



PROVA TEÓRICA  
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS  
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

---

## Instruções Gerais

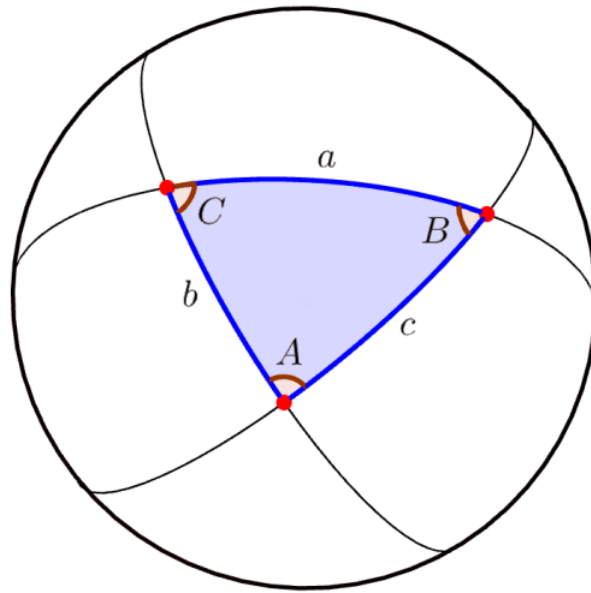
1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. A duração da prova é de 4 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva o caderno de respostas.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> ·kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> ·K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> ·Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Equação de Kepler:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

- Equação Polar das Cônicas (Elipse e Hipérbole):

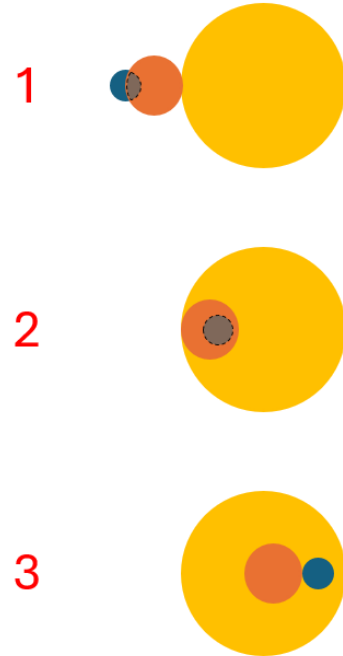
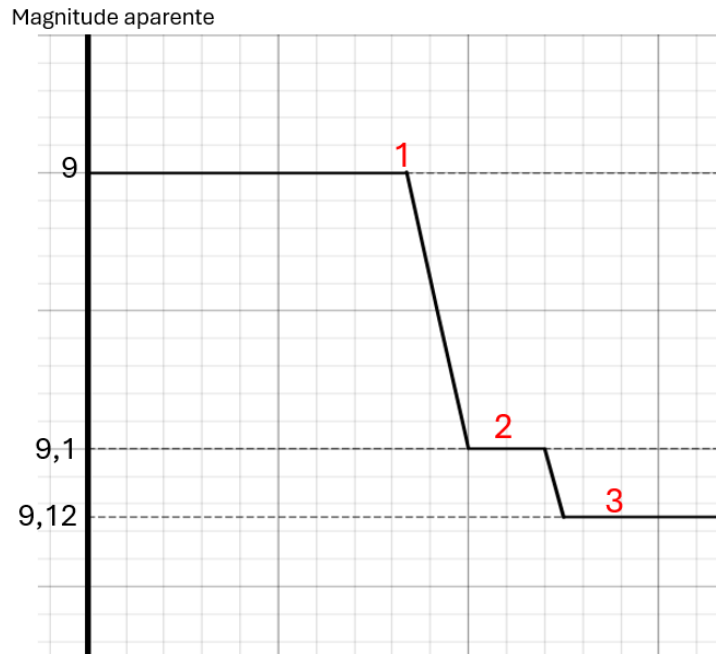
$$r = \frac{a \cdot ||1 - e^2||}{1 + e \cdot \cos(\nu)} = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$$

- Se necessário, utilize que:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

## Questões

1. **Trânsito (10 pontos)** A curva de magnitude aparente de uma estrela hipotética foi recolhida durante um trânsito de dois de seus planetas (representado abaixo). Determine a razão entre o raio do planeta maior e o do menor.



### Solução:

Comparando o primeiro aumento de magnitude (causado apenas pela área do maior planeta) com o brilho total da estrela, tem-se:

$$M_2 - M_1 = -2,5 \log\left(\frac{R^2 - r_1^2}{R^2}\right) \Leftrightarrow \frac{r_1}{R} = 0,3$$

Novamente, comparando agora o segundo aumento de magnitude (causado pela área de ambos os planetas), tem-se:

$$M_3 - M_1 = -2,5 \log\left(\frac{R^2 - r_1^2 - r_2^2}{R^2}\right) \Leftrightarrow \frac{r_2}{R} = 0,13$$

Assim:

$$\frac{r_1}{r_2} = 2,3$$

### Grade de Correção

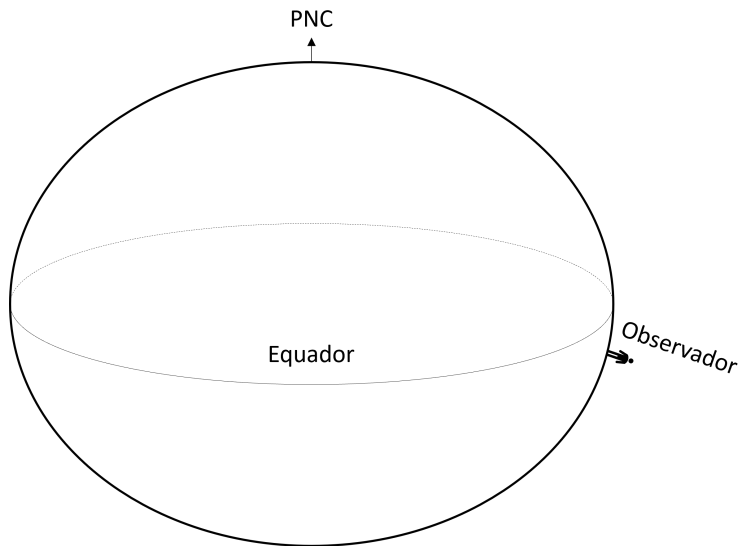
- +1 Escrever a equação de Pogson para pelo menos um dos casos abaixo
- +4 Associar que a diferença de magnitude  $|\Delta M| = 0.1$  advém do logaritmo da subtração da área do planeta maior da área da estrela
- +4 Associar a diferença de magnitude  $|\Delta M| = 0.12$  ao logaritmo da subtração da área dos dois planetas da área da estrela
- +1 Encontrar a razão  $r_1/r_2$  correta em valor numérico

- 2. A Revanche de Aghnar (15 pontos)** Corram! O dia chegou! A ditadura metabarônica retornou! Após escapar por um triz do ataque que destruiu a nave de seu pai, o Metabarão Othon, Aghnar fugiu para as sombras do espaço. Anos se passaram, e agora ele está de volta com um plano ainda mais ousado. Utilizando uma tecnologia ancestral de manipulação gravitacional, ele decide atacar a Terra, achatando-a de forma extrema de modo a testar os limites da sobrevivência terrestre. O resultado é um planeta em formato elipsoidal oblato, com excentricidade  $e = 0,6$ .

Durante os testes, uma base de monitoramento na cidade de Cassilândia (MS) começa a registrar discrepâncias entre dois conceitos distintos de latitude:

- Latitude astronômica  $\phi_A$ : definida como o ângulo entre a vertical local e o plano do equador;
- Latitude geográfica  $\phi_G$ : definida como o ângulo entre o plano do equador e o segmento de reta que liga o centro do planeta ao ponto da superfície (neste caso, Cassilândia).

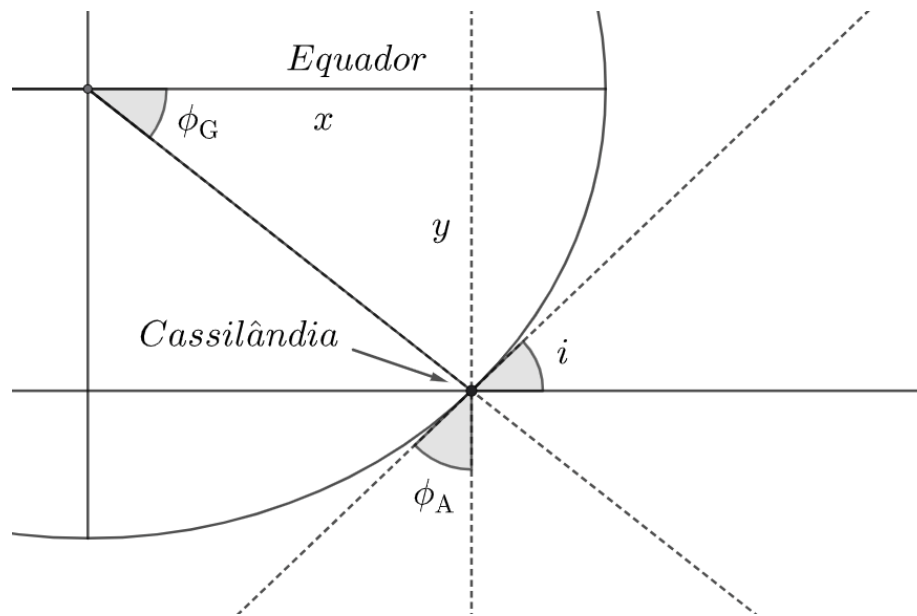
Sabendo que a cidade mede uma latitude astronômica  $\phi_A = -19^\circ$ , determine a diferença  $\Delta = \phi_G - \phi_A$  entre a latitude geográfica e a latitude astronômica de Cassilândia.



**Dica:** Fórmula da derivada implícita da elipse:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

**Solução:** Para a resolução dessa questão, devemos considerar a seguinte geometria:



Legenda:

- $\phi_A$ : latitude astronômica
- $\phi_G$ : latitude geográfica (geocêntrica)

- $x, y$ : coordenadas cartesianas de Cassilândia no plano do meridiano local.
- $i$ : inclinação da reta tangente à elipse no ponto.

a inclinação da reta tangente à elipse em um ponto  $(x, y)$  é dada por

$$\tan(i) = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Pela geometria da figura, temos:

$$|\phi_A| = 90^\circ - i \quad \Rightarrow \quad \tan(|\phi_A|) = \cot(i)$$

Logo,

$$\tan(|\phi_A|) = \frac{1}{\tan(i)} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$$

Por outro lado, pela definição geométrica da latitude geográfica (geocêntrica):

$$\tan(|\phi_G|) = -\frac{y}{x}$$

Substituindo:

$$\tan(\phi_A) = \frac{a^2}{b^2} \tan(\phi_G)$$

Rearranjando:

$$\tan(\phi_G) = \frac{b^2}{a^2} \tan(\phi_A)$$

Como  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , segue que:

$$\tan(\phi_G) = (1 - e^2) \tan(\phi_A)$$

Para  $e = 0,6$ , temos:

$$1 - e^2 = 1 - 0,36 = 0,64$$

Portanto:

$$\tan(\phi_G) = 0,64 \tan(\phi_A)$$

Substituindo  $\phi_A = -19^\circ$  e calculando, obtemos:

$$\Delta \approx 6^\circ 34'$$

### Grade de Correção

- + 4 Descrição visual correta da geometria da situação, incluindo a representação da latitude astronômica e da latitude geográfica.
- + 3 Relação correta entre a inclinação da reta tangente com a latitude astronômica, utilizando a derivada implícita
- + 2 Demonstração da relação  $\tan(\phi_G) = (1 - e^2) \tan(\phi_A)$
- + 1 Resultado numérico correto:  $\Delta \approx 6^\circ 34'$

- 3. Luís com sono de novo (15 pontos)** Após mais uma noite mal dormida (como de costume), Luís, conhecido por observar o céu mesmo lutando contra o sono, montava seu fiel telescópio artesanal feito de MDF no quintal de casa. Ao apontá-lo para o horizonte, algo lhe chamou a atenção: a poluição luminosa proveniente de uma cidade próxima não parecia distribuída uniformemente no céu, mas apresentava um máximo bem definido em uma certa direção angular. Intrigado, Luís decidiu modelar o fenômeno utilizando apenas refração geométrica.

Considere a Terra como uma esfera de raio  $R$  e modele a atmosfera como um meio óptico isotrópico cujo índice de refração depende apenas da distância  $r$  ao centro da Terra, segundo a lei

$$n(r) = n_0 \left( \frac{R}{r} \right)^p$$

com  $n_0 > 1$  e  $p > 1$  constantes. Despreze efeitos de espalhamento, absorção e extinção: a luz propaga-se apenas por refração geométrica.

Uma cidade localizada ao nível do solo emite luz artificial durante a noite. Um raio luminoso parte da cidade na superfície da terra, formando um ângulo  $\psi_0$  com a direção radial local.

- a) **(7 pontos)** Demonstre a conservação da seguinte quantidade ao longo da propagação do raio em um meio radial:

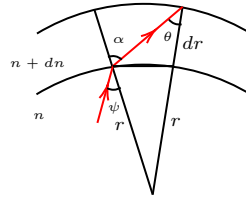
$$n(r) r \sin \psi = \text{constante}$$

onde  $\psi(r)$  é o ângulo entre a direção do raio e a direção radial local.

- b) **(8 pontos)** Para o índice de refração dado no enunciado, determine o raio máximo  $r_{\max}$  atingido por um raio lançado com ângulo inicial  $\psi_0$ ; em função de  $p$ ,  $R$  e  $\psi_0$ ; e determine o ângulo máximo  $\theta_{\max}$  acima do horizonte a partir do qual um raio ainda não escapa da atmosfera, em função de  $R$ ,  $p$  e  $H$  a altura efetiva da atmosfera.

### Solução:

- a) Observe o diagrama a seguir.



Como a normal é radial, aplica-se Snell na passagem entre as duas camadas:

$$n \sin \psi = (n + \delta n) \sin \alpha.$$

Usando o triângulo  $r$ ,  $r + dr$  com os ângulos opostos  $\theta$  e  $180 - \alpha$ , temos a lei dos senos:

$$\sin \theta (r + \delta r) = r \sin \alpha.$$

Substituindo  $\sin \alpha$ :

$$\sin \theta (r + \delta r)(n + \delta n) = r n \sin \psi$$

A expressão anterior mostra que a quantidade  $n r \sin \psi$  é a mesma imediatamente antes e imediatamente depois de atravessar uma camada. Portanto, ao longo de toda a trajetória no meio radial,

$$\boxed{n(r) r \sin \psi = \text{constante.}}$$

- b) No ponto de maior altitude o raio fica tangente à esfera local, isto é,  $\psi = \pi/2 \Rightarrow \sin \psi = 1$ .

$$n(r_{\max}) r_{\max} = n_0 R \sin \psi_0 \Rightarrow$$

$$n_0 R \left( \frac{R}{r_{\max}} \right)^{p-1} = n_0 R \sin \psi_0 \Rightarrow \left( \frac{R}{r_{\max}} \right)^{p-1} = \sin \psi_0.$$

Portanto,

$$\boxed{r_{\max} = R (\sin \psi_0)^{\frac{1}{1-p}}}.$$

Para o raio não escapar da atmosfera, exige-se  $r_{\max} \leq R + H$ . Usando o resultado anterior:

$$R (\sin \psi_0)^{\frac{1}{1-p}} \leq R + H \Rightarrow \sin \psi_0 \geq \left( \frac{R}{R + H} \right)^{p-1}.$$

Se  $\theta$  é a elevação acima do horizonte, então  $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi_0$  e  $\sin \psi_0 = \cos \theta$ . Assim,

$$\boxed{\theta \leq \theta_{\max} = \arccos \left[ \left( \frac{R}{R + H} \right)^{p-1} \right].}$$

**Solução:**

**Grade de Correção**

- a) • 2.5pt: Diagrama correto;  
 • 1.5pt: Lei de snell;  
 • 2pt: Lei dos senos;  
 • 1pt: Derivação do resultado correto.
- b) • 2.5pt: Condição de  $h_{max}$  para  $\psi = \pi/2$ ;  
 • 2.5pt: Resultado correto para  $r_{max}$ .  
 • 1pt: Condição do raio não escapar da atmosfera  $r_{max} \leq R + H$  ;  
 • 2pt: Resultado correto para  $\theta_{0max}$ .

- 4. Pressão de Radiação (20 pontos)** Considere um sistema composto pela estrela Buchius e um planeta que a orbita, denominado Haalanus. Devido à sua própria emissão de radiação térmica, o planeta sofre um efeito dissipativo associado à pressão de radiação, que resulta em uma força tangencial oposta ao seu movimento orbital. Observe que estamos estudando somente a influência da radiação do próprio planeta sobre o seu movimento, e desconsiderando a radiação da estrela.

Se, em determinado momento, a estrela observa o planeta se movendo no sentido positivo do eixo x, então um quadrivetor de componentes  $E_0$  e  $p_x$  (no referencial do planeta) se transforma em  $E'$  e  $p'_x$  (no referencial da estrela), segundo as equações:

$$E' = \gamma (E_0 + vp_x) , \quad p'_x = \gamma \left( p_x + \frac{v}{c^2} E_0 \right)$$

- a) **(10 pontos)** Considere um fóton de frequência  $f_0$ , emitido no referencial de Haalanus formando um ângulo  $\theta_0$  com a direção de movimento do planeta, cuja velocidade orbital é  $v$ . Determine, no referencial inercial da estrela Buchius, a frequência  $f'$  e o ângulo  $\theta'$  de propagação do fóton, expresse seu resultado em função de  $\theta$ ,  $f_0$  e  $v$ .
- b) **(10 pontos)** Assumindo que o planeta emite isotropicamente no seu referencial próprio, determine a força  $\vec{F}$  exercida sobre Haalanus devido à emissão de radiação, expresse o resultado em função de  $\vec{v}$  e  $L_0$  a luminosidade própria do planeta.

**Dica:** Existe uma forma de resolver o item b sem precisar do item a.

**Solução:**

- a) No referencial do planeta, o fóton possui energia  $E_0 = hf_0$  e momento

$$\vec{p} = \frac{E_0}{c} (\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0).$$

Aplicando as transformações fornecidas,

$$E' = \gamma \left( E_0 + v \frac{E_0}{c} \cos \theta_0 \right) = \gamma E_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right),$$

logo,

$$\boxed{f' = \gamma f_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right)}.$$

Para a direção, temos

$$p'_x = \gamma \frac{E_0}{c} \left( \cos \theta_0 + \frac{v}{c} \right).$$

Assim,

$$\cos \theta' = \frac{p'_x}{|\vec{p}'|} \Rightarrow \boxed{\cos \theta' = \frac{\cos \theta_0 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta_0}}.$$

- b) No referencial do planeta, a emissão é isotrópica, o que implica que o momento linear total emitido é nulo. Assim, o quadrivetor total da radiação emitida em um intervalo de tempo próprio  $\Delta t_0$  é

$$\Delta p^\mu = \left( \frac{E_0}{c}, 0, 0, 0 \right).$$

Ao transformar para o referencial da estrela, utilizando as expressões fornecidas,

$$\Delta p_x = \gamma \frac{v}{c^2} E_0.$$

Esse resultado mostra que, no referencial da estrela, a radiação transporta um momento linear líquido na direção do movimento do planeta. A força exercida sobre o planeta é a taxa de variação desse momento (com sinal oposto):

$$F_x = - \frac{\Delta p_x}{\Delta t}.$$

Como  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ , segue que

$$F_x = - \frac{v}{c^2} \frac{E_0}{\Delta t_0}.$$

Definindo a luminosidade própria  $L_0 = \frac{E_0}{\Delta t_0}$ ,

$$\boxed{\vec{F} = - \frac{L_0}{c^2} \vec{v}}.$$

Portanto, a força é proporcional à velocidade do planeta, atua na direção tangencial da órbita e possui sentido oposto ao movimento.

### Grade de Correção

- a)
- +1,5 ponto: Escrever a relação energia e momento para o fóton ou equivalente:  $E = pc$
  - +1,5 ponto: Realizar a decomposição vetorial do vetor momento para encontrar  $p_x = p \cos \theta_0$
  - +1,0 ponto: Relacionar a energia do fóton com a frequência:  $E = hf$
  - +1,5 ponto: Aplicar as transformações do enunciado e encontrar  $E'$  e  $p'_x$
  - +2,0 pontos: Substituir  $E = hf$  na transformação de energia e isolar a nova frequência, encontrando:  $f' = \gamma f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_0\right)$
  - +2,5 pontos: Obter a direção da propagação pela relação  $\cos \theta' = \frac{p'_x}{|\vec{p}'|}$ , resultando em  $\cos \theta' = \frac{\cos \theta_0 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta_0}$
- b)
- +1,5 Escrever o quadrivetor total da radiação no referencial do planeta:  $\Delta p^\mu = \left(\frac{E_0}{c}, 0, 0, 0\right)$
  - +1,5 Transformar para o referencial da estrela a variação do momento da radiação no eixo x no referencial do planeta:  $\Delta p_x = \gamma \frac{v}{c^2} E_0$
  - +2 Escrever a 2ª Lei de Newton  $F_x = -\frac{\Delta p_x}{\Delta t}$
  - +3 Aplicar a dilatação do tempo  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$
  - +2 Definir a luminosidade própria  $L_0 = \frac{E_0}{\Delta t_0}$  e encontrar  $\vec{F} = -\frac{L_0}{c^2} \vec{v}$

**5. Senhør Bizu e sua estação espacial (20 pontos)** O Senhor Bizu lança sua própria estação espacial em órbita baixa (LEO) a uma altitude de aproximadamente  $H = 500$  km da superfície terrestre. Considere que a órbita da estação é circular, com inclinação  $i = 40^\circ$ , e que o lançamento ocorre no equinócio de março a partir de Alcântara ( $\phi = 0^\circ, \lambda = 46^\circ$  O) exatamente às 18h (horário local). A estação é inserida diretamente em órbita de forma que, no instante do lançamento (admita que a estação encontra-se instantaneamente em sua órbita após o disparo) a longitude do nodo ascendente coincida com o meridiano de Alcântara.

- a) **(4 pontos)** Para que a comunicação com a estação seja possível, ela deve estar acima do horizonte local do comunicador terrestre, permitindo a propagação do sinal em linha reta sem obstrução pela superfície da Terra. Determine o intervalo de tempo máximo que o Senhør Bizu poderá se comunicar com a estação em uma única janela de visibilidade. Desconsidere a rotação da terra.
- b) **(10 pontos)** Na estação espacial, o conceito de dia e noite difere do terrestre. Considere que é "noite" para a estação quando esta se encontra na região de eclipse

(sombra) da Terra. Calcule a duração da primeira noite observada pelos astronautas tripulantes da estação espacial.

- c) (6 pontos) Sabendo que a duração das noites varia ao longo do ano em função da mudança da direção de vinda dos raios solares, calcule a razão entre a duração mínima e a duração máxima da noite,  $\frac{\Delta t_{\min}}{\Delta t_{\max}}$ , para os tripulantes da estação.

**Solução:**

Adotaremos

$$R_T = 6371 \text{ km}, \quad \mu_T = GM_T = 398\,600 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}.$$

O raio orbital da estação é

$$r = R_T + H = 6871 \text{ km}.$$

Como a órbita é circular, sua velocidade angular orbital é

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_T}{r^3}}.$$

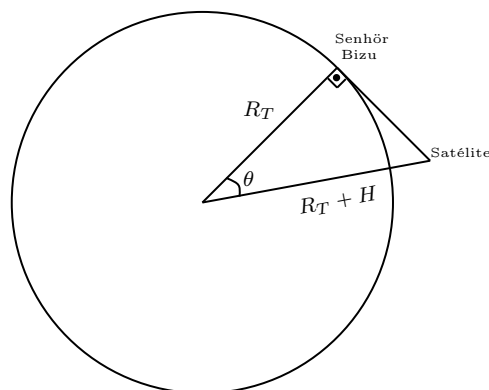
Numericamente,

$$\omega \approx 1,108 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}.$$

Assim, o período orbital é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 94,5 \text{ min}.$$

a) .



A maior janela de comunicação ocorre quando a estação passa pelo zênite do comunicador. No limite da visibilidade, a linha de visada é tangente à superfície da Terra.

Assim, no triângulo formado pelo centro da Terra, pelo comunicador e pela estação, temos

$$\cos \theta_h = \frac{R_T}{R_T + H} = \frac{R_T}{r}.$$

Logo,

$$\theta_h = \arccos\left(\frac{6371}{6871}\right) \approx 21,99^\circ.$$

Esse é o ângulo central entre o ponto de zênite e o ponto de perda de contato. A passagem completa vai de  $-\theta_h$  até  $+\theta_h$ , portanto

$$\Delta t_{\text{vis}} = \frac{2\theta_h}{\omega}.$$

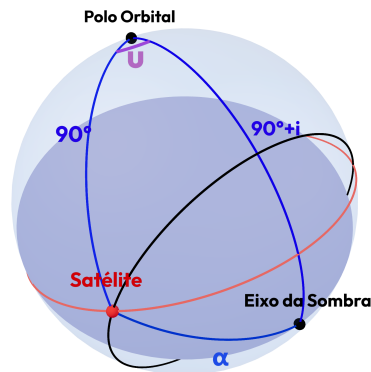
Substituindo  $\theta_h$  em radianos,

$$\Delta t_{\text{vis}} \approx 692,5 \text{ s} \approx 11,5 \text{ min}.$$

Portanto,

$$\boxed{\Delta t_{\text{vis}} \approx 11,5 \text{ min}}.$$

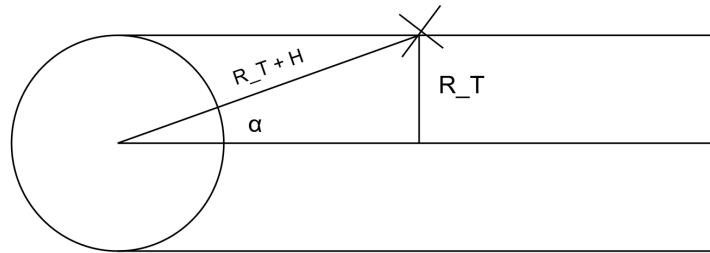
- b) Para a primeira noite, podemos representar a situação através da esfera que contém a trajetória do satélite; a projeção da sombra da terra, que será um círculo mínimo centrado no equador, pois é equinócio; e o polo da órbita.



Para calcular a duração da noite precisamos encontrar o ângulo  $u$ , que é proporcional ao tempo, quando o satélite está entrando na sombra. O nodo ascendente do satélite está a  $90^\circ$  do eixo da sombra pois o enunciado diz que quando ele é lançado é 18 horas. portanto o sol está a  $90^\circ$  do meridiano de lançamento.

O lado que liga o polo da órbita ao eixo da sombra vale  $90^\circ + i$  nessa situação de alinhamento.

O lado  $\alpha$  pode ser encontrado com geometria plana de acordo com a seguinte situação:



$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{R_T}{R_T + H} \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{R_T}{R_T + H}\right) \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{6371}{6371 + 500}\right) \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{6371}{6871}\right) \\ \alpha &\approx 68,0^\circ\end{aligned}$$

Logo, resolvendo o triângulo esférico

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos(90^\circ) \cos(90^\circ + i) + \sin(90^\circ) \sin(90^\circ + i) \cos(u) \\ \cos(\alpha) &= 0 \cdot \cos(90^\circ + i) + 1 \cdot \cos(i) \cdot \cos(u) \\ \cos(u) &= \frac{\cos(\alpha)}{\cos(i)} = \frac{\cos(68,00^\circ)}{\cos(40^\circ)} \\ u &= \arccos(0,4890) \approx 60,73^\circ \\ t &= \frac{2u}{360^\circ} \cdot 94,5 = \frac{121,46^\circ}{360^\circ} \cdot 94,5 \approx 32 \text{ min}\end{aligned}$$

- c) Como a órbita já está definida e a rotação da terra não influencia em nada a órbita ou a sombra, nosso único grau de liberdade é a posição do Sol na eclíptica. O tempo máximo da noite ocorre quando o Sol está na intersecção da eclíptica com o a órbita.

Considerando a conta do item b) com o ângulo de  $90^\circ + i$  variável, percebemos que teremos  $u$  máximo quando o ângulo do arccos for mínimo e portanto quando

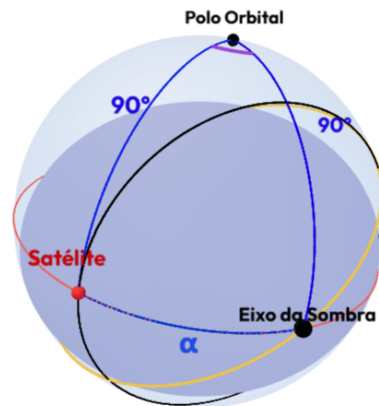
seno de  $\beta$  é 1, o que ocorre justamente na situação descrita acima.

$$\cos(\alpha) = \cos(90^\circ) \cos(\beta) + \sin(90^\circ) \sin(\beta) \cos(u)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\beta) \cos(u)$$

$$\cos(u) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

$$u = \arccos\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}\right)$$



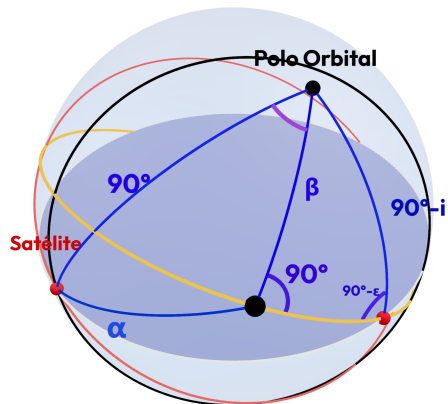
Portanto,  $u_{max}$  será igual ao valor de alpha já calculado no item anterior:

$$u = \alpha \approx 68^\circ$$

$$t = \frac{2u}{360^\circ} \cdot 94,5$$

$$t = 35,7 \text{ min}$$

Para o caso mínimo, precisamos que  $\beta$  seja mínimo na condição em que o Sol se encontra mais próximo o possível de um dos polos da órbita:



Usamos esse outro triângulo ao lado para encontrar  $\beta$ :

$$\frac{\sin(90^\circ - i)}{\sin(90^\circ)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(90^\circ - \epsilon)}$$

$$\frac{\cos(i)}{1} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\epsilon)}$$

$$\sin(\beta) = \cos(i) \cos(\epsilon)$$

$$\sin(\beta) = \cos(40^\circ) \cos(23^\circ 27') \approx 0,7028$$

$$\beta \approx 44,65^\circ$$

$$\cos(u) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\cos(68,00^\circ)}{0,7028} \approx \frac{0,3746}{0,7028} \approx 0,5330$$

$$u = \arccos(0,5330) \approx 57,79^\circ$$

$$t = \frac{2u}{360^\circ} \cdot 94,5 = \frac{2 \cdot 57,79^\circ}{360^\circ} \cdot 94,5$$

$$t = \frac{115,58^\circ}{360^\circ} \cdot 94,5$$

$$t \approx 30,34 \text{ min}$$

Portanto, a razão dos tempos máximo e mínimos fica:

$$\frac{t_{\min}}{t_{\max}} = \frac{30,34}{35,7} \approx 0,85$$

## Grade de correção

- a)
- 1 pontos: Uso correto da terceira lei de Kepler para encontrar o período do Satélite
  - 1 pontos: Dedução correta da geometria de perda de contato, com  $\cos \theta_h = R_T / (R_T + H)$ .
  - 1 ponto: Uso correto da janela completa,  $\Delta t_{\text{vis}} = 2\theta_h / \omega$ .
  - 1 ponto: Valor final aproximadamente 11,5 min.
- b)
- 4 pontos: Desenho esquemático representando corretamente o triângulo esférico formado pelo polo da órbita, centro da sombra e satélite no momento da entrada da sombra
  - 1 pontos: Identificar corretamente o tamanho dos lados de  $90^\circ$  e  $90^\circ + i$
  - 2 ponto: Calcular ângulo alpha por trigonometria plana.
  - 1 pontos: Usar lei dos cossenos esférica.
  - 1 pontos: Identificar que o ângulo  $u$  corresponde a metade do arco percorrido pelo satélite dentro da sombra.
  - 1 pontos: Valor numérico correto de 32 min [30,34].
- c)
- 1 pontos:
  -

**6. Modela Aí: Teorema de Bertrand (30 pontos)** O Teorema de Bertrand constitui um dos resultados mais profundos da mecânica clássica, estabelecendo que os únicos potenciais de força central para os quais todas as órbitas ligadas são fechadas são aqueles proporcionais a  $r^{-1}$  (órbita kepleriana) e a  $r^2$  (oscilação harmônica).

Esse resultado possui consequências diretas e observáveis em sistemas físicos reais. Em particular, ele mostra que a ausência de precessão orbital é um comportamento extremamente especial. Em sistemas reais, pequenas correções ao potencial gravitacional, como efeitos relativísticos, achatamento do corpo central ou perturbações de outros corpos, levam imediatamente ao aparecimento de precessão do periélio.

Nesta questão, será desenvolvida a etapa inicial da dedução desse teorema, restringindo a análise ao regime de pequenas perturbações em órbitas circulares.

- a) **(9 pontos)** Mostre que o movimento tridimensional de uma partícula de massa  $m$  sobre ação de um potencial radial  $V(r)$  é equivalente ao movimento unidimensional em  $r$  de uma partícula  $m$  sobre o potencial efetivo

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2},$$

onde  $L$  é o momento angular orbital do sistema.

- b) (12 pontos) Considere que toda órbita circular, quando levemente perturbada, continue fechada. Prove que essa propriedade implica que o potencial deve necessariamente ser da forma

$$V(r) = kr^n,$$

com  $k$  e  $n$  constantes reais.

- c) (9 pontos) Suponha agora  $V(r) = kr^n$ , com  $kn > 0$ , garantindo a existência de órbitas circulares. Determine a condição necessária sobre  $n$  para que a órbita circular seja estável e o movimento perturbado leve a uma órbita fechada. Além disso, obtenha o desvio angular  $\Delta\phi$  por revolução em função de  $n$ , discutindo os casos para os quais não há precessão.

**Dica:** Se a órbita é fechada, então o período do movimento radial e o período do movimento angular estão em uma razão de números inteiros.

### Solução:

- a) Como a força geratriz do movimento é central, o momento angular é conservado ao longo da trajetória. A partir disso,

$$mr^2\dot{\theta} = L \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

Escrevendo a energia mecânica total do sistema:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\theta})^2}{2} + V(r) \Rightarrow E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Identificando o sistema análogo a o movimento unidimensional em  $r$ , o potencial efetivo será dado por

$$V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

- b) Considerando uma partícula de massa  $m$  com momento angular  $L$ , o potencial efetivo associado ao movimento radial é

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Da conservação da energia,

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{dr}.$$

Para uma órbita circular de raio  $r_0$ , tem-se  $\dot{r} = 0$  e  $\ddot{r} = 0$ , de forma que, tomando a derivada de  $V_{\text{ef}}$ ,

$$\left. \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow V'(r_0) = \frac{L^2}{mr_0^3}.$$

A frequência angular do movimento é, pela definição de momento angular,

$$\omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2} \Rightarrow \omega_\theta^2 = \frac{V'(r_0)}{mr_0}.$$

Expandindo o potencial efetivo até segunda ordem em torno de  $r_0$  e desprezando a constante aditiva, obtemos

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}''(r_0)}{2}(r - r_0)^2.$$

Perceba que essa expressão é análoga a de um oscilador harmônico com  $k = V_{\text{ef}}''(r_0)$  e frequência  $\omega_r^2 = \frac{V_{\text{ef}}''(r_0)}{m}$ .

Derivando duas vezes  $V_{\text{ef}}$  pela definição,

$$V_{\text{ef}}''(r_0) = V''(r_0) + \frac{3L^2}{mr_0^4}.$$

Assim,

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}V_{\text{ef}}''(r_0) = \frac{1}{m} \left( V''(r_0) + \frac{3L^2}{mr_0^4} \right),$$

ou ainda,

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m} \left( V''(r_0) + \frac{3V'(r_0)}{r_0} \right).$$

Logo,

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_\theta^2} = 3 + \frac{r_0 V''(r_0)}{V'(r_0)}.$$

A condição de que todas as órbitas circulares perturbadas sejam fechadas implica que essa razão seja independente de  $r_0$ , isto é,

$$3 + \frac{rV''(r)}{V'(r)} = \text{constante}.$$

Portanto,

$$\frac{rV''}{V'} = C \Rightarrow \frac{V''}{V'} = \frac{C}{r}.$$

Integrando,

$$\ln V' = C \ln r + \text{constante} \Rightarrow V'(r) \propto r^C,$$

e, portanto,

$$V(r) \propto r^{C+1}.$$

Conclui-se que

$$\boxed{V(r) = kr^n}.$$

c) Para  $V(r) = kr^n$ , obtém-se

$$V'(r) = knr^{n-1}, \quad V''(r) = kn(n-1)r^{n-2}.$$

Substituindo no potencial efetivo,

$$\omega_r^2 = \frac{kn(n+2)}{m}r_0^{n-2}, \quad \omega_\theta^2 = \frac{kn}{m}r_0^{n-2}.$$

A condição de estabilidade da órbita circular exige

$$\omega_r^2 > 0 \Rightarrow kn(n+2) > 0.$$

Como  $kn > 0$  por hipótese, segue que

$$\boxed{n + 2 > 0}.$$

Para que a órbita seja fechada, é necessário que o movimento radial e angular sejam comensuráveis, isto é,

$$\boxed{\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{n+2} \in \mathbb{Q}}.$$

O movimento radial perturbado é periódico para uma variação de frequência angular radial de  $2\pi$ , garantindo retorno ao periélio. O ângulo físico descrito durante uma oscilação radial é

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{n+2}}.$$

Assim, o desvio angular por revolução é

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)}.$$

Em particular, não há precessão ( $\Delta\phi = 0$ ) quando

$$\sqrt{n+2} = 1 \Rightarrow \boxed{n = -1},$$

correspondendo ao potencial newtoniano.

### Grade de Correção

- a)
- 1 ponto: Utilizar a conservação do momento angular devido à força central
  - 2 pontos: Escrever a equação do momento angular e isolar  $\dot{\theta}$  ( $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ )
  - 3 pontos: Escrever a energia mecânica total do sistema em coordenadas polares em função de  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $V(r)$
  - 2 pontos: Substituir o resultado de  $\dot{\theta}$  na energia mecânica total e realizar a álgebra corretamente
  - 1 ponto: Identificar os termos resultantes como o potencial efetivo  $V_{\text{eff}}$  análogo ao movimento unidimensional
- b)
- 1 ponto: Escrever a equação de movimento radial a partir da conservação da energia ( $m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$ )
  - 1.5 ponto: Aplicar a condição de órbita circular ( $\ddot{r} = 0$ ) para encontrar  $V'(r_0) = \frac{L^2}{mr_0^3}$
  - 1.5 ponto: Encontrar a frequência angular ( $\omega_{\theta}^2 = \frac{V'(r_0)}{mr_0}$ )
  - 2.5 pontos: Expandir  $V_{\text{eff}}$  até a segunda ordem em torno de  $r_0$  para identificar a frequência radial ( $\omega_r^2 = \frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{m}$ )
  - 1 ponto: Derivar  $V_{\text{eff}}$  duas vezes para encontrar  $V''_{\text{eff}}(r_0)$
  - 1 ponto: Montar a razão das frequências ( $\frac{\omega_r^2}{\omega_{\theta}^2}$ )
  - 1.5 pontos argumentar que a expressão  $3 + \frac{r_0 V''(r_0)}{V'(r_0)}$  deve ser constante para que as órbitas perturbadas sejam fechadas
  - 2 pontos: Integrar a equação diferencial resultante corretamente para concluir que  $V(r) = kr^n$
- c)
- 1 ponto: Encontrar as derivadas  $V'(r)$  e  $V''(r)$
  - 2 pontos: Substituir as derivadas na relação do item anterior para encontrar a razão  $\frac{\omega_r^2}{\omega_{\theta}^2} = n + 2$
  - 1 ponto: Encontrar a condição para a estabilidade da órbita ( $\omega_r^2 > 0$ ), concluindo que  $n > -2$ , visto que  $kn > 0$ )
  - 1 ponto: Impor a condição de órbita fechada a partir da dica
  - 2 pontos: Obter a expressão do desvio angular por revolução do movimento radial ( $\Delta\phi = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$ )
  - 2 pontos: Discutir os casos em que não há precessão, identificando corretamente  $n = -1$

7. **Modela aí: Envelope Estelar (40 pontos)** Consideremos uma estrela esférica de raio  $r$  e temperatura efetiva  $T_0$ , envolta por um envelope esférico homogêneo e em equilíbrio térmico, de raio  $R$  e espessura desprezível. Seja  $\Delta S$  um elemento infinitesimal de área da casca. Assuma que a casca tem absorvidade  $\alpha$ , emissividade  $\epsilon$  e que se comporta como um corpo cinzento perfeitamente lambertiano, ou seja, a radiação térmica emitida possui intensidade específica dada por

$$I = \frac{dE}{dt dA \cos \theta d\Omega} = \frac{\epsilon \sigma T^4}{\pi}$$

- a) **(7 pontos)** Calcule a potência absorvida por  $\Delta S$ , gerada pela estrela, em função de  $T_0$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\alpha$  e  $S$ . Negligencie qualquer tipo de reflexão interna, ou seja, toda radiação que incide ou é absorvida ou transmitida.
- b) **(15 pontos)** Calcule a potência absorvida por  $\Delta S$  devido à radiação da própria casca, em função da temperatura da casca  $T$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\alpha$  e  $S$ .

**Dado:**

$$\int \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sin^2 \theta}{2} + C$$

- c) **(6 pontos)** Ache  $T$  em função de  $T_0$ ,  $r$ ,  $\alpha$  e  $R$ .
- d) **(8 pontos)** Calcule a máxima e a mínima diferença de magnitude  $\Delta m$  que este envelope pode gerar na estrela e os valores de  $\alpha$  e da razão  $r/R$  associados a cada uma dessas situações.
- e) **(4 pontos)** Discuta as consequências físicas do intervalo de variação de magnitude obtido no item anterior e suas implicações observacionais.

**Solução:**

- a) Para calcular a potência absorvida com rigor radiométrico, utilizamos a intensidade específica da estrela, dada por  $I = \frac{\sigma T_0^4}{\pi}$ . Um elemento  $\Delta S$  na casca, cuja normal aponta diretamente para o centro da estrela, absorve radiação de um elemento emissor estelar. A potência diferencial é:

$$dP_{\text{abs}} = \alpha I \cos \theta d\Omega \Delta S$$

onde  $\theta$  é o ângulo de incidência na casca. Integrando sobre o ângulo sólido visível da estrela (um cone de semiabertura  $\theta_0$  tal que  $\sin \theta_0 = \frac{r}{R}$ ):

$$P_{\star \rightarrow S} = \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \left( \frac{\sigma T_0^4}{\pi} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \Delta S$$

A integral resulta em:

$$P_{\star \rightarrow S} = 2\pi\alpha \left( \frac{\sigma T_0^4}{\pi} \right) \Delta S \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\theta_0} = \alpha \sigma T_0^4 \Delta S \sin^2 \theta_0$$

Substituindo a relação geométrica  $\sin \theta_0 = \frac{r}{R}$ , obtemos:

$$P_{\star \rightarrow S} = \alpha \Delta S \sigma T_0^4 \left( \frac{r}{R} \right)^2.$$

**Observação:** Este mesmo resultado poderia ser obtido macroscopicamente. A estrela emite de forma isotrópica no espaço uma luminosidade total  $L = 4\pi r^2 \sigma T_0^4$ . Dessa forma, o fluxo radiativo que atravessa uma esfera de raio  $R$  é  $F = \frac{L}{4\pi R^2}$ . A potência interceptada por  $\Delta S$  é simplesmente a área multiplicada por esse fluxo e pela absorvidade:

$$P_{\star \rightarrow S} = \alpha F \Delta S = \alpha \left( \frac{4\pi r^2 \sigma T_0^4}{4\pi R^2} \right) \Delta S = \alpha \Delta S \sigma T_0^4 \left( \frac{r}{R} \right)^2.$$

- b) A casca também emite radiação que atinge outras partes do próprio envelope. A intensidade específica da radiação da casca é  $I_c = \frac{\epsilon \sigma T^4}{\pi}$ . O elemento  $\Delta S$  "enxerga" o restante da casca em todo o seu hemisfério interno, exceto na região sólida bloqueada pela própria estrela central, o cone de semiabertura  $\theta_0$ . Logo, a integral do ângulo sólido da casca vai de  $\theta_0$  até  $\pi/2$ :

$$P_{c \rightarrow S} = \alpha \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \left( \frac{\epsilon \sigma T^4}{\pi} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \Delta S$$

$$P_{c \rightarrow S} = 2\alpha \epsilon \sigma T^4 \Delta S \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta_0}^{\pi/2} = \alpha \epsilon \sigma T^4 \Delta S (1 - \sin^2 \theta_0)$$

Pela geometria, substituímos novamente  $\sin \theta_0 = \frac{r}{R}$ :

$$P_{c \rightarrow S} = \alpha \epsilon \Delta S \sigma T^4 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

- c) Pelo equilíbrio térmico local, a potência total emitida pelo elemento de área deve igualar a potência total que ele absorve da estrela e do restante do envelope. Como o enunciado define o comportamento de corpo cinzento, adotamos  $\alpha = \epsilon$ :

$$2\epsilon \Delta S \sigma T^4 = P_{\star \rightarrow S} + P_{c \rightarrow S}$$

$$2\alpha \Delta S \sigma T^4 = \alpha \Delta S \sigma T_0^4 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \alpha^2 \Delta S \sigma T^4 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Cancelando o termo comum  $\alpha \Delta S \sigma$  de ambos os lados:

$$2T^4 = T_0^4 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \alpha T^4 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Isolando a temperatura  $T$ :

$$T^4 \left\{ 2 - \alpha \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} = T_0^4 \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

$$T = T_0 \left\{ \frac{\left( \frac{r}{R} \right)^2}{2 - \alpha \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{4}}.$$

- d) A intensidade bolométrica total observada é a soma da radiação direta estelar que consegue atravessar a casca e da radiação térmica emitida para o exterior pela face externa do envelope.

$$I_{\text{obs}} = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 (1 - \alpha) + 4\pi R^2 \epsilon \sigma T^4$$

Para analisar a variação de magnitude, consideramos a razão  $p$  entre a intensidade observada e a intensidade isolada da estrela:

$$p = \frac{I_{\text{obs}}}{4\pi r^2 \sigma T_0^4} = (1 - \alpha) + \alpha \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4$$

Substituindo a expressão de  $T^4$  obtida no item (c) e definindo a variável  $x = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ , temos:

$$p(x) = (1 - \alpha) + \frac{\alpha}{2 - \alpha(1 - x)}$$

Para o Valor Mínimo, em  $x = 1$  (envelope colado na fotosfera), temos  $p(1) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ . O menor valor absoluto ocorre quando a casca é perfeitamente negra ( $\alpha = 1$ ):

$$p_{\text{min}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\alpha = 1, \frac{r}{R} = 1).$$

Para o Valor Máximo, no limite  $x \rightarrow 0$  (envelope extremamente expandido), chegamos a  $p(0) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2 - \alpha}$ . É trivial notar que para  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ , essa função resulta estritamente em  $p = 1$ , e uma análise de derivadas mostra que ela nunca ultrapassa a unidade.

$$p_{\text{max}} = 1 \quad (\alpha \rightarrow 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ com } \frac{r}{R} \rightarrow 0).$$

Pela relação de Pogson, calculamos as diferenças de magnitude máxima e mínima:

$$\Delta m = -2.5 \log p \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta m_{\text{min}} = 0} \quad (\alpha \rightarrow 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ com } \frac{r}{R} \rightarrow 0),$$

$$\boxed{\Delta m_{\text{max}} \approx +0.75} \quad (\alpha = 1, \frac{r}{R} = 1).$$

- e) A magnitude de ofuscamento máxima ditada por este sistema é um limite físico bem definido de  $\Delta m \approx 0.75$ . Este regime peculiar ocorre apenas quando uma casca opaca ( $\alpha = 1$ ) se aproxima arbitrariamente da superfície da estrela. Neste estado, o envelope atinge sua temperatura teórica limite de  $\frac{T_0}{\sqrt[4]{2}}$ , operando como um escudo térmico extremo que irradia metade de sua energia para o espaço profundo e a outra metade de volta contra a própria estrela, em um efeito de aprisionamento radiativo local.

Por fim, no limite extremo oposto de um envelope opaco e infinitamente extenso ( $r/R \rightarrow 0$  com  $\alpha \rightarrow 1$ ), o modelo prevê uma variação de magnitude bolométrica

nula ( $\Delta m = 0$ ). Isso ocorre pois a casca absorve brutalmente toda a emissão original e compensa a perda emitindo integralmente a energia na forma de um gigante excesso infravermelho ditado por sua monstruosa área projetada e temperatura gélida. Embora observadores presos a limitadas faixas ópticas pudessem classificar o sistema como um severo ofuscamento estelar, observações em espectro bolométrico amplo tornariam a presença circumestelar transparente no fluxo luminoso total detectado.

### Grade de Correção

i

- a)
- 2 pts: Multiplicar o fluxo incidente pela área ( $\Delta S$ ) e pela sua absorvidade ( $\alpha$ );
  - 5 pts: Encontrar a expressão algébrica correta  $P_a = \alpha \sigma \Delta S \left(\frac{r^2}{R^2}\right) / T_0^4$ .
- b)
- 3 pts: Construir a relação  $dP \propto \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$ ;
  - 5 pts: Deduzir que a casca recebe radiação de si em todo o hemisfério, exceto no cone de sombra gerado pela estrela. Limites de integração em  $\theta$  devem ser de  $\theta_0$  até  $\pi/2$ ;
  - 3 pts: Substituir  $I_c = \frac{\epsilon \sigma T^4}{\pi}$  com as constantes  $\alpha$ ,  $\Delta S$  e resolver a integral trigonométrica ;
  - 2 pts: Aplicar a relação geométrica  $\sin \theta_0 = \frac{r}{R}$ ;
  - 2 pts: Solução algébrica final correta
- c)
- 2 pts: Escrever a equação de equilíbrio, igualando a potência total emitida à soma das potências absorvidas;
  - 3 pts: Adotar a absorvidade igual à emissividade  $\alpha = \epsilon$ ;

- 1 pt: Isolar a temperatura  $T$  de forma algebricamente correta.
- d)
  - 2 pts: Somar a radiação transmitida  $(1 - \alpha)$  com a emitida pela face externa;
  - 1 pt: Razão  $p(x)$  entre  $I_{\text{obs}}$  e a intensidade isolada da estrela, com a expressão de  $T^4$ ;
  - 2 pts: Análise dos Limites da razão  $p(x)$ ;
  - 2 pts: Utilizar a relação  $\Delta m = -2.5 \log p$  com os valores de  $p$ ;
  - 1 pt: Resposta final correta  $\Delta m_{\text{min}} = 0$  e  $\Delta m_{\text{max}} \approx +0.75$ .
- e)
  - 2 pts: Explicar que a casca colada aprisiona a radiação, reemitindo metade da energia de volta para a estrela e metade para o espaço;
  - 2 pts: Explicar que uma casca distante não sofre obstrução, reemitindo a energia para o espaço e conservando o fluxo bolométrico.

**8. Geométrio e a falta do que fazer (40 pontos)** Após ficar entediado sem ter o que fazer no Maceió Institute of Technology, Geométrio começou a estudar Pulsares recém-nascidos. Ele observou um em específico. O pulsar (estrela de nêutrons) possuía momento de inércia  $I$ , campo magnético superficial dipolar  $B$ , raio médio  $R$  e elipticidade  $\epsilon$  no equador, e girava com velocidade angular  $\Omega$ .

Após uma rigorosa análise, ele notou que o pulsar perde energia rotacional por dois mecanismos simultâneos, cujas luminosidades são dadas por:

$$\text{Radiação de Dipolo Magnético: } L_{\text{dip}} = \frac{2B^x R^y}{3c^z} \Omega^w$$

$$\text{Radiação de Ondas Gravitacionais: } L_{\text{GW}} = \frac{32GI^{x'} \epsilon^2}{5c^{y'}} \Omega^{z'}$$

Mas Geométrio esqueceu os valores numéricos de  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ . Ele também mediu o ângulo entre o momento magnético e o eixo de rotação e, para sua surpresa, o mesmo era de exatamente  $\pi/2$ .

**Nota:** Considere as equações no sistema CGS/Gaussiano, onde o campo magnético  $B$  é medido em Gauss (G), dispensando o uso da constante de permeabilidade do vácuo. Também é útil destacar que Gauss<sup>2</sup> tem as dimensões de densidade de energia.

- a) **(8 pontos)** Encontre os valores numéricos de  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  e escreva as fórmulas corretas para  $L_{\text{dip}}$  e  $L_{\text{GW}}$ . (Note que a elipticidade  $\epsilon$  é uma quantidade adimensional).

- b) **(14 pontos)** Utilizando conservação de energia, mostre que a variação da velocidade angular pode ser escrita na forma  $\dot{\Omega} = -(\alpha\Omega^3 + \beta\Omega^5)$ , determinando claramente quais são os valores das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  em função de  $R$ ,  $I$ ,  $B$ ,  $\epsilon$ ,  $G$  e  $c$ .

**Dica:** A energia de um objeto de momento de inércia  $I$  girando com velocidade angular  $\Omega$  é dada por

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\Omega^2$$

- c) **(3 pontos)** Para calcular parâmetros mais avançados, Geométrio precisou da segunda derivada temporal da velocidade angular. Usando a expressão encontrada no item anterior, encontre  $\ddot{\Omega}$  em função de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Omega$  e  $\dot{\Omega}$ .
- d) **(10 pontos)** O índice de frenagem é um parâmetro empírico definido por  $n = \frac{\Omega\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}$ . Para um pulsar dominado apenas por magnetismo,  $n = 3$ ; para um pulsar dominado apenas por ondas gravitacionais,  $n = 5$ . Utilizando os resultados dos itens anteriores, demonstre que para o pulsar misto encontrado por Geométrio, o índice de frenagem observado no instante  $t$  é dado por:

$$n(\Omega) = 3 + \frac{2}{1 + \mathcal{R}(\Omega)}$$

Onde  $\mathcal{R}(\Omega) = \frac{L_{dip}}{L_{GW}}$  é a razão entre a luminosidade magnética e a gravitacional no instante medido.

- e) **(5 pontos)** Ao olhar para outro pulsar, Geométrio rapidamente lembrou do seu amigo King-Crab, uma vez que o outro pulsar era um "Crab-like" observado com frequência  $f = 30$  Hz e índice de frenagem medido em  $n = 2,5$ . Explique fisicamente por que valores de  $n < 3$  são frequentemente medidos na realidade. Qual premissa do modelo acima (que prevê  $3 \leq n \leq 5$ ) deve estar "falhando"?

**Dica:** O modelo assume  $I$ ,  $B$  e o ângulo de inclinação como grandezas imutáveis. O que pode estar acontecendo com o pulsar ao longo do tempo?

### Solução:

- (a) Para encontrar os expoentes, devemos fazer a análise dimensional de ambas as equações. No sistema CGS, as dimensões fundamentais são Massa ( $M$ ), Comprimento ( $L$ ) e Tempo ( $T$ ). A dimensão de luminosidade (potência) é  $[L_{lum}] = ML^2T^{-3}$ .

Para o campo magnético  $B$  em Gauss, a densidade de energia é  $[B^2] = \text{erg}/\text{cm}^3 = ML^{-1}T^{-2}$ , logo  $[B] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$ . Outras dimensões relevantes:  $[R] = L$ ,  $[c] = LT^{-1}$ ,  $[\Omega] = T^{-1}$ ,  $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$ ,  $[I] = ML^2$ . A elipticidade  $\epsilon$  é adimensional.

Para  $L_{dip}$ :

$$\begin{aligned} [L_{dip}] &= [B]^x [R]^y [c]^{-z} [\Omega]^w \\ ML^2T^{-3} &= (M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1})^x (L)^y (LT^{-1})^{-z} (T^{-1})^w \\ ML^2T^{-3} &= M^{x/2}L^{-x/2+y-z}T^{-x+z-w} \end{aligned}$$

Igualando os expoentes:

- Para  $M$ :  $1 = x/2 \implies \mathbf{x} = 2$
- Para  $L$ :  $2 = -x/2 + y - z \implies 2 = -1 + y - z \implies y - z = 3$
- Para  $T$ :  $-3 = -x + z - w \implies -3 = -2 + z - w \implies z - w = -1$

Como o momento de dipolo magnético é proporcional ao volume da estrela, sabemos que  $m \propto BR^3$ . Como a luminosidade depende de  $m^2$ , teremos  $y = 3x = 6$ . Substituindo nas relações acima:  $6 - z = 3 \implies \mathbf{z} = 3$   $3 - w = -1 \implies \mathbf{w} = 4$

Portanto:  $x = 2, y = 6, z = 3, w = 4$ .

$$L_{dip} = \frac{2B^2R^6}{3c^3}\Omega^4$$

Para  $L_{GW}$ :

$$\begin{aligned} [L_{GW}] &= [G][I]^{x'}[c]^{-y'}[\Omega]^{z'} \\ ML^2T^{-3} &= (L^3M^{-1}T^{-2})(ML^2)^{x'}(LT^{-1})^{-y'}(T^{-1})^{z'} \\ ML^2T^{-3} &= M^{-1+x'}L^{3+2x'-y'}T^{-2+y'-z'} \end{aligned}$$

Igualando os expoentes:

- Para  $M$ :  $1 = -1 + x' \implies \mathbf{x}' = 2$
- Para  $L$ :  $2 = 3 + 2(2) - y' \implies 2 = 7 - y' \implies \mathbf{y}' = 5$
- Para  $T$ :  $-3 = -2 + 5 - z' \implies -3 = 3 - z' \implies \mathbf{z}' = 6$

Portanto:  $x' = 2, y' = 5, z' = 6$ .

$$L_{GW} = \frac{32GI^2\epsilon^2}{5c^5}\Omega^6$$

(b) A energia rotacional é  $E_{rot} = \frac{1}{2}I\Omega^2$ . Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{dE}{dt} = I\Omega \frac{d\Omega}{dt} = I\Omega\dot{\Omega}$$

Pela conservação da energia, a taxa de perda de energia rotacional é igual à soma das luminosidades radiadas:

$$\begin{aligned} I\Omega\dot{\Omega} &= -L_{dip} - L_{GW} \\ I\Omega\dot{\Omega} &= -\frac{2B^2R^6}{3c^3}\Omega^4 - \frac{32GI^2\epsilon^2}{5c^5}\Omega^6 \end{aligned}$$

Dividindo toda a equação por  $I\Omega$ , isolamos  $\dot{\Omega}$ :

$$\dot{\Omega} = -\left(\frac{2B^2R^6}{3Ic^3}\right)\Omega^3 - \left(\frac{32GI\epsilon^2}{5c^5}\right)\Omega^5$$

Que tem exatamente o formato  $\dot{\Omega} = -(\alpha\Omega^3 + \beta\Omega^5)$ , onde:

$$\alpha = \frac{2B^2 R^6}{3Ic^3} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{32GI\epsilon^2}{5c^5}$$

- (c) Derivando  $\dot{\Omega} = -\alpha\Omega^3 - \beta\Omega^5$  em relação ao tempo e aplicando novamente a regra da cadeia para  $\Omega$ :

$$\ddot{\Omega} = \frac{d}{dt}(-\alpha\Omega^3 - \beta\Omega^5) = -3\alpha\Omega^2\dot{\Omega} - 5\beta\Omega^4\dot{\Omega}$$

Fatorando  $\dot{\Omega}$ :

$$\ddot{\Omega} = -(3\alpha\Omega^2 + 5\beta\Omega^4)\dot{\Omega}$$

- (d) A definição do índice de frenagem é  $n = \frac{\Omega\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}$ . Substituindo a expressão de  $\ddot{\Omega}$  encontrada no item (c):

$$n(\Omega) = \frac{\Omega \left[ -(3\alpha\Omega^2 + 5\beta\Omega^4)\dot{\Omega} \right]}{\dot{\Omega}^2} = \frac{-(3\alpha\Omega^3 + 5\beta\Omega^5)}{\dot{\Omega}}$$

Substituindo  $\dot{\Omega} = -(\alpha\Omega^3 + \beta\Omega^5)$  no denominador:

$$n(\Omega) = \frac{3\alpha\Omega^3 + 5\beta\Omega^5}{\alpha\Omega^3 + \beta\Omega^5}$$

Agora, precisamos expressar isso em termos de  $\mathcal{R}(\Omega) = \frac{L_{dip}}{L_{GW}}$ . Note que:

$$\mathcal{R}(\Omega) = \frac{I\alpha\Omega^4}{I\beta\Omega^6} = \frac{\alpha}{\beta\Omega^2}$$

Dividindo o numerador e o denominador da expressão de  $n(\Omega)$  por  $\beta\Omega^5$ :

$$n(\Omega) = \frac{3\left(\frac{\alpha}{\beta\Omega^2}\right) + 5}{\left(\frac{\alpha}{\beta\Omega^2}\right) + 1} = \frac{3\mathcal{R}(\Omega) + 5}{\mathcal{R}(\Omega) + 1}$$

Reescrevendo a fração para chegar na forma do enunciado:

$$n(\Omega) = \frac{3\mathcal{R}(\Omega) + 3 + 2}{\mathcal{R}(\Omega) + 1} = \frac{3(\mathcal{R}(\Omega) + 1) + 2}{\mathcal{R}(\Omega) + 1} = 3 + \frac{2}{1 + \mathcal{R}(\Omega)}$$

- (e) O modelo físico deduzido assume que o momento de inércia  $I$ , o campo magnético  $B$  e o ângulo de inclinação magnética (fixado em  $\pi/2$ ) são estritamente constantes ao longo do tempo. Na realidade (como no caso do pulsar do Caranguejo com  $n = 2,5$ ), se o valor medido é  $n < 3$ , isso indica que a taxa de perda de rotação não depende apenas de um dipolo e ondas gravitacionais com parâmetros estáticos.

Fisicamente, a premissa de constantes imutáveis falha por alguns motivos possíveis:

- O campo magnético ( $B$ ) pode estar aumentando com o tempo (devido a correntes internas).
- O ângulo entre o momento magnético e o eixo de rotação pode estar mudando ao longo do tempo (tendendo a se alinhar).
- Podem existir perdas adicionais de energia angular levadas por ventos de partículas (ventos do pulsar) que alteram o torque agindo na estrela.

Qualquer alteração temporal nessas "constantes" introduziria termos extras nas derivadas temporais de  $\dot{\Omega}$ , alterando o valor do índice de frenagem esperado.

#### Grade de Correção

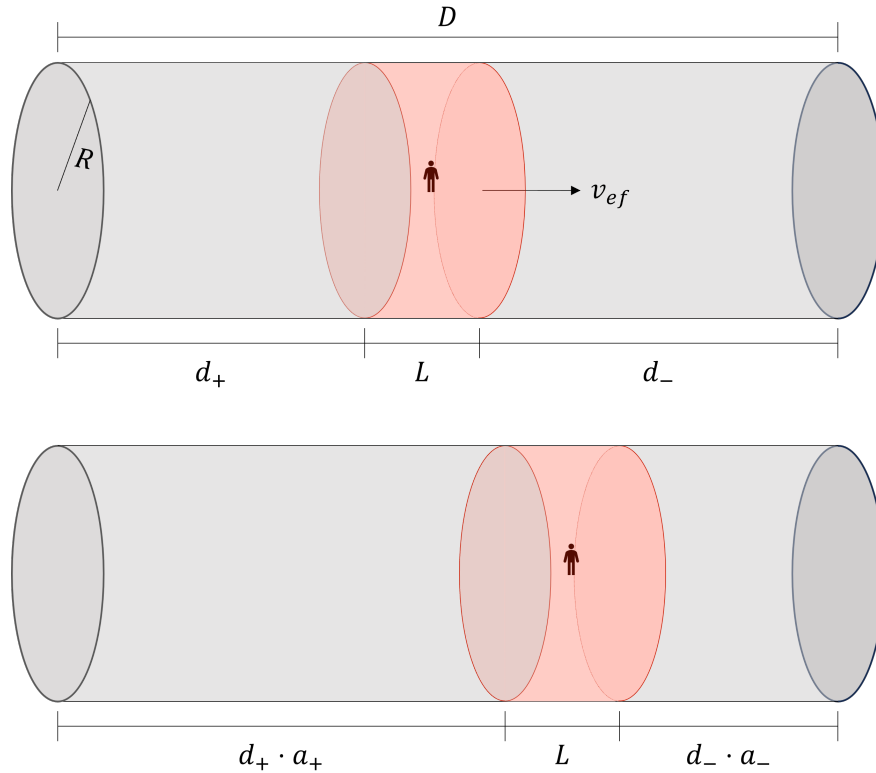
- a)
- 1.0 pt: Unidades corretas de  $R$ ,  $c$ ,  $\Omega$ ,  $G$  e  $I$  (necessário todos corretos para pontuar);
  - 0.5 pt: Unidade correta da luminosidade em unidades de comprimento, massa e tempo;
  - 1.0 pt: Unidade correta de  $B$  em unidades de comprimento, massa e tempo;
  - 1.5 pts: Montar os sistemas comparando os expoentes de L, M e T;
  - 2.0 pts: Sistema de equações correto (necessário todos corretos para pontuar);
  - 2.0 pt: Solução correta do sistema e expressão final correta.
- b)
- 1.0 pt: Usou a dica  $E_{rot} = \frac{1}{2}I\Omega^2$ ;
  - 3.0 pts: Derivou corretamente  $\frac{dE}{dt} = I\Omega\dot{\Omega}$ ;

- 3.5 pts: Conservação de energia  $\frac{dE}{dt} = -L_{dip} - L_{GW}$ ;
  - 2.5 pts: Substituir expressões de  $\frac{dE}{dt}$  e das luminosidades do item (a);
  - 1.0 pt: Comparar  $\dot{\Omega} = -(\alpha\Omega^3 + \beta\Omega^5)$  com expressão de  $\dot{\Omega}$  obtida;
  - 1.5 pts:  $\alpha$  correto;
  - 1.5 pts:  $\beta$  correto.
- c) • 3.0 pts: Sistema de equações correto (necessário todos corretos para pontuar).
- d) • 1.0 pt: Substituir  $\ddot{\Omega}$  e  $\dot{\Omega}$  na expressão fornecida de  $n(\Omega)$ ;
- 3.0 pts: Desenvolvimento algébrico correto para obter  $n(\Omega) = \frac{3\alpha\Omega^3 + 5\beta\Omega^5}{\alpha\Omega^3 + \beta\Omega^5}$ ;
  - 2.0 pts: Perceber que  $\mathcal{R}(\Omega) = \frac{\alpha}{\beta\Omega^2}$ ;
  - 2.0 pts: Manipulação algébrica para obter  $n(\Omega) = \frac{3\mathcal{R}(\Omega)+5}{\mathcal{R}(\Omega)+1}$ ;
- 2.0 pts: Manipulação algébrica para obter corretamente  $n(\Omega) = 3 + \frac{2}{1+\mathcal{R}(\Omega)}$ .
- e) • 5.0 pts: Explicação correta.

**9. Gurjinho perdeu de novo o ônibus (50 pontos)** Cansado de ser humilhado pela cinemática do transporte público, Gurjinho resolve usar a nave de dobra espacial que estava guardada na garagem: a Millennium Falcon II.

Seu funcionamento pode ser modelado como um encapsulamento cilíndrico que se estende da origem até o destino. O passageiro viaja preso a um pequeno compartimento ( $L \ll D$ ), que adquire uma velocidade efetiva  $v_{ef}$  conforme as extremidades se dilatam ou se contraem.

A dilatação e a contração podem ser escritas em função de fatores de escala,  $a_{\pm}$ . Ambas as extremidades podem ser pensadas como componentes cosmológicas com respectivas densidades  $\rho_+$  e  $\rho_-$ , cada qual com sua própria dependência com o fator de escala. Ou seja, essas componentes não necessariamente caem com  $a^{-3}$ , nem caem necessariamente com a mesma dependência em  $a$ .



- a) (4 pontos) Vamos pensar em uma das extremidades, e supor que ela atue como uma componente cosmológica distribuída uniformemente com densidade  $\rho$ . Mais especificamente, vamos supor que ela possa ser associada a um campo gravitacional. O comprimento dessa extremidade é  $l_{\pm} = d_{\pm} \cdot a_{\pm}$ .

Isolando essa extremidade e definindo o eixo do cilindro como eixo  $x$ , com  $x = 0$  no centro, o campo gravitacional ao longo do eixo é dado por

$$g_x(x) = -2\pi G\rho \left[ 2x - \sqrt{\left(x + \frac{l_{\pm}}{2}\right)^2 + R^2} + \sqrt{\left(x - \frac{l_{\pm}}{2}\right)^2 + R^2} \right]$$

Aproximando essa expressão no regime  $R \ll l_{\pm}$ , obtenha uma expressão aproximada para  $g_x(l_{\pm}/2)$  em função de  $\rho$  e  $R$ .

- b) (5 pontos) O comprimento total no cilindro cresce com seu fator de escala  $a_{\pm}(t)$ , de tal maneira que sempre podemos afirmar  $l_{\pm}(t) = d_{\pm}a_{\pm}(t)$ . Considerando uma partícula de teste posicionada exatamente no topo do cilindro, a equação de movimento do fator de escala assume a forma

$$\ddot{a}_{\pm} = -C_1\rho_{\pm}$$

Determine a expressão para  $C_1$  em função de  $G$ ,  $R$  e  $d_{\pm}$ .

- c) (5 pontos) Considere que a extremidade frontal ( $-$ ) apresente equação de estado  $P = w\rho c^2$ . Considerando uma expansão adiabática para tampa, encontre a expressão de  $\rho_-$  em função de  $a_{(t)-}$ ,  $a_{0-}$ ,  $\rho_{0-}$  e  $w$ .
- d) (4 pontos) Sabendo que a Millennium Falcon II no modo dobra espacial se locomove sempre em um movimento uniformemente acelerado, determine o valor de  $w$  da componente associada à extremidade frontal.

- e) (12 pontos) Considere que a extremidade frontal (–) opera conforme o encontrado no item anterior, enquanto a extremidade traseira mantém o tamanho total do sistema  $D$  sempre constante. Sabendo que  $a_{0\pm} = 1$  e  $\dot{a}_{0\pm} = 0$ , determine o fator de escala  $a_+(t)$  da extremidade traseira e sua derivada segunda  $\ddot{a}_+(t)$  em função de  $d_-$ ,  $d_+$ ,  $\rho_{0-}$  e  $R$ . Desconsidere o comprimento  $L$ .
- f) (8 pontos) Determine a expressão da densidade  $\rho_+(t)$  da extremidade traseira em função de  $\rho_{0-}$ ,  $d_-$  e  $d_+$ . Em seguida, identifique uma propriedade física fundamental desse fluido que o distingue da matéria usual.
- g) (12 pontos) Suponha que a viagem de Gurjinho seja muito longa, para muito longe da Terra. Determine a expressão para o tempo máximo decorrido  $\Delta t_{\max}$ , após o início da viagem, o qual Gurjinho ainda é capaz de se comunicar com a Terra. Considere que há comunicação sempre que alguma informação emitida por Gurjinho pode alcançar a Terra. Deixe sua expressão em função de  $R$ ,  $\rho_{0-}$  e  $d_+$ .

**Solução:**

- (a) Avaliando o campo gravitacional na face da tampa, em  $x = l_{\pm}/2$ , temos

$$g_x\left(\frac{l_{\pm}}{2}\right) = -2\pi G\rho\left[l_{\pm} - \sqrt{l_{\pm}^2 + R^2} + R\right]$$

No regime  $R \ll l_{\pm}$ , expandimos

$$\sqrt{l_{\pm}^2 + R^2} \simeq l_{\pm} + \frac{R^2}{2l_{\pm}}$$

de modo que, na aproximação de primeira ordem em  $R/l_{\pm}$ ,

$$g_x\left(\frac{l_{\pm}}{2}\right) = -2\pi G\rho R$$

- (b) A posição da face da tampa é dada por

$$x(t) = \frac{l_{\pm}(t)}{2} = \frac{d_{\pm}}{2}a_{\pm}(t)$$

o que implica

$$\ddot{x} = \frac{d_{\pm}}{2}\ddot{a}_{\pm}$$

Igualando a aceleração ao campo gravitacional,

$$\frac{d_{\pm}}{2}\ddot{a}_{\pm} = -2\pi G\rho_{\pm}R$$

obtemos

$$\ddot{a}_{\pm} = -\frac{4\pi GR}{d_{\pm}}\rho_{\pm}$$

Portanto,

$$C_1 = \frac{4\pi GR}{d_{\pm}}$$

(c) Pela Primeira Lei da Termodinâmica,

$$dU + P dV = 0$$

pois a expansão é adiabática.

Escrevendo  $U = \rho c^2 V$ , segue que

$$d(\rho c^2 V) + P dV = 0 \Rightarrow c^2 V d\rho + (\rho c^2 + P) dV = 0$$

Usando  $P = w\rho c^2$ , obtemos

$$d\rho + (1 + w)\rho \frac{dV}{V} = 0.$$

Como o volume da tampa é proporcional ao seu comprimento,

$$V \propto a_-(t) \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{da_-}{a_-}$$

Logo,

$$\frac{d\rho_-}{\rho_-} = -(1 + w) \frac{da_-}{a_-}$$

Integrando entre o estado inicial e o instante  $t$ ,

$$\rho_-(t) = \rho_{0-} \left( \frac{a_-(t)}{a_{0-}} \right)^{-(1+w)}$$

(d) A velocidade efetiva é definida por

$$v_{ef}(t) = -\dot{l}_-(t) = -d_- \dot{a}_-(t)$$

Como o movimento é uniformemente acelerado, segue que

$$\ddot{a}_-(t) = \text{constante}.$$

Por outro lado, do item (a),

$$\ddot{a}_- = -\frac{4\pi G R}{d_-} \rho_-$$

Para que  $\ddot{a}_-$  seja constante, é necessário que  $\rho_-$  seja constante no tempo. Pela expressão obtida no item (b), isso ocorre apenas se

$$1 + w = 0 \Rightarrow \boxed{w = -1}$$

(e) A condição de ausência de deformação global implica

$$d_- a_-(t) + d_+ a_+(t) = D \quad \text{com} \quad D = d_- + d_+$$

Logo,

$$a_+(t) = \frac{D - d_- a_-(t)}{d_+}$$

Como  $w = -1$ , segue do item (a) que  $\ddot{a}_-$  é constante. Com as condições iniciais  $a_{0-} = 1$  e  $\dot{a}_{0-} = 0$ ,

$$a_-(t) = 1 + \frac{\ddot{a}_-}{2} t^2$$

Substituindo,

$$a_+(t) = 1 - \frac{d_- \ddot{a}_-}{d_+} t^2$$

Usando  $\ddot{a}_- = -\frac{4\pi GR}{d_-} \rho_{0-}$ ,

$$a_+(t) = 1 + \frac{d_-}{d_+} 2\pi GR \rho_{0-} t^2$$

Derivando duas vezes,

$$\ddot{a}_+(t) = \frac{d_-}{d_+} 4\pi GR \rho_{0-}$$

(f) Aplicando novamente a equação dinâmica do item (a),

$$\ddot{a}_+ = -\frac{4\pi GR}{d_+} \rho_+$$

e igualando com o resultado anterior,

$$\frac{d_-}{d_+} 4\pi GR \rho_{0-} = -\frac{4\pi GR}{d_+} \rho_+$$

obtemos

$$\rho_+ = -\frac{d_-}{d_+} \rho_{0-}$$

Assim, a densidade é negativa, caracterizando um fluido de massa efetiva negativa, o que o distingue da matéria usual.

(g) Vamos trabalhar com coordenadas comóveis. Em um intervalo  $dt$ , um raio de luz trafega um espaço:

$$ds = c \cdot dt$$

O que, em coordenadas comóveis, se torna:

$$ds' = \frac{c \cdot dt}{a_+(t)}$$

Se a mensagem for emitida em  $t_1$ , precisamos que ela percorra a distância  $d_+$  em um tempo finito. No limite:

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{c \cdot dt}{a_+(t)} = d_+$$

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{c \cdot dt}{1 + \frac{d_-}{d_+} 2\pi GR\rho_0 t^2} = d_+$$

Seja  $\theta$  no primeiro quadrante tal que:

$$\tan(\theta) = \sqrt{\frac{d_-}{d_+} 2\pi GR\rho_0 t}$$

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{d_+}{d_-} \cdot \frac{1}{2\pi GR\rho_0}} \cdot \sec^2(\theta) d\theta$$

Substituindo na integral:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2} c \cdot \sqrt{\frac{d_+}{d_-} \cdot \frac{1}{2\pi GR\rho_0}} \cdot \frac{\sec^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} d\theta = d_+$$

Sabemos que  $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$

$$c \cdot \sqrt{\frac{d_+}{d_-} \cdot \frac{1}{2\pi GR\rho_0}} \cdot \int_{\theta_1}^{\pi/2} d\theta = d_+$$

$$c \cdot \sqrt{\frac{d_+}{d_-} \cdot \frac{1}{2\pi GR\rho_0}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = d_+$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{c} \cdot \sqrt{2\pi GR\rho_0 d_+ d_-}$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{d_+}{d_-} \cdot \frac{1}{2\pi GR\rho_0}} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{c} \cdot \sqrt{2\pi GR\rho_0 d_+ d_-}\right)$$

**Solução:**

### Grade de Correção

- a) • 2 pontos: Aproximação de Bernoulli, Taylor ou outra aproximação equivalente para primeira ordem;  
 • 2 pontos: Expressão final simplificada;  
 • -1 ponto: Não deixar a expressão em função de  $\rho$  e  $R$ ;  
 • -1 ponto: Esquecer de tirar o  $R$  da raiz, ou seja, assumir implicitamente que  $\sqrt{R^2} = R^2$  de algum modo.
- b) • 3 pontos: Igualar a aceleração ao campo gravitacional;  
 • 2 pontos: Coeficiente  $C_1$  correto;  
 • -1 ponto: Esquecer o fator 2 ao transformar de  $g$  para  $\ddot{a}$ .
- c) • 1 ponto: Primeira lei da termodinâmica em forma diferencial;  
 • 1 ponto: Diferencial de calor nulo;  
 • 2 pontos: Relação linear entre volume e fator de escala;  
 • 1 ponto: Resolução da equação diferencial resultante;  
 • -1 ponto: Troca de sinal no expoente  $-(1 + \omega)$ .
- d) • 1 ponto: Deduzir que  $\ddot{a}$  é constante;  
 • 1 ponto:  $\ddot{a}$  constante  $\Rightarrow \rho$  constante;  
 • 2 pontos: Encontrar  $\omega$  que torna  $\rho$  constante.
- e) • 1 ponto: Expressar que  $d_- a_- + d_+ a_+ = D$ ;  
 • 3 pontos: Substituição de  $\ddot{a}_-$  por seu valor constante,  $4\pi G R \rho_{0-}$ ;  
 • 4 pontos: Determinar  $a_+$  ou  $\ddot{a}_+$  por conservação do tamanho total;  
 • 4 pontos: Determinar a outra variável,  $\ddot{a}_+$  ou  $a_+$ .
- f) • 4 pontos: Comparar as duas expressões de  $\ddot{a}_+$ ;  
 • 4 pontos: Perceber que a  $\rho_+$  é negativo, diferenciando da matéria comum.
- g) • 2 pontos: Elemento de distância em coordenadas comóveis;  
 • 3 pontos: Avaliar a distância máxima percorrida pela integral de distância comóvel;  
 • 4 pontos: Forçar que o deslocamento seja maior que  $d_+$ ;  
 • 3 pontos: Resolução da integral;  
 • 3 pontos: Se igualou a velocidade marginal à velocidade da luz (solução incorreta, mas apta a pontuação parcial).

**10. Morte solar (60 pontos)** Tia Mi está estudando física solar, e gostaria da sua ajuda para entender alguns fenômenos importantes relativos à nucleossíntese da nossa estrela.

No modelo de tia Mi, a forma que o Sol perde a maior parte de sua energia útil ocorre pelas reações de fusão nuclear em seu interior. Considere que uma estrela na sequência principal gera energia a partir da cadeia de reações de nucleossíntese p-p (que parte do hidrogênio iônico para chegar no hélio também ionizado) e que nesse modelo apenas 10% da massa inicial de hidrogênio ionizado presente na estrela, a qual é composta puramente por hidrogênio e seu primeiro estado de ionização em sua origem, é convertida em energia por esse processo.

- a) **(6 pontos)** Calcule a energia liberada na cadeia de nucleossíntese p-p, subtraindo a energia perdida pela emissão de neutrinos nesse processo. Essa é a energia útil do processo.  
**Dados:**  $A_H = 1,008 u$ ;  $A_{He} = 4,003 u$ ;  $A_p = 1 u$ ;  $E_{\nu_e} = 0,42 MeV$ .
- b) **(4 pontos)** Encontre a eficiência desse processo, considerando a energia útil liberada e a energia inicial dos reagentes.
- c) **(10 pontos)** Calcule a potência perdida para os neutrinos emitidos pelo Sol e a quantidade de neutrinos que atinge a Terra por segundo.

A equação de ionização de Saha descreve a razão entre a densidade numérica de duas espécies de um composto em diferentes estados de ionização:

$$\frac{n_+}{n_0} = C_1 T^{\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{\chi_{ion}}{kT}\right)$$

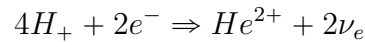
Onde  $C_1 = 1,1 \cdot 10^{-3}$  é uma constante numérica dimensional,  $\chi_{ion}$  é a energia de ionização, que, para o  $H^+$  é igual a  $13,54 eV$ , o índice + se refere ao primeiro estado de ionização, o índice 0 ao estado neutro,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura do sistema.

Agora, ela quis utilizar essa equação e a transformação de  $H^+$  em  $He^{2+}$  para calcular o tempo que uma estrela tipo o Sol passa na sequência principal.

- d) **(14 pontos)** Encontre uma expressão para a massa total de hidrogênio ionizado que é convertido em energia nas reações de fusão nuclear em uma estrela que pertence à sequência principal, convertendo  $H^+$  em  $He^{2+}$ .
- e) **(6 pontos)** Calcule a energia total emitida por esse processo, considerando que a temperatura e o raio permanecem constantes.
- f) **(8 pontos)** Ainda, com a temperatura e raio constantes, derive uma expressão de  $\Delta t_{tot}$  o tempo de vida total na sequência principal da estrela em função de sua temperatura  $T$ .
- g) **(12 pontos)** Esboce um gráfico para a relação anterior explicitando sua tendência em  $T = 0$  e quando  $T \rightarrow \infty$ .

**Solução:**

- (a) A reação de nucleossíntese da cadeia p-p, convertendo  $H^+$  em  $He^{2+}$  é descrita pela equação química:



A energia libera é decorrente da variação de massa entre os produtos e os reagentes. Portanto, a energia liberada subtraindo a energia emitida pelos neutrinos será:

$$E_{em} = (4A_H - 1A_{He})m_p c^2 - 2E_{\nu_e}$$

$$E_{em} = 15,13 \text{ MeV}$$

- (b) A eficiência do processo de nucleossíntese será a energia útil, encontrada anteriormente, sobre a energia inicial dos reagentes, ou seja:

$$\eta = \frac{E_{em}}{E_0} = \frac{E_{em}}{4 \cdot 1,008 \cdot m_p c^2}$$

$$\eta = 0,4\%$$

- (c) Como mencionado pela questão, a energia liberada pelas reações de nucleossíntese p-p é a energia luminosa emitida pela estrela. Com isso, pode-se encontrar o número de reações que ocorrem por segundo pela expressão:

$$\frac{\Delta N_r}{\Delta t} = \frac{L}{E_{em}}$$

A potência perdida para os neutrinos emitidos pelo Sol pode ser encontrada multiplicando essa expressão, que se refere ao número de reações ocorridas por segundo, pela energia emitida por uma reação:

$$P_n = \frac{L}{E_{em}} 2E_{\nu_e} = \frac{2LE_{\nu_e}}{E_{em}}$$

$$P_n = 2,13 \cdot 10^{25} \text{ W}$$

Agora, para encontrar a quantidade de neutrinos que atinge a Terra por segundo, deve-se encontrar o fluxo de neutrinos emitido pelo Sol que chega na Terra. Isso pode ser descrito pela equação:

$$\frac{\Delta N_{\nu_e}}{\Delta t} = \frac{P_n}{4\pi r_{\odot \rightarrow \oplus}^2 E_{\nu_e}} \pi R_{\oplus}^2$$

$$\frac{\Delta N_{\nu_e}}{\Delta t} = 1,43 \cdot 10^{29} \text{ neutrinos/s}$$

- (d) Primeiro, deve-se encontrar a massa total inicial de hidrogênio ionizado. Isso pode ser feito utilizando a equação de Saha juntamente com uma relação entre as densidades e a massa inicial da estrela:

$$\frac{n_+}{n_0} = C_1 T^{\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{\chi_{ion}}{kT}\right)$$

$$(n_0 + n_+)m_p A_H = M \Rightarrow n_0 + n_+ = \frac{M}{A_H m_p}$$

Substituindo a primeira relação na segunda equação:

$$n_+ = \frac{M}{A_H m_p} \frac{1}{1 + \frac{1}{C_1 T^{\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)}}$$

Então, a massa inicial de hidrogênio ionizado será:

$$m_{+,0} = n_+ A_H m_p = \frac{M}{1 + \frac{1}{C_1 T^{\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)}}$$

Como apenas 10% da massa inicial de hidrogênio ionizado será convertida em energia, a massa consumida será:

$$\Delta m_+ = \frac{0,1M}{1 + \frac{1}{C_1 T^{\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)}}$$

- (e) A energia emitida por esse processo será:

$$E = \Delta m_+ c^2$$

$$E = \frac{0,1M c^2}{1 + \frac{1}{C_1 T^{\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)}}$$

- (f) O tempo de vida total da estrela pode ser encontrado dividindo a energia total emitida por ela pela energia luminosa que ela emite por segundo:

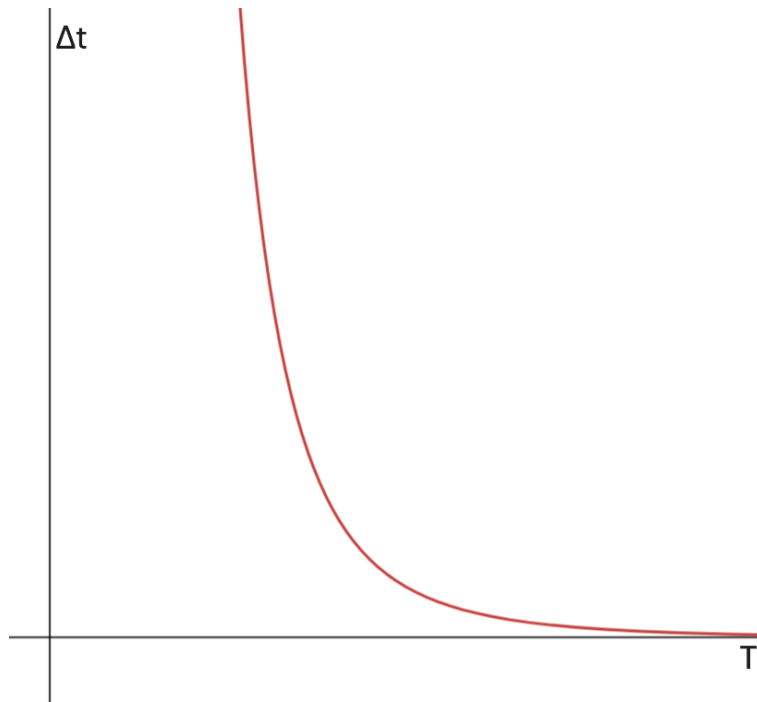
$$\Delta t_{tot} = \frac{E}{L} = \frac{E}{4\pi R^2 \sigma T^4}$$

$$\Delta t_{tot} = \frac{0,1M c^2}{4\pi R^2 \sigma} \frac{1}{T^4 + \frac{T^{\frac{3}{2}}}{C_1 \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)}}$$

(g) Para analisar mais facilmente o comportamento dessa função, pode-se separá-la em uma parte constante e outra que depende de  $T$ , o que já foi feito no item anterior. Resultando na parte que depende de  $T$  sendo:

$$f(T) = \frac{1}{T^4 + \frac{T^{\frac{3}{2}}}{C_1 \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)}}$$

Quando  $T = 0$ , essa função vai para o infinito. E quando  $T \rightarrow \infty$ , a função tende a 0. Por fim, o esboço dela será:



**Solução:**

### Grade de Correção

- (a)
- 3 pts: Equação química da nucleossíntese p-p
  - 2 pts:  $E_{em} = (4A_H - 1A_{He})m_p c^2 - 2E_{\nu_e}$
  - 1 pts: Valor numérico correto
- (b)
- 3 pts: Expressão para eficiência
  - 1 pts: Valor numérico correto
- (c)
- 2 pts: Número de reações por segundo
  - 3 pts: Expressão para a potência dos neutrinos
  - 1 pts: Valor numérico da potência correto
  - 3 pts: Expressão para o fluxo de neutrinos que chegam a Terra
  - 1 pts: Valor numérico correto para o número de neutrinos por segundo
- (d)
- 3 pts: Expressão para a massa total da estrela
  - 3 pts: Expressão para  $n_+$
  - 3 pts: Expressão para  $m_{+,0}$
  - 5 pts: Expressão para  $\Delta m_+$
- (e)
- 4 pts:  $E = \Delta m_+ c^2$
  - 2 pts: Expressão para  $E$  correta
- (f)
- 3 pts:  $\Delta t_{tot} = \frac{E}{L}$
  - 5 pts: Expressão para  $\Delta t_{tot}$  correta
- (g)
- 2 pts: Indicar que para  $T = 0$ , a expressão vai para o infinito
  - 2 pts: Indicar que para  $T \rightarrow \infty$ , a expressão vai para 0
  - 8 pts: Esboço do gráfico correto