Ceva e Menelaus

Rafael Amiune

1 Introdução

Nesse material, abordaremos dois dos principais teoremas da geometria olímpica, os teoremas de Ceva e Menelaus. Apresentaremos a prova dos teoremas e alguns exemplos, seguidos de exercícios para praticar. Aproveite!

2 Ceva

(Teorema de Ceva) Sejam D, E, F pontos sobre os lados BC, CA, AB, do triângulo ABC, respectivamente, tais que 1 ou 3 estão dentro dos respectivos segmentos, então as cevianas AD, BE, CF concorrem se, e somente se,

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

Prova: Primeiro provaremos que se as cevianas concorrem então a relação vale. Suponha que concorrem num ponto P. Seja h a medida da altura de P ao lado BC. Se $[\Delta]$ é a área de Δ, então $[PBD] = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h$ e $[PCD] = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$, portanto

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[PBD]}{[PCD]}.$$

De modo análogo, obtemos

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[ABD]}{[ACD]},$$

portanto,

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ACD] - [PCD]} = \frac{\frac{BD}{CD}([ACD] - [PCD])}{[ACD] - [PCD]} = \frac{BD}{CD}.$$

Finalmente,

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{[ABP]}{[ACP]} \cdot \frac{[BPC]}{[BPA]} \cdot \frac{[CPA]}{[CPB]} = 1.$$

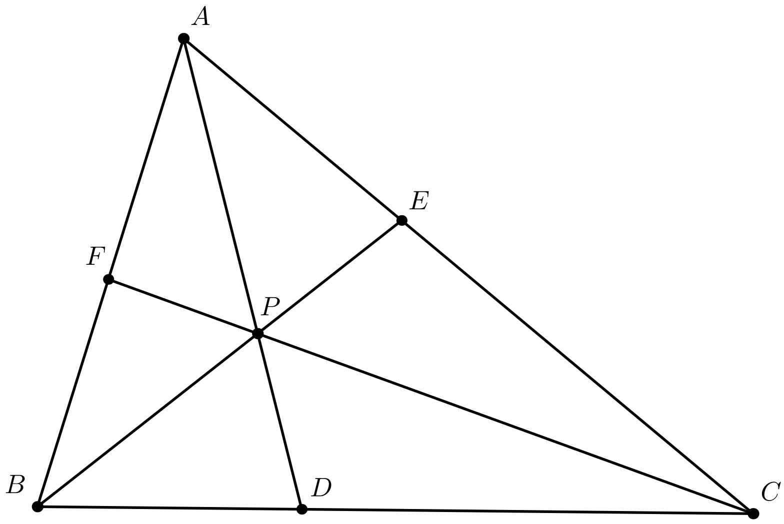
Para a volta, suponha que a relação é válida e seja P a interseção de BE e CF. Seja também D' a interseção de AP e BC. Pela ida do teorema, temos

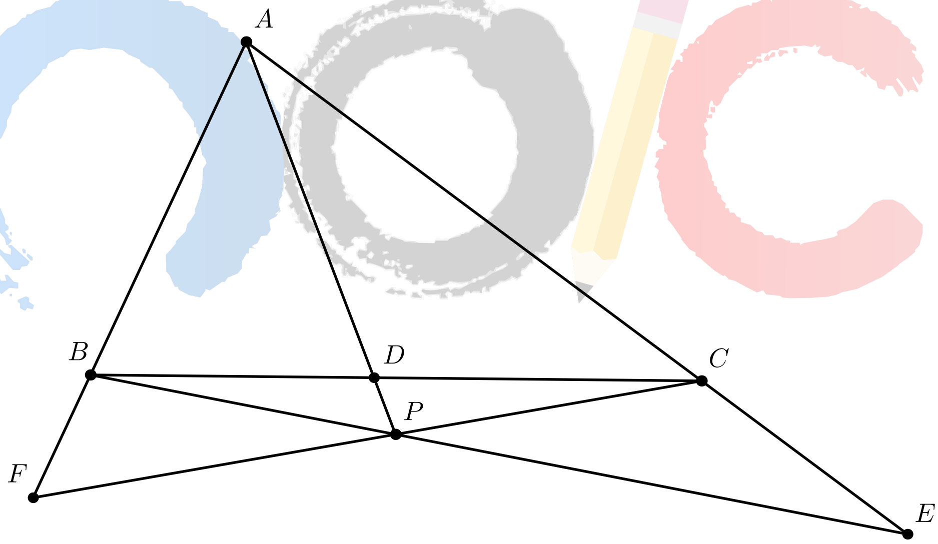
$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{BD}{CD}.$$

Entretando, isso nos dá

$$\frac{BD'}{CD'} + 1 = \frac{BD}{CD} + 1 \Rightarrow \frac{BC}{CD'} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow CD = CD' \implies D = D'.$$

□





OBS: A condição de 1 ou 3 pontos no interior dos lados é apenas para que não precisemos nos preocupar com problemas de orientação. Ambos os teoremas apresentados nesse material tem versões com segmentos orientados, que corrigem esse problema, porém as versões apresentadas são mais didáticas e as julgamos mais adequadas para o material.

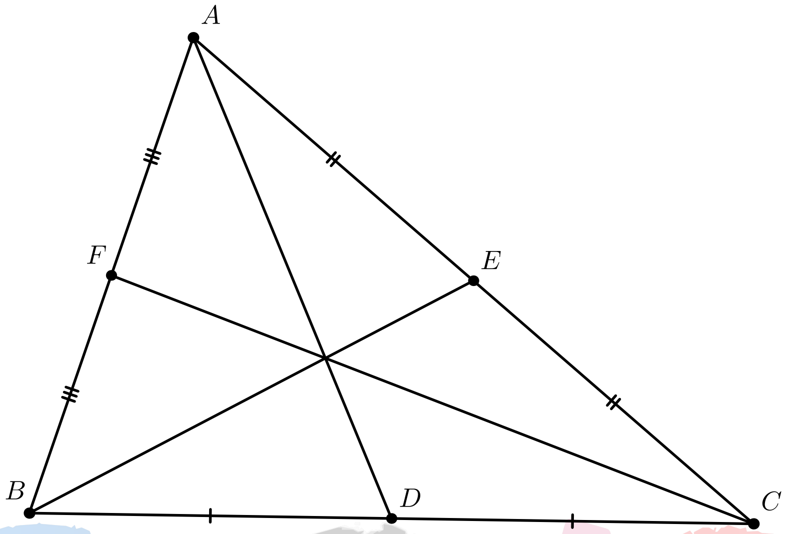
Confira o seguinte exemplo da aplicação deste teorema:

> **(Baricentro)** Prove que as medianas relativas aos vértices do triângulo ABC são concorrentes.

Solução: Sejam D, E, F os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Pelo teorema de Ceva, as medianas são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1,$$

mas $\frac{BD}{CD} = \frac{CE}{AE} = \frac{AF}{BF} = 1$, então estamos feitos. $\square$



3 Menelaus

(Teorema de Menelaus) Sejam D, E, F pontos sobre os lados BC, CA, AB, do triângulo ABC, respectivamente, tais que 0 ou 2 estão dentro dos respectivos segmentos, então D, E, F são colineares se, e somente se,

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

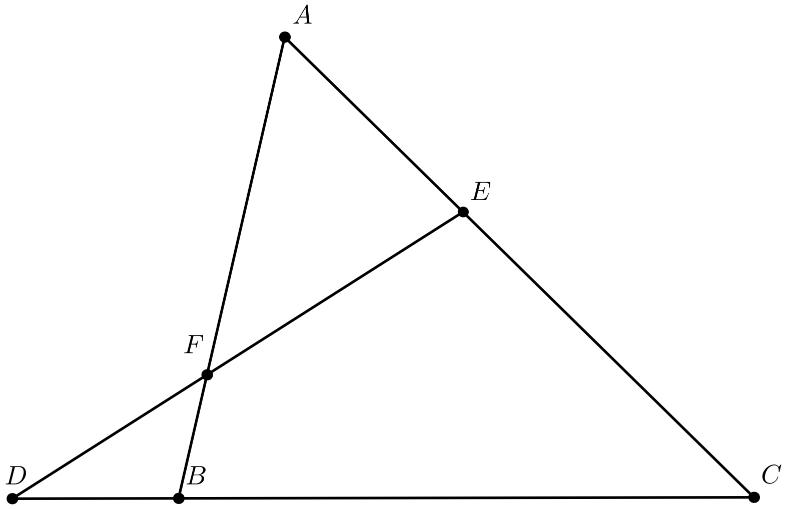
Prova: Primeiro provaremos que se a relação vale então os pontos são colineares. A volta é análoga à do teorema de Ceva, então iremos omití-la. As manipulações feitas também são análogas ás utilizadas anteriormente. Suponha que os pontos são colineares e sejam h_a, h_b, h_c as distâncias de A, B, C para a reta $\overline{DEF}$, respectivamente. Veja que

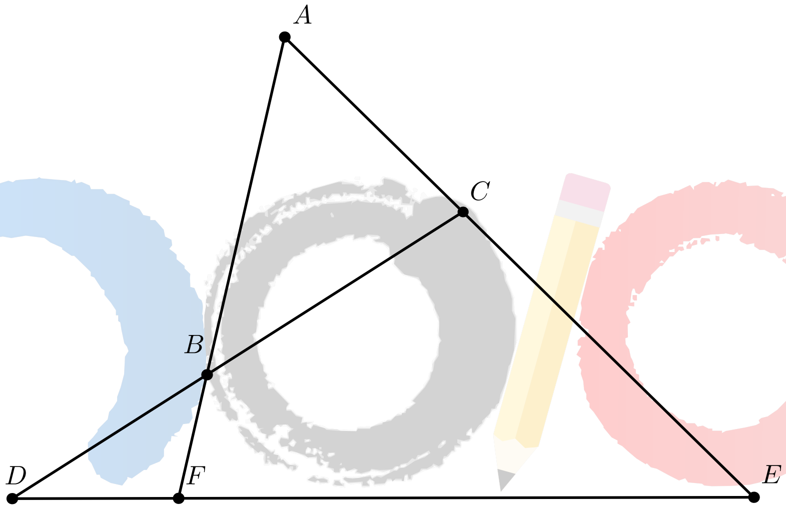
$$\frac{BD}{CD} = \frac{[EBD]}{[ECD]} = \frac{[FBD]}{[FCD]} = \frac{[EDB]-[FDB]}{[EDC]-[FDC]} = \frac{[EBF]}{[ECF]} = \frac{h_b}{h_c}.$$

Então

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} \cdot \frac{h_a}{h_b} = 1.$$

$\square$





Confira o seguinte exemplo da aplicação deste teorema:

(Folclore) Seja ABC um triângulo e Ω seu circuncírculo. A tangente por A, B, C a Ω intersectam os lados BC, CA, AB em D, E, F, respectivamente. Prove que D, E, F são colineares.

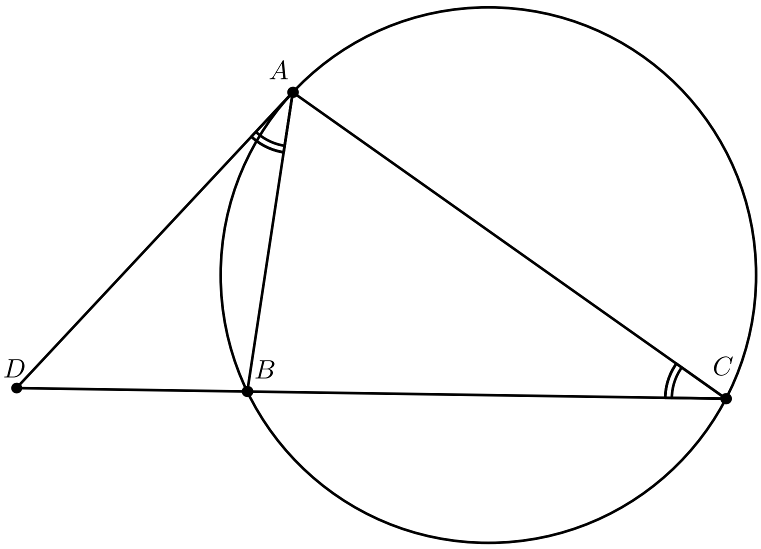
Solução: Pela tangência, temos $\angle DAB = \angle DCA$, portanto os triângulos DAB e DCA são semelhantes. Daí

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AB}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

logo $\frac{BD}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Então

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{BC^2}{BA^2} \cdot \frac{CA^2}{CB^2} = 1,$$

e, pelo teorema de Menelaus, os pontos D, E, F são colineares. □



4 Problemas

Problema 1. (Gergonne) Sejam D, E, F os pontos de tangência do incírculo de ABC com os lados BC, CA, AB, respectivamente. Prove que as cevianas AD, BE, CF são concorrentes.

Problema 2. (Ortocentro) Sejam D, E, F os pés das alturas relativas a A, B, C, respectivamente. Prove que as cevianas AD, BE, CF são concorrentes.

Problema 3. (Incentro) Sejam D, E, F os pés das bissetrizes internas relativas a A, B, C, respectivamente. Prove que as cevianas AD, BE, CF são concorrentes.

Problema 4. (Teorema de Monge) Sejam ω_1, ω_2, ω_3 circunferências. Sejam X, Y, Z as interseções das tangentes externas comuns a ω_1 e ω_2, ω_2 e ω_3, ω_3 e ω_1, respectivamente. Prove que X, Y, Z são colineares.

Problema 5. (EGMO 2013) Seja ABC um triângulo e D na extensão do lado BC através de C tal que $CD = BC$. Seja E na extensão do lado CA através de A tal que $AE = 2CA$. Prove que se $AD = BE$, então ABC é um triângulo retângulo.

Problema 6. (USAMO 2003) Seja ABC um triângulo. Um círculo passando por A e B intersecta os segmentos AC e BC em D e E, respectivamente. As retas AB e DE se intersectam em F e as retas BD e CF se intersectam em M. Prove que $MF = MC$ se, e somente se, $MB \cdot MD = MC^2$.

Problema 7. (OBM 2005) A medida do ângulo B de um triângulo ABC é $120°$. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM = 30°$.

Problema 8. (OBM 2016) As bissetrizes internas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ do triângulo ABC se encontram no ponto I. A reta paralela a BI que passa pelo ponto A encontra a reta CI no ponto D. A reta paralela a CI por A encontra a reta BI no ponto E. As retas BD e CE se encontram no ponto F. Mostreque F, A e I são colineares se, e somente se, $AB = AC$.

Problema 9. (IMO 2019) Seja I o incírculo do triângulo acutângulo ABC, com $AB \neq AC$. O incírculo ω toca os lados BC, CA, AB em D, E, F, respectivamente. A reta por D perpendicular a EF inetrsecta ω novamente em R e a reta AR intersecta ω novamente em P. Os circuncírculos de BPF e CPE se intersectam novamente em Q. Prove que PQ, DI e a reta por A perpendicular a AI são concorrentes.

Problema 10. (TM2 2019) Seja ABC um triãngulo isósceles com $AB = AC$. Sejam X e K pontos sobre AC e AB, respectivamente, tais que $KX = CX$. A bissetriz interna do ângulo $\angle AKX$ intersecta BC em Z. Mostre que XZ passa pelo ponto médio de BK.

Problema 11. (Cone Sul TST 2024) Dentro de um ângulo $\angle BOC$ existem três círculos disjuntos k_1, k_2 e k_3, cada um tangente aos lados BO e OC. Sejam r_1, r_2 e r_3 os respectivos raios desses círculos, com $r_1 < r_2 < r_3$. Os círculos k_1 e k_3 são tangentes ao lado OB nos pontos A e B, respectivamente, enquanto k_2 é tangente ao lado OC no ponto C. Sejam ainda $K = AC \cap k_1$, $L = AC \cap k_2$, $M = BC \cap k_2$ e $N = BC \cap k_3$. Além disso, definem-se os pontos $P = AM \cap BK$, $Q = AM \cap BL$, $R = AN \cap BK$ e $S = AN \cap BL$. Por fim, sejam X, Y, Z e T os pontos de interseção das retas CP, CQ, CR e CS, respectivamente, com o segmento AB; isto é, $X = CP \cap AB$, $Y = CQ \cap AB$, $Z = CR \cap AB$ e $T = CS \cap AB$. Prove que $XZ = YT$.

5 Referências

- Euclidean Geometry in Math Olympiads, Evan Chen
- Art of Problem Solving (Website)