PROVA TEÓRICA

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2026

Instruções Gerais

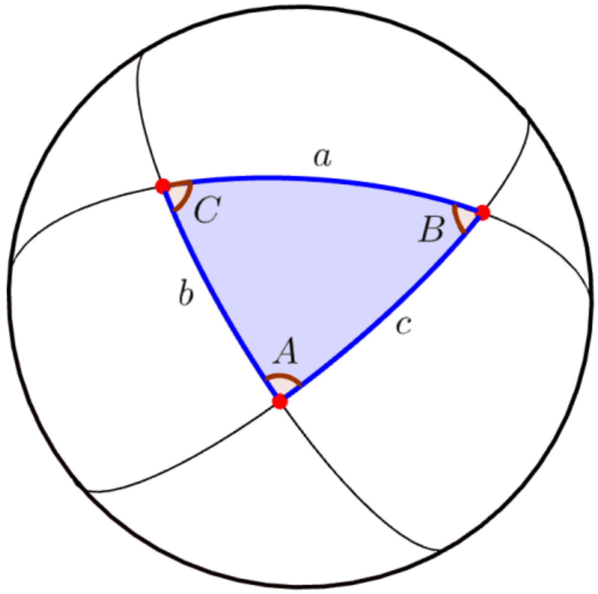
1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. A duração da prova é de 4 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., "não respondi à Q1 e à Q2";
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva o caderno de respostas.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	9,8 m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2\cdot$kg^{-2}	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	8,314 N $\cdot$ m $\cdot$ mol$^{-1}\cdot$K^{-1}	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m$^{-2}\cdot$K^{-4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K	
Constante de Hubble (H_0)	67,8 km $\cdot$ s$^{-1}\cdot$Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Equação de Kepler:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

- Equação Polar das Cônicas (Elipse e Hipérbole):

$$r = \frac{a \cdot ||1 - e^2||}{1 + e \cdot \cos(\nu)} = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$$

- Para $|x| \ll 1$, vale:

$$e^x \approx 1 + x$$

Questões

1. **47 Tucanae (10 pontos)** Ualype decidiu registrar uma imagem de 47 Tucanae no quintal de sua casa, utilizando um telescópio e um CCD. O telescópio possui razão focal de $f/5$ e uma lente objetiva com diâmetro de 130 mm. O CCD de Ualype possui uma eficiência quântica de 75% e pixels de 15 μm.

   Considere que 47 Tucanae é um aglomerado globular aproximadamente esférico. Dados:

   - Diâmetro angular de 47 Tucanae: 43,8'.
   - Magnitude aparente de 47 Tucanae em V: 4,09.
   - Largura da banda V: 88 nm.
   - Fluxo de fótons para magnitude 0 em V: 1000 fótons/(Å$\cdot$ cm^2 $\cdot$ s).

   a) (3 pontos) Determine a escala de placa do telescópio em arcmin/mm.

   b) (4 pontos) Estime o número de pixels na imagem de 47 Tucanae.

   c) (3 pontos) Estime o sinal de 47 Tucanae recebido pelo CCD em fótons por pixel, por segundo.

2. **Telescópio caseiro (15 pontos)** Ualypinho quer construir um telescópio Cassegrain com partes reaproveitadas. Ele ganhou de seu amigo Piazzinho um espelho côncavo de $|f_1| = 750\,\mathrm{mm}$ e $D_1 = 200\,\mathrm{mm}$, e achou em casa um suporte que usará para fixar o espelho secundário a uma distância $d = 450\,\mathrm{mm}$. A ocular ele pegou de sua luneta Kepleriana $f/10$, que, nessa configuração, tinha pupila de saída adaptada exatamente para o olho humano. Ele terá que comprar o espelho secundário, e já decidiu que será divergente com $|f_2| = 600\,\mathrm{mm}$, mas ainda não decidiu seu diâmetro D_2. Ajude-o a determinar o tamanho ideal do espelho secundário.

3. **Vida Esticada (15 pontos)** Em uma de suas viagens para a SorveterITA, Toduardo Eduledo se perguntou quais eram os limites das órbitas em que a vida poderia ser possível. Como Toduardo estava ocupando tomando seu sorvete de caramelo salgado, ele decidiu fazer algumas simplificações para seu modelo.

   Considere um planeta, *Oguh B*, de mesma massa, raio, pressão atmosférica e albedo que a Terra, orbitando uma estrela *Oguh*, de mesma massa, raio e temperatura que o Sol. O critério de habitabilidade escolhido foi a presença de água líquida na superfície de um planeta de rápida rotação.

   (a) **(10 pontos)** Qual é a temperatura de *Oguh B* em função da distância entre *Oguh B* e *Oguh*?

   Dado: Emissividade de *Oguh B* é $\epsilon_B = 0{,}9$.

(b) **(5 pontos)** Qual é a maior excentricidade que a órbita de *Oguh B* pode ter para suportar vida? Explicite a expressão da excentricidade e o seu valor numérico.

4. A Lua sumiu!!! (20 pontos) O vilão favorito de todos está de volta: Gru, agora ainda mais preparado para roubar a Lua. Desta vez, ao utilizar o raio encolhedor, a Lua tem seu raio reduzido à metade do tamanho original e sua densidade cai para 1/64 da original. No entanto, após disparar o raio, Gru não consegue segurar a Lua, que passa a cair em queda livre a partir do repouso, em direção à Terra.

(a) **(8 pontos)** Determine o tempo necessário para que a Lua alcance a superfície terrestre. Considere a distância Terra-Lua $d_L \gg R_\otimes$ e despreze os efeitos de maré.

(b) **(12 pontos)** Na realidade, antes de atingir a Terra, a Lua será destruída após ultrapassar o Limite de Roche. Considere que esse limite representa o instante no qual uma pequena partícula na superfície da Lua, voltada para a direção da Terra, perde o contato com a Lua. Determine o tempo necessário para que isso ocorra.

5. Todo leão pode virar gatinho (25 pontos) Após uma série de triunfos em sua carreira acadêmica, o estimado Einstein do Nordeste, comparável a um leão por seu brilhantismo e habilidade na dança, é desafiado por uma estoniana a analisar o comportamento do vento solar. Infelizmente, nosso amigo travou, e só conseguiu responder "Hi, I'm Phranklyn". Agora, cabe a você ajudá-lo para que esse leão não se torne um gatinho.

Considere uma estrela idêntica ao Sol que ejeta continuamente um vento solar radial, com taxa de perda de massa constante, em módulo, $\dot{M} = 6 \cdot 10^{-9}\, M_\odot/\text{ano}$, desprezível se comparada à massa da estrela. Considere um modelo efetivo em que uma fração constante $\eta = 0{,}3$ da luminosidade da estrela seja convertida em energia mecânica das partículas em repouso na superfície do Sol, fornecendo o impulso necessário para que uma camada seja ejetada e o vento solar se forme.

(a) **(8 pontos)** Desprezando as interações entre as partículas do vento e assumindo simetria esférica, calcule a velocidade v do vento solar nas redondezas da órbita da Terra. Considere que o raio orbital da Terra $r_\oplus \gg R_\odot$.

Admita que o raio da magnetosfera R_M voltado para o Sol seja determinado pelo equilíbrio entre a pressão do vento solar e a pressão magnética do campo terrestre, modelado como um dipolo magnético, cuja pressão e módulo do campo são dados por:

$$B \propto r^{-3}, \qquad P = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

(b) **(17 pontos)** Considere que, ao chegar na Terra, o campo magnético do vento solar é desprezível se comparado ao da magnetosfera e que o vento se encontra em regime quase estacionário. Assim, determine uma expressão para o raio da magnetosfera R_M voltado para o Sol, em função do campo magnético na superfície da Terra $B_\oplus$, da densidade do vento solar ρ, de sua velocidade v e de constantes.

6. A Terra não é plana! (30 pontos) Como futuro cientista, você, aluno(a) de Barra, adentra um compromisso nobre em zelar pelo conhecimento material da humanidade, sustentado pela análise criteriosa e pelo método científico. Parte desse compromisso inclui uma comunicação ética e responsável com o resto da sociedade, combatendo desinformação, pseudociência e teorias da conspiração. Leia o texto abaixo, fictício para proteção de identidade, mas inspirado em publicações reais:

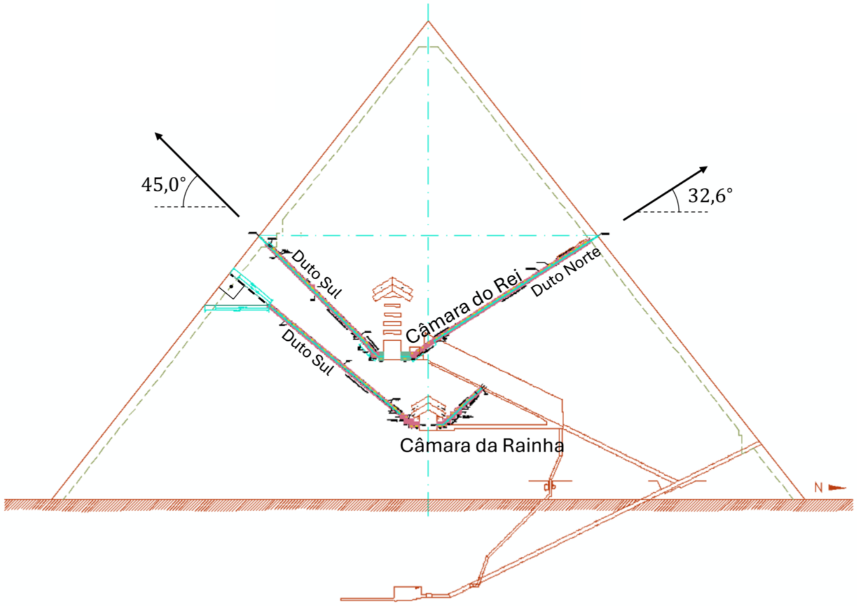
Peppersauro
@terraraptor · 2h

Gostaria de saber como os globalóides explicam que as pirâmides estejam perfeitamente alinhadas com as três marias ATÉ HOJE, ou os milhares de sítios arqueológicos nos quais o Sol sempre nasce no mesmo lugar.
O verdadeiro formato da Terra todos nós sabemos! O meteoro não existe e o domo segue fixo!
#astronomia #raptor #cabeçadedinossauro

242 827 15.3k

A publicação contesta o modelo mais aceito para a dinâmica terrestre, o qual prevê a precessão dos equinócios com período de 26.000 anos, e a variação da obliquidade da eclíptica, atualmente decrescendo à taxa de 47 segundos de arco por século. Para isso, cita a pedra da janela ($\varphi = 28°01'$ S, $\lambda = 31°08'$ O), em Garopaba (SC), onde uma fenda se alinha com o nascer do Sol no solstício de inverno do hemisfério sul. Além disso, argumenta por um suposto alinhamento das pirâmides de Gizé ($\varphi = 29°59'$ N, $\lambda = 31°08'$ L) com o cinturão de Órion.

No entanto, quando falamos de "alinhamento das pirâmides", nos referimos a alinhamentos em estruturas internas desses monumentos. Por exemplo, os dutos da Pirâmide de Quéops estão precisamente sobre o eixo norte-sul:



Representação da Pirâmide de Quéops, adaptado de *Upuaut Project*

Acredita-se que essa pirâmide tenha sido construída pelos egípcios há cerca de 4600 anos. Já a pedra da janela tem origem incerta, localizada numa região que sofreu diversas ocupações ao longo da História: povos Sambaquis (6000 a 3000 anos atrás), Jê (3000 a 800 anos atrás) e Guarani (800 a 400 anos atrás), antes da ocupação colonial. Na base da rocha, outros vestígios arqueológicos são tecnologias associadas especificamente aos Sambaquis, sugerindo uma origem para a pedra da janela.

Com base nas informações e em seus conhecimentos, julgue as assertivas a seguir como verdadeiras ou falsas, justificando cada resposta. (5 pontos por item)

I - Na época de sua construção, o duto norte da câmara do rei teria divergido mais de 3° da culminação superior de Thuban (α-Dra, $\delta = 64°20'46''$, $\alpha = 14^h04^m34^s$), dificultando a hipótese de alinhamento.

II - Se a Pedra da Janela realmente for de origem Sambaqui, o alinhamento solsticial original não seria aquele sugerido pela foto (Sol no centro), mas sim uma configuração deslocada (como a tangência). Por outro lado, se o alinhamento original tiver sido preservado, então a origem deve ser mais recente, como a ocupação Guarani.

III - Nenhum dos monumentos tem necessariamente finalidade astronômica: a geometria dos dutos pode ser associada a soluções de engenharia, como a ortogonalidade às faces, o nivelamento das alturas de saída, e a inclinação em 45°. De forma análoga, o alinhamento da pedra da janela pode ser interpretado como uma coincidência estatística, dada a abundância de formações rochosas no litoral.

IV - Metodologicamente, o procedimento mais rigoroso para validar o alinhamento astronômico seria determinar a época em que Thuban se alinha perfeitamente com o duto norte da câmara do rei, e então, fixada essa época, procurar por estrelas que se alinhem com os demais dutos.

V - É impossível que as três estrelas representadas na primeira imagem sejam realmente o cinturão de Órion. Na melhor das hipóteses, são outras três estrelas em alinhamento, isso se não for uma montagem.

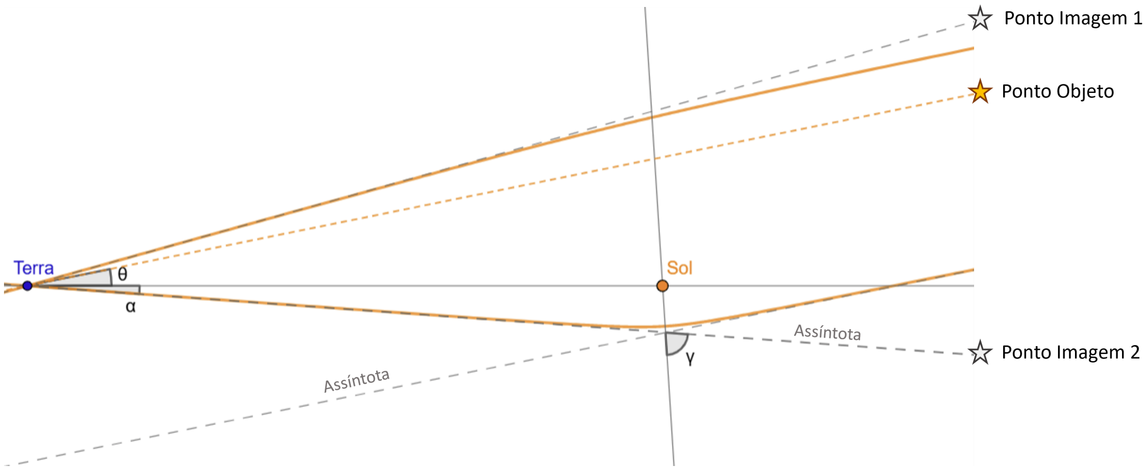
VI - Mesmo supondo que existam três estrelas que se alinhem com as três pirâmides, essas estrelas poderiam ter uma configuração distinta (dentro de uma certa margem) e ainda seria possível encontrar um local e um horário para forçar um alinhamento aparente de azimute.

Dica: Um caminho possível seria argumentar pela quantidade de graus de liberdade em comparação ao número de equações, sem precisar resolver essas equações ou analisar em que domínio são válidas. No entanto, você pode seguir qualquer outro caminho que preferir, desde que consiga provar se a afirmação é verdadeira ou falsa.

7. **Lente Gravitacional (30 pontos)** Seu Isaías Nilson foi uma dos grandes físicos brasileiros esquecidos na memória do tempo. No início do século XVIII, o cientista explorava um modelo no qual a luz é composta de pequenas partículas de baixa massa. Um dos efeitos interessantes dessa abordagem é a ocorrência de lentes gravitacionais.

Se os raios de luz caminhassem em linha reta, a fonte seria vista sob um certo ângulo θ, conforme marcado na figura como ponto objeto. No entanto, quando os raios paralelos entram em trajetória hiperbólica ao redor de um corpo massivo, o objeto começa a produzir duas imagens, conforme representado na figura.

Para testar seu modelo, Nilson decide observar o eclipse solar de 15 de agosto de 1719 no distrito de Piraí, na cidade de Bagé (RS). Para todos os itens, considere $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s a velocidade da luz quando está muito distante do Sol, e utilize uma abordagem de mecânica clássica, respeitando o modelo proposto. Considere apenas os efeitos gravitacionais do Sol, desprezando os da Terra e da Lua.



(a) **(3 pontos)** Determine o semi-eixo real (a) das duas trajetórias. Compare esse valor com o raio do Sol.

(b) **(15 pontos)** O ângulo γ representa a inclinação das assíntotas em relação ao eixo real na trajetória do segundo ponto imagem. Determine $\tan(\gamma)$ em função da distância d entre a Terra e o Sol, do semi-eixo real a e do ângulo θ. Deixe sua resposta na forma algébrica, sem substituir essas três variáveis.

(c) **(8 pontos)** Determine o desvio angular α do segundo ponto imagem, em função de $\tan(\gamma)$, da distância d, da massa M do Sol, da velocidade c e de constantes físicas. Deixe sua resposta na forma algébrica.

(d) **(4 pontos)** Na data do eclipse, o Sol estava a $3°47'$ de Regulus (α-Leo). Se Nilson fosse um pouco mais sortudo, o eclipse teria ocorrido no dia 19, e Regulus estaria a $27'$ de arco do Sol. Determine o desvio angular α do segundo ponto imagem para ambos os casos. Compare suas respostas com o raio angular do Sol.

8. Modela Aí: Avermelhamento (40 pontos) Considere uma nuvem interestelar idealizada como um prisma homogêneo de altura L, atravessada por luz estelar que incide perpendicularmente à sua face frontal. Queremos deduzir, a partir de um modelo físico simples, como essa nuvem modifica o espectro da estrela e produz uma curva de avermelhamento.

No interior desse meio, a luz pode ser absorvida; esse processo é descrito por um coeficiente $\alpha(\nu)$, que representa a *densidade de probabilidade de absorção*, ou seja, $\alpha(\nu) \propto dp/ds$, em que dp/ds é a razão entre a probabilidade de interação com o meio e o caminho percorrido pela luz, válido apenas para pequenas distâncias. O coeficiente $\alpha(\nu)$ segue uma lei de potência da forma:

$$\alpha(\nu) = \alpha_0 \nu^p,$$

onde $p = 1.20$ e $\alpha_0 = 7.71 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m^{-1}Hz^{-1,2}}$ é uma constante de normalização.

Suponha que cada fóton possa atravessar parte da nuvem sem interagir e que, se for absorvido em qualquer ponto do trajeto, está definitivamente perdido para o observador.

(a) **(5 pontos)** Prove que razão entre a intensidade luminosa que escapa da nuvem I e a intensidade que incide inicialmente na fonte I_0 é dada por

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha L}.$$

(b) **(5 pontos)** Seja A_ν a diferença entre a magnitude observada e a magnitude ideal (sem extinção) para um objeto cuja luz atravessou a nuvem e chegou até o observador. Calcule o valor da razão entre a extinção e o avermelhamento

$$R_V = \frac{A_V}{A_B - A_V}$$

entre as bandas visual e azul.

Dados: $\nu_V = 5.45 \times 10^{14}$ Hz e $\nu_B = 6.82 \times 10^{14}$ Hz.

(c) **(15 pontos)** Assuma que o espectro inicial da estrela segue um perfil de corpo negro com temperatura T de acordo com a radiância espectral de Planck, dada pela expressão

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

Depois da extinção, o pico de intensidade ocorre em uma frequência mais avermelhada que a frequência de pico original. Queremos provar que, mesmo para temperaturas muito altas ($kT \gg h\nu$), a frequência de pico não pode ser tão alta quanto se queira. Existe um valor limite, ν_{lim}, que a frequência de pico não pode ultrapassar. Deduza a expressão de ν_{lim}.

(d) (**15 pontos**) Considere três bandas hipotéticas, 1, 2 e 3, nas quais se medem as magnitudes m_1, m_2 e m_3. Todas as bandas são estreitas, restringindo-se à vizinhança de suas frequências centrais $\nu_1 = 5{,}54 \cdot 10^{14}$ Hz, $\nu_2 = 6{,}74 \cdot 10^{14}$ Hz e $\nu_3 = 8{,}22 \cdot 10^{14}$ Hz. Por simplicidade, cada banda estabelece a magnitude de Vega como sua referência de magnitude zero, ou seja, a magnitude de Vega (sem extinção) na banda 1 é a referência de magnitude nula nessa respectiva banda; o mesmo vale para as bandas 2 e 3.

Uma estrela foi medida nessas três bandas, e os seguintes resultados foram observados: $m_1 = 10{,}3$, $m_2 = 12{,}1$ e $m_3 = 14{,}3$.

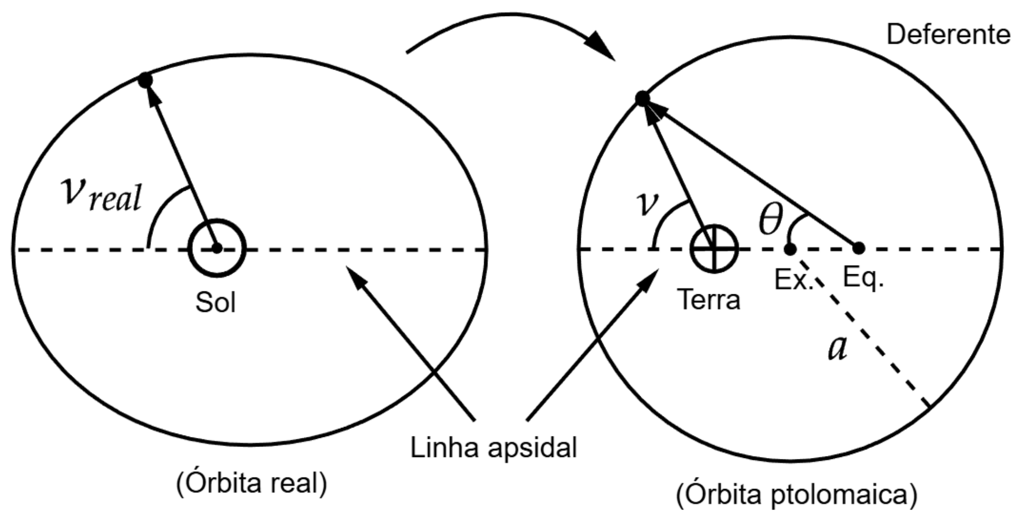
Estime a temperatura T, em Kelvin, a distância até a estrela L, em parsec, e o raio da estrela R, em raio solares. Para tal, adote que $h\nu \gg kT$ para todas as frequências medidas.

Dado: Considere que Vega apresenta temperatura efetiva $T_V = 9600\ K$, raio $R_V = 2{,}36\ R_\odot$ e está a uma distância $L_V = 7{,}66$ parsec.

9. **Modela aí: Epiciclos (55 pontos)** Por muitos séculos, a descrição do movimento dos astros foi baseada em modelos geocêntricos, nos quais a Terra ocupava uma posição central e imóvel.

No modelo ptolomaico, o movimento do planeta é descrito pela combinação de dois círculos: o deferente, círculo com centro chamado *excêntrico*, que é deslocado em relação à Terra, e o epiciclo, círculo cujo centro se move ao longo do deferente. Para reproduzir corretamente as observações, o centro do epiciclo não percorre o deferente de forma uniforme em relação ao seu centro, mas sim com velocidade angular constante em relação a um ponto deslocado, chamado *equante*.

O deferente tem raio a, igual ao semieixo maior da órbita real do corpo em torno do Sol, o excêntrico está uma distância $c = ae$ da Terra, em que e é a excentricidade da órbita verdadeira. O equante é definido como o ponto oposto à Terra em relação ao excêntrico. Assume-se que, no periélio, o corpo secundário, a Terra, o excêntrico e o equante estejam todos colineares. Seja ν o ângulo entre a reta Terra-equante e o vetor posição do corpo medido a partir da Terra, e seja θ o ângulo entre a reta Terra-equante e o vetor posição do corpo medido pelo equante, de forma que $\nu = \theta = 0^\circ$ no periélio.



(a) **(12 pontos)** Obtenha a anomalia excêntrica E como função da anomalia média M e e, mantendo termos até primeira ordem em e.

(b) **(12 pontos)** Obtenha a anomalia verdadeira real ν_{real} como função da anomalia média M e e, mantendo termos até primeira ordem em e.

(c) **(22 pontos)** Expresse a anomalia verdadeira do sistema ptolomaico ν em função de e e θ.

(d) **(6 pontos)** Assumindo que θ varia uniformemente no tempo, determine a expressão para $\theta(M, e)$ que minimiza o erro $\Delta = \nu_{\text{real}} - \nu$ considerando a aproximação até primeira ordem em e.

(e) **(3 pontos)** Descreva o movimento do Sol, dos planetas interiores e dos planetas exteriores, vistos a partir da Terra, utilizando os conceitos construídos de deferente, equante, epiciclo e excêntrico, indicando quais conceitos são necessários para cada movimento ocorrer.

10. A Invasão (60 pontos) Corram! Ele está vindo! o Ditador está vindo! Diretamente da galáxia de Itapê, o Metabarão Othon aproxima-se para impor ao planeta Janos total subserviência. Foi atribuída a você a missão de conter essa investida da ditadura metabarônica.

Durante toda a questão, suponha que Janos tenha propriedades orbitais, rotacionais, translacionais e dimensionais idênticas às da Terra. Além disso, todos os sistemas de coordenadas definidos nos itens são análogos aos terrestres.

Importante: As duas partes desta questão são conceitualmente independentes entre si. Assim, a resolução de determinados itens não depende dos resultados obtidos em partes anteriores, podendo ser realizada de forma autônoma, desde que as hipóteses específicas de cada parte sejam respeitadas.

Parte I: A Chegada

Informações de inteligência indicam que a nave do Metabarão encontra-se atualmente em uma órbita contida no plano da eclíptica, originária dos confins do Sistema Solar, cuja trajetória tem como possível destino o planeta Janos.

Para monitorar a aproximação, dois planetas, Janos e Kanos, dispõem de radares ativos. Os dois planetas movem-se em órbitas circulares coplanares no plano da eclíptica, ambos à mesma distância do Sol, de tal maneira que um fique oposto ao outro com relação ao Sol. No instante $t = 0$, correspondente ao momento de emissão do sinal, Janos encontra-se com longitude eclíptica igual a zero quando visto a partir do Sol.

Para os itens a seguir, despreze os efeitos da rotação própria dos planetas, bem como quaisquer efeitos de paralaxe topocêntrica. Considere que a propagação do sinal ocorre no vácuo.

(a) **(13 pontos)** No instante $t = 0$, Janos emite um pulso eletromagnético isotrópico, considerado esférico. O pulso se propaga pelo espaço, reflete-se na nave do Metabarão e retorna ao sistema planetário. O eco do sinal é recebido novamente por Janos e Kanos nos instantes $t_1 = 60\,\mathrm{d}\,20\,\mathrm{h}\,00\,\mathrm{min}$ e $t_2 = 60\,\mathrm{d}\,20\,\mathrm{h}\,31\,\mathrm{min}$, respectivamente. Determine o vetor posição da nave do Metabarão no instante da reflexão do pulso, expresso no sistema de coordenadas eclípticas.

Observação: Adote que o Metabarão está na posição mais distante do Sol.

(b) **(8 pontos)** Os redshifts medidos por Janos e Kanos são, respectivamente, $z_J = 2{,}00 \cdot 10^{-13}$ e $z_K = 5{,}67 \cdot 10^{-13}$. Determine o vetor velocidade da nave do Metabarão no instante da reflexão, também no sistema de coordenadas eclípticas.

Observação: Considere que a velocidade orbital do Barão é muito menor que a velocidade da luz, além disso, os valores de redshift dados já foram corrigidos pela velocidade orbital dos planetas.

Parte II: O Ataque

Apesar dos esforços de monitoramento, o Metabarão Othon executa uma manobra orbital precisa durante sua trajetória heliocêntrica e consegue, finalmente, alcançar o planeta Janos. Após a manobra, a nave é capturada gravitacionalmente e passa a descrever uma órbita em torno de Janos. Considere que, em um determinado instante, você mede as coordenadas e velocidades angulares abaixo:

- **Coordenadas equatoriais:** $(\alpha, \delta) = (73{,}97°;\ 25{,}03°)$
- **Velocidades angulares:** $(\omega_\alpha, \omega_\delta) = (16{,}65°/\mathrm{h};\ 4{,}65°/\mathrm{h})$

Você se localiza nas coordenadas ($\phi = 40°$ N, TSL = 0 h)

(c) **(5 pontos)** Sabendo os dados acima, calcule o valor da inclinação i e da ascensão reta do nodo ascendente Ω da órbita do Ditador.

Observação: Para esse item, desconsidere qualquer tipo de efeito de paralaxe na observação e desconsidere os efeitos da rotação de Janos na medição de velocidades.

(d) **(2 pontos)** O primeiro passo da invasão ditatorial é orbitar Janos em uma órbita circular. Calcule o raio orbital r da nave.

Com os parâmetros orbitais determinados, você pode prever a trajetória futura do Metabarão. Com isso, você então prepara um canhão de antigravidade para abater a nave. Ainda é necessário decidir para onde mirar e quando apertar o gatilho, de modo que o feixe e o Metabarão cheguem simultaneamente ao mesmo ponto.

(e) **(14 pontos)** Considerando que os raios serão direcionados ao ponto da órbita de **máxima aproximação** em relação à sua base, determine a altura h e o azimute A para os quais você deve apontar o canhão.

Observação: Considere que os raios se propagam em linha reta, não sendo desviados por nenhuma força externa.

(f) **(4 pontos)** Os raios de antigravidade, apesar de sua alta velocidade, têm um tempo de viagem finito. Para que o impacto ocorra exatamente no ponto da órbita mais próximo da sua base, você deve disparar antes de o Metabarão atingir essa posição.

Calcule a altura angular h que o Metabarão deve ter no céu no momento do disparo, de modo que ele e o seu raio de antigravidade cheguem simultaneamente ao ponto de máxima aproximação.

Dado: Velocidade dos raios de antigravidade: $v_g = 36\,400$ km/h.

Antes de efetuar o disparo, você decide planejar cuidadosamente o ataque. O feixe é modelado como um projétil de massa m, lançado com velocidade v_g e direção determinada anteriormente. A nave do Metabarão possui massa M. Assuma que o impacto pode ser modelado como uma colisão inelástica, e despreze quaisquer outros efeitos dissipativos.

(g) **(14 pontos)** Determine a razão $\eta = \frac{m}{M}$ necessária para que a órbita resultante da nave seja parabólica.

O ataque é um sucesso: o feixe de antigravidade atinge em cheio a nave do Metabarão Othon. Porém, quando a poeira baixa, os sensores revelam que Aghnar, filho do Metabarão, já havia abandonado o local minutos antes.

Um dia, a ameaça galáctica voltará...