# Soluções do TM2 Nível 2

## Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

**Problema.** Para $k$ inteiro positivo, dizemos que uma $k$-upla $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de inteiros positivos distintos é *Poderosa* se

$$a_1!\, a_2! \cdots a_k! = n!$$

para algum inteiro positivo $n$.

Por exemplo, a dupla $(3, 5)$ é Poderosa, pois $3! \cdot 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 720 = 6!$, já a tripla $(1, 2, 3)$ não é Poderosa, pois $1! \cdot 2! \cdot 3! = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, que não é um fatorial.

**(a)** Prove que existem infinitas duplas $(a_1, a_2)$ Poderosas com $a_1 \neq 1$ e $a_2 \neq 1$.

**(b)** Prove que existem infinitas 2025-uplas $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ Poderosas.

**Observação.** Para cada inteiro positivo $m$, definimos o fatorial de $m$ por $m! = 1 \cdot 2 \cdots m$.

*Solução.*

**(a)** Uma ideia simples que podemos ter é pedir que $a_2$ seja o fatorial de algum número. Isso funciona: para todo $n > 2$ podemos tomar o par $(n! - 1, n)$ já que $(n! - 1)! n! = (n!)!$, e $n! - 1, n! > 1$.

**(b)** Vamos provar por indução em $k$ que existem infinitas $k$-uplas $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ Poderoas.

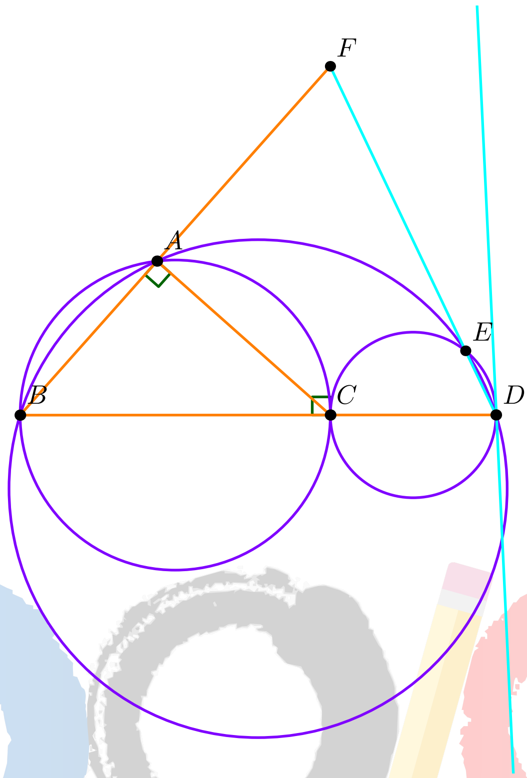
O caso base $k = 2$ foi feito acima.

Para o passo indutivo, note que para cada $k$-upla $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ Poderosa tal que $a_1! a_2! \cdots a_k! = n!$, a $(k+1)$-upla $(a_1, a_2, \dots, a_k, n! - 1)$ também é Poderosa pois $a_1! a_2! \cdots a_k! (n! - 1)! = n!(n! - 1)! = (n!)!$. Como existem infinitas $k$-uplas Poderosas, existem também infinitas $(k+1)$-uplas Poderosas.

O problema segue de $k = 2025$.

# Problema 2 - Escrito por Rafael Amiune

**Problema.** Um triângulo $\triangle ABC$ é construído de modo que sua circunferência circunscrita seja tangente externamente, no ponto $C$, a uma circunferência $\omega$ cujo centro pertence à reta $BC$. Seja $D$ o segundo ponto de interseção de $\omega$ com a reta $BC$ (distinto de $C$) e seja $\omega'$ a circunferência que passa pelos pontos $A$, $B$ e $D$. As circunferências $\omega$ e $\omega'$ se intersectam em dois pontos distintos $D$ e $E$. Seja $F$ o ponto de interseção da reta $AB$ com a perpendicular a $BC$ traçada por $C$. Prove que os pontos $D$, $E$ e $F$ são colineares.




*Solução.* Sabemos que os centros dos círculos e seu ponto de tangência são colineares, logo, o circuncentro de $\triangle ABC$ está em $BC$ e, portanto, $\angle BAC = 90°$. A partir dessa observação, perceba que a perpendicular a BC traçada por $C$ é tangente mutuamente a $(ABC)$ e a $\omega$, sendo seu eixo radical. Sabemos que os eixos radicais tomados dois a dois de $(ABC)$, $\omega$ e $\omega'$ são concorrentes no seu centro radical, portanto, $AB$, $DE$ e $CF$ são concorrentes. Entretanto, uma vez que $F = AB \cap CF$, obtemos $D$, $E$ e $F$ colineares. □

# Problema 3 - Escrito por Rafael Amiune

**Problema.** Seja $n \geq 2$ um inteiro e $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto de números reais positivos de modo que

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, sabe-se que $\frac{4a_k a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}}$ é um elemento de $A$.

**(a)** Encontre todos os possíveis conjuntos $A$ para $n = 3$.

**(b)** Em função de $n$, encontre todos os possíveis conjuntos $A$.

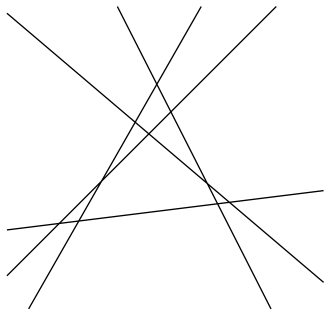
*Solução.*

**(a)** Temos $a_1 < a_2 < a_3$ e sabemos que $\frac{4a_2a_3}{a_2+a_3}$ é um desses números. Entretanto, note que $\frac{4a_2a_3}{a_2+a_3} > \frac{4a_2a_3}{a_3+a_3} = 2a_2 > a_2$, logo, $a_3 = \frac{4a_2a_3}{a_2+a_3} \Rightarrow a_3 = 3a_2$. Analogamente, sabemos que $\frac{4a_1a_2}{a_1+a_2} > a_1$, mas também $\frac{4a_1a_2}{a_1+a_2} < \frac{4a_1a_2}{a_1+a_1} = 2a_2 < a_3$, logo deve ser $a_2$ e segue que $a_2 = 3a_1$. Os conjuntos são todos da forma $\{a, 3a, 9a\}$, com $a$ real positivo. $\square$

**(b)** Agora, faremos um raciocínio semelhante, porém faremos uma indução. Analogamente ao item anterior, obtemos $a_n = 3a_{n-1}$. Nossa hipótese é que $a_i = 3a_{i-1}$ para $i > m$. Basta provarmos que $a_m = 3a_{m-1}$, concluindo a indução. Para isso, basta notar que, analogamente ao item anterior, $2a_{m-1} < \frac{4a_{m-1}a_m}{a_{m-1}+a_m} < 2a_m$. Pela hipótese, sabemos que $3a_m < a_{m+1}$, logo $\frac{4a_{m-1}a_m}{a_{m-1}+a_m} = a_m \Rightarrow a_m = 3a_{m-1}$, e acabamos. Portanto, as soluções são os conjuntos $\{a, 3a, 9a, \ldots, 3^{n-1}a\}$, para $a$ real positivo, que claramente funcionam. $\square$

# Problema 4 - Escrito por Rafael Amiune

**Problema.** Sejam $n \geq 1$ retas desenhadas no plano tais que não há duas paralelas ou três concorrentes em um ponto. Essas retas definem regiões convexas, finitas e infinitas. O exemplo abaixo é uma possível configuração para $n = 5$, com 16 regiões totais e 6 regiões finitas, sendo 4 triângulos, 1 quadrilátero e 1 pentágono.



Determine, em função de $n$ (o número de retas desenhadas), qual é o maior número possível de regiões finitas com 4 lados (quadriláteros).

*Solução.* Considere $n > 3$. O problema é dividido em três partes, cada uma usando um resultado conhecido.

Para a primeira parte, veja que ha um total de $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ regiões, que se torna claro por indução, dado que a $k$-ésima reta a ser "colocada" gera $k$ novas regiões.

Para a segunda parte, afirmamos que há $2n$ regiões ilimitadas. De fato, considere um círculo contendo todos os pontos de interseção entre duas retas. As retas dividem o círculo em $2n$ arcos, cada um correspondente a uma região ilimitada.

Finalmente, a terceira parte faz uso de um resultado menos conhecido. Afirmamos que há ao menos $n-2$ regiões triangulares. Para provar tal fato, iremos colorir um dos lados de cada segmento minimal (sem pontos de interseção no seu interior) da seguinte maneira: Para cada reta $\ell$, considere os $n-1$ pontos nos quais as outras retas a intersectam. Para todos os pares de pontos consecutivos $P$ e $Q$, eles correspondem às interseções de algum par de retas com $\ell$, digamos $r$ e $s$. Então colorimos o lado do segmento $\overline{PQ}$ no qual o ponto $r \cap s$ se encontra.

Após fazê-lo, nos encontramos com $n(n-2)$ lados coloridos. Claramente, cada região infinita não tem lados interiores coloridos e cada triângulo tem todos os seus lados interiores coloridos. A afirmação final é que cada região poligonal de mais de 3 lados tem ao máximo 2 lados interiores coloridos. Se algum dos seus lados interiores tem ângulos adjacentes $\alpha$ e $\beta$, ele será colorido se, e somente se, $\alpha + \beta < 180°$, que implica que a soma dos ângulos externos correspondentes é maior que $180°$. Se isso acontecesse para ao menos 3 lados, então para dois lados não conecutivos a soma dos ângulos externos correspondentes seria maior que $180°$ e então a soma total dos ângulos externos seria maior que $360°$, absurdo!

Agora, seja $T$ a quantidade de regiões triangulares, então $n(n-2) \leq 3T + 2\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 - 2n - T\right) \Longrightarrow T \geq n-2$. Como temos ao menos $n-2$ regiões triangulares e $2n$ regiões ilimitadas, há ao máximo $\frac{n(n+1)}{2} + 1 - (n-2) - 2n = \frac{n^2-5n+6}{2}$ quadriláteros.

Para o exemplo, considere um semicírculo e tome as $n$ retas para serem tangentes a ele. Os únicos triângulos gerados sãoum resultado de três tangentes consecutivas ao semicírculo e é fácil ver (também é possível fazer indução) que as únicas outras regiões além das ilimitadas são quadriláteros. □