

1. $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$
2. $\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum \binom{n}{k} x^n$; $k = 0 : \frac{1}{1-x} = \sum x^n$
3. $\sum \binom{m}{2n} x^{2n} = \frac{(1+x)^m + (1-x)^m}{2}$
4. $\sum \binom{m}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{(1+x)^m - (1-x)^m}{2}$
5. $\frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right) = \sum \binom{2n}{m} x^{2n+1}$
6. $\frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right) = \sum \binom{2n+1}{m} x^{2n}$
7. $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$
8. (Fibonacci) $\frac{x}{1-x-x^2} = \sum F_n x^n$

Ao longo dos problemas, sempre que usarmos alguma das identidades acima (por exemplo a I_1), indicaremos acima da igualdade ($\overset{I_1}{=}$).

1.2 *Demonstrações*

Passaremos rapidamente por elas, já que não são o foco do material.

1. Teorema do Binômio com $y = 1$: $(x+y)^r = \sum \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$.
2. Temos $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-(k+1)} = \sum \binom{-(k+1)}{n} (-x)^n \overset{\star}{=} \sum \binom{n+k}{k} (-1)^n (-x)^n = \sum \binom{n+k}{k} x^n \Rightarrow \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum \binom{n+k}{k} x^{n+k} = \sum \binom{n}{k} x^n$ onde usamos o Lema da Negação Superior em $\star$ (visto no material de Funções Geratrizes).

3. Basta notar que ao expandir os binomias de $(1+x)^m + (1-x)^m$, os termos de coeficiente ímpar cortam e os pares ficam dobrados.

4. Basta notar que ao expandir os binomias de $(1+x)^m - (1-x)^m$, os termos de coeficiente par cortam e os ímpares ficam dobrados.

5. A mesma ideia do item 3, mas agora usando a identidade 2.

6. A mesma ideia do item 4, mas agora usando a identidade 2.

7. É a geratriz da sequência de Catalan apresentada no material de Funções Geratrizes.

8. É a geratriz da sequência de Fibonacci apresentada no material de Funções Geratrizes.

2 Ideia e Exemplos

Suponha que queremos calcular uma soma S. Primeiro identificamos a variável livre de qual S depende. Seja n tal variável e defina $S = f(n)$. Assim, buscamos uma fórmula explícita para S em função de n (o que muitos problemas nos pedem, certo?).

O método do Snake Oil consiste em encontrar a função geratriz $F(x)$ para a sequência $(f(n))_{n=0}^{\infty}$.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

Se conseguirmos escrever $F(x)$ de outro jeito mais simples $F(x) = \sum g(n)x^n$ com $g(n)$ uma função que conhecemos, então podemos comparar os coeficientes desses polinômios e deduzir que $f(n) = g(n)$.

Para isso, realizamos um truque de contagem dupla: quando escrevemos

$$F(x) = \sum_{n} f(n)x^n$$

temos (pelo menos) uma soma dupla: externa em n e interna que envolve a definição de $S = f(n)$. Em seguida, trocamos a ordem da soma (S passa para a soma externa enquanto n para a interna). Obtendo o valor da soma interna em termos de n, reescrevemos $F(x)$ de um jeito mais simples e concluímos.

Vamos mostrar esse passo a passo com um exemplo!

Exercício 1. Calcule

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

Solução. Seguindo o processo descrito acima, primeiro identificamos uma variável livre. Mas o que é uma variável livre? É aquela que não varia ao longo do somatório.

Nesse caso, apenas k varia dentro do somatório. Assim, podemos escolher n ou m para ser nossa variável livre. Vamos com m: queremos calcular

$$f(m) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

O segundo passo é considerar a geratriz:

$$F(x) = \sum_m f(m)x^m = \sum_m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m = \sum_m \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m$$

já que $\binom{k}{m} = 0$ para $k < m$. Como $\sum_a \sum_b h(a,b) = \sum_b \sum_a h(a,b)$, podemos inverter o somatório:

$$F(x) = \sum_m \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k=0}^{n} \sum_m (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m$$

Perceba que podemos puxar para fora tudo que está no somatório interno ($\sum_m$) e que não depende de m:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_m (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_m \binom{k}{m} x^m \overset{I_1}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1+x)^k$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (1+x)^k \overset{I_1}{=} (-1)^n(-1+(1+x))^n = (-x)^n$$

Assim, calculamos $F(x)$ de outro jeito:

$$F(x) = \sum_n g(m)x^m$$

onde $g(m) = 0$ se $m \neq n$ e $g(m) = (-1)^n$ se $n = m$. Como estamos trabalhando com séries formais, a igualdade implica igualdade coeficiente a coeficiente:

$$\sum_m f(m)x^m = F(x) = \sum_m g(m)x^m \Rightarrow$$

$$f(m) = \begin{cases} (-1)^n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

□

Exercício 2. Calcule

$$\sum_k \binom{k}{n-k}$$

Solução. A variável livre aqui é n e queremos achar a soma $f(n) = \sum \binom{k}{n-k}$. Portanto, consideramos

$$F(x) = \sum_n f(n)x^n = \sum_n \sum_k \binom{k}{n-k} x^n = \sum_k \sum_n \binom{k}{n-k} x^n$$

O próximo passo é puxar para fora do segundo somatório o que não depende de n. Contudo, $\binom{k}{n-k}$ e x^n parecem depender de n, certo?

Entretanto, podemos puxar um x^k de x^n :

$$\sum_k \sum_n \binom{k}{n-k} x^n = \sum_k x^k \sum_n \binom{k}{n-k} x^{n-k} \stackrel{\star}{=} \sum_k x^k \sum_n \binom{k}{n} x^n$$

$\star$: já que para $n < k$ temos $\binom{k}{n-k} = 0$, então podemos transladar o índice. Logo,

$$F(x) = \sum_k x^k \sum_n \binom{k}{n} x^n \stackrel{I_1}{=} \sum_k x^k (1+x)^k = \sum_k (x+x^2)^k \stackrel{I_2}{=} \frac{1}{1-(x+x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Lembrando que a geratriz dos Fibonaccis é $\sum F_n x^n = G(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \Rightarrow xF(x) = G(x) \Rightarrow$

$$\sum f(n) x^{n+1} = xF(x) = G(x) = \sum F_n x^n \Rightarrow f(n) = F_{n+1}$$

$\square$

Perceba que ao fazermos a inversão dos somatórios, tivemos que ser criativos para puxar um x^k e deixar x^{n-k}. Pode parecer artificial, mas o objetivo é que você treine com os problemas propostos a seguir para que essas ideias se tornem naturais. Uma dica é sempre tentar fazer surgir as identidades que são conhecidas (as quais relembramos no início do material).

Dicas e soluções dos problemas a seguir estão no fim do material!

3 Problemas Propostos

Problema 1. Calcule

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

Problema 2. Calcule

$$\sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$$

Problema 3. Calcule

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Problema 4. Fatore em irredutíveis o seguinte polinômio (assim, você poderia calcular o somatório para qualquer x):

$$\sum_k \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x^k$$

Problema 5. Dado n, encontre o valor de

$$\sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n>0}} F_{k_1} F_{k_2} \cdots F_{k_m}$$

sendo F_i o i-ésimo Fibonacci.

Problema 6. (ELMO SL 2025) Sejam n e k inteiros positivos fixos. Seja T o conjunto de todas as tuplas infinitas $A = (a_0, a_1, \ldots)$ de inteiros tais que $0 \leq a_i \leq k$ para todo i e

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_i = n.$$

Calcule

$$\sum_{A \in T} \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i}.$$

Problema 7. (Vingança Olímpica 2017) Seja n um inteiro positivo. Um par (π, C) composto por uma permutação $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ e uma função binária $C : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ é chamado de *vingativo* se satisfaz as duas condições a seguir:

1. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $j \in S_i = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \ldots\}$ tal que $C(j) = 1$.
2. Se $C(k) = 1$, então k é um dos $v_2(|S_k|) + 1$ maiores elementos de S_k, onde $v_2(t)$ é o maior inteiro não negativo tal que $2^{v_2(t)} \mid t$ para todo inteiro positivo t.

Seja V o número de pares vingativos e P o número de partições de n cujas partes são todas potências de 2. Determine $\frac{V}{P}$.

4 Dicas:

Problema 1. Repita o que fizemos no exercício 1.

Problema 2.

$$\sum_n \binom{n+k}{2k} (2x)^{n-k} = \sum_n \binom{(n-k)+2k}{n-k} (2x)^{n-k} = \sum_n \binom{n+2k}{n} (2x)^n$$

Use a identidade 2 deslocada (a que usamos em sua demonstração)!

Problema 3. Considere n como a variável livre. Use a Identidade 2 e a Identidade 7 (Catalan).

Problema 4. Separe o somatório em k par e k ímpar.

Problema 5. Perceba que $x^n F_{k_1} F_{k_2} \cdots F_{k_m} = F_{k_1} x^{k_1} \cdot F_{k_2} x^{k_2} \cdots F_{k_m} x^{k_m}$.

Problema 6. Seja $f(n)$ a expressão que queremos calcular e $F(x)$ sua geratriz. Use que $x^n = x^{2^0 a_0 + 2^1 a_1 + \dots}$.

Problema 7. Escreva a função geratriz P das partições de n. Agora, ache uma recursão para $V = v(n)$ considerando o ciclo da permutação em que 1 está. Você quer provar que $\frac{V}{P} = n!$.

5 Soluções:

Problema 1. Sejam

$$f(m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} \text{ e } F(x) = \sum x^m f(m)$$

Então temos:

$$F(x) = \sum_m x^m f(m) = \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_m x^m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} =$$

$$\sum_k \binom{n}{k} \sum_m \binom{k}{m} x^m \overset{I_1}{=} \sum_k \binom{n}{k} (1+x)^k = \sum_k \binom{n}{k} (1+x)^k \cdot 1^{n-k} \overset{I_1}{=} (1+(1+x))^n$$

Logo, chegamos a

$$F(x) = (2+x)^n \Rightarrow (2+x)^n = \sum_m \binom{n}{m} 2^{n-m} x^m$$

Portanto, o valor da soma pedida é $f(m) = \binom{n}{m} 2^{n-m}$. $\square$

Problema 2. Sejam

$$f(n) = \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \text{ e } F(x) = \sum f(n) x^n$$

,

$$F(x) = \sum_n \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} x^n = \sum_k \sum_n \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} x^n$$

$$= \sum_k \sum_n \binom{(n-k)+2k}{n-k} 2^{n-k} x^n = \sum_k x^k \sum_n \binom{(n-k)+2k}{n-k} (2x)^{n-k} = \sum_k x^k \sum_n \binom{n+2k}{n} (2x)^n$$

$$\overset{I_2/x^k}{=} \sum_k x^k \cdot \frac{1}{(1-2x)^{2k+1}} = \frac{1}{1-2x} \sum_k \left(\frac{x}{(1-2x)^2}\right)^k \overset{I_2;\, k=0}{=} \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{1-2x}{(1-2x)^2 - x} = \frac{1-2x}{1-5x+4x^2} = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-4x}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^n\right)x^n.$$

Portanto, ao igualar os coeficientes de x^n, obtemos

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^{n-k} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^n.$$

Problema 3. Sejam

$$f(n) = \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \text{ e } F(x) = \sum_n f(n)x^n \Rightarrow$$

$$F(x) = \sum_n x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k\sum_n x^n\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} =$$

$$\sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k x^{-k}}{k+1}\sum_n\binom{n+k}{m+2k}x^{n+k} \overset{I2}{=} \sum_k\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k x^{-k}}{k+1}\cdot\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}$$

$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\sum_k\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^k \overset{I_7}{=} \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-4(\frac{-x}{(1-x)^2})}}{2\frac{-x}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left(1-\sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\right) = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\frac{-2x}{(1-x)} = \frac{x^m}{(1-x)^m}$$

$$\overset{I_2}{=} x\sum_n\binom{n}{m-1}x^n = \sum_n\binom{n-1}{m-1}x \Rightarrow f(n) = \binom{n-1}{m-1}$$

$\square$

Problema 4. Seja

$$F(x) = \sum_k\binom{n}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}x^k$$

Podemos dividir nossa geratriz em duas somas:

$$F(x) = \sum_k\binom{n}{\lfloor k/2\rfloor}x^k = \sum_{k=2k_1}\binom{n}{\frac{2k_1}{2}}x^{2k_1} + \sum_{k=2k_2+1}\binom{n}{\frac{2k_2+1}{2}}x^{2k_2+1}$$

$$= \sum_{k_1}\binom{n}{k_1}(x^2)^{k_1} + x\sum_{k_2}\binom{n}{k_2}(x^2)^{k_2} = (1+x^2)^n + x(1+x^2)^n = (1+x)(1+x^2)^n$$

$\square$

Problema 5. Queremos calcular

$$f(n) = \sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n>0}} F_{k_1}F_{k_2}\cdots F_{k_m}$$

Seja $G(x) = \sum f(n)x^n$ e $\frac{x}{1-x-x^2} = A(x) = \sum F_k x^k$ a geratriz dos Fibonacci. Perceba que

$$G(x) = \sum_n x^n \sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n>0}} F_{k_1}F_{k_2}\cdots F_{k_m}$$

$$= \sum_n \sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n>0}} F_{k_1}x^{k_1}F_{k_2}x^{k_2}\cdots F_{k_m}x^{k_n}$$

$$= \sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n>0}} \sum_n F_{k_1}x^{k_1}F_{k_2}x^{k_2}\cdots F_{k_m}x^{k_n}$$

$$= \sum_{m>0} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n>0} F_{k_1}x^{k_1}F_{k_2}x^{k_2}\cdots F_{k_m}x^{k_n}$$

$$= \sum_{m>0}\left(\left(\sum_{k_1>0} F_{k_1}x^{k_1}\right)\left(\sum_{k_2>0} F_{k_2}x^{k_2}\right)\cdots\left(\sum_{k_m>0} F_{k_m}x^{k_m}\right)\right) = \sum_{m>0} A(x)^m$$

$$= \frac{A(x)}{1-A(x)} = \frac{x}{1-2x-x^2} = \frac{x}{-(x-(\sqrt{2}-1))(x-(-1-\sqrt{2}))}$$

$$= \frac{A}{x-(\sqrt{2}-1)} + \frac{B}{x-(-1-\sqrt{2})}$$

onde $A = \frac{\sqrt{2}-1}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$ e $B = \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-2-\sqrt{2}}{4}$

Portanto,

$$G(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}-2}{x-(\sqrt{2}-1)} + \frac{-2-\sqrt{2}}{x-(-1-\sqrt{2})}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}-2}{x-(\sqrt{2}-1)} + \frac{-2-\sqrt{2}}{x-(-1-\sqrt{2})}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{x}{\sqrt{2}-1}} - \frac{\frac{-2-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}}{1-\frac{x}{-1-\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{x}{\sqrt{2}-1}} - \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{x}{-1-\sqrt{2}}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{2}-1}} - \frac{1}{1-\frac{x}{-1-\sqrt{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow f(n) = [x^n] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^n - \left(\frac{1}{-1-\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

$\square$

Obs: a sequência $f(n)$ que achamos é famosa: ela é conhecida como a Sequência dos Números de Pell. Tal sequência ordena os denominadores (em ordem crescente de precisão) dos racionais que melhor aproximam o valor de $\sqrt{2}$. Clique aqui para saber mais.

Problema 6. Queremos calcular

$$f(n) = \sum_{n=\Sigma 2^i a_i} \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i}$$

Seja

$$F(x) = \sum f(n)x^n = \sum_n \sum_{n=\Sigma 2^i a_i} x^n \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i} = \sum_n \sum_{(\Sigma 2^i a_i)=n} x^{\Sigma 2^i a_i} \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i} =$$

$$\sum_n \sum_{(\Sigma 2^i a_i)=n} \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i} (x^{2^i})^{a_i} \overset{\text{inverto } \Sigma's}{=} \sum_{a_1,\, a_2,\, \dots} \sum_{n=\Sigma 2^i a_i} \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i} (x^{2^i}) a_i = \sum_{a_1,\, a_2,\, \dots} \prod_{i=0}^{\infty} \binom{k}{a_i} (x^{2^i}) a_i$$

$$= \prod (1 + x^{2^i})^k = \left(\prod (1 + x^{2^i})\right)^k = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^k = \frac{1}{(1-x)^k} \overset{I_2}{=} \sum_n \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

$$\Rightarrow f(n) = \binom{n+k-1}{k-1}$$

□

Problema 7. Primeiramente, calculemos $p(n) = \#$ partições de n em potências de 2. Tal número é o coeficiente de x^n em:

$$P(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots) \cdots = \prod_i \frac{1}{1 - x^{2^i}}$$

Dessa forma, queremos achar

$$F(x) = \sum_n v(n) x^n$$

em função de $P(x)$ para descobrir quanto vale $\frac{V}{P} = \frac{v(n)}{p(n)}$

Vamos achar uma recursão para $v(n)$. Olhando para o tamanho i do ciclo em que o 1 está, temos $\binom{n-1}{i-1}$ opções para escolher os elementos restantes dele. Ademais, devemos ordenar essa permutação circular: $\{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \pi^{i-1}(1), \pi^i(1) = 1\}$. Como tem i elementos, devemos multiplicar po $(i-1)!$. Além disso, há $2^{\text{v}_2(i)+1} - 1$ escolhas possíveis da função binária nesse ciclo (qualquer subconjunto dos $\text{v}_2(i) + 1$ maiores, sem ser o subconjunto vazio).

Assim, restam $n - i$ números e podemos associá-los a $v(n-i)$. Dessa forma, chegamos a:

$$v(n) = \sum_{i \geq 1} \binom{n-1}{i-1} (i-1)!(2^{\text{v}_2(i)+1} - 1) v(n-i) = \sum_{i \geq 1} \frac{(n-1)!}{(n-i)!} (2^{\text{v}_2(i)+1} - 1) v(n-i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v(n)}{n!} = \frac{1}{n} \sum_{i \geq 1} (2^{\text{v}_2(i)+1} - 1) \frac{v(n-i)}{(n-i)!}$$

Seja $F(x) = \sum \frac{v(n)}{n!} x^n$. Provaremos que $F(x) = P(x) \Rightarrow \frac{v(n)}{n!} = p(n) \Rightarrow \frac{V}{P} = \frac{v(n)}{p(n)} = n!$.

Temos:

$$F(x) = \sum_n \frac{1}{n} x^n \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1)\frac{v(n-i)}{(n-i)!} \Rightarrow F'(x) = \sum_n x^{n-1} \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1)\frac{v(n-i)}{(n-i)!}$$

$$\Rightarrow xF'(x) = \sum_n \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1)\frac{v(n-i)}{(n-i)!} x^n = \sum_{i\geq 1} \sum_n (2^{v_2(i)+1} - 1)\frac{v(n-i)}{(n-i)!} x^n$$

$$= \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1) x^i \sum_n \frac{v(n-i)}{(n-i)!} x^{n-i} = \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1) x^i F(x) = F(x) \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1) x^i$$

$$\Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x} \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1) x^i = \sum_{i\geq 1} (2^{v_2(i)+1} - 1) x^{i-1} = \sum_k \sum_j (2^{k+1} - 1) x^{(2j+1)2^k - 1}$$

$$= \sum_k (2^{k+1} - 1) x^{2^k - 1} \sum_j x^{2^{k+1} j} = \sum_k (2^{k+1} - 1) \frac{x^{2^k - 1}}{1 - x^{2^{k+1}}}$$

Vamos integrar os dois lados. Primeiramente, note que

$$\int \frac{F'}{F} dx = \int \frac{dF}{dx} \cdot \frac{1}{F} dx = \int \frac{1}{F} dF = log F \Rightarrow F = \exp\left(\int \frac{F'}{F} dx\right)$$

Mas, perceba que fazendo $u = x^{2^k} \Rightarrow du = 2^k x^{2^k - 1} dx$ e temos:

$$\int \frac{x^{2^k - 1}}{1 - x^{2^{k+1}}} dx = \int \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{2^{k+1}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du = \frac{1}{2^{k+1}} log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} log\left(\frac{1 + x^{2^k}}{1 - x^{2^k}}\right) + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{F'}{F} dx = \sum_k \int (2^{k+1} - 1) \frac{x^{2^k - 1}}{1 - x^{2^{k+1}}} dx = \sum_k \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} log\left(\frac{1 + x^{2^k}}{1 - x^{2^k}}\right)$$

$$\Rightarrow F = \exp\left(\int \frac{F'}{F} dx\right) = \exp\left(\sum_k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) log\left(\frac{1 + x^{2^k}}{1 - x^{2^k}}\right) + C\right) = e^C \prod_k \left(\frac{1 + x^{2^k}}{1 - x^{2^k}}\right)^{(1 - \frac{1}{2^{k+1}})}$$

Contudo, sabemos que $[x^0]$ em F é $1 \Rightarrow e^C = 1$. Logo,

$$F = \prod_k \left(\frac{1 + x^{2^k}}{1 - x^{2^k}}\right)^{(1 - \frac{1}{2^{k+1}})}$$

e queremos provar que $F = P$

$$\Leftrightarrow \prod_k \left(\frac{1 + x^{2^k}}{1 - x^{2^k}}\right)^{(1 - \frac{1}{2^{k+1}})} = \prod \frac{1}{1 - x^{2^k}} \Leftrightarrow 1 = \prod (1 + x^{2^k})^{(1 - \frac{1}{2^{k+1}})} (1 - x^{2^k})^{\frac{1}{2^{k+1}}}$$

$$= \prod_k (1+x^{2^k})^{(1-\frac{1}{2^{k+1}})} \left((1-x)(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^{k-1}})\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} = G(x)$$

Note que $\mathrm{v}_{(1-x)}(G(x)) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 1$ e $\mathrm{v}_{(1+x^{2^k})}(G(x)) = 1-\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+3}}+\frac{1}{2^{k+4}}+\dots = 1$

$$\Rightarrow 1 = G(x) \Leftrightarrow 1 = (1-x)\prod_k (1+x^{2^k}) \Leftrightarrow \prod_k (1+x^{2^k}) = \frac{1}{1-x}$$

Mas ambos são equivalentes à $1+x+x^2+x^3+\dots$, concluindo que $\frac{V}{P} = n!$. $\square$