

## Instruções Gerais

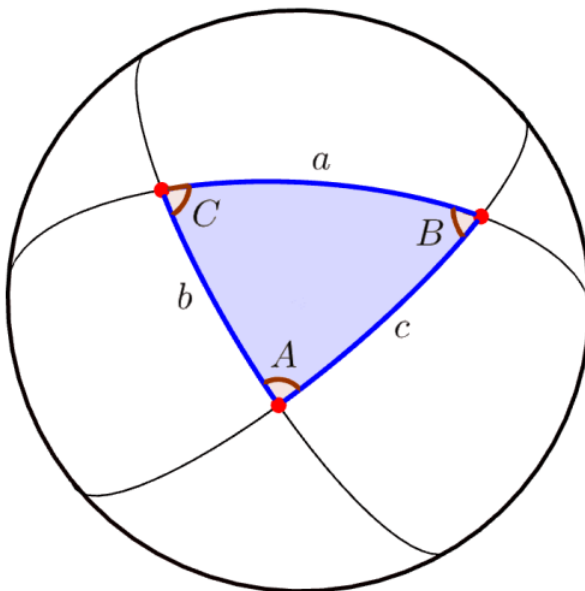
1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. A duração da prova é de 4 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva o caderno de respostas.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	9,8 m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	23°27'	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	5,14°	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	32'	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	8,314 N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	67,8 km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Equação de Kepler:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

- Equação Polar das Cônicas (Elipse e Hipérbole):

$$r = \frac{a \cdot |1 - e^2|}{1 + e \cdot \cos(\nu)} = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$$

- Para  $|x| \ll 1$ , vale:

$$e^x \approx 1 + x$$

## Questões

1. **47 Tucanae (10 pontos)** Ualype decidiu registrar uma imagem de 47 Tucanae no quintal de sua casa, utilizando um telescópio e um CCD. O telescópio possui razão focal de  $f/5$  e uma lente objetiva com diâmetro de 130 mm. O CCD de Ualype possui uma eficiência quântica de 75% e pixels de  $15 \mu\text{m}$ .

Considere que 47 Tucanae é um aglomerado globular aproximadamente esférico. Dados:

- Diâmetro angular de 47 Tucanae:  $43,8'$ .
- Magnitude aparente de 47 Tucanae em V: 4,09.
- Largura da banda V: 88 nm.
- Fluxo de fótons para magnitude 0 em V:  $1000 \text{ fótons}/(\text{Å} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s})$ .

- a) **(3 pontos)** Determine a escala de placa do telescópio em arcmin/mm.  
 b) **(4 pontos)** Estime o número de pixels na imagem de 47 Tucanae.  
 c) **(3 pontos)** Estime o sinal de 47 Tucanae recebido pelo CCD em fótons por pixel, por segundo.

### Solução:

- (a) A distância focal do telescópio pode ser determinada com base na razão focal e no diâmetro da objetiva:

$$\begin{aligned}\frac{f}{D} &= 5 \\ f &= 5 \cdot 130 \text{ mm} \\ f &= 650 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Com uma aproximação para ângulos pequenos, é possível determinar o ângulo correspondente a uma distância de 1 mm no CCD:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{1 \text{ mm}}{f} \\ \theta &\approx \frac{1 \text{ mm}}{650 \text{ mm}} \\ &= 1,54 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ &= 5,29 \text{ arcmin}.\end{aligned}$$

Portanto, a escala de placa é de  $5,29 \text{ arcmin/mm}$ .

(b) O primeiro passo é determinar o diâmetro da imagem de 47 Tucanae:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\theta}{e} \\ &= \frac{43,8 \text{ arcmin}}{5,29 \text{ arcmin/mm}} \\ &= 8,28 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Dessa forma, é possível calcular a área da imagem:

$$\begin{aligned} A &= \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \\ &= \pi \left( \frac{8,28 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \\ &= 5,39 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

A área de um pixel é a seguinte:

$$\begin{aligned} A_{pixel} &= l_{pixel}^2 \\ &= (15 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2 \\ &= 2,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Dividindo a área da imagem pela área de um pixel, é possível obter uma boa estimativa para o número de pixels na imagem:

$$\begin{aligned} n &= \frac{A}{A_{pixel}} \\ &= \frac{5,39 \cdot 10^{-5}}{2,25 \cdot 10^{-10}} \\ &= 2,4 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Portanto, a imagem de 47 Tucanae no CCD ocupa  $2,4 \cdot 10^5$  pixels.

(c) O fluxo de 47 Tucanae pode ser obtido com base no fluxo da magnitude 0 em V:

$$4,09 - 0 = -2,5 \log \left( \frac{\Phi}{1000} \right)$$

$$\Phi = 1000 \cdot 10^{-1,636}$$

$$\Phi = 23,1 \text{ fótons}/(\text{\AA} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s})$$

Utilizando esse fluxo e dados fornecidos no enunciado, é possível obter a quantidade de fótons detectados por segundo:

$$N = \Phi \cdot \eta \cdot \Delta\lambda \cdot \pi \cdot R^2$$

$$= 23,1 \cdot 0,75 \cdot 880 \cdot \pi \cdot 6,5^2$$

$$= 2,0 \cdot 10^6 \text{ fótons/s}$$

Dividindo esse valor pelo número de pixels da imagem:

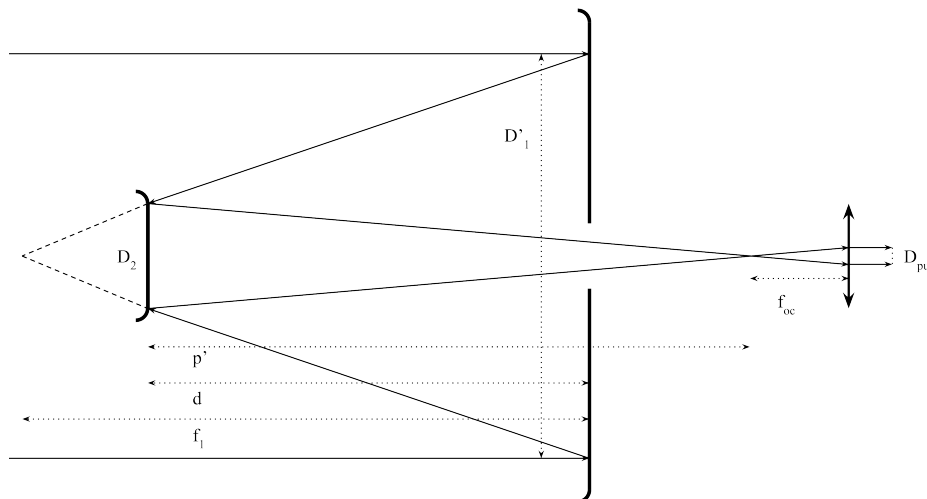
$$\frac{2,0 \cdot 10^6}{2,4 \cdot 10^5} \approx 8,5 \text{ fótons/pixel/s.}$$

Dessa forma, o sinal de 47 Tucanae detectado pelo CCD é de 34 fótons/-pixel/s.

- 2. Telescópio caseiro (15 pontos)** Ualypinho quer construir um telescópio Cassegrain com partes reaproveitadas. Ele ganhou de seu amigo Piazzinho um espelho côncavo de  $|f_1| = 750 \text{ mm}$  e  $D_1 = 200 \text{ mm}$ , e achou em casa um suporte que usará para fixar o espelho secundário a uma distância  $d = 450 \text{ mm}$ . A ocular ele pegou de sua luneta Kepleriana  $f/10$ , que, nessa configuração, tinha pupila de saída adaptada exatamente para o olho humano. Ele terá que comprar o espelho secundário, e já decidiu que será divergente com  $|f_2| = 600 \text{ mm}$ , mas ainda não decidiu seu diâmetro  $D_2$ . Ajude-o a determinar o tamanho ideal do espelho secundário.

**Solução:** O tamanho ideal do espelho secundário é tal que ele reflita o máximo de luz do espelho primário para a ocular. Porém, o diâmetro feixe de luz cilíndrico que sai da ocular não pode ser maior que o diâmetro da pupila humana. Dessa forma, impõem-se um limite máximo ao diâmetro do espelho secundário, que será também seu tamanho ideal, uma vez que um decremento em seu diâmetro ocasionaria na perda de fluxo luz advinda de um anel externo

do espelho primário, enquanto que ganharia um fluxo menor ocasionado pelo não bloqueio, pelo espelho secundário, de um anel interno que será refletido pelo espelho primário.



De acordo com a figura acima, por semelhança de triângulos,

$$\frac{D_2}{p'} = \frac{D_{pup}}{f_{oc}}$$

basta então determinar  $f_{oc}$  e  $p'$ . Para a primeira, sabemos que a pupila de saída na luneta é

$$F^{-1} = \frac{D_L}{f_L} = \frac{D_{pup}}{f_{oc}}$$

Já para  $p'$ , sabemos que a imagem do espelho primário é formada em seu foco, e assim, para o espelho secundário

$$f_2^{-1} = p'^{-1} + p^{-1} = p'^{-1} - (f_1 - d)^{-1}$$

$$p' = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_1 - d + f_2}$$

Juntando os resultados,

$$D_2 = p' \cdot F^{-1} = \frac{f_2(f_1 - d)}{F(f_1 - d + f_2)}$$

Inserindo os valores numéricos, lembrando que  $f_2 < 0$ , obtém-se

$$D_2 = 60 \text{ mm}$$

Ainda, com esse diâmetro de espelho secundário, o diâmetro efetivo do espelho primário,  $D'_1$ , ou seja, o diâmetro de captação de luz, será, por semelhança de triângulos,

$$\frac{D'_1}{f_1} = \frac{D_2}{f_1 - d}$$

$$D'_1 = \frac{f_1 f_2}{F(f_1 - d + f_2)} = 150 \text{ mm}$$

Perceba que  $D'_1 < D_1$ . Caso contrário, o diâmetro do espelho secundário deveria ser ainda menor, visto que o limitante não seria a saída de pupila mas sim o diâmetro do espelho primário.

- 3. Vida Esticada (15 pontos)** Em uma de suas viagens para a SorveterITA, Toduardo Eduledo se perguntou quais eram os limites das órbitas em que a vida poderia ser possível. Como Toduardo estava ocupando tomando seu sorvete de caramelo salgado, ele decidiu fazer algumas simplificações para seu modelo.

Considere um planeta, *Oguh B*, de mesma massa, raio, pressão atmosférica e albedo que a Terra, orbitando uma estrela *Oguh*, de mesma massa, raio e temperatura que o Sol. O critério de habitabilidade escolhido foi a presença de água líquida na superfície de um planeta de rápida rotação.

- (a) **(10 pontos)** Qual é a temperatura de *Oguh B* em função da distância entre *Oguh B* e *Oguh*?

**Dado:** Emissividade de *Oguh B* é  $\epsilon_B = 0,9$ .

- (b) **(5 pontos)** Qual é a maior excentricidade que a órbita de *Oguh B* pode ter para suportar vida? Explícite a expressão da excentricidade e o seu valor numérico.

**Solução:**

- a) Devido ao equilíbrio termodinâmico, *Oguh B* deve emitir a mesma potência que ele absorve. A potência absorvida é:

$$P_{abs} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \pi R_B^2 (1 - \alpha) = \frac{4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4}{4\pi d^2} \pi R_B^2 (1 - \alpha)$$

$$P_{abs} = \frac{\pi R_B^2 R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4}{d^2} (1 - \alpha)$$

A potência emitida, por sua vez, é igual à:

$$P_{emi} = 4\pi R_B^2 \sigma T_B^4 \epsilon_B$$

Igualando ambas as potências,

$$\frac{\pi R_B^2 R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{d^2} (1 - \alpha_B) = 4\pi R_B^2 \sigma T_B^4 \epsilon_B$$

Resolvendo para  $T_B$ :

$$T_B^4 = \frac{R_\odot^2 (1 - \alpha_B)}{4\epsilon_B d^2} T_\odot^4$$

$$T_B = \sqrt[4]{\frac{R_\odot^2 (1 - \alpha_B) T_\odot^4}{4\epsilon_B} \cdot d^{-1/2}}$$

- b) A menor e a maior distâncias até a estrelas são  $a(1 - e)$  e  $a(1 + e)$ . No limite, a temperatura mínima ocorre à distância máxima e a temperatura máxima, à distância mínima.

$$\begin{cases} T_{mn} = \sqrt[4]{\frac{R_\odot^2 (1 - \alpha_B) T_\odot^4}{4\epsilon_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a(1 + e)}} \\ T_{mx} = \sqrt[4]{\frac{R_\odot^2 (1 - \alpha_B) T_\odot^4}{4\epsilon_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a(1 - e)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{mn}}{T_{mx}} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$$

Onde  $\lambda = T_{min}/T_{max}$ . Como a condição de vida é a existência de água líquida, temos  $T_{min} = 273$  K e  $T_{max} = 373$  K, assim,  $\lambda = 0,732$  e  $e = 0,302$

- 4. A Lua sumiu!!! (20 pontos)** O vilão favorito de todos está de volta: Gru, agora ainda mais preparado para roubar a Lua. Desta vez, ao utilizar o raio encolhedor, a Lua tem seu raio reduzido à metade do tamanho original e sua densidade cai para 1/64 da original. No entanto, após disparar o raio, Gru não

consegue segurar a Lua, que passa a cair em queda livre a partir do repouso, em direção à Terra.

- (a) **(8 pontos)** Determine o tempo necessário para que a Lua alcance a superfície terrestre. Considere a distância Terra-Lua  $d_L \gg R_{\oplus}$  e despreze os efeitos de maré.
- (b) **(12 pontos)** Na realidade, antes de atingir a Terra, a Lua será destruída após ultrapassar o Limite de Roche. Considere que esse limite representa o instante no qual uma pequena partícula na superfície da Lua, voltada para a direção da Terra, perde o contato com a Lua. Determine o tempo necessário para que isso ocorra.

### Solução:

- a) O movimento de queda da Lua ocorrerá como um movimento orbital de tal forma que descreva uma elipse de excentricidade que tende a 1. Primeiro, devemos encontrar as características da órbita.

O semi-eixo maior será igual a:

$$2a = d_L \Rightarrow a = \frac{d_L}{2}$$

$$a = 1,92 \cdot 10^8 \text{ m}$$

E o período orbital será:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}}$$

Como foi considerado que  $d_L \gg R_{\oplus}$ , é possível aproximar que o caminho percorrido pela Lua na elipse equivale a metade da elipse, ou seja, pode-se considerar que ela atinge o "centro" da Terra. Desse modo, o tempo de queda, usando que a velocidade areolar é constante:

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{d_L^3}{8GM_{\oplus}}}$$

$$\Delta t \approx 4,2 \cdot 10^5 \text{ s}$$

b) Agora, para o caso em que deve-se considerar o limite de roche, será necessário utilizar a equação de Kepler para encontrar o tempo de queda, uma vez que a área descrita durante o movimento da órbita não é facilmente observada. Inicialmente, deve-se encontrar a distância para que a Lua seja destruída pelo efeito de Maré, sabendo que sua nova massa será  $\frac{M_L}{512}$ , para que a densidade seja 1/64 da original:

$$\frac{GM_{\oplus}m}{\left(d - \frac{R_L}{2}\right)^2} - \frac{GM_{\oplus}m}{d^2} = \frac{GM_L m}{512 \left(\frac{R_L}{2}\right)^2}$$

$$\frac{M_{\oplus}}{d^2} \left(1 + \frac{R_L}{d}\right) - \frac{M_{\oplus}}{d^2} = \frac{M_L}{128R_L^2}$$

$$d = R_L \sqrt[3]{\frac{128M_{\oplus}}{M_L}}$$

$$d \approx 3,8 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Agora com a distância mínima atingida pela Lua é possível utilizar a equação de Kepler para encontrar o tempo decorrido pela Lua até chegar no limite de roche. Então, utilizando a expressão para a distância em função da anomalia excêntrica:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$E = 2\pi - \arccos\left(1 - \frac{d}{a}\right) \approx 5,64 \text{ rad}$$

Por fim, substituindo na equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

$$2\pi \frac{\left(\Delta t + \frac{T}{2}\right)}{T} = E - e \sin E$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}} (E - e \sin E - \pi)$$

$$\Delta t \approx 4,1 \cdot 10^5 \text{ s}$$

**5. Todo leão pode virar gatinho (25 pontos)** Após uma série de triunfos em

sua carreira acadêmica, o estimado Einstein do Nordeste, comparável a um leão por seu brilhantismo e habilidade na dança, é desafiado por uma estoniana a analisar o comportamento do vento solar. Infelizmente, nosso amigo travou, e só conseguiu responder “Hi, I’m Phranklyn”. Agora, cabe a você ajudá-lo para que esse leão não se torne um gatinho.

Considere uma estrela idêntica ao Sol que ejeta continuamente um vento solar radial, com taxa de perda de massa constante, em módulo,  $\dot{M} = 6 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/\text{ano}$ , desprezível se comparada à massa da estrela. Considere um modelo efetivo em que uma fração constante  $\eta = 0,3$  da luminosidade da estrela seja convertida em energia mecânica das partículas em repouso na superfície do Sol, fornecendo o impulso necessário para que uma camada seja ejetada e o vento solar se forme.

- (a) **(8 pontos)** Desprezando as interações entre as partículas do vento e assumindo simetria esférica, calcule a velocidade  $v$  do vento solar nas redondezas da órbita da Terra. Considere que o raio orbital da Terra  $r_{\oplus} \gg R_{\odot}$ .

Admita que o raio da magnetosfera  $R_M$  voltado para o Sol seja determinado pelo equilíbrio entre a pressão do vento solar e a pressão magnética do campo terrestre, modelado como um dipolo magnético, cuja pressão e módulo do campo são dados por:

$$B \propto r^{-3}, \quad P = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- (b) **(17 pontos)** Considere que, ao chegar na Terra, o campo magnético do vento solar é desprezível se comparado ao da magnetosfera e que o vento se encontra em regime quase estacionário. Assim, determine uma expressão para o raio da magnetosfera  $R_M$  voltado para o Sol, em função do campo magnético na superfície da Terra  $B_{\oplus}$ , da densidade do vento solar  $\rho$ , de sua velocidade  $v$  e de constantes.

### Solução:

- (a) Como indicado no enunciado, uma fração da luminosidade é convertida em energia mecânica. Assim, sendo  $dE$  a energia fornecida a uma partícula em um instante de tempo pela luminosidade da estrela, pode-se escrever a equação para a energia mecânica  $d\epsilon$  de tal partícula em repouso na superfície da estrela.

$$d\epsilon = \eta dE - \frac{GM_{\odot} dm}{R_{\odot}}$$

Por conservação da energia mecânica, pode-se encontrar a velocidade de uma partícula do vento solar, e conseqüentemente do vento solar em si por simetria, nas redondezas da órbita terrestre.

$$dm \left( \frac{v^2}{2} - \frac{G(M - \dot{M}dt)}{r_{\oplus}} \right) = \eta dE - \frac{GMdm}{R_{\odot}}$$

Como a taxa de perda de massa é desprezível se comparada à massa da estrela

$$dm \left( \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{\oplus}} \right) = \eta dE - \frac{GMdm}{R_{\odot}}$$

Dividindo ambos os lados por  $dt$

$$\dot{M} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{\oplus}} \right) = \eta L - \frac{GM\dot{M}}{R_{\odot}}$$

Resolvendo para  $v$

$$v = \sqrt{\frac{2L\eta}{\dot{M}} - 2GM \left( \frac{1}{R_{\odot}} - \frac{1}{r_{\oplus}} \right)}$$

Pela aproximação do enunciado  $r_{\oplus} \gg R_{\odot}$

$$v = \sqrt{2 \left( \frac{L\eta}{\dot{M}} - \frac{GM}{R_{\odot}} \right)}$$

Substituindo os valores, encontra-se que

$$v \approx 475,3 \text{ km/s}$$

- (b) A pressão exercida pelo vento solar pode ser descrita como a soma entre a pressão dinâmica e a magnética, visto que o vento solar é um plasma que transporta o campo magnético do Sol

$$P_V = P_D + P_M$$

Devido ao regime quase estacionário, a velocidade nas redondezas da Terra pode ser considerada constante. Assim, escrevendo a força resultante do vento solar

$$F = \frac{dm}{dt}v$$

Para uma densidade constante

$$dm = \rho A dr$$

Reescrevendo a equação para a força

$$F = \rho A v \frac{dr}{dt}$$

Percebendo que  $\frac{dr}{dt} = v$

$$F = \rho A v^2$$

Logo, encontra-se o resultado para a pressão dinâmica

$$P_D = \rho v^2$$

Assim, no equilíbrio entre as pressões do vento solar e da magnetosfera terrestre

$$\rho v^2 + P_M = P_{M\oplus}$$

Como a pressão magnética é proporcional ao campo e, pelo enunciado, o campo do vento solar é desprezível se comparado ao da Terra, pode-se desprezar o termo  $P_M$ . Além disso, utilizando a proporcionalidade do campo e a equação da pressão fornecida, pode-se escrever  $P_{M\oplus}$  em função de  $R_M$ ,  $B_{\oplus}$ ,  $R_{\oplus}$  e constantes.

$$P_{M\oplus} = \frac{B_{\oplus}^2}{2\mu_0} \left( \frac{R_{\oplus}}{R_M} \right)^6$$

Dessa forma,

$$\rho v^2 = \frac{B_{\oplus}^2}{2\mu_0} \left( \frac{R_{\oplus}}{R_M} \right)^6$$

Resolvendo para  $R_{M\oplus}$

$$R_M = R_{\oplus} \left( \frac{B_{\oplus}^2}{2\mu_0 \rho v^2} \right)^{\frac{1}{6}}$$

- 6. A Terra não é plana! (30 pontos)** Como futuro cientista, você, aluno(a) de Barra, adentra um compromisso nobre em zelar pelo conhecimento material da

humanidade, sustentado pela análise criteriosa e pelo método científico. Parte desse compromisso inclui uma comunicação ética e responsável com o resto da sociedade, combatendo desinformação, pseudociência e teorias da conspiração. Leia o texto abaixo, fictício para proteção de identidade, mas inspirado em publicações reais:



**Peppersauro** ✓

@terrarraptor · 2h

Gostaria de saber como os globalóides explicam que as pirâmides estejam perfeitamente alinhadas com as três marias ATÉ HOJE, ou os milhares de sítios arqueológicos nos quais o Sol sempre nasce no mesmo lugar. O verdadeiro formato da Terra todos nós sabemos! O meteoro não existe e o domo segue fixo!

[#astronomia](#) [#raptor](#) [#cabecadedinossauro](#)

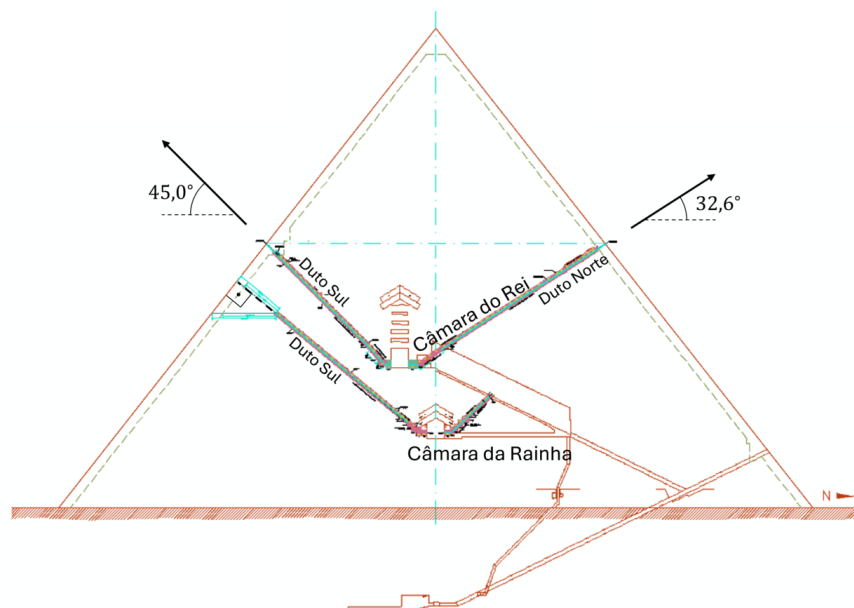



---

242
827
15.3k


A publicação contesta o modelo mais aceito para a dinâmica terrestre, o qual prevê a precessão dos equinócios com período de 26.000 anos, e a variação da obliquidade da eclíptica, atualmente decrescendo à taxa de 47 segundos de arco por século. Para isso, cita a pedra da janela ( $\varphi = 28^{\circ}01' S$ ,  $\lambda = 31^{\circ}08' O$ ), em Garopaba (SC), onde uma fenda se alinha com o nascer do Sol no solstício de inverno do hemisfério sul. Além disso, argumenta por um suposto alinhamento das pirâmides de Gizé ( $\varphi = 29^{\circ}59' N$ ,  $\lambda = 31^{\circ}08' L$ ) com o cinturão de Órion.

No entanto, quando falamos de “alinhamento das pirâmides”, nos referimos a alinhamentos em estruturas internas desses monumentos. Por exemplo, os dutos da Pirâmide de Quéops estão precisamente sobre o eixo norte-sul:



Representação da Pirâmide de Quéops, adaptado de *Upuaut Project*

Acredita-se que essa pirâmide tenha sido construída pelos egípcios há cerca de 4600 anos. Já a pedra da janela tem origem incerta, localizada numa região que sofreu diversas ocupações ao longo da História: povos Sambaquis (6000 a 3000 anos atrás), Jê (3000 a 800 anos atrás) e Guarani (800 a 400 anos atrás), antes da ocupação colonial. Na base da rocha, outros vestígios arqueológicos são tecnologias associadas especificamente aos Sambaquis, sugerindo uma origem para a pedra da janela.

Com base nas informações e em seus conhecimentos, julgue as assertivas a seguir como verdadeiras ou falsas, justificando cada resposta. (5 pontos por item)

- I - Na época de sua construção, o duto norte da câmara do rei teria divergido mais de  $3^\circ$  da culminação superior de Thuban ( $\alpha$ -Dra,  $\delta = 64^\circ 20' 46''$ ,  $\alpha = 14^h 04^m 34^s$ ), dificultando a hipótese de alinhamento.
- II - Se a Pedra da Janela realmente for de origem Sambaqui, o alinhamento solsticial original não seria aquele sugerido pela foto (Sol no centro), mas sim uma configuração deslocada (como a tangência). Por outro lado, se o alinhamento original tiver sido preservado, então a origem deve ser mais recente, como a ocupação Guarani.
- III - Nenhum dos monumentos tem necessariamente finalidade astronômica: a geometria dos dutos pode ser associada a soluções de engenharia, como a ortogonalidade às faces, o nivelamento das alturas de saída, e a inclinação em  $45^\circ$ . De forma análoga, o alinhamento da pedra da janela pode ser interpretado como uma coincidência estatística, dada a abundância de formações rochosas no litoral.

- IV - Metodologicamente, o procedimento mais rigoroso para validar o alinhamento astronômico seria determinar a época em que Thuban se alinha perfeitamente com o duto norte da câmara do rei, e então, fixada essa época, procurar por estrelas que se alinhem com os demais dutos.
- V - É impossível que as três estrelas representadas na primeira imagem sejam realmente o cinturão de Órion. Na melhor das hipóteses, são outras três estrelas em alinhamento, isso se não for uma montagem.
- VI - Mesmo supondo que existam três estrelas que se alinhem com as três pirâmides, essas estrelas poderiam ter uma configuração distinta (dentro de uma certa margem) e ainda seria possível encontrar um local e um horário para forçar um alinhamento aparente de azimute.

**Dica:** Um caminho possível seria argumentar pela quantidade de graus de liberdade em comparação ao número de equações, sem precisar resolver essas equações ou analisar em que domínio são válidas. No entanto, você pode seguir qualquer outro caminho que preferir, desde que consiga provar se a afirmação é verdadeira ou falsa.

**Solução:**

I - *Na época de sua construção, o duto norte da câmara do rei teria divergido mais de  $3^\circ$  da culminação superior de Thuban ( $\alpha$ -Dra,  $\delta = 64^\circ 20' 46''$ ,  $\alpha = 14^h 04^m 34^s$ ), dificultando a hipótese de alinhamento.*

**Falso.** Para calcular a altura de culminação de Thuban, antes temos que estimar sua declinação há 4600 anos. Para isso, utilizaremos os seguintes triângulos esféricos:



$$L' = L - 360^\circ \cdot \frac{4600}{26000} = 94,0^\circ$$

Já a obliquidade da eclíptica:

$$\varepsilon' = \varepsilon + 47''/\text{século} \cdot 4,6 \text{ séculos} = 24,05^\circ$$

Assim, pela lei dos cossenos:

$$\sin(\delta') = \sin(b) \cos(\varepsilon') + \cos(b) \sin(\varepsilon') \cos(L' - 90^\circ)$$

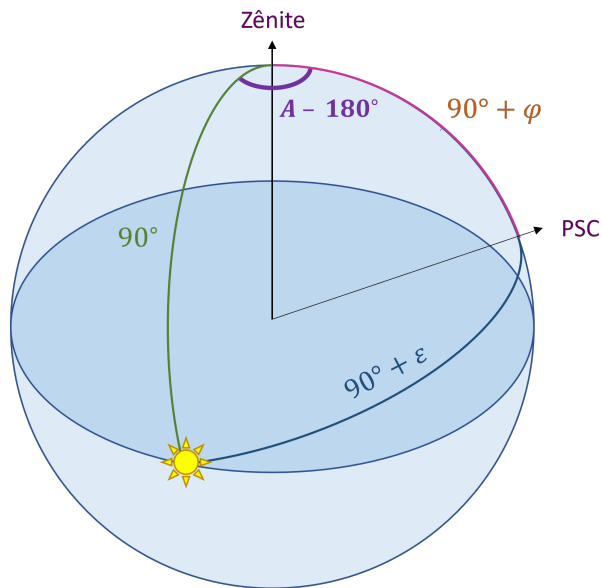
Como  $-90^\circ \leq \delta' \leq 90^\circ$ :

$$\delta' = 88,3^\circ$$

A altura de culminação, portanto, era  $h = \varphi + 90^\circ - \delta' = 31,7^\circ$ . Mesmo que nossa estimativa carregue incertezas (consideramos os efeitos lineares e desprezamos alterações provocadas, por exemplo, pela interação gravitacional da Terra com os demais corpos, ou pelo movimento próprio da estrela), os principais fatores de alteração foram considerados, e não esperamos que correções de ordem menor agreguem o suficiente para atingir o erro de  $3^\circ$ .

II - *Se a Pedra da Janela realmente for de origem Sambaqui, o alinhamento solsticial original não seria aquele sugerido pela foto (Sol no centro), mas sim uma configuração deslocada (como a tangência). Por outro lado, se o alinhamento original tiver sido preservado, então a origem deve ser mais recente, como a ocupação Guarani.*

**Verdadeiro.** O azimute do nascer do Sol pode ser calculada por aplicação da lei dos cossenos no triângulo de posição:



$$\sin(\delta) = \sin(h) \sin(\varphi) + \cos(h) \cos(\varphi) \cos(A)$$

Para  $h = 0$ :

$$\cos(A) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)}$$

Por se tratar de um nascer, o azimute do Sol está no intervalo  $0 < A < 180^\circ$ :

$$A = \cos^{-1} \left( \frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)} \right)$$

Como se trata do solstício de inverno do hemisfério sul, a declinação do Sol será a própria obliquidade da eclíptica. Podemos calcular a obliquidade para cada um dos períodos considerados e substituir na fórmula:

Anos atrás	$\epsilon$	$A$	$\Delta A$
0	$23,45^\circ$	$62,65^\circ$	-
400	$23,50^\circ$	$62,59^\circ$	$-0,06^\circ$
800	$23,55^\circ$	$62,53^\circ$	$-0,12^\circ$
3000	$23,84^\circ$	$62,18^\circ$	$-0,47^\circ$
6000	$24,23^\circ$	$61,72^\circ$	$-0,94^\circ$

Percebemos que a diferença de azimute no período Sambaqui vai desde valores próximos ao diâmetro solar até duas vezes o diâmetro solar. Observando a imagem, é impossível que o Sol estivesse no centro da fenda,

mas a condição de tangência é admissível. Já na ocupação Guarani, a posição do Sol era deslocada por um décimo até cerca de um quinto de seu diâmetro, o que é razoável com um alinhamento dentro da fenda.

III - *Nenhum dos monumentos tem necessariamente finalidade astronômica: a geometria dos dutos pode ser associada a soluções de engenharia, como a ortogonalidade às faces, o nivelamento das alturas de saída, e a inclinação em  $45^\circ$ . De forma análoga, o alinhamento da pedra da janela pode ser interpretado como uma coincidência estatística, dada a abundância de formações rochosas no litoral.*

**Verdadeiro.** Não é necessário que os dutos da pirâmide ou as fendas no litoral catarinense possuam qualquer tipo de significado astronômico. Os dutos na câmara da rainha, por exemplo, podem ter sido projetados perpendiculares às paredes apenas para reduzir a sua extensão.

Uma finalidade similar pode ter sido planejada para os dutos na câmara do rei. Perceba que ela é deslocada para o sul, mas, ainda assim, as aberturas de saída de seus dutos são alinhadas verticalmente. Ainda, repare que, em média,  $(45^\circ + 32,6^\circ)/2 = 36,8^\circ$ , o que é próximo da inclinação dos dutos na câmara da rainha. Isso pode sugerir que um arquiteto tenha priorizado o alinhamento vertical e, em segunda instância, a menor extensão possível. No entanto, sem ferramentas de cálculo diferencial, ele talvez tenha tentado somar desvios angulares em sentidos opostos à solução de caminho mínimo (duto perpendicular), eventualmente até aproximando  $45^\circ$  para facilitar as contas. Essa explicação, é claro, é especulativa, mas revela a insuficiência do que foi apresentado para estabelecer uma conclusão única e assertiva.

Já a pedra da janela, como a assertiva aponta, pode ser uma formação natural que coincide de alinhar com o solstício justo na nossa época. O azimute do nascer solsticial é dinâmico, e varre uma faixa suficientemente alta ao longo do tempo para esperarmos que algumas formações naturais vão se alinhar precisamente com ele em diversas épocas.

IV - *Metodologicamente, o procedimento mais rigoroso para validar o alinhamento astronômico seria determinar a época em que Thuban se alinha perfeitamente com o duto norte da câmara do rei, e então, fixada essa época, procurar por estrelas que se alinhem com os demais dutos.*

**Falso.** Ao procurar por um período ideal e por estrelas que se alinhem, o método induz viés da confirmação. Primeiro, precisamos lembrar que, similarmente ao item anterior, a fauna celeste é dinâmica e variada, com a possibilidade de alinhamentos ocorrendo por coincidência. Isso é particularmente mais provável porque os dutos não estão rotulados, e estão apontados apenas no eixo norte-sul, o que permite estrelas de qualquer

ascensão reta serem identificadas como alinhamentos. Em segundo lugar, existe uma incerteza associada à astrometria em longos períodos, provocada, por exemplo, por interações gravitacionais com outros planetas ou pela não-linearidade dos fenômenos.

Sendo assim, ao “caçar” uma data e depois “caçar” estrelas, com graus de liberdade dentro do modelo e sem tanta clareza do que procuramos, o método induz correlações que não necessariamente sejam associadas à causalidade. A abordagem mais rigorosa seria uma análise multifatorial e multidisciplinar, construindo diversas evidências e inferências que conversem entre si (por exemplo, registros escritos, comparação com outras simbologias funerárias, datações por métodos independentes, etc.), formando uma visão macroscópica coesa e emaranhada.

V - *É impossível que as três estrelas representadas na primeira imagem sejam realmente o cinturão de Órion. Na melhor das hipóteses, são outras três estrelas em alinhamento, isso se não for uma montagem.*

**Verdadeiro.** As Três Marias são estrelas muito próximas; a separação angular entre elas é na casa de 2 a 3°. Isso impõe uma escala na figura. Para que as pirâmides fossem vistas em ângulos tão pequenos, seria necessário uma fotografia de longa distância com lentes de aumento, o que proporcionaria uma vista frontal, contradizendo a perspectiva da figura. Além disso, a altura das estrelas em relação ao horizonte é comparável à distância angular entre elas, e como as Três Marias têm declinações muito baixas, estamos no cruzamento entre o Equador e o Horizonte. Em Gizé, isso deveria acontecer num ângulo de 60°, mas, na imagem, as estrelas estão consideravelmente horizontalizadas, o que seria típico de uma região polar. Sendo assim, é impossível que as estrelas sejam o Cinturão de Órion.

Na verdade, trata-se de uma montagem para uma capa de notícia sensacionalista (que, inclusive, era falsa) sobre um alinhamento das pirâmides com Mercúrio, Vênus e Saturno. Ironicamente, para que fosse Mercúrio na imagem, o Sol deveria estar suficientemente abaixo do horizonte para não haver crepúsculo, e, para isso, a Eclíptica deveria estar verticalizada, o que é incompatível com a suposta posição dos demais planetas.

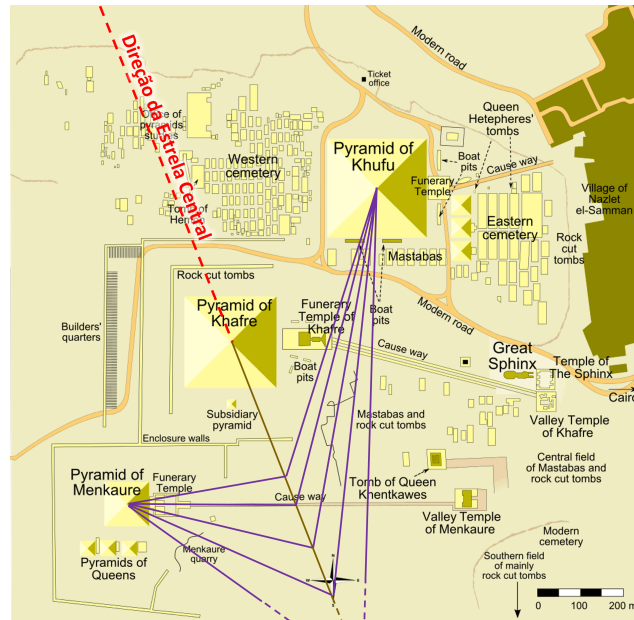
Infelizmente, essa imagem viralizou e hoje é um dos primeiros resultados quando buscamos por “alinhamento das pirâmides”, contaminando o imaginário popular com desinformação.

VI - *Mesmo supondo que existam três estrelas que se alinhem com as três pirâmides, essas estrelas poderiam ter uma configuração distinta (dentro de uma certa margem) e ainda seria possível encontrar um local e um horário para forçar um alinhamento aparente de azimute.*

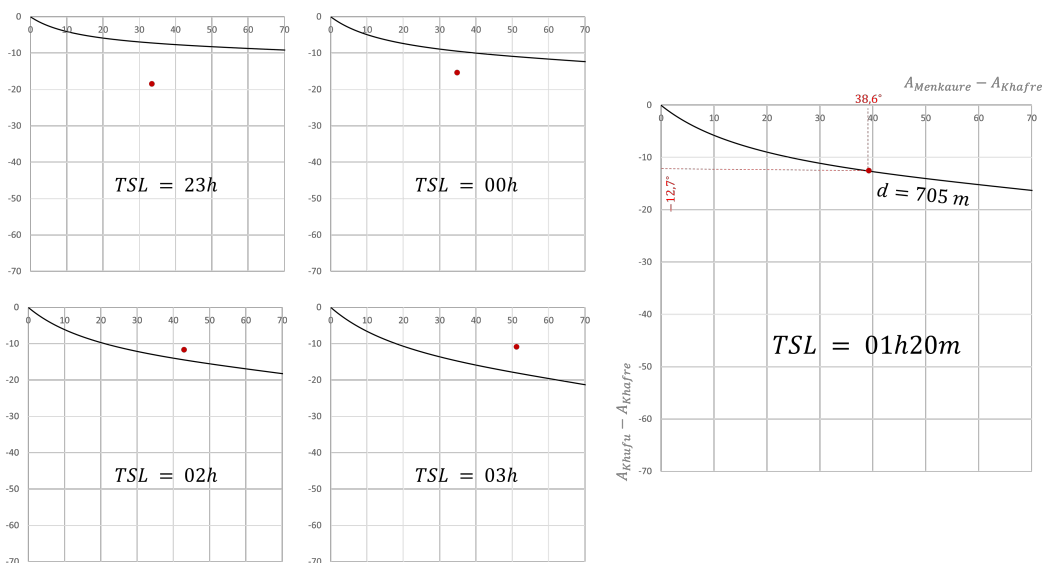
**Verdadeiro.** Vamos começar supondo que escolhemos três estrelas e um horário  $t_0$  para observação. Precisamos alinhar a estrela do meio à pirâmide central, o que restringe nossa movimentação à uma reta. Se nos posicionarmos a uma certa distância, temos essa configuração:



Perceba que, fixando o azimute, estamos restritos a uma reta, ou seja, existe um conjunto de combinações  $(A_2 - A_1, A_2 - A_3)$  possíveis a depender da distância. Se tivéssemos escolhido um horário  $t_2$ , o azimute da estrela central seria distinto, e estaríamos presos dentro de uma nova reta, com um novo conjunto de pares  $(\Delta A_1, \Delta A_2)$ .



Para alinhar os azimutes, basta escolher um horário  $t$  em que as diferenças de azimute das estrelas escolhidas pertençam ao intervalo de diferenças possíveis.



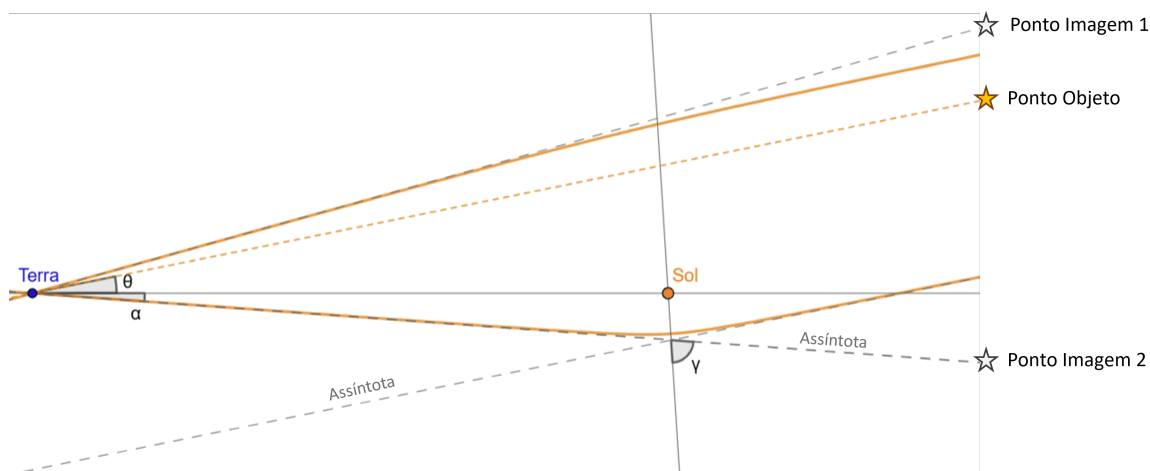
Isso significa que, se a configuração das estrelas fosse ligeiramente distinta, esperaríamos uma pequena alteração no horário  $t$  que fornecesse um novo cruzamento. No entanto, não significa que qualquer tripla de estrelas possa ser utilizada para uma composição fotográfica. É possível

que o alinhamento ocorra quando alguma estrela esteja oculta: abaixo do horizonte ou atrás de sua pirâmide. Por outro lado, alguma estrela pode estar muito alta, dificultando a percepção de seu alinhamento e rompendo a harmonia da foto. O alinhamento também pode ocorrer quando as estrelas estejam praticamente verticais (ou com estrelas muito próximas, como foi o caso da questão), o que requer uma foto a longas distâncias, mantendo todas as pirâmides aglutinadas. Por fim, a geometria do alinhamento também pode requerer que o observador esteja entre as pirâmides, de modo que uma delas fique atrás do fotógrafo e não saia na fotografia.

**7. Lente Gravitacional (30 pontos)** Seu Isaías Nilson foi uma dos grandes físicos brasileiros esquecidos na memória do tempo. No início do século XVIII, o cientista explorava um modelo no qual a luz é composta de pequenas partículas de baixa massa. Um dos efeitos interessantes dessa abordagem é a ocorrência de lentes gravitacionais.

Se os raios de luz caminhassem em linha reta, a fonte seria vista sob um certo ângulo  $\theta$ , conforme marcado na figura como ponto objeto. No entanto, quando os raios paralelos entram em trajetória hiperbólica ao redor de um corpo massivo, o objeto começa a produzir duas imagens, conforme representado na figura.

Para testar seu modelo, Nilson decide observar o eclipse solar de 15 de agosto de 1719 no distrito de Piraí, na cidade de Bagé (RS). Para todos os itens, considere  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s a velocidade da luz quando está muito distante do Sol, e utilize uma abordagem de mecânica clássica, respeitando o modelo proposto. Considere apenas os efeitos gravitacionais do Sol, desprezando os da Terra e da Lua.



(a) **(3 pontos)** Determine o semi-eixo real ( $a$ ) das duas trajetórias. Compare esse valor com o raio do Sol.

- (b) **(15 pontos)** O ângulo  $\gamma$  representa a inclinação das assíntotas em relação ao eixo real na trajetória do segundo ponto imagem. Determine  $\tan(\gamma)$  em função da distância  $d$  entre a Terra e o Sol, do semi-eixo real  $a$  e do ângulo  $\theta$ . Deixe sua resposta na forma algébrica, sem substituir essas três variáveis.
- (c) **(8 pontos)** Determine o desvio angular  $\alpha$  do segundo ponto imagem, em função de  $\tan(\gamma)$ , da distância  $d$ , da massa  $M$  do Sol, da velocidade  $c$  e de constantes físicas. Deixe sua resposta na forma algébrica.
- (d) **(4 pontos)** Na data do eclipse, o Sol estava a  $3^{\circ}47'$  de Regulus ( $\alpha$ -Leo). Se Nilson fosse um pouco mais sortudo, o eclipse teria ocorrido no dia 19, e Regulus estaria a  $27'$  de arco do Sol. Determine o desvio angular  $\alpha$  do segundo ponto imagem para ambos os casos. Compare suas respostas com o raio angular do Sol.

### Solução:

1. O semi-eixo maior da órbita pode ser encontrado pela energia:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{GM}{2a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{GM}{c^2} \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ m}$$

o que é muito menor do que o raio do Sol. Isso significa que a excentricidade da segunda trajetória deve ser muito alta para que a partícula não caia dentro do Sol, pois a máxima aproximação  $a(e - 1)$  deve ser maior que o raio solar.

2. Da geometria da hipérbole, sabemos que

$$\begin{cases} \tan(\gamma) = \sqrt{e^2 - 1} \\ \cos(\gamma) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Pela equação polar das cônicas, sabemos que:

$$d = \frac{a \cdot (e^2 - 1)}{1 + e \cdot \cos(\gamma + \theta)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{a \cdot \tan^2(\gamma)}{1 + \frac{\cos(\gamma + \theta)}{\cos(\gamma)}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} \cdot (\cos(\gamma) + \cos(\gamma + \theta)) = \tan(\gamma) \cdot \text{sen}(\gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} \cdot (\cos(\gamma) + \cos(\gamma)) \cdot \cos(\theta) - \text{sen}(\gamma) \cdot \text{sen}(\theta) = \tan(\gamma) \cdot \text{sen}(\gamma)$$

Dividindo a equação por  $\cos(\gamma)$  obtemos:

$$\Rightarrow \frac{d}{a} \cdot (1 + \cos(\theta) - \tan(\gamma) \cdot \text{sen}(\theta)) = \tan^2(\gamma)$$

$$\tan^2(\gamma) + \frac{d}{a} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \tan(\gamma) - \frac{d}{a} \cdot (1 + \cos(\theta)) = 0$$

$$\tan(\gamma) = \frac{-\frac{d}{a} \cdot \text{sen}(\theta) \pm \sqrt{\frac{d^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\theta) + 4 \cdot \frac{d}{a} \cdot (1 + \cos(\theta))}}{2}$$

Como  $\gamma$  pertence ao primeiro quadrante, temos:

$$\tan(\gamma) = \sqrt{\frac{d^2}{4a^2} \cdot \text{sen}^2(\theta) + \frac{d}{a} \cdot (1 + \cos(\theta))} - \frac{d}{2a} \cdot \text{sen}(\theta)$$

3. Pela geometria da hipérbole, o parâmetro de impacto é dado por:

$$b = \tan(\gamma) \cdot a = \tan(\gamma) \cdot \frac{GM}{c^2}$$

O momento angular específico, portanto:

$$h = b \cdot c = \tan(\gamma) \cdot \frac{GM}{c}$$

Quando a partícula estiver na vizinhança da terra, sua velocidade será:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{d} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{c^2 + \frac{2GM}{d}}$$

Desse modo, o momento angular específico será:

$$h = v \cdot d \cdot \text{sen}(\alpha) = \sqrt{c^2 d^2 + 2GMd} \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Desse modo:

$$\tan(\gamma) \cdot \frac{GM}{c} = \sqrt{c^2 d^2 + 2GMd} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{GM \cdot \tan(\gamma)}{c \cdot \sqrt{c^2 d^2 + 2GMd}}$$

Como  $\alpha$  pertence ao primeiro quadrante:

$$\alpha = \text{sen}^{-1} \left( \frac{GM \cdot \tan(\gamma)}{c \cdot \sqrt{c^2 d^2 + 2GMd}} \right)$$

4. Substituindo os dados, obtemos  $\alpha = 62$  mas na primeira situação, e  $\alpha = 520$  mas na segunda. Ambos os valores são notavelmente menores que o disco solar.

Além disso, podemos calcular a excentricidade a partir de  $\tan(\gamma)$  e a distância de periélio a partir da excentricidade e do semi-eixo real.

$$d_p = a \cdot (e - 1) = a \cdot \left( \sqrt{\tan^2(\gamma) + 1} - 1 \right)$$

Para ambos os casos o periélio é menor do que o raio solar (periélio de 43 km no primeiro caso e 370 km no segundo), de modo que o feixe seria absorvido pelo Sol antes de chegar na Terra.

Nesse sentido, o segundo ponto imagem não é adequado para observar o fenômeno de lente gravitacional.

- 8. Modela Aí: Avermelhamento (40 pontos)** Considere uma nuvem interestelar idealizada como um prisma homogêneo de altura  $L$ , atravessada por luz estelar que incide perpendicularmente à sua face frontal. Queremos deduzir, a partir de um modelo físico simples, como essa nuvem modifica o espectro da estrela e produz uma curva de avermelhamento.

No interior desse meio, a luz pode ser absorvida; esse processo é descrito por um coeficiente  $\alpha(\nu)$ , que representa a *densidade de probabilidade de absorção*, ou seja,  $\alpha(\nu) \propto dp/ds$ , em que  $dp/ds$  é a razão entre a probabilidade de interação com o meio e o caminho percorrido pela luz, válido apenas para pequenas distâncias. O coeficiente  $\alpha(\nu)$  segue uma lei de potência da forma:

$$\alpha(\nu) = \alpha_0 \nu^p,$$

onde  $p = 1.20$  e  $\alpha_0 = 7.71 \cdot 10^{-35} \text{ m}^{-1} \text{ Hz}^{-1.2}$  é uma constante de normalização.

Suponha que cada fóton possa atravessar parte da nuvem sem interagir e que, se

for absorvido em qualquer ponto do trajeto, está definitivamente perdido para o observador.

- (a) **(5 pontos)** Prove que razão entre a intensidade luminosa que escapa da nuvem  $I$  e a intensidade que incide inicialmente na fonte  $I_0$  é dada por

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha L}.$$

- (b) **(5 pontos)** Seja  $A_\nu$  a diferença entre a magnitude observada e a magnitude ideal (sem extinção) para um objeto cuja luz atravessou a nuvem e chegou até o observador. Calcule o valor da razão entre a extinção e o avermelhamento

$$R_V = \frac{A_V}{A_B - A_V}$$

entre as bandas visual e azul.

**Dados:**  $\nu_V = 5.45 \times 10^{14}$  Hz e  $\nu_B = 6.82 \times 10^{14}$  Hz.

- (c) **(15 pontos)** Assuma que o espectro inicial da estrela segue um perfil de corpo negro com temperatura  $T$  de acordo com a radiância espectral de Planck, dada pela expressão

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

Depois da extinção, o pico de intensidade ocorre em uma frequência mais avermelhada que a frequência de pico original. Queremos provar que, mesmo para temperaturas muito altas ( $kT \gg h\nu$ ), a frequência de pico não pode ser tão alta quanto se queira. Existe um valor limite,  $\nu_{lim}$ , que a frequência de pico não pode ultrapassar. Deduza a expressão de  $\nu_{lim}$ .

- (d) **(15 pontos)** Considere três bandas hipotéticas, 1, 2 e 3, nas quais se medem as magnitudes  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ . Todas as bandas são estreitas, restringindo-se à vizinhança de suas frequências centrais  $\nu_1 = 5,54 \cdot 10^{14}$  Hz,  $\nu_2 = 6,74 \cdot 10^{14}$  Hz e  $\nu_3 = 8,22 \cdot 10^{14}$  Hz. Por simplicidade, cada banda estabelece a magnitude de Vega como sua referência de magnitude zero, ou seja, a magnitude de Vega (sem extinção) na banda 1 é a referência de magnitude nula nessa respectiva banda; o mesmo vale para as bandas 2 e 3.

Uma estrela foi medida nessas três bandas, e os seguintes resultados foram observados:  $m_1 = 10,3$ ,  $m_2 = 12,1$  e  $m_3 = 14,3$ .

Estime a temperatura  $T$ , em Kelvin, a distância até a estrela  $L$ , em parsec, e o raio da estrela  $R$ , em raio solares. Para tal, adote que  $h\nu \gg kT$  para todas as frequências medidas.

**Dado:** Considere que Vega apresenta temperatura efetiva  $T_V = 9600$  K, raio  $R_V = 2,36 R_\odot$  e está a uma distância  $L_V = 7,66$  parsec.

**Solução:**

- a) Dividindo o caminho  $s$  em  $n$  trechos de comprimento infinitesimal, a probabilidade de um fóton interagir em um trecho  $\Delta L$  é  $\alpha \Delta L = \alpha \frac{L}{n}$ . Assim, a probabilidade de não haver interação nesse intervalo é  $1 - \alpha \frac{L}{n}$ . Como as interações são eventos independentes, a probabilidade total de não interação é

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\alpha L}{n} \right)^n,$$

que corresponde à definição da exponencial. Portanto,

$$p = e^{-\alpha L}.$$

Pela definição de probabilidade, apenas uma fração  $e^{-\alpha L}$  dos fótons atravessa a nuvem sem interagir. Assim,

$$\boxed{\frac{I_{\text{obs}}}{I} = e^{-\alpha L}}.$$

- b) Aplicando diretamente a equação de Pogson:

$$\Delta A_\nu = -2.5 \log \left( \frac{I_{\text{obs}}}{I} \right) \Rightarrow \Delta A_\nu = 2.5 \log (e^{\alpha_0 L \nu^p}),$$

de onde obtemos

$$\Delta A_\nu = 2.5 \log(e) L \cdot \alpha_0 \nu^p$$

Como  $p > 1$ , a diferença de magnitudes cresce mais rapidamente com a frequência, deslocando o balanço relativo entre o azul e o visível. O efeito é suficientemente forte para que o espectro observado seja sistematicamente enviesado, fazendo com que mesmo estrelas intrinsecamente quentes apresentem temperaturas aparentes menores.

Aplicando esse resultado na expressão para  $R_V$ ,

$$R_V = \frac{\nu_V^p}{\nu_B^p - \nu_V^p} \Rightarrow \boxed{R_V = 3.24}.$$

**Observação:** O valor obtido se alinha ao intervalo  $3.10 < R_V < 3.30$  característico do meio interestelar difuso da Via Láctea, indicando que o modelo reproduz um ambiente bem descrito por uma população de grãos relativamente uniforme. Em contraste, regiões mais densas podem apresentar  $R_V$  significativamente maior (até  $\sim 7$ ), o que reflete a presença de grãos maiores resultantes de processos de crescimento e coagulação.

c) **Solução Esperada:**

Para  $kT \gg h\nu$  podemos escrever:

$$\left| \frac{h\nu}{kT} \right| \ll 1 \Rightarrow e^{h\nu/kT} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

Sendo assim, a intensidade observada será

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} e^{-\alpha_0 \nu^p L}$$

No limite,

$$I_\nu(T \rightarrow \infty) \approx \frac{2h\nu_{lim}^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu_{lim}} e^{-\alpha_0 \nu_{lim}^p L}$$

$$I_\nu(T) \approx \frac{2kT \nu^2}{c^2} \cdot e^{-\alpha_0 \nu^p L}$$

Para encontrar a frequência de pico, é necessário derivar a expressão e igualar a zero:

$$\frac{4kT \nu_{lim}}{c^2} \cdot e^{-\alpha_0 \nu_{lim}^p L} - \frac{2kT \nu_{lim}^2}{c^2} \cdot \alpha_0 p \nu_{lim}^{p-1} L \cdot e^{-\alpha_0 \nu_{lim}^p L} = 0$$

$$\Rightarrow 2 - \nu_{lim} \cdot \alpha_0 p \nu_{lim}^{p-1} L = 0$$

$$\Rightarrow \nu_{lim} = \left( \frac{2}{\alpha_0 p L} \right)^{1/p}$$

**Solução Rigorosa:**

Vamos começar estudando a função:

$$f(x) = x^a (e^x - 1)^{-1} e^{bx^c}$$

Seu máximo ocorre anulando a derivada, o que nos leva à seguinte equação (faça a derivada ou confira com Wolfram Alpha, Matlab ou outro recurso computacional):

$$\frac{a}{x} - (1 - e^{-x})^{-1} + bcx^{c-1} = 0.$$

Já a intensidade observada é dada por

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} e^{-\alpha_0 \nu^p L}$$

Vamos comparar esse resultado com a expressão anterior:

$$f(x) = x^a (e^x - 1)^{-1} e^{bx^c}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^a \cdot \frac{1}{e^x - 1} \cdot e^{bx^c}$$

Para  $x = h\nu/kT$ , temos:

$$f(h\nu/kT) = \frac{h^a \nu^a}{k^a T^a} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \exp\left(b \cdot \frac{h^c \nu^c}{k^c T^c}\right)$$

Seja  $b = -\alpha_0 L \cdot k^c T^c / h^c$ ,  $c = p$ ,  $a = 3$ :

$$f(h\nu/kT) = \frac{h^3 \nu^3}{k^3 T^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \exp(-\alpha_0 L \cdot \nu^p)$$

Podemos definir:

$$g(\nu) = \frac{2k^3 T^3}{h^2 c^2} \cdot f(h\nu/kT) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \exp(-\alpha_0 L \cdot \nu^p)$$

O valor de  $\nu$  que maximiza  $g(\nu)$  é o mesmo que maximiza  $f$ . Podemos utilizar a solução fornecida:

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{1 - e^{-x}} - \alpha_0 L \frac{k^p T^p}{h^p} \cdot p \cdot x^{p-1} = 0$$

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = 3 - \alpha_0 L \frac{k^p T^p}{h^p} \cdot p \cdot x^p$$

Lembrando que  $x = h\nu/kT$ , temos:

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = 3 - \alpha_0 p L \nu^p.$$

A função  $\frac{x}{1 - e^{-x}}$  é monótona crescente e seu valor mínimo físico ocorre em  $x \rightarrow 0$ , valendo 1. Assim,

$$3 - \alpha_0 p L \nu^p > 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_{max} < \left(\frac{2}{\alpha_0 p L}\right)^{1/p}.$$

Portanto,

$$\nu_{lim} = \left( \frac{2}{\alpha_0 p L} \right)^{1/p}.$$

O resultado é surpreendente: independentemente da temperatura intrínseca da estrela, a frequência característica observada não pode exceder o limite imposto pela absorção do meio. Esse limite atua como uma barreira espectral fundamental, definida não pela fonte emissora, mas pelas propriedades do próprio meio que a luz atravessa.

- d) Pelo sistema de magnitudes de Pogson, a magnitude observada na banda centrada em  $\nu_i$

$$m_i = -2.5 \log \left[ \left( \frac{R}{R_V} \right)^2 \left( \frac{L}{L_V} \right)^{-2} \frac{e^{\frac{h\nu_i}{kT_V}} - 1}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1} e^{-\alpha_0 L \nu_i^p} \right].$$

Subtraindo as magnitudes nas bandas 1 e 2, segue

$$\frac{e^{\frac{h\nu_2}{kT_V}} - 1}{e^{\frac{h\nu_1}{kT_V}} - 1} 10^{-0.4(m_1 - m_2)} = \frac{e^{\frac{h\nu_2}{kT}} - 1}{e^{\frac{h\nu_1}{kT}} - 1} e^{-\alpha_0 L (\nu_1^p - \nu_2^p)}.$$

Elevando a primeira equação à potência  $-\frac{\nu_1^p - \nu_3^p}{\nu_1^p - \nu_2^p}$  e multiplicando pela equação análoga para as bandas 1 e 3, o termo exponencial contendo  $L$  se cancela identicamente. Obtemos assim uma equação que depende apenas da temperatura:

$$F(T) = 10^{0.4(m_1 - m_2) \frac{\nu_1^p - \nu_3^p}{\nu_1^p - \nu_2^p} - 0.4(m_1 - m_3)} F(T_V),$$

onde definimos

$$F(x) = \left( \frac{e^{\frac{h\nu_2}{kx}} - 1}{e^{\frac{h\nu_1}{kx}} - 1} \right)^{-\frac{\nu_1^p - \nu_3^p}{\nu_1^p - \nu_2^p}} \left( \frac{e^{\frac{h\nu_3}{kx}} - 1}{e^{\frac{h\nu_1}{kx}} - 1} \right).$$

Usando que  $h\nu \gg kT$ , podemos aproximar  $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1$ . Portanto, a função aplicada em  $T$  toma a forma

$$F(T) = e^{\frac{h}{kT} \left[ (\nu_1 - \nu_2) \left( \frac{\nu_1^p - \nu_3^p}{\nu_1^p - \nu_2^p} \right) + (\nu_3 - \nu_1) \right]}.$$

Essa equação envolve apenas a incógnita  $T$  e pode ser resolvida de maneira algebricamente simples. Substituindo os valores fornecidos no enunciado, encontra-se

$$T = 3050 \text{ K}.$$

Vale ressaltar que o valor obtido para a temperatura é independente da constante de normalização  $\alpha_0$ , dependendo apenas do expoente  $p$ . Com o valor de  $T$  determinado, substituímos em qualquer uma das expressões para a diferença de magnitudes, obtemos a distância até a estrela:

$$L = 1,30 \text{ parsec}$$

Por fim, a partir dos valores obtidos, determinamos

$$R = 0,154 R_{\odot}$$

**Observação:** Na prática, o modelo adotado deve ser interpretado como uma descrição efetiva válida apenas em um intervalo espectral limitado. Para bandas fotométricas muito espaçadas, especialmente quando se atravessam diferentes regimes espectrais (infravermelho, óptico e ultravioleta), o coeficiente de absorção  $\alpha(\nu)$  deixa de ser bem descrito por uma única lei de potência. Em particular, em frequências mais altas, tornam-se relevantes efeitos associados à absorção eletrônica dos grãos de poeira, ressonâncias moleculares e à transição entre os regimes de espalhamento de Rayleigh e Mie, alterando a dependência funcional de  $\alpha(\nu)$  com a frequência.

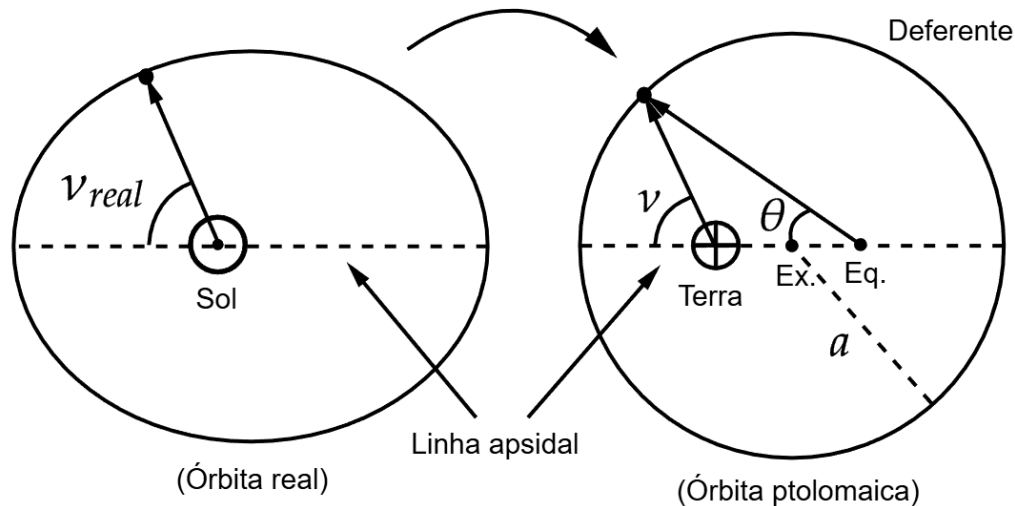
Descrições mais realistas da extinção interestelar são fornecidas por leis empíricas como a parametrização de Cardelli-Clayton-Mathis (CCM). Nesse formalismo, a forma da curva de extinção varia sistematicamente com o ambiente interestelar, refletindo mudanças na distribuição de tamanhos e na composição dos grãos. Assim, os parâmetros  $\alpha_0$  e  $p$  introduzidos neste modelo devem ser entendidos como quantidades fenomenológicas efetivas, representativas de um meio interestelar específico, e não como constantes universais.

- 9. Modela aí: Epíclios (55 pontos)** Por muitos séculos, a descrição do movimento dos astros foi baseada em modelos geocêntricos, nos quais a Terra ocupava uma posição central e imóvel.

No modelo ptolomaico, o movimento do planeta é descrito pela combinação de dois círculos: o deferente, círculo com centro chamado *excêntrico*, que é deslocado em relação à Terra, e o epíclio, círculo cujo centro se move ao longo do deferente. Para reproduzir corretamente as observações, o centro do epíclio não percorre o deferente de forma uniforme em relação ao seu centro, mas sim com velocidade angular constante em relação a um ponto deslocado, chamado *equante*.

O deferente tem raio  $a$ , igual ao semieixo maior da órbita real do corpo em

torno do Sol, o excêntrico está uma distância  $c = ae$  da Terra, em que  $e$  é a excentricidade da órbita verdadeira. O equante é definido como o ponto oposto à Terra em relação ao excêntrico. Assume-se que, no periélio, o corpo secundário, a Terra, o excêntrico e o equante estejam todos colineares. Seja  $\nu$  o ângulo entre a reta Terra-equante e o vetor posição do corpo medido a partir da Terra, e seja  $\theta$  o ângulo entre a reta Terra-equante e o vetor posição do corpo medido pelo equante, de forma que  $\nu = \theta = 0^\circ$  no periélio.



- (12 pontos) Obtenha a anomalia excêntrica  $E$  como função da anomalia média  $M$  e  $e$ , mantendo termos até primeira ordem em  $e$ .
- (12 pontos) Obtenha a anomalia verdadeira real  $\nu_{\text{real}}$  como função da anomalia média  $M$  e  $e$ , mantendo termos até primeira ordem em  $e$ .
- (22 pontos) Expresse a anomalia verdadeira do sistema ptolomaico  $\nu$  em função de  $e$  e  $\theta$ .
- (6 pontos) Assumindo que  $\theta$  varia uniformemente no tempo, determine a expressão para  $\theta(M, e)$  que minimiza o erro  $\Delta = \nu_{\text{real}} - \nu$  considerando a aproximação até primeira ordem em  $e$ .
- (3 pontos) Descreva o movimento do Sol, dos planetas interiores e dos planetas exteriores, vistos a partir da Terra, utilizando os conceitos construídos de deferente, equante, epíciclo e excêntrico, indicando quais conceitos são necessários para cada movimento ocorrer.

**Solução:**

- Para  $e \ll 1$  a equação de Kepler

$$M = E - e \sin E$$

implica que a diferença entre a anomalia média e a anomalia excêntrica é pequena,

$$M - E = -e \sin E \ll 1.$$

Escrevemos então

$$E = M + eE_1,$$

onde  $eE_1 \ll 1$ . Substituindo na equação de Kepler,

$$eE_1 = e \sin(M + eE_1).$$

Desenvolvendo o termo trigonométrico, aplicado as aproximações do enunciado e descartando termos de ordem superior a  $e$ , chegamos em

$$E_1 = \sin M.$$

Sendo assim, a anomalia excêntrica pode ser expressa como

$$\boxed{E = M + e \sin M}.$$

- (b) Usando a expressão para  $E$  desenvolvida no item anterior, aplicando as aproximações dadas no enunciado e descartando termos de ordem superior a  $e^2$ , chegamos em

$$\cos E = \cos M - e \sin^2 M.$$

Pela relação entre a anomalia excêntrica e a anomalia verdadeira, obtemos

$$\cos \nu_{\text{real}} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Utilizando novamente as aproximações do enunciado, conseguimos

$$\cos \nu_{\text{real}} = \cos M - 2e \sin^2 M.$$

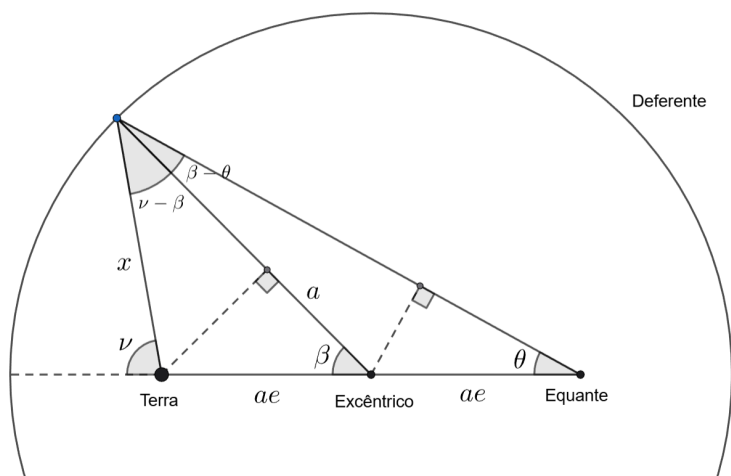
Por fim, tomando  $\nu_{\text{real}} = M + e\nu_1$  e mais uma vez aplicando as aproximações clássicas,

$$\cos M - e\nu_1 \sin M = \cos M - 2e \sin^2 M \Rightarrow \nu_1 = \sin M.$$

Portanto, a anomalia verdadeira pode ser expressa como

$$\boxed{\nu_{\text{real}} = M + 2e \sin M}.$$

- (c) Observe a geometria abaixo.



Pela definição das funções trigonométricas, obtemos

$$ae \sin \theta = a \sin(\beta - \theta).$$

Como a condição  $\frac{\pi}{2} \geq \beta - \theta \geq -\frac{\pi}{2}$  a condição de imagem da função arco seno é satisfeita, sendo assim

$$\beta = \theta + \arcsin(e \sin \theta).$$

Pela lei dos cossenos:

$$x = a\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \beta}.$$

Analogamente ao procedimento feito para expressar  $\beta$  em função de  $\theta$ , conseguimos

$$\nu = \beta + \arcsin \left( \frac{e \sin \beta}{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \beta}} \right) \Rightarrow$$

$$\nu = \theta + \arcsin(e \sin \theta) + \arcsin \left\{ \frac{e \sin[\theta + \arcsin(e \sin \theta)]}{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos[\theta + \arcsin(e \sin \theta)]}} \right\}.$$

Apenas essa expressão já era suficiente para atingir pontuação completa no item, contudo, fica como exercício ao leitor provar que essa expressão pode ser manipulada para assumir a forma sintética

$$\nu = \theta + \arcsin \left\{ e \sin \theta \sqrt{1 - \left[ \frac{e \sin \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + e^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - 2e \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + e^2(1 + 2 \sin^2 \theta)}} \right]^2} + \frac{e \sin \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + e^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - 2e \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + e^2(1 + 2 \sin^2 \theta)}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \right\}.$$

- (d) Pelo enunciado, podemos aproximar a expressão para a anomalia do modelo ptolomaico, primeiramente aproximando  $\beta$  e posteriormente aproximando  $\nu$

$$\beta = \theta + e \sin \theta, \quad \nu = \theta + 2e \sin \theta.$$

Sendo  $\Delta = \nu_{\text{real}} - \nu$  o erro associado ao modelo de Ptolomeu, pelas expressões desenvolvidas nos itens anteriores

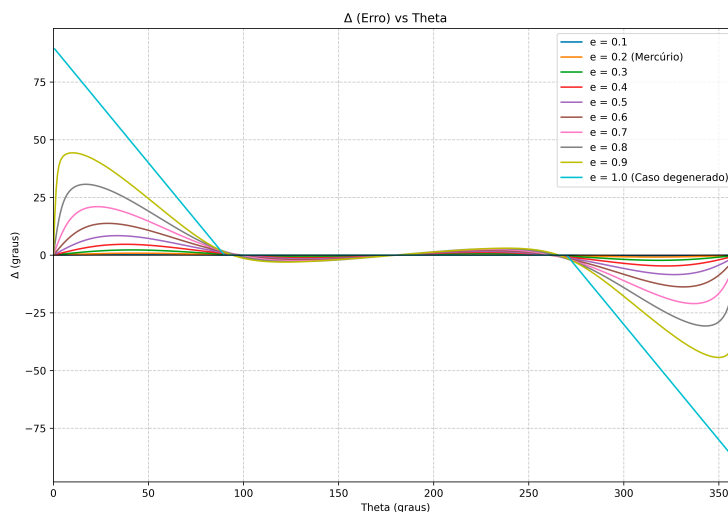
$$\Delta = M + 2e \sin M - \theta - 2e \sin \theta.$$

Intuitivamente, para minimizar o erro associado, basta tomarmos  $\theta = M$ .

**Observação:** Pela própria construção do modelo, ao impor que  $\theta$  varie linearmente no tempo e minimize  $\Delta(M)$ , garantimos automaticamente que qualquer erro da expressão obtida no modelo ptolomaico apareça apenas a partir de termos de ordem  $e^2$ .

Contudo, é importante ressaltar que a validade do modelo ptolomaico não está restrita a órbitas de pequena excentricidade. Mesmo para valores moderados de  $e$ , o erro associado permanece surpreendentemente pequeno.

Na figura abaixo, apresenta-se o gráfico do erro  $\Delta(M)$  para diferentes valores da excentricidade. Destaca-se o caso de Mercúrio, o planeta com maior excentricidade do Sistema Solar, bem como o caso degenerado no limite  $e \rightarrow 1$ .



**Observação histórica:** No Almagesto, Ptolomeu compilou e sistematizou praticamente toda a astronomia grega conhecida até sua época. A obra aborda, entre outros temas, a obliquidade da eclíptica, o movimento

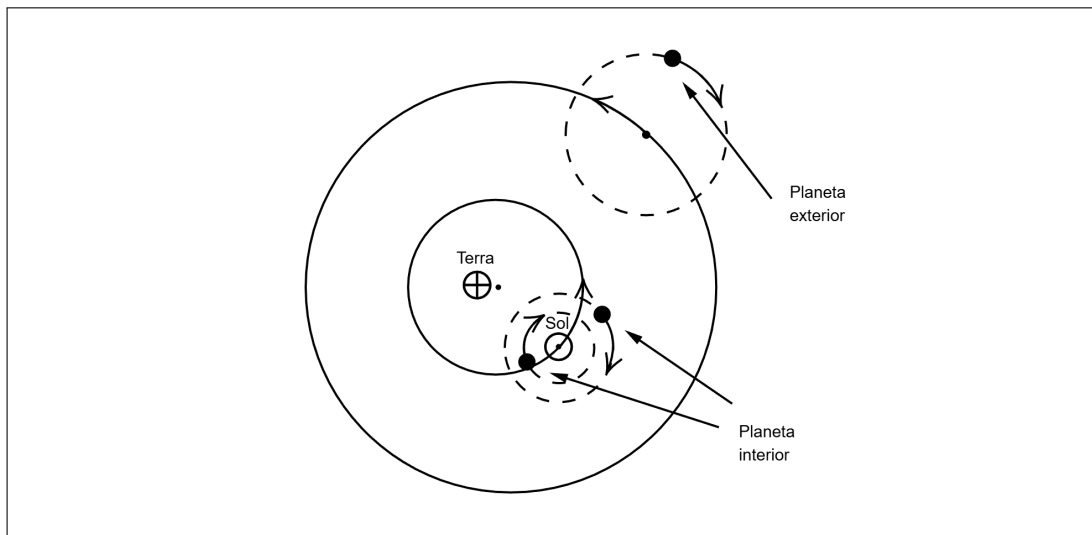
aparente anual do Sol, o movimento da Lua, a previsão de eclipses e um catálogo de 1022 estrelas.

Nos cinco livros finais, Ptolomeu descreve detalhadamente o movimento dos planetas conhecidos : Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, utilizando os conceitos de deferente, epiciclo, excêntrico e equante. Apesar de inteiramente geométrico, esse modelo foi capaz de prever posições planetárias com notável precisão por mais de um milênio, evidenciando o alto grau de sofisticação da astronomia antiga.

- (e) No caso do Sol, seu movimento aparente anual pode ser descrito por um único deferente, acompanhado de um pequeno excêntrico, sem a necessidade de epiciclos adicionais. Essa construção é capaz de reproduzir a variação observada da velocidade angular do Sol ao longo do ano, explicando naturalmente a desigualdade das estações e a equação do tempo.

Para os planetas interiores, Mercúrio e Vênus, a construção exige um refinamento adicional. O centro do epiciclo de cada planeta percorre um deferente cujo raio e velocidade angular coincidem com os do Sol médio. Essa escolha garante que tais planetas permaneçam sempre próximos ao Sol no céu, explicando imediatamente a existência de uma elongação máxima observável. O movimento próprio do planeta ocorre ao longo do epiciclo, cujo raio e velocidade angular são ajustados individualmente para cada corpo. A superposição desses dois movimentos é suficiente para explicar tanto as variações de velocidade aparente quanto os episódios de movimento retrógrado.

Para os planetas exteriores, Marte, Júpiter e Saturno, o modelo assume uma estrutura distinta. O deferente possui raio e velocidade angular próprios, distintos dos do Sol, refletindo os diferentes períodos orbitais desses planetas. Em contrapartida, os epiciclos associados a esses corpos apresentam raios e velocidades angulares aproximadamente iguais entre si.



**10. A Invasão (60 pontos)** Corram! Ele está vindo! o Ditador está vindo! Diretamente da galáxia de Itapê, o Metabarão Othon aproxima-se para impor ao planeta Janos total subserviência. Foi atribuída a você a missão de conter essa investida da ditadura metabarônica.

Durante toda a questão, suponha que Janos tenha propriedades orbitais, rotacionais, translacionais e dimensionais idênticas às da Terra. Além disso, todos os sistemas de coordenadas definidos nos itens são análogos aos terrestres.

**Importante:** As duas partes desta questão são conceitualmente independentes entre si. Assim, a resolução de determinados itens não depende dos resultados obtidos em partes anteriores, podendo ser realizada de forma autônoma, desde que as hipóteses específicas de cada parte sejam respeitadas.

### Parte I: A Chegada

Informações de inteligência indicam que a nave do Metabarão encontra-se atualmente em uma órbita contida no plano da eclíptica, originária dos confins do Sistema Solar, cuja trajetória tem como possível destino o planeta Janos.

Para monitorar a aproximação, dois planetas, Janos e Kanos, dispõem de radares ativos. Os dois planetas movem-se em órbitas circulares coplanares no plano da eclíptica, ambos à mesma distância do Sol, de tal maneira que um fique oposto ao outro com relação ao Sol. No instante  $t = 0$ , correspondente ao momento de emissão do sinal, Janos encontra-se com longitude eclíptica igual a zero quando visto a partir do Sol.

Para os itens a seguir, despreze os efeitos da rotação própria dos planetas, bem como quaisquer efeitos de paralaxe topocêntrica. Considere que a propagação do sinal ocorre no vácuo.

- (a) **(13 pontos)** No instante  $t = 0$ , Janos emite um pulso eletromagnético isotrópico, considerado esférico. O pulso se propaga pelo espaço, reflete-se na nave do Metabarão e retorna ao sistema planetário. O eco do sinal é recebido novamente por Janos e Kanos nos instantes  $t_1 = 60 \text{ d } 20 \text{ h } 00 \text{ min}$  e  $t_2 = 60 \text{ d } 20 \text{ h } 31 \text{ min}$ , respectivamente. Determine o vetor posição da nave do Metabarão no instante da reflexão do pulso, expresso no sistema de coordenadas eclípticas.

**Observação:** Adote que o Metabarão está na posição mais distante do Sol.

- (b) **(8 pontos)** Os redshifts medidos por Janos e Kanos são, respectivamente,  $z_J = 2,00 \cdot 10^{-13}$  e  $z_K = 5,67 \cdot 10^{-13}$ . Determine o vetor velocidade da nave do Metabarão no instante da reflexão, também no sistema de coordenadas eclípticas.

**Observação:** Considere que a velocidade orbital do Barão é muito menor que a velocidade da luz, além disso, os valores de redshift dados já foram corrigidos pela velocidade orbital dos planetas.

## Parte II: O Ataque

Apesar dos esforços de monitoramento, o Metabarão Othon executa uma manobra orbital precisa durante sua trajetória heliocêntrica e consegue, finalmente, alcançar o planeta Janos. Após a manobra, a nave é capturada gravitacionalmente e passa a descrever uma órbita em torno de Janos. Considere que, em um determinado instante, você mede as coordenadas e velocidades angulares abaixo:

- **Coordenadas equatoriais:**  $(\alpha, \delta) = (73,97^\circ; 25,03^\circ)$
- **Velocidades angulares:**  $(\omega_\alpha, \omega_\delta) = (16,65^\circ/\text{h}; 4,65^\circ/\text{h})$

Você se localiza nas coordenadas ( $\phi = 40^\circ \text{ N}$ , TSL = 0 h)

- (c) **(5 pontos)** Sabendo os dados acima, calcule o valor da inclinação  $i$  e da ascensão reta do nodo ascendente  $\Omega$  da órbita do Ditador.

**Observação:** Para esse item, desconsidere qualquer tipo de efeito de paralaxe na observação e desconsidere os efeitos da rotação de Janos na medição de velocidades.

- (d) **(2 pontos)** O primeiro passo da invasão ditatorial é orbitar Janos em uma órbita circular. Calcule o raio orbital  $r$  da nave.

Com os parâmetros orbitais determinados, você pode prever a trajetória futura do Metabarão. Com isso, você então prepara um canhão de antigravidade para abater a nave. Ainda é necessário decidir para onde mirar e quando apertar o gatilho, de modo que o feixe e o Metabarão cheguem simultaneamente ao mesmo ponto.

- (e) **(14 pontos)** Considerando que os raios serão direcionados ao ponto da órbita de **máxima aproximação** em relação à sua base, determine a altura  $h$  e o azimute  $A$  para os quais você deve apontar o canhão.

**Observação:** Considere que os raios se propagam em linha reta, não sendo desviados por nenhuma força externa.

- (f) **(4 pontos)** Os raios de antigravidade, apesar de sua alta velocidade, têm um tempo de viagem finito. Para que o impacto ocorra exatamente no ponto da órbita mais próximo da sua base, você deve disparar antes de o Metabarão atingir essa posição.

Calcule a altura angular  $h$  que o Metabarão deve ter no céu no momento do disparo, de modo que ele e o seu raio de antigravidade cheguem simultaneamente ao ponto de máxima aproximação.

**Dado:** Velocidade dos raios de antigravidade:  $v_g = 36\,400$  km/h.

Antes de efetuar o disparo, você decide planejar cuidadosamente o ataque. O feixe é modelado como um projétil de massa  $m$ , lançado com velocidade  $v_g$  e direção determinada anteriormente. A nave do Metabarão possui massa  $M$ . Assuma que o impacto pode ser modelado como uma colisão inelástica, e despreze quaisquer outros efeitos dissipativos.

- (g) **(14 pontos)** Determine a razão  $\eta = \frac{m}{M}$  necessária para que a órbita resultante da nave seja parabólica.

O ataque é um sucesso: o feixe de antigravidade atinge em cheio a nave do Metabarão Othon. Porém, quando a poeira baixa, os sensores revelam que Aghnar, filho do Metabarão, já havia abandonado o local minutos antes.

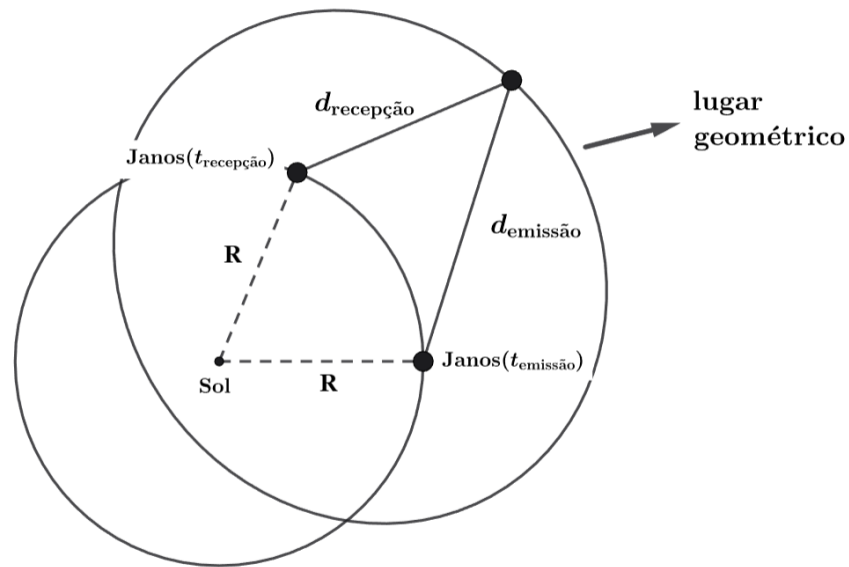
*Um dia, a ameaça galáctica voltará...*

### Solução:

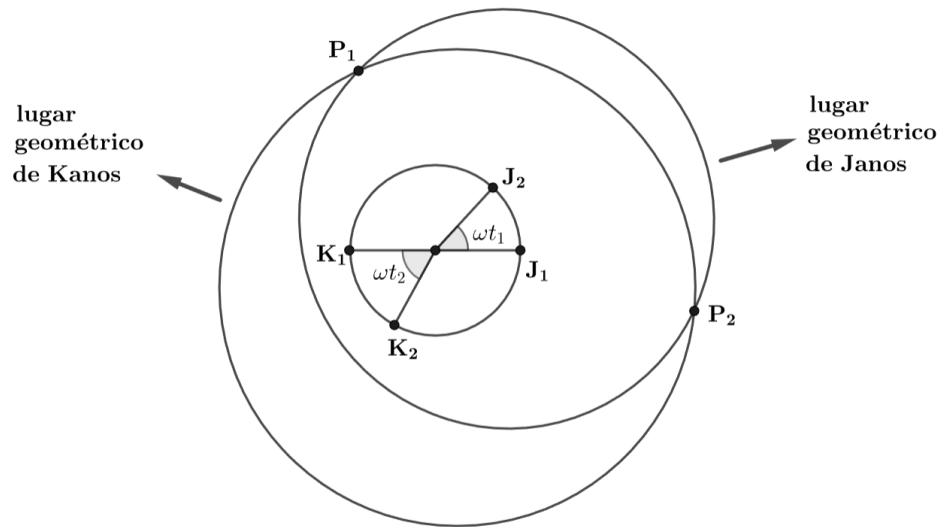
- (a) Do ponto de vista geométrico, a condição de emissão, reflexão e retorno em um tempo  $t_1$  implica que a soma das distâncias do ponto de reflexão da nave até o ponto de emissão e até o ponto de recepção em Janos é constante e igual a

$$d_{1,\text{emissão}} + d_{1,\text{recepção}} = ct_1.$$

O lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma elipse. Assim, considerando apenas a informação de  $t_1$ , a posição da nave no instante da reflexão pertence a uma elipse cujos focos são as posições de Janos no instante da emissão e no instante da recepção do sinal.



De maneira análoga, a informação do tempo de recepção  $t_2$  em Kanos define uma segunda elipse, cujos focos são a posição de Janos no instante da emissão e a posição de Kanos no instante da recepção. A interseção dessas duas elipses determina, em princípio, dois pontos possíveis para a posição da nave, um interno e outro externo ao Sistema Solar.



O cálculo direto dessa interseção é, contudo, demasiadamente extenso. Para simplificar o problema, fazemos algumas aproximações fisicamente justificadas.

Primeiramente, note que os intervalos de tempo envolvidos são muito menores que o período orbital dos planetas Janos. Assim, durante a propagação do sinal, podemos considerar que Janos e Kanos percorrem essencialmente o mesmo ângulo orbital:

$$\omega t_1 \approx \omega t_2$$

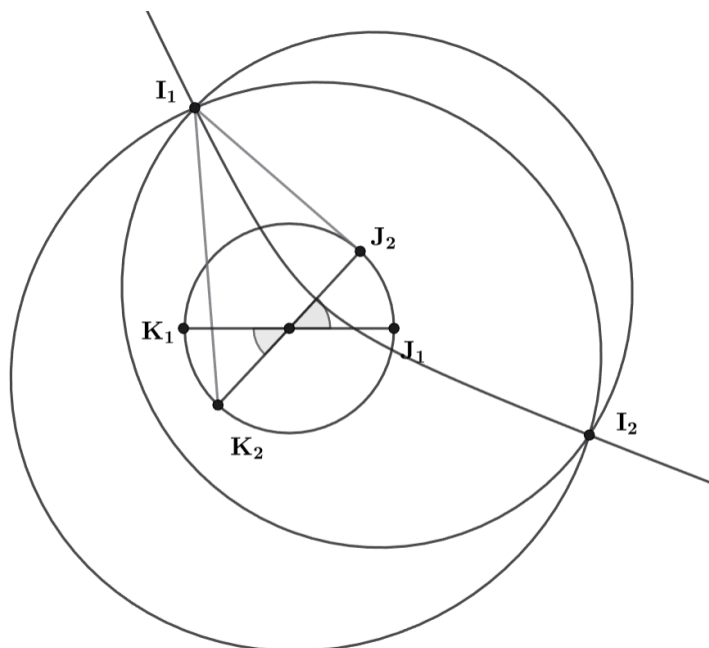
Além disso, como a nave se encontra a grandes distâncias do sistema planetário, os semieixos maiores das elipses são muito maiores que as distâncias focais correspondentes. Logo, as excentricidades dessas elipses são muito pequenas, permitindo aproximá-las por círculos centrados aproximadamente no ponto médio de seus focos.

Embora essas aproximações já simplifiquem consideravelmente o problema, existe ainda uma abordagem geométrica mais direta.

Definindo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , segue que a diferença entre as distâncias da nave até Kanos e até Janos no instante da recepção satisfaz

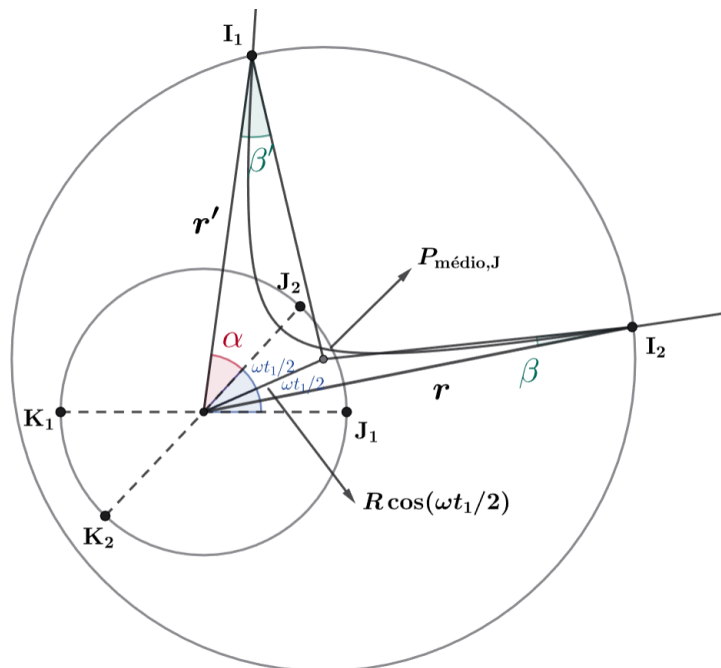
$$d_{2,\text{recepção}} - d_{1,\text{recepção}} = c \Delta t.$$

O lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma hipérbole. Assim, no instante da recepção dos sinais, a nave deve estar situada sobre um dos ramos de uma hipérbole cujos focos são Janos e Kanos.



Como Janos e Kanos ocupam posições simetricamente opostas em relação ao centro do sistema, o centro dessa hipérbole coincide com o centro do sistema planetário. Além disso, como as dimensões das elipses associadas aos tempos  $t_1$  e  $t_2$  são muito maiores que a dimensão característica da hipérbole, associada ao tempo  $\Delta t$ , o ponto de interseção relevante ocorre em uma região onde a hipérbole já está extremamente próxima de suas assíntotas.

Nessas condições, a geometria do problema torna-se trivial. Observe a geometria a seguir:



Inicialmente, calculamos o ângulo de abertura das assíntotas da hipérbole. Pela geometria da hipérbole, temos

$$\cos \alpha = \frac{a_{\text{hip}}}{c_{\text{hip}}} = \frac{c \Delta t}{2R}.$$

Para o primeiro ponto de interseção, aplicamos a lei dos senos ao triângulo formado, obtendo

$$\sin \beta' = \sin \left( \alpha + \frac{\omega t_1}{2} \right) \frac{R \cos(\frac{\omega t_1}{2})}{\frac{ct_1}{2}}.$$

Aplicando novamente a lei dos senos ao mesmo triângulo, obtemos a distância correspondente:

$$r' = R \cos \left( \frac{\omega t_1}{2} \right) \frac{\sin(\beta' + \alpha + \frac{\omega t_1}{2})}{\sin \beta'} \Rightarrow r' = 5\,265 \text{ UA}.$$

De maneira análoga, para o segundo ponto de interseção temos

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\omega t_1}{2} - \alpha\right) \frac{R \cos\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{\frac{ct_1}{2}}.$$

Aplicando novamente a lei dos senos, a distância correspondente é

$$r = R \cos\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) \frac{\sin\left(\beta - \alpha + \frac{\omega t_1}{2}\right)}{\sin \beta} \Rightarrow r = 5\,268 \text{ UA}.$$

Tomando a solução com maior raio orbital, concluímos que a distância orbital da nave no instante da reflexão é  $r$ . Pela própria geometria do problema, o ângulo de longitude eclíptica associado a esse ponto é  $\lambda = \omega t_1 - \alpha$ .

Assim, o vetor posição da nave no instante da reflexão pode ser escrito como

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \lambda \\ r \sin \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} 4036 \\ 3386 \end{pmatrix} \text{ UA}}.$$

- (b) posições de Janos nos instantes de emissão e recepção do sinal são dadas por

$$\vec{J}_1 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{J}_2 = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t_1) \\ R \sin(\omega t_1) \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, as posições de Kanos são

$$\vec{K}_1 = -\vec{J}_1, \quad \vec{K}_2 = -\vec{J}_2.$$

Como os efeitos associados à velocidade orbital dos planetas já foram corrigidos, a luz emitida isotropicamente por Janos sofre apenas efeitos Doppler associados ao movimento da nave do Metabarão. Ao longo de seu percurso, o sinal sofre dois deslocamentos sucessivos: o primeiro devido à recepção pela nave em movimento e o segundo devido à reflexão na nave.

De maneira geral, o comprimento de onda final do sinal proveniente de Janos pode ser escrito como

$$\lambda_J = \lambda \left[ 1 - \left( \frac{\vec{r} - \vec{J}_1}{|\vec{r} - \vec{J}_1|} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right] \left[ 1 - \left( \frac{\vec{J}_2 - \vec{r}}{|\vec{J}_2 - \vec{r}|} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right],$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade da nave no instante da reflexão.

Assumindo  $v \ll c$ , podemos linearizar a expressão acima, obtendo

$$\left( \frac{\vec{r} - \vec{J}_1}{|\vec{r} - \vec{J}_1|} + \frac{\vec{J}_2 - \vec{r}}{|\vec{J}_2 - \vec{r}|} \right) \cdot \vec{v} = c \frac{\Delta \lambda_J}{\lambda}.$$

Como o módulo de  $\vec{r}$  é muito maior que as dimensões do sistema, podemos aproximar essa equação, chegando em

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \vec{v} = c r \frac{\Delta\lambda_J}{\lambda}.$$

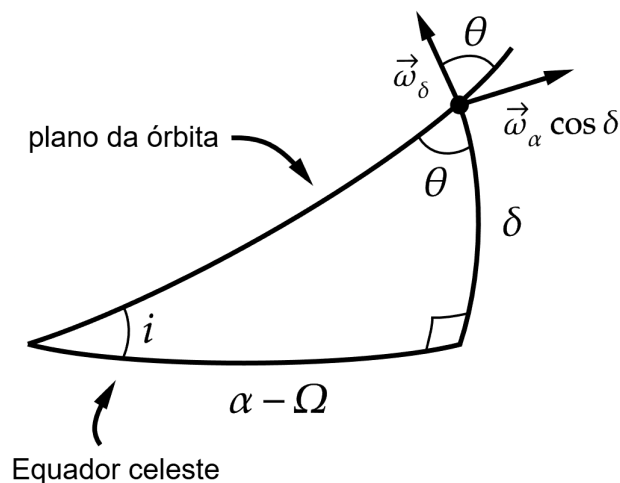
De modo completamente análogo, para o sinal recebido por Kanos obtemos

$$(\vec{K}_2 - \vec{K}_1) \cdot \vec{v} = c r \frac{\Delta\lambda_J}{\lambda}.$$

Escrevendo a velocidade da nave como  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ , as duas expressões vindas do redshift constituem um sistema linear de equações em  $v_x$  e  $v_y$ . Resolvendo esse sistema e substituindo os valores geométricos obtidos no item anterior para  $\vec{r}$ ,  $\vec{J}_1$ ,  $\vec{J}_2$ ,  $\vec{K}_1$  e  $\vec{K}_2$ , obtemos finalmente

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 509 \\ -481 \end{pmatrix} \text{ m/s}.$$

- (c) Podemos, a partir das quantidades fornecidas pelo enunciado, desenhar o seguinte triângulo esférico:



Nota-se que, devido à declinação, a velocidade angular em ascensão reta deve ser corrigida considerando um fator  $\cos(\delta)$ . Agora, por simples trigonometria, podemos obter o ângulo  $\theta$ :

$$\tan(\theta) = \frac{\omega_\alpha \cos(\delta)}{\omega_\delta} \Rightarrow \theta \approx 72,9^\circ.$$

Pela lei dos quatro elementos, podemos obter a longitude do nodo ascendente:

$$\tan(\alpha - \Omega) = \tan(\theta) \sin(\delta) \Rightarrow \boxed{\Omega \approx 20,0^\circ}.$$

Para a inclinação, basta aplicarmos a lei dos senos:

$$\sin(i) = \frac{\sin(\theta) \sin(\delta)}{\sin(\alpha - \Omega)} \Rightarrow \boxed{i \approx 30^\circ}.$$

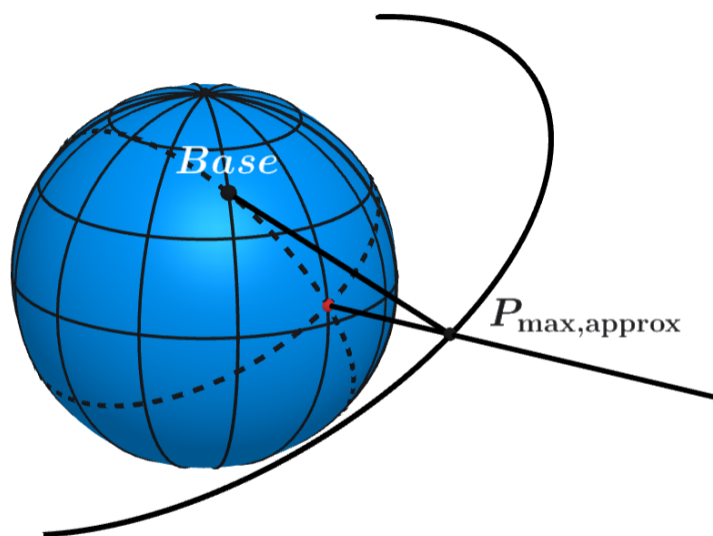
(d) Podemos calcular a velocidade angular através do teorema de Pitágoras:

$$\omega^2 = \omega_\alpha^2 \cos^2(\delta) + \omega_\delta^2 \Rightarrow \omega \approx 15,79^\circ/\text{h}.$$

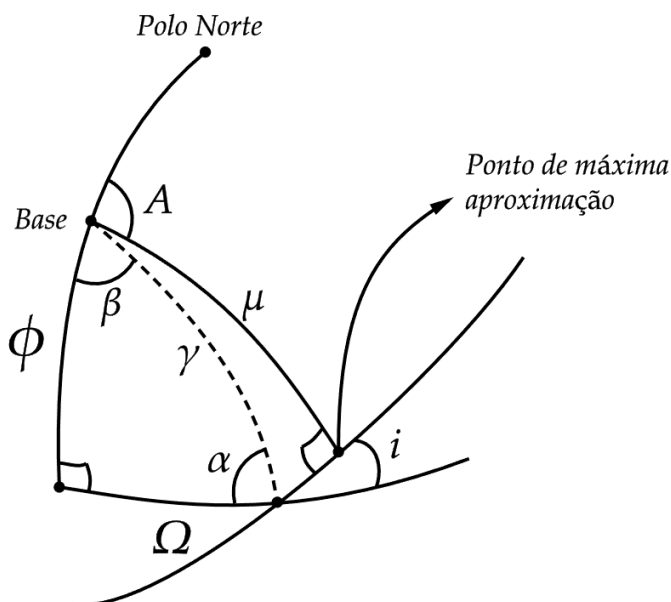
Pela terceira lei de Kepler:

$$r = \left( \frac{GM_\oplus}{\omega^2} \right)^{1/3} \Rightarrow \boxed{r \approx 4,08 \cdot 10^7 \text{ m}}.$$

(e) Esquematizando a situação, temos:



Para localizarmos o ponto de máxima aproximação mencionado pelo enunciado, podemos utilizar o conhecido fato de que, dado um ponto  $P$  e um círculo máximo  $C$ , o ponto pertencente a  $C$  mais próximo de  $P$  trata-se da intersecção mais próxima entre  $C$  e o círculo máximo que passa por  $P$  e cujo plano é ortogonal ao plano de  $C$ . Projetando o ponto de máxima aproximação na superfície terrestre, obtemos o ponto representado em vermelho na imagem. Com isso em mãos, podemos agora calcular os ângulos requeridos. Para isso, considere a geometria a seguir:



Os ângulos esféricos relevantes são:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\Omega$ ,  $\phi$ ,  $i$ ,  $A$  e  $\mu$ , além, claro, do ângulo reto presente na imagem, o qual é oriundo do fato supracitado.

A partir da lei dos cossenos no triângulo esférico apropriado:

$$\cos(\gamma) = \cos(\phi) \cos(\Omega) \Rightarrow \gamma \approx 43,96^\circ$$

Da lei dos quatro elementos, obtemos:

$$\cot(\Omega) \sin(\phi) = \cot(\beta) \quad \text{e} \quad \cot(\phi) \sin(\Omega) = \cot(\alpha)$$

$$\beta \approx 29,52^\circ \quad \text{e} \quad \alpha \approx 67,82^\circ$$

Para determinar  $\mu$ , aplicamos a lei dos senos:

$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin(90^\circ)} = \frac{\sin(\mu)}{\sin(180^\circ - \alpha - i)}$$

Como  $\sin(90^\circ) = 1$  e  $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$ , temos:

$$\sin(\mu) = \sin(\gamma) \sin(\alpha + i) \Rightarrow \mu \approx 43,45^\circ$$

Para encontrar  $A$ , usamos novamente a lei dos quatro elementos:

$$\cot(\gamma) \sin(\mu) = \cos(180^\circ - A - \beta) \cos(\mu)$$

Notando que  $\cos(180^\circ - x) = -\cos(x)$ :

$$\cot(\gamma) \sin(\mu) = -\cos(A + \beta) \cos(\mu)$$

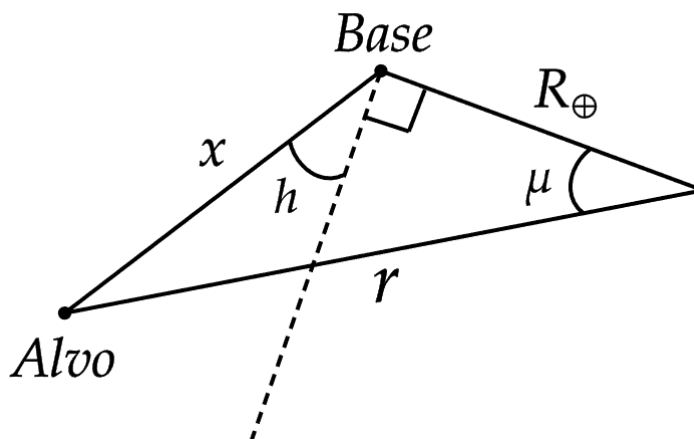
Reorganizando:

$$\cos(A + \beta) = -\cot(\gamma) \tan(\mu) = -\frac{\tan(\mu)}{\tan(\gamma)}$$

Isolando  $A$  e usando  $\arccos(-x) = 180^\circ - \arccos(x)$ :

$$A = 180^\circ - \beta - \arccos\left(\frac{\tan(\mu)}{\tan(\gamma)}\right) \Rightarrow \boxed{A \approx 139,7^\circ}$$

Para calcularmos  $h$ , podemos reaproveitar o ângulo  $\mu$ :



Por lei dos cossenos da geometria plana:

$$x = \sqrt{R_{\oplus}^2 + r^2 - 2R_{\oplus}r \cos(\mu)} \Rightarrow x \approx 3,644 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Por lei dos senos da geometria plana:

$$\frac{\sin(90^\circ + h)}{r} = \frac{\sin(\mu)}{x} \Rightarrow$$

$$\cos(h) = \frac{\sin(\mu)r}{\sqrt{R_{\oplus}^2 + r^2 - 2R_{\oplus}r \cos(\mu)}} \Rightarrow \boxed{h \approx 39,6^\circ}$$

- (f) Sabendo a distância física entre a base e o ponto de máxima aproximação, bem como a velocidade do raio de antigravidade, podemos obter o tempo que o raio leva para chegar ao destino:

$$\Delta t = \frac{x}{v_g} \Rightarrow \Delta t \approx 1 \text{ h}$$

Nesse tempo, o Metabarão se moverá por um comprimento angular  $\Delta\theta = \omega\Delta t$ .

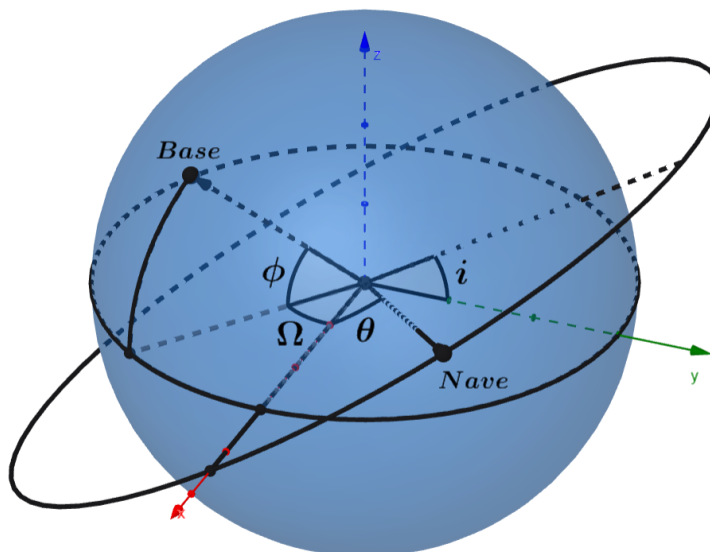
Similarmente ao que foi feito com  $\mu$ , podemos obter a distância angular entre a base e a projeção na superfície terrestre da posição do Metabarão no momento do disparo ( $\mu'$ ):

$$\cos(\mu') = \cos(\mu) \cos(\Delta\theta) = \cos(\mu) \cos(\omega\Delta t) \Rightarrow \mu' \approx 45,69^\circ$$

E, pelo mesmo raciocínio do item (f):

$$\cos(h') = \frac{\sin(\mu')r}{\sqrt{R_\oplus^2 + r^2 - 2R_\oplus r \cos(\mu')}} \Rightarrow \boxed{h' \approx 37,16^\circ}$$

- (g) Escolhemos um sistema de coordenadas cartesiano dextrogiro cujo plano fundamental é o equador de Janos. O eixo  $x$  é tomado na direção do nodo ascendente da órbita da nave, o eixo  $z$  aponta para o polo norte do planeta, e o eixo  $y$  completa a base ortonormal.



O vetor posição da base de disparo, localizada na latitude  $\phi$  e ângulo medido sobre o equador no sentido anti-horário  $2\pi - \Omega$ , é dado por

$$\vec{R} = R \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \Omega \\ -\cos \phi \sin \Omega \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Parametrizamos a posição da nave no plano orbital pelo ângulo  $\theta$ , medido a partir do nodo ascendente. Assim, o vetor posição da nave no instante do impacto é

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos i \\ \sin \theta \sin i \end{pmatrix}.$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos o vetor velocidade orbital da nave:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \cos i \\ \cos \theta \sin i \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \cos i \\ \cos \theta \sin i \end{pmatrix},$$

onde  $v = r\dot{\theta}$  é o módulo da velocidade orbital.

Podemos calcular o valor de  $\theta$  usando o triângulo esférico do item (e), sendo assim

$$\sin \theta = \sin(\beta + A) \sin \gamma \Rightarrow \theta = 7,450^\circ.$$

O vetor velocidade do feixe de antigravidade no instante do impacto aponta da base até a nave, sendo portanto

$$\vec{v}_g = v_g \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|}.$$

O impacto entre o feixe de antigravidade e a nave é completamente inelástico. Assim, pela conservação do momento linear no instante da colisão, a velocidade imediatamente após o impacto é

$$\vec{v}_f = \frac{m\vec{v}_g + M\vec{v}}{m + M} \Rightarrow \vec{v}_f = \frac{\eta \vec{v}_g + \vec{v}}{1 + \eta}.$$

Após a colisão, a massa total  $M + m$  passa a se mover sob a ação do campo gravitacional de Janos. Como o feixe de antigravidade não sofre aceleração gravitacional, o movimento relativo é equivalente ao de uma partícula de massa  $M + m$  sujeita a uma constante gravitacional efetiva

$$G' = \frac{G}{1 + \eta}.$$

A energia mecânica específica após o impacto é

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r} = 0 \Rightarrow \frac{v_f^2}{2} = \frac{GM_\oplus}{(1+\eta)r}.$$

Desenvolvendo essa equação e usando o resultado da conservação do momento linear, obtemos

$$\eta^2 v_g^2 + v^2 + 2\eta \vec{v}_g \cdot \vec{v} = \frac{2GM_\oplus}{r}(1+\eta).$$

Como a nave encontrava-se originalmente em órbita circular de raio  $r$ , vale o resultado clássico  $v^2 = \frac{GM_\oplus}{r}$ .

Substituindo,

$$\eta^2 v_g^2 + 2\eta [\vec{v}_g \cdot \vec{v} - v^2] - v^2 = 0.$$

Essa é uma equação quadrática em  $\eta$ . Resolvendo, descartando a raiz não física e realizando todas as contas, obtemos

$$\eta = 0,3234$$