APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas internacionais e nacionais

Apostila Magna
Solucionário Fotometria e Radiação

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia
Gustavo Sobreira
Adriano Calaça

Revisão

Jailson Neto
Isaac Santos

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp	https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J
Instagram	@projetonoic
Site	https://noic.com.br/astronomia/

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\, s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	

Capítulo 5

Fotometria e Radiação

pr 1. A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de $2'$ para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57? Lembre-se de que o gás de uma nebulosa é extremamente rarefeito e assuma que a nebulosa não absorve sua própria radiação.

Importante: Nessa questão, você deve calcular a magnitude total do céu noturno considerando que o ângulo sólido acima do horizonte do observador equivale a 2π sr. A resposta final não é o fundo de céu (em mag/arcsec^2).

Solução:

Como o ângulo é pequeno, temos $\Omega \approx \pi(\theta/2)^2 = \pi(60/206265)^2$ sr. Sendo θ o diâmetro angular em radianos. Assumindo que o Fluxo é proporcional ao ângulo sólido,

$$m_{ceu} - m = -2,5 \log \left(\frac{2\pi}{2,66 \cdot 10^{-7}} \right)$$

$$\boxed{m_{ceu} = -9,4}$$

pr 2.

A distribuição de diminuição de brilho superficial de uma galáxia espiral é dada por

$$I(r) = I_0 e^{-r/a},$$

em que $I(r)$ é o brilho superficial (luminosidade por unidade de área a certa distância r do centro da galáxia) e a é uma constante de escala. A partir da relação anterior,

pode-se encontrar por integração a luminosidade total do disco galáctico, $2\pi I_0 a^2$.
Certa galáxia com brilho superficial satisfazendo a relação anterior tem constante de escala $a = 6,0\,\text{kpc}$ e luminosidade na banda B de $L_B = 2,5 \cdot 10^{10} L_\odot$.
a) Deduza uma expressão para r em termos de a, $I(r)$ (em unidades de $L_\odot/\text{pc}^2$) e L.
b) Formule uma expressão para conversão do brilho superficial em unidades de mag/arcsec^2 para $L_\odot/\text{pc}^2$ e mostre que tal grandeza é independente da distância até o observador. A expressão deve depender apenas da magnitude absoluta $M_{B\odot}$ do Sol na banda B.
c) O Raio de Holmberg R_H é definido como a distância no disco galáctico desde o centro em que o brilho superficial é $26,5\,\text{mag/arcsec}^2$, para a banda B. Encontre R_H para a galáxia em questão. Use, se necessário, que $M_{B\odot} = 5,44\,\text{mag}$.
Solução:

a) Integrando temos

$$L = \int_0^\infty I(r)dA = \int_0^\infty I(r)rdrd\theta = 2\pi I_0 \int_0^\infty e^{-r/a} rdr = 2\pi I_0 a^2$$

Resolvendo para I_0

$$I_0 = \frac{L}{2\pi a^2}$$

Substituindo na fórmula para $I(r)$

$$I(r) = \frac{L}{2\pi a^2} e^{-r/a}$$

Isolando r

$$\boxed{r = a \ln\left(\frac{L}{2\pi I(r) a^2}\right)}$$

b) Pela definição de brilho superficial

$$\mu - M_{B\odot} = -2,5\log\left(\frac{F}{\Omega}\frac{4\pi d^2}{L_\odot}\right)$$

Onde $d = 10$ pc. Simplificando para F/Ω

$$\frac{F}{\Omega} = \frac{L_\odot}{4\pi d^2}10^{-0,4(\mu - M_{B\odot})}$$

Seja, l a distância da galaxia até nós, e A sua área, temos as seguintes relações

$$F = \frac{L}{4\pi l^2}, \quad \Omega = \frac{A}{l^2}\ \mathrm{sr}$$

Substituindo

$$\frac{L}{A} \equiv I(r) = \frac{L_\odot}{d^2}10^{-0,4(\mu - M_{B\odot})}$$

Substituindo o valor de d e convertendo de sr para segundos de arco

$$I(r) = \frac{sr}{1''}\frac{1}{100}10^{-0,4(\mu - M_{B\odot})}\frac{L_\odot}{\mathrm{pc}^2} = \frac{(206265)''^{\ 2}}{1''^{\ 2}}\frac{1}{100}10^{-0,4(\mu - M_{B\odot})}\frac{L_\odot}{\mathrm{pc}^2}$$

$$\boxed{I(r) = 4,254 \cdot 10^8 \cdot 10^{-0.4(\mu - M_{B\odot})}}$$

c) Substituindo os valores fornecidos, encontramos que $I(r) = 1,6\frac{L_\odot}{\mathrm{pc}^2}$, voltando a expressão para r encontrada no item a)

$$\boxed{r = a\ln\left(\frac{L}{2\pi I(r)a^2}\right) = 2,5 \cdot 10^4\ \mathrm{pc}}$$

pr 3. Considere que a intensidade da radiação solar refletida por Vênus é proporcional à sua área visível.

a) Expresse o brilho aparente normalizado I/I_0 em função de $R_\oplus$, R_V, e da distância L entre a Terra e Vênus. A constante de normalização I_0 pode ser escolhida arbitrariamente.

b) Encontre a distância $L = L_0$ quando o brilho aparente de Vênus é maior, e a distância angular entre Vênus e o Sol nesse momento.

Solução:

a) Para começar, observe o seguinte esquema

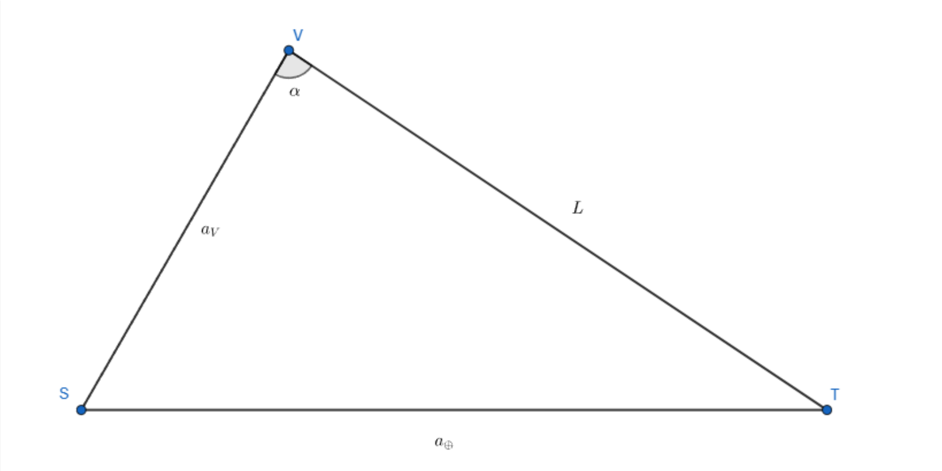

Figura 5.1: Representação Sol, Terra e Vênus

Vamos calcular a área vísível de Vênus, para isso, oberve o seguinte esquema

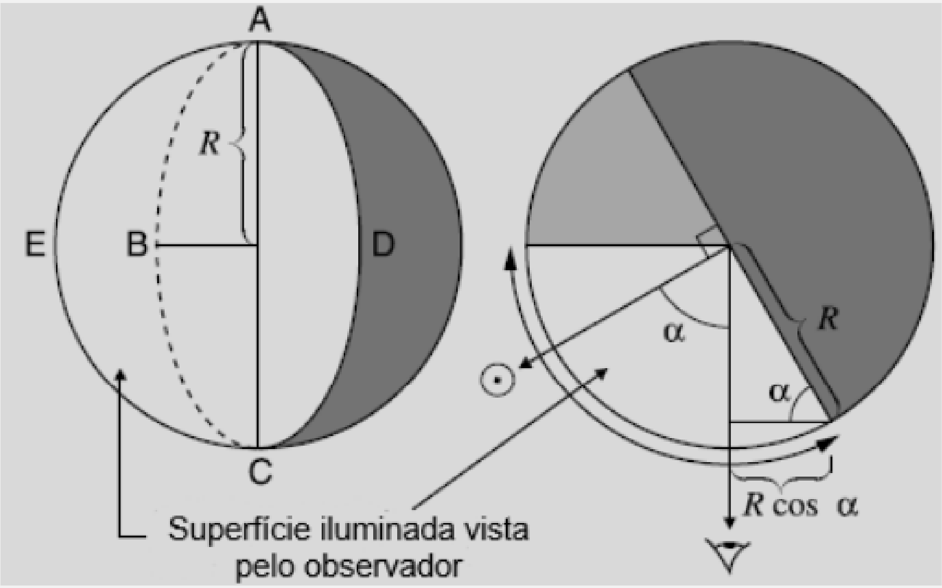

Figura 5.2: Fonte: Introdoction to Planetary Fotometry

Observando a figura, podemos facilmente perceber que a área visível de vênus é dada por

$$A_V = \frac{\pi R_V^2}{2} + \frac{\pi R_V^2}{2} = \frac{\pi R_V^2}{2}(1 + \cos\alpha)$$

O fluxo que chega em vênos é dado por

$$F_V = \frac{L_\odot}{4\pi a_V^2}$$

A potência que Vênus é dada por

$$P_V = F_V A_V$$

E assim o fluxo de Vênus que chega na Terra é

$$I = \frac{P_V}{4\pi L^2} = \frac{L_\odot R_V^2}{32\pi a_V^2 L^2}(1 + \cos\alpha)$$

Para encontrar $\cos\alpha$ vamos utilizar a lei dos cossenos em ΔSTV.

$$a_\oplus^2 = a_V^2 + L^2 - 2a_V L\cos\alpha$$

Resolvendo para $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{a_\oplus^2 - a_V^2 - L^2}{2a_V L}$$

Substituindo na expressão anterior

$$I = \frac{L_\odot R_V^2}{32\pi a_V^2 L^2} + \frac{L_\odot R_V^2 a_\oplus^2}{64\pi a_V^3 L^3} - \frac{L_\odot R_V^2}{64\pi a_V L^3} - \frac{L_\odot R_V^2}{64\pi a_V^3 L}$$

Definindo

$$I_0 = -\frac{L_\odot R_V^2}{32\pi a_V L}$$

Desse modo,

$$\boxed{\frac{I}{I_0} = \frac{a_\oplus^2 - a_V^2}{2a_V L^3} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{2a_V L}}$$

b) Para achar o máximo, vamos derivar essa função com respeito a L e igualar a 0. Fazendo isso e resolvendo para L obtemos

$$\boxed{L_0 = \sqrt{3a_{\oplus}^2 - a_V^2} - 2a_V}$$

Substituindo na fórmula para utilizndo a lei dos Cossenos

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a_{\oplus}^2 - a_V^2 - L_0^2}{2a_V L_0}\right)}$$

pr 4. (Vinhedo 2023) No dia juliano 2460,000, as estrelas de um sistema binário e o exoplaneta que as orbitava alinharam seus centros para um observador na Terra, como na imagem abaixo:

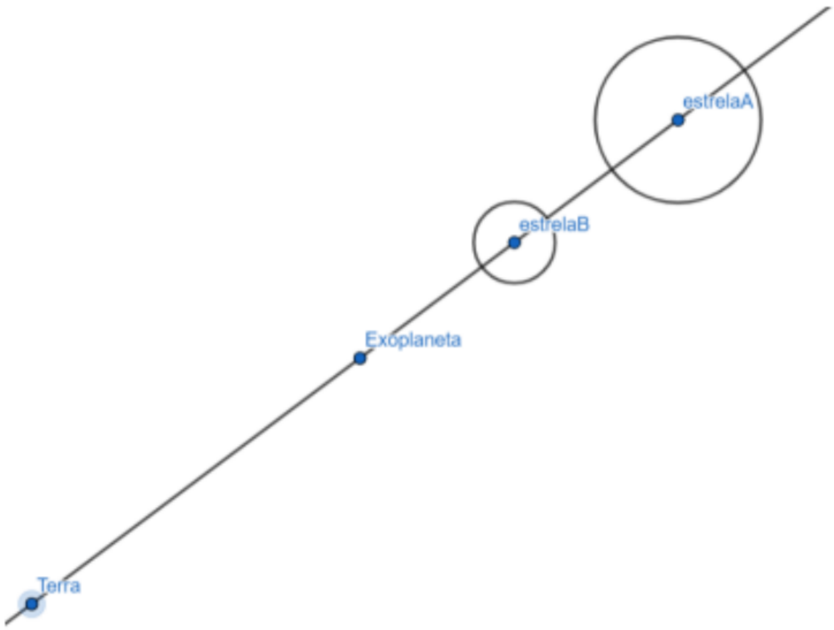

Figura 5.3: Caption

Sabendo disso e que o fluxo da luz refletida pelo planeta medido na Terra no dia juliano 2578,25 é $F_T = 1,24 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{W/m^2}$. Qual é a luminosidade da estrela A?

Dados: $T_{\text{binario}} = 135\,\text{dias}$; $T_{\text{exoplaneta}} = 315\,\text{dias}$; $M_A = 3,00 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$; $M_B = 1,50 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$; $D_{\text{Terra-sistema}} = 1\,\text{pc}$; $D_{A-\text{exoplaneta(min)}} = 4,18 \cdot 10^{10}\,\text{m}$; $p = 0,4$ (albedo geométrico do exoplaneta); $R_A \gg R_B \gg R_{\text{exoplaneta}} = 3000\,\text{km}$.

Considere que as órbitas são circulares, têm mesmo sentido e são *edge-on*.

Solução: Primeiro devemos utilizar regra de 3 para calcular quanto cada corpo se mexeu o que nos permitira descobrir suas posições relativas e quanto da luz que ilumina o planeta é refletida para a Terra.$\theta = \frac{t \cdot 360°}{T}$ e, assim, $\theta_{exoplaneta} = 135°$ e $\theta_{binário} = 315°$. Com base nisso, podemos desenhar a seguinte figura:

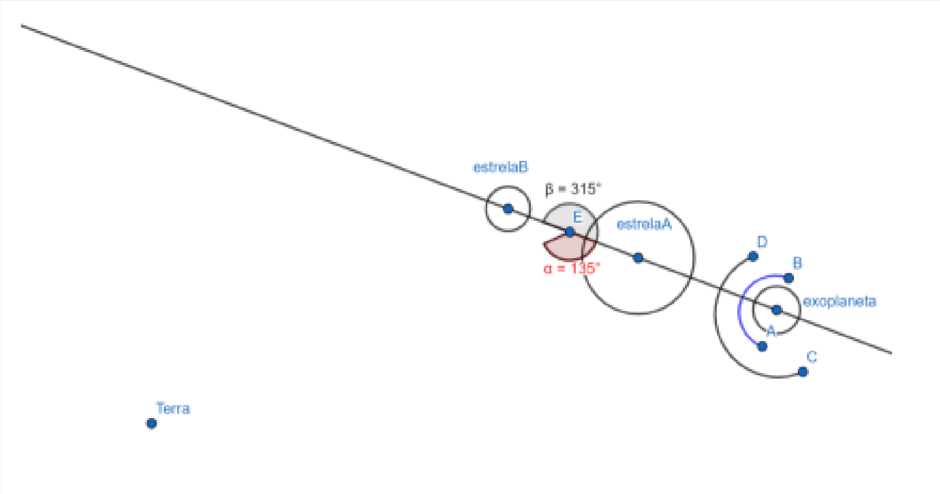

Figura 5.4: semicírculo preto: parte vista pela Terra, semicírculo azul: parte iluminada, ponto E: Centro de Massa

(Imagem fora de escala) Podemos ver pela figura que o semicírculo azul "aponta"na direção da estrela B e o semicírculo preto "aponta"na direção da Terra, portanto o ângulo que um está rotacionado em relação ao outro é igual a $\gamma = 180° - \alpha$, ou seja, o angulo entre B e D com o centro no exoplaneta é igual a 45°.

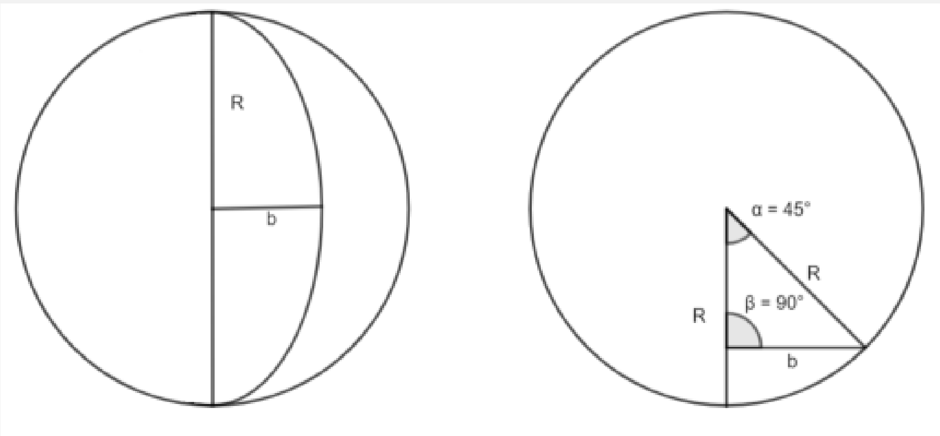

Figura 5.5: esquerda: exoplaneta visto da Terra. Direita:vista superior do exoplaneta

Na figura da esquerda podemos ver que a área iluminada do exoplaneta consiste em metade de um círculo e metade de uma elipse, área essa que pode ser calculada utilizando a figura da esquerda da seguinte forma:

$$b = R\sin 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} \longrightarrow A_T = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi R^2}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)$$

A partir disso, podemos concluir que

$$F_T = \frac{\frac{\pi R^2}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)}{\pi R^2} F_r = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} F_r$$

Onde F_r é o fluxo refletido pelo planeta a uma distância $D_{\text{Terra-sistema}}$. Escrevendo F_r em função do fluxo recebido pelo planeta, temos que:

$$F_T = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} \frac{F_A \cdot \pi R^2_{exoplaneta} \cdot p}{\pi D^2_{\text{Terra-sistema}}}$$

Como $F_A = \frac{L_A}{4\pi D^2_{A-\text{exoplaneta(min)}}}$, podemos escrever:

$$F_T = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} \frac{\pi R^2_{exoplaneta} \cdot p}{\pi D^2_{\text{Terra-sistema}}} \frac{L_A}{4\pi D^2_{A-\text{exoplaneta(min)}}}$$

Substituindo os valores e isolando L_A, temos que:

$$\boxed{L_A = 3,83 \cdot 10^{26}\ W}$$

pr 5. Um planeta de albedo A orbita sua estrela central em um círculo de raio a. Seja R o raio da estrela e T sua temperatura efetiva. Calcule a temperatura superficial do planeta no caso em que o planeta possui rotações rápida e devagar, respectivamente.

Solução:

No equilíbiro termico, a potência absorvida pelo planeta, tem que ser igual a potência emitida. A potência absorivida é dada por

$$P_{abs} = F_\odot \pi R^2 (1-A) = \frac{L_\odot}{4d^2} R^2 (1-A)$$

Já a potencia emitida é dada por

$$P_{emi} = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Para rotação rapída e

$$P'_{emi} = 2\pi R^2 \sigma T^4$$

Para rotação lenta. Isso ocorre, pois durante a rotação lenta, o planeta emite radiação somente em metade da sua área, denonado por $K = 2$ ou 4, temos

$$\frac{L_\odot}{4d^2} R^2 (1 - A) = K\pi R^2 \sigma T_{eq}^4$$

Substituindo $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$

$$\frac{R_\odot^2 T_\odot^4}{d^2}(1 - A) = K T_{eq}^4$$

Resolvendo para T_{eq}

$$T_{eq} = T_\odot \left(\frac{1 - A}{K}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{R_\odot}{d}}$$

pr 6. Uma estação espacial tem a forma de uma esfera negra localizada numa região do espaço com temperatura absoluta nula. Devido ao funcionamento da estação espacial, seu equipamento interno produz uma certa quantidade de energia que é conduzida isotropicamente dentro da esfera. Se a temperatura de equilíbrio da espaçonave em tais condições é T, determine a nova temperatura de equilíbrio T' da esfera após a adição de uma casca esférica negra de raio infinitesimalmente maior que o da espaçonave para cobri-la. E se forem utilizadas N cascas negras? E se apenas uma casca fina de emissividade ϵ for utilizada?

Solução:

Consiedere o seguinte esquema

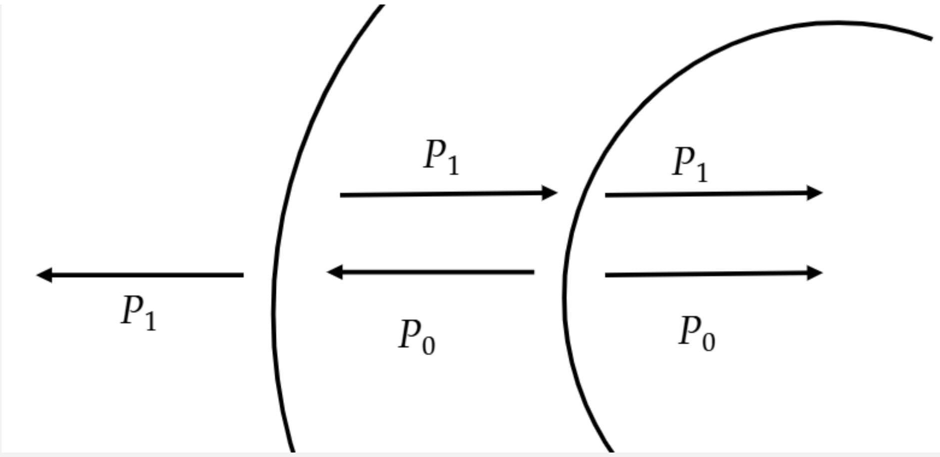

Figura 5.6: Representação do esquema

Ambas as esferas possuem o mesmo raio, e por serem corpos negros, a potencia emitida é a mesma que a potencia refletida. Nessa lógia, e utilizando a lei de stefan-boltzman, a potencia total dentro é dada por,

$$P = P_0 + P_1 = 2A\sigma T^4 = A\sigma T'^4$$

Assim,

$$\boxed{T' = 2^{1/4}T}$$

Generalizar para N esferas é fácil, e podemos concluir

$$\boxed{T' = (N+1)^{1/4}T}$$

Para o caso de uma esfera com emissividade ϵ, temos,

$$P = P_0 + P_1 = A\sigma(1+\epsilon)T^4 = A\sigma T'^4$$

Assim,

$$\boxed{T' = (1+\epsilon)^{1/4}T}$$

pr 7. Considere um exoplaneta cilíndrico de raio R_1 e emissividade ϵ_1 mantido à temperatura T_1 devido a processos internos, envolto por uma camada de poeira de raio R_2 e emissividade ϵ_2 mantida à temperatura T_2. Determine o fluxo resultante entre eles se ambos possuem comprimento l. Ignore os efeitos de borda e assuma que a reflexão é difusa.

Solução: Utilizando a ideia anterior, sejam os fatores de forma $F_{1,2}$ e $F_{2,1}$ é válido que,

$$F_{1,2}A_1 = F_{2,1}A_2$$

Para um cilíndro, $A = 2\pi Rl$ assim,

$$F_{1,2}R_1 = F_{2,1}R_2$$

Mas por definição a $F_{A,B}$ razão entre a radiação incidente sobre B devido a A e a radiação emitida por A, assim,

Como 2 está "cobrindo"em totalidade 1 temos $F_{12} = 1$, por conseguinte, $F_{21} = R_1/R_2$. Seguindo as definições do começo do capítulo, é valido que J (radiosidade) é o fluxo total e M (exitância) é a quantidade total de radiação emitida por uma superfície por unidade de área. Assim,

$$J_1 = M_1 + (1 - \epsilon_1)F_{11}J_1 + (1 - \epsilon_1)F_{12}J_2$$

$$J_2 = M_2 + (1 - \epsilon_2)F_{22}J_2 + (1 - \epsilon_2)F_{21}J_1$$

Caso não tenha ficado claro, o primerio termo é a radiação emitida por 1, o segundo termo é a radiação refletida por 1 que saí de 1 e o terceiro termo é a radiação refletida por 1 que sai de 2.

Pelo Teorema da reciprocidade,

$$F_{11} + F_{12} = 1 \rightarrow F_{11} = 0$$

$$F_{22} + F_{21} = 1 \rightarrow F_{22} = 1 - \frac{R_1}{R_2}$$

Assim, as equações se simplificam para,

$$J_1 = M_1 + (1 - \epsilon_1)J_2$$

$$J_2 = M_2 + (1 - \epsilon_2)\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)J_2 + (1 - \epsilon_2)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)J_1$$

Para facilitar a minha vida, vou definir $x = R_1/R_2$, de modo que,

$$J_2 = M_2 + (1-\epsilon_2)(1-x)J_2 + (1-\epsilon_2)xJ_1$$

$$J_2 = M_2 + (1-x-\epsilon_2+\epsilon_2 x)J_2 + (x-\epsilon_2 x)J_1$$

$$J_2(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x) = M_2 + (x-\epsilon_2 x)J_1$$

$$J_2 = \frac{M_2 + (x-\epsilon_2 x)J_1}{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)}$$

Assim,

$$J_1 = M_1 + \frac{(1-\epsilon_1)}{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)}M_2 + \frac{(1-\epsilon_1)(x-\epsilon_2 x)}{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)}J_1$$

$$J_1\left(\frac{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)-(1-\epsilon_1)(x-\epsilon_2 x)}{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)}\right) = M_1 + \frac{(1-\epsilon_1)}{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)}M_2$$

$$J_1((x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)-(1-\epsilon_1)(x-\epsilon_2 x)) = (x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)M_1 + (1-\epsilon_1)M_2$$

Finalmente,

$$J_1 = \frac{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)M_1 + (1-\epsilon_1)M_2}{(x+\epsilon_2-\epsilon_2 x)-(1-\epsilon_1)(x-\epsilon_2 x)}$$

Simplificando e substituindo x, obtemos,

$$J_1 = \frac{(\epsilon_2 R_2 + R_1 - \epsilon_2 R_1)M_1 + (1-\epsilon_1)R_2 M_2}{\epsilon_2 R_2 + \epsilon_1 R_1 - \epsilon_1\epsilon_2 R_1}$$

E da primeiro expressão, temos,

$$J_2 = \frac{J_1 - M_1}{1-\epsilon_1}$$

Portanto, o fluxo de calor entre o planeta e a camada de poeira é dado por,

$$\dot{Q} = F_{12}A_1 J_1 - F_{21}A_2 J_2 = A_1(J_1 - J_2)$$

Substitundo $M_i = \epsilon_i \sigma T_i^4$, obtemos,

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{2\pi R_1 l\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)}}$$

pr 8. A cavidade de entrada de um bolômetro particular é um cone com um ângulo de abertura de 30°, cuja superfície possui um coeficiente de absorção de energia de $\alpha = 0,99$. Assuma que não há espalhamento da radiação incidente nas paredes da cavidade, apenas múltiplas reflexões especulares. O bolômetro é conectado a um resfriador que mantém a superfície da cavidade do bolômetro a praticamente 0 K. O instrumento está orbitando o Sol a 2 UA e está apontado diretamente para o centro do disco solar. Calcule a temperatura do corpo negro que irradiaria a mesma quantidade de energia por unidade de área superficial que o bolômetro.

Solução: Podemos calcular o fluxo incidente no bolômetro como:

$$F = \frac{L_\odot}{4\pi d^2} = \frac{3,83.10^{26}}{4\pi(2.1,5.10^{11})^2} \approx 338,65\frac{W}{m^2}$$

Pelo fato do bolômetro ser mantido a quase $0K$, não emite radiação por conta própria. Então, toda a radiação "emitida"por ele deve ser apenas a refletida vinda do sol. Pela geometria do problema:

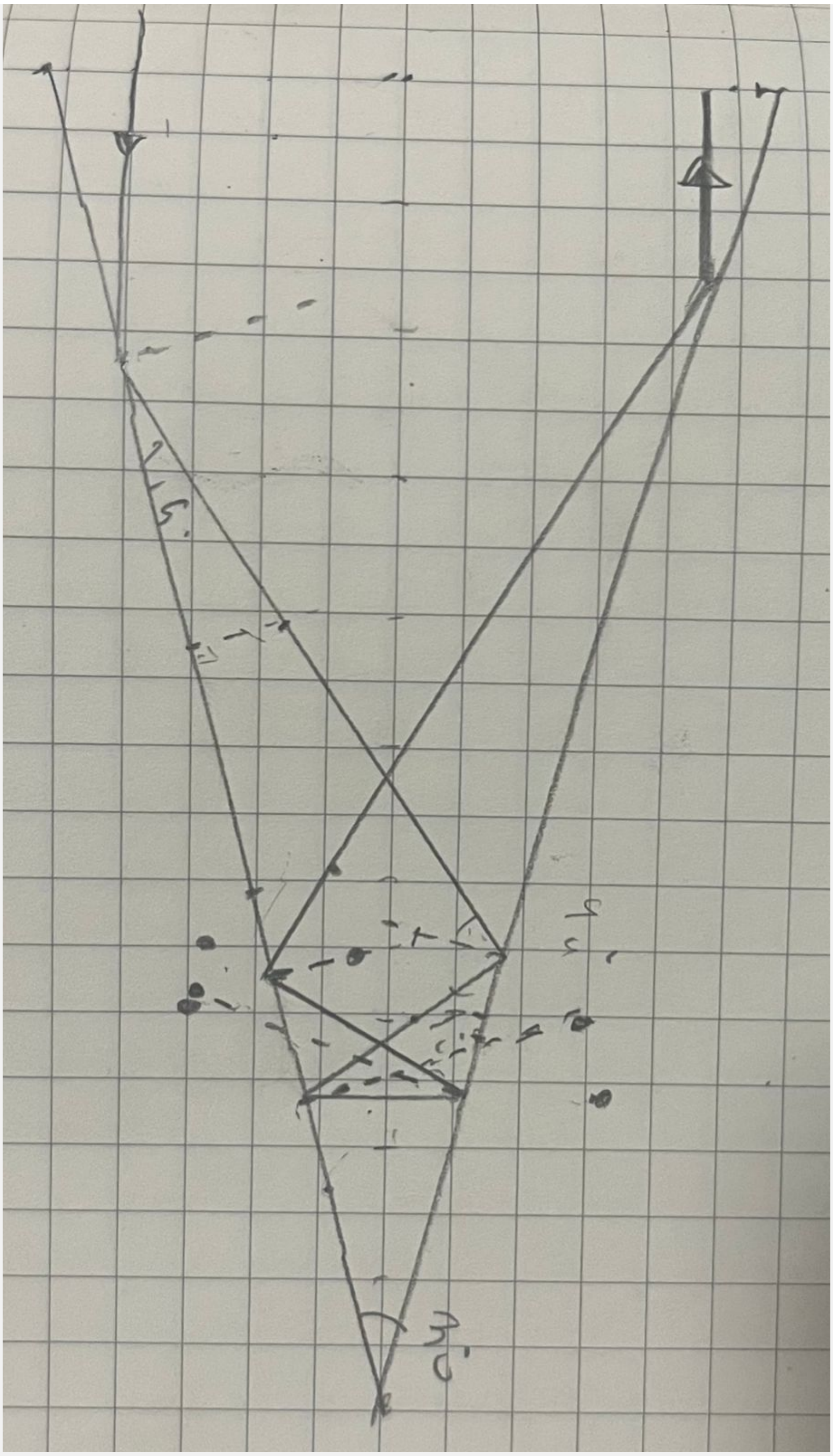

Figura 5.7: Representação do problema

Todos os raios de luz vindos do sol sofrerão reflexão seis vezes antes de voltar pelo orifício. A cada reflexão, o bolômetro absorve uma fração α da radiação, refletindo $1-\alpha = 1-0,99 = 0,01$. Como os raios sofrem três reflexões, a potência refletida será:

$$P_{refletida} = F(1-\alpha)^6 = F.0,01^6 = 3,386.10^{-10}\frac{W}{m^2}$$

Para descobrirmos a temperatura de um corpo negro perfeito com potência igual à essa usamos a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$P_{refletida} = \sigma T^4$$

$$T = (\frac{P_{refletida}}{\sigma})^{1/4} = (\frac{3,386.10^{-10}}{5,67.10^{-8}})^{1/4}$$

Portanto:

$$\boxed{T \approx 0,278K}$$

pr 9. Considere um exoplaneta de raio r e temperatura absoluta T_0, aproximado como um corpo negro esférico. Em seu processo de formação, uma fina camada de poeira concêntrica de raio R acabou se formando em volta dele. Seja T_2 a temperatura do entorno a uma distância muito grande do exoplaneta. Encontre a temperatura de equilíbrio T_1 da camada esférica.

Solução: Como o planeta é envolvido pela camada de poeira e eles são duas esferas concêntricas, temos:

$$F_{0\longrightarrow 1} = 1$$

Pelo teorema da reciprocidade, temos:

$$A_0 F_{0\longrightarrow 1} = A_1 F_{1\longrightarrow 0}$$

Logo,

$$4\pi r^2 F_{0\longrightarrow 1} = 4\pi r^2 = 4\pi R^2 F_{1\longrightarrow 0}$$

$$F_{1\longrightarrow 0} = \frac{r^2}{R^2}$$

A potência líquida trocada entre o planeta e a casca esférica é dada por:

$$\dot{Q}_{0\longleftrightarrow 1} = \sigma A_0 F_{0\longrightarrow 1}(T_0^4 - T_1^4) = \sigma 4\pi r^2 \cdot 1 \cdot (T_0^4 - T_1^4) = 4\pi r^2 \sigma (T_0^4 - T_1^4)$$

A face externa da camada de poeira, de área $A_1 = 4\pi R^2$, emite potência $P_{emit.} = 4\pi R^2 \sigma T_1^4$. Por outro lado, ela absorve do meio externo, à temperatura T_2 uma potência $P_{abs.} = 4\pi R^2 \sigma T_2^4$. Daí, a potência líquida trocada entre a camada e o meio externo é:

$$\dot{Q}_{1\longleftrightarrow ext.} = P_{emit.} - P_{abs.} = 4\pi R^2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

No equílibrio, teremos:

$$\dot{Q}_{0\longleftrightarrow 1} = \dot{Q}_{1\longleftrightarrow ext.}$$

$$4\pi r^2 \sigma (T_0^4 - T_1^4) = 4\pi R^2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Simplificando:

$$r^2 (T_0^4 - T_1^4) = R^2 (T_1^4 - T_2^4)$$

Isolando T_1:

$$T_1 = (\frac{r^2 T_0^4 + R^2 T_2^4}{R^2 + r^2})^{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{T_1 = (\frac{r^2 T_0^4 + R^2 T_2^4}{R^2 + r^2})^{\frac{1}{4}}}$$

pr 10. Neste problema, modelaremos o efeito da atmosfera na Terra. Suponha que o Sol seja um corpo negro de temperatura T_1 e raio R_1. A Terra é uma esfera que está localizada a uma distância R do Sol e possui raio R_3. A emissividade da Terra é ϵ_3.

a) Se não houvesse atmosfera na Terra, determine sua temperatura de equilíbrio, T_3.

b) Agora, consideremos os efeitos da atmosfera. Modele-a como uma casca esférica de gás, com uma emissividade ϵ_2 e raio exterior $R_2 > R_3$, concêntrica à Terra. No equilíbrio térmico, sua absorptividade para os comprimentos de onda no ultravioleta e no infravermelho é ϵ_2. A atmosfera transmite uma fração τ da radiação ultravioleta mas é completamente opaca ao infravermelho. Assumindo que o Sol emita luz ultravioleta enquanto a Terra emite e re-emite no infravermelho, determine as temperaturas T_2 da atmosfera e T_3 da Terra, no equilíbrio termodinâmico. Assuma que a atmosfera seja um condutor de calor perfeito, de forma que toda a radiação incidente sobre ela seja uniformemente distribuída por sua superfície.

Solução: a) A potência absorvida pela Terra corresponde a quantidade de energia solar absorvida pelo disco terrestre. Assim:

$$P_{Terra-abs.} = F_{\odot} \cdot \pi R_1^2 = \frac{P_{\odot}}{4\pi R^2} \cdot \pi R_1^2$$

$$P_{Terra-abs.} = \frac{4\pi R_3^2 \sigma T_1^4}{4\pi R^2} \cdot \pi R_1^2 = \frac{R_3^2 \sigma T_1^4}{R^2} \cdot \pi R_1^2$$

Pela Lei de Stephan-Boltzmann, a potência emitida pela Terra corresponde a:

$$P_{Terra-emit.} = 4\pi \epsilon_3 R_3^2 \sigma T_3^4$$

Para que haja equilíbrio térmico na Terra, a potência absorvida pelo planeta deve ser igual a potência emitida pelo Sol. Desta forma:

$$P_{Terra-abs.} = P_{Terra-emit.}$$

$$\frac{R_3^2 \sigma T_1^4}{R^2} \cdot \pi R_1^2 = 4\pi \epsilon_3 R_3^2 \sigma T_3^4$$

$$\frac{T_1^4}{R^2} \cdot R_1^2 = 4\epsilon_3 T_3^4$$

Isolando T_3, temos:

$$T_3 = T_1 (\frac{R_1^2}{4\epsilon_3 R^2})^{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{T_3 = T_1 (\frac{R_1^2}{4\epsilon_3 R^2})^{\frac{1}{4}}}$$

b) Agora temos uma atmosfera que absorve parte da radiação ultra-violeta do sol e deixa passar uma fração τ. O esquema a seguir representa a nova situação. A Terra absorve $1 - \tau$ do fluxo vindo do sol e a radiação emitida da atmosfera.

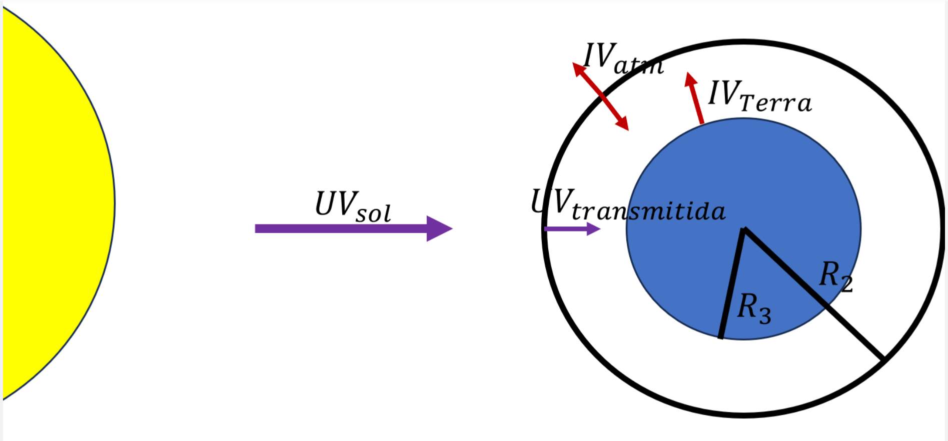

Figura 5.8

A atmosfera absorve parte do fluxo do sol e transmite o resto, absorvendo também a rediação IV da Terra, e emitindo em infravermelho para a direção da Terra e para o espaço, devido á forma de casca esférica. A Terra absorve a radiação UV transmitida e a infravermelha da atmosfera, emitindo em infravermelho. Temos para o caso da atmosfera e Terra no equilíbrio térmico, respectivamente:

$$P_{abs} = \frac{P_{sol}}{4\pi R^2}(1-\tau)\pi R_2^2 + P_{Terra} = P_{irr} = 2.4\pi\sigma\epsilon_2 R_2^2 T_2^4 (eq.1)$$

$$P_{abs} = \frac{P_{sol}}{4\pi R^2}\tau + 4\pi R_2^2 \sigma\epsilon_2 T_2^4 = P_{irr} = P_{Terra} = 4\pi\sigma\epsilon_3 R_3^2 T_3^4 (eq.2)$$

Chegamos a um sistema de equações, e se somarmos as duas, obtemos:

$$\frac{P_{sol}}{4\pi R^2}\pi R_2^2 - \tau\frac{P_{sol}}{4\pi R^2}\pi R_2^2 + \tau\frac{P_{sol}}{4\pi R^2}\pi R_3^2 = 4\pi\sigma\epsilon_2 R_2^2 T_2^4$$

Substituindo $P_{sol} = 4\pi\sigma R_1^2 T_1^4$, colocando termos em evidência, cortando termos iguais em ambos os lados e passando $4\epsilon_2 R_2^2$ para o outro lado da equação chegamos a:

$$\frac{R_1^2 T_1^4}{16R^2\epsilon_2 R_2^2}(R_2^2(1-\tau) + \tau R_3^2) = T_2^4$$

Portanto:

$$\boxed{T_2 = T_1\left(\frac{R_1^2(R_2^2(1-\tau) + \tau R_3^2)}{16R^2\epsilon_2 R_2^2}\right)^{1/4}}$$

Agora, substituindo T_2eP_{sol} na eq.2 e simplificando a equação, chegamos em:

$$\frac{R_1^2 T_1^4}{4R^2}\tau R_3^2 + \frac{\epsilon_2 R_2^2}{4\epsilon_2 R_2^2}(R_2^2(1-\tau)+\tau R_3^2) = \epsilon_3 R_3^2 T_3^4$$

Manipulando a equação, simplificando e elevando ambos os lados por 1/4 chegamos em:

$$\boxed{T_3 = T_1(\frac{R_1^2}{16R^2\epsilon_3 R_3^2}(5\tau R_3^2 + R_2^2(1-\tau)))^{1/4}}$$

pr 11. Obtenha uma expressão para a pressão de radiação em uma superfície sobre a qual incide um feixe de luz com fluxo F e ângulo β em relação à normal. Considere que a superfície possui albedo A

Solução: Todos os tipos de radiação eletromagnética possuem energia e, consequentemente, momento linear. Quando ela atinge um objeto, ela exerce força e pressão sobre sua superfície. No caso

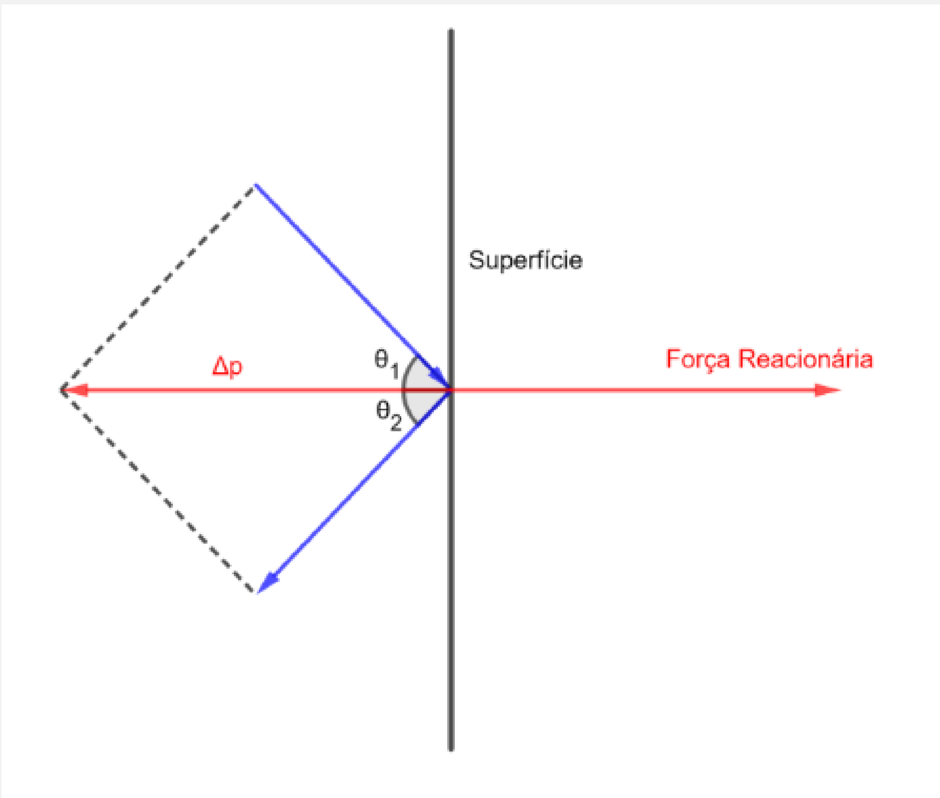

Figura 5.9

Considerando as ondas eletromagnéticas como um gás de fótons,a força necessária para colocar em repouso cada partícula é $F' = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Além disso, a quantidade de energia absorvida pela superfície durante a colisão será $\Delta U = F' \cdot \Delta x$. Combinando as duas equações, obtém-se uma fórmula para a variação de momento da partícula em função da energia absorvida por uma superfície de albedo nulo ($A = 0$):

$$\Delta p_{abs.} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot \Delta t$$

$$\Delta p_{abs.} = \frac{\Delta U}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Como as partículas se propagam com velocidade $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$, então:

$$\Delta p_{abs.} = \frac{\Delta U}{c} \;\; \textit{(eq.I)}$$

Se a partícula for refletida pela superfície ($A = 1$),a variação de momento será o dobro porque a partícula entra em repouso e depois volta com um momento linear igual ao anterior (em módulo):

$$\Delta p_{ref.} = \frac{2\Delta U}{c} \;\; \textit{(eq.II)}$$

Sabendo que o feixe faz um ângulo β com a normal da superfície, a potência interceptada por uma área S será:

$$\frac{dU}{dt} = FS\cos\beta \longrightarrow F \cdot \cos\beta = \frac{1}{S} \cdot \frac{dU}{dt} \;\; \textit{(eq.III)}$$

A pressão de radiação é produzida apenas pela componente normal do momento linear, que é dada por $dp_{\perp} = dp\cos\beta$. Substituindo *(eq.I)* em *(eq.III)*, temos:

$$P_{abs.} = \frac{F'_{\perp}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp_{abs.\perp}}{dt} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp_{abs.}\cos\beta}{dt} = \frac{\cos\beta}{S} \cdot \frac{dp_{abs.}}{dt}$$

$$P_{abs.} = \frac{\cos\beta}{S} \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\Delta U}{c})$$

$$P_{abs.} = \frac{\cos\beta}{Sc} \cdot \frac{d}{dt}(\Delta U)$$

$$P_{abs.} = \frac{\cos\beta}{Sc} \cdot \frac{dU}{dt} = \frac{F \cdot \cos^2\beta}{c}$$

A pressão de radiação refletida, também determinada pela componente normal do momento linear, é obtida ao substituir *(eq.II)* em *(eq.III)*:

$$P_{ref.} = \frac{F'_{ref.\perp}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp_{ref.\perp}}{dt} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp_{ref} \cdot \cos\beta}{dt}$$

$$P_{ref.} = \frac{\cos\beta}{S} \cdot \frac{d}{dt}(\frac{2\Delta U}{c})$$

$$P_{ref.} = \frac{2\cos\beta}{Sc} \cdot \frac{d}{dt}(\Delta U)$$

$$P_{ref.} = \frac{2\cos\beta}{Sc} \cdot \frac{dU}{dt} = \frac{2F \cdot \cos^2\beta}{c}$$

Para um corpo de albedo A, tal como no enunciado, a pressão de radiação é:

$$P = (1 - A)P_{abs.} + AP_{ref.}$$

$$P = (1 - A)\frac{F \cdot \cos^2\beta}{c} + A\frac{2F \cdot \cos^2\beta}{c}$$

$$P = (1 + A) \cdot \frac{F \cdot \cos^2\beta}{c}$$

$$\boxed{P = (1 + A) \cdot \frac{F\cos^2\beta}{c}}$$

pr 12. (P1 Vinhedo 2021 - Adaptado) O uso de velas solares tem grande relevância em modelos teóricos de propulsão. Em meados da década de 1990 foi proposto um método que permite que uma espaçonave equipada com velas solares atinja velocidades de cruzeiro capazes de escapar do sistema solar a velocidades muito maiores do que as atingidas por outros métodos de propulsão avançados, como propulsão nuclear. Analisaremos um modelo de propulsão fazendo uso de uma vela solar. Considere que uma espaçonave foi lançada em uma órbita solar quase circular com um raio de 1 UA. Uma vela solar perfeitamente refletora foi implantada nela, de modo que ficasse constantemente voltada para o Sol, reduzindo a força central inicialmente exercida na espaçonave em 2%.

a) Considerando o exposto acima e sabendo que a massa da superfície refletora corresponde a 5% da massa total do sistema que compõe a espaçonave, calcule a densidade superficial (em g/m^2) da vela.

No curso de seu movimento, esta vela se fechou instantaneamente assim que o aparelho

atingiu o afélio de sua órbita, sendo reaberta no periélio, repetindo esse ciclo a cada revolução.
b) Quantas revoluções completas ao redor do Sol - a partir do momento em que a vela foi fechada pela primeira vez - essa espaçonave fará antes que sua excentricidade fique maior ou igual a 1 e essa saia do sistema solar em uma órbita aberta? A interação do aparelho com todos os corpos, exceto o Sol e seus fótons, deve ser desprezada. Não é necessário considerar o efeito de Poynting-Robertson - isto é, desconsidere o torque exercido pela força da radiação.
c) Calcule a distância da espaçonave até o centro do Sol (em UA) no momento da última vez em que a vela é reaberta.

Solução: a) Para uma placa totalmente refletora e que fica constantemente voltada para o Sol, teremos uma pressão de radiação dada por:

$$P = \frac{2F_\odot}{c}$$

Assim, podemos escrever a seguinte equação para a força:

$$F_{rad} = \frac{2L_\odot}{4\pi r^2 c} \cdot A = 2\% \cdot \frac{GM_\odot m_{tot}}{r^2} = \frac{GM_\odot m_{tot}}{50r^2}$$

Temos que $m_{Vela} = 5\% \cdot m_{tot} = \frac{m_{tot}}{20}$. Assim:

$$\frac{2L_\odot}{4\pi r^2 c} \cdot A = \frac{20GM_\odot m_{Vela}}{50r^2} = \frac{2GM_\odot m_{Vela}}{5r^2}$$

$$\sigma = \frac{m_{Vela}}{A} = \frac{5L_\odot}{4\pi GM_\odot c}$$

Substituindo os valores:

$$\boxed{\sigma = 3,8\frac{g}{cm^2}}$$

b)Vamos, nesse problema, encontrar as sequências que nos dão a excentricidade nos seguintes momentos:

$*e_n \longrightarrow$ *excentricidade da órbita após a n-ésima vez que a vela é fechada (no afélio)*

$*E_n \longrightarrow$ *excentricidade da órbita após a n-ésima vez que a vela é aberta (no periélio)*

Como a gravidade efetiva é reduzida 2%, nos momentos em que a vela está aberta, é como se a espaçonave estivesse sob ação gravitacional de um corpo de massa $\frac{49M}{50}$ onde M é a massa do Sol. Assim, vamos analisar dois momentos genéricos em que a espaço nave passa pelo periélio e pelo afélio logo em seguida:

- **i.Momento de passagem pelo periélio:**A partir da conversavação de energia no periélio com a energia mecânica total do sistema, temos para o instante de antes da vela abrir que:

$$E_{mec.} = -\frac{GMm}{2a_n} = -\frac{GMm}{r_{p-n}} + \frac{mV_{p-n}^2}{2}$$

Onde $r_{p-n} = a(1 - e_n)$. Assim:

$$E_{mec.} = -\frac{GMm}{2a_n} = -\frac{GMm}{a_n(1 - e_n)} + \frac{mV_{p-n}^2}{2}$$

Isolando V_{p-n}

$$V_{p-n} = \sqrt{\frac{GM}{a_n} \cdot \frac{1 + e_n}{1 - e_n}} = \sqrt{\frac{GM}{r_n} \cdot (1 + e_n)} \ \textit{(eq.I)}$$

Para o momento imediatamente após a vela se abrir, a espaçonave terá a mesma velocidade Vn e mesma distância periélica. Contudo, terá uma gravidade efetiva distinta:

$$E_{mec.} = -\frac{49GMm}{100A_n} = -\frac{49GMm}{50R_{p-n}} + \frac{mV_{p-n}^2}{2}$$

Onde $R_{p-n} = A(1 - e_n)$. Assim:

$$E_{mec.} = -\frac{50GMm}{100A_n} = -\frac{GMm}{A_n(1 - e_n)} + \frac{mV_{p-n}^2}{2}$$

Isolando V_{p-n}

$$V_{p-n} = \sqrt{\frac{49GM}{50A_n} \cdot \frac{1 + E_n}{1 - E_n}} = \sqrt{\frac{49GM}{50r_n} \cdot (1 + E_n)} \ \textit{(eq.II)}$$

Sendo *(eq.I)* = *(eq.II)*, então:

$$\sqrt{\frac{GM}{r_n} \cdot (1 + e_n)} = \sqrt{\frac{49GM}{50r_n} \cdot (1 + E_n)}$$

Simplificando, chegamos em:

$$E_n = \frac{50e_n + 1}{49}$$

ii.Momento de passagem pelo periélio:A partir da conversavação de energia no afélio com a energia mecânica total do sistema, temos que a velocidade orbital para o instante antes da vela fechar no afélio é:

$$E_{mec.} = -\frac{GMm}{2A_{n+1}} = -\frac{GMm}{R_{a-(n+1)}} + \frac{mV_{a-(n+1)}^2}{2}$$

Onde $R_{a-(n+1)} = A_{n+1}(1 + E_n)$. Assim:

$$E_{mec.} = -\frac{G(\frac{49}{50})Mm}{2A_{n+1}} = -\frac{G(\frac{49}{50}M)m}{A_{n+1}(1 + E_n)} + \frac{mV_{a-(n+1)}^2}{2}$$

Isolando $V_{a-(n+1)}$:

$$V_{a-(n+1)} = \sqrt{\frac{49GM}{50A_n} \cdot \frac{1 - E_n}{1 + E_n}} = \sqrt{\frac{49GM}{50R_{a-(n+1)}} \cdot (1 - E_n)}$$

Para o movimento após a vela se fechar, a conservação de energia será

$$E_{mec.} = -\frac{GMm}{2A_{n+1}} = -\frac{GMm}{R_{a-(n+1)}} + \frac{mV_{a-(n+1)}^2}{2}$$

Onde $R_{a-(n+1)} = A_{n+1}(1 + E_n)$. Assim:

$$E_{mec.} = -\frac{G(\frac{49}{50})Mm}{2A_{n+1}} = -\frac{G(\frac{49}{50}M)m}{A_{n+1}(1 + E_n)} + \frac{mV_{a-(n+1)}^2}{2}$$

Isolando $V_{a-(n+1)}$:

$$V_{a-(n+1)} = \sqrt{\frac{49GM}{50A_n} \cdot \frac{1 - E_n}{1 + E_n}} = \sqrt{\frac{49GM}{50R_{a-(n+1)}} \cdot (1 - E_n)} \; \textit{(eq.III)}$$

Para o momento imediatamente após a vela se fechar, a espaçonave terá a mesma velocidade $V_{a-(n+1)}$ e a mesma distância afélica. Contudo, a gravidade efetiva será distinta:

$$E_{mec.} = -\frac{GMm}{2a_{n+1}} = -\frac{GMm}{r_{a-(n+1)}} + \frac{mV_{a-(n+1)}^2}{2}$$

Onde $r_{a-(n+1)} = a_{n+1}(1 + e_{n+1})$

$$E_{mec.} = -\frac{GMm}{2a_{n+1}} = -\frac{GMm}{a_{n+1}(1 + e_{n+1})} + \frac{mV_{a-(n+1)}^2}{2}$$

Isolando $V_{a-(n+1)}$:

$$V_{a-(n+1)} = \sqrt{\frac{GM}{a_{n+1}} \cdot \frac{1 - e_{n+1}}{1 + e_{n+1}}} = \sqrt{\frac{GM}{r_{a-(n+1)}} \cdot (1 - e_{n+1})} \ \textit{(eq.IV)}$$

Sendo *(eq.III)* = *(eq.IV)*, então:

$$\sqrt{\frac{49GM}{50R_{a-(n+1)}} \cdot (1 - E_n)} = \sqrt{\frac{GM}{r_{a-(n+1)}} \cdot (1 - e_{n+1})}$$

Simplificando:

$$e_{n+1} = \frac{49E_n + 1}{50}$$

Se ja $E_n = \frac{50e_n+1}{49}$, então:

$$e_{n+1} = \frac{49E_n + 1}{50} = e_n + \frac{1}{25}$$

$$e_{n+1} - e_n = \frac{1}{25} = 0,04$$

Assim, a sequência e_n será uma progressão aritmética de razão $0,04$, de modo que:

$$e_n = \frac{n}{25}$$

Dessa forma:

$$E_n = \frac{50e_n + 1}{49} = \frac{2n + 1}{49}$$

A sequência que nos dará, então, a excentricidade para cada meia revolução será:

$$(e_1, E_1, e_2, E_2, e_3, E_3, e_4, E_4, ..)$$

A sequência acima é válida até o primeiro valor em que teremos uma excentricidade maior ou igual a um.Perceba que para $n = 24$, teremos $E_{24} = 1$. Assim na 24° passagem pelo periélio, a órbita se tornará aberta e isso equivale a **23,5 revoluções** a partir do primeiro fechamento da vela. c) Como as forças são centrais e não forças externas a gerarem torque, podemos conservar o momento angular, de modo que:

$$v \cdot a = v_{periélio} \cdot r_{periélio}$$

$$\sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot a = \sqrt{\frac{GM}{r_{periélio}}} \cdot r_{periélio}$$

Assim:

$$r_{periélio} = \frac{a}{1+e}$$

Sendo $a = 1\ UA$ e, na última órbita, $n = 24$ e $e_n = \frac{24}{25}$, teremos:

$$r_{periélio} = \frac{1}{1+\frac{24}{25}}$$

$$r_{periélio} = 0,51\ UA$$

$$\boxed{r_{periélio} = 0,51\ UA}$$

pr 13. (USAPhO 2018) A pressão de radiação devido ao Sol é responsável por limpar pequenas partículas do sistema solar interno.

a) A força de radiação em uma partícula esférica de raio r é dada por

$$F = PQ\pi r^2$$

Onde P é a pressão de radiação e Q é um fator de qualidade adimensional que depende do tamanho relativo da partícula r e do comprimento de onda λ. Ao longo deste problema assuma que o Sol emita apenas um comprimento de onda λ_{max}; a não ser que seja dito o contrário, deixe sua resposta em termos de variáveis simbólicas.

i. Dado que a potência total radiada pelo Sol é dada por $L_\odot$, encontre uma expressão para a pressão de radiação a uma distância R do Sol.

ii. Assumindo que a partícula tenha uma densidade ρ, derive uma expressão para a razão

$$\frac{F_{\text{radiation}}}{F_{\text{gravity}}}$$

em termos de $L_\odot$, da massa do Sol $M_\odot$, ρ, do raio da partícula r, e do fator de qualidade

Q.

iii. O fator de qualidade é tal que

$$\text{Se } r \ll \lambda, Q \sim (r/\lambda)^2$$

$$\text{Se } r \sim \lambda, Q \sim 1$$

$$\text{Se } r \gg \lambda, Q \sim 1$$

Considerando os três tamanhos possíveis de partícula, qual tem mais chance de ser repelida pela pressão de radiação solar?

b) O efeito Poynting-Robertson age como outro mecanismo de limpeza do sistema solar. i. Assuma que a partícula esteja em uma órbita circular ao redor do Sol. Ache a velocidade da partícula v em termos de $M_\odot$, da distância até o Sol R, e de quaisquer constantes fundamentais.

ii. Como a partícula está se movendo, a força de radiação não está exatamente na direção radial. Determine o torque τ na partícula por conta da pressão de radiação. Assuma que $v \ll c$.

iii. Já que $\tau = dL/dt$, o momento angular L da partícula muda com o tempo. Assim, encontre dR/dt, a taxa de variação da posição radial da partícula. Assuma que a órbita permaneça sempre quase-circular.

iv. Derive uma expressão para o tempo necessário para remover partícula de raio $r \approx 1\,\text{cm}$ e densidade $\rho \approx 1000\,\text{kg/m}^3$ em órbitas circulares a uma distância $R = R_\oplus$, e use os dados abaixo para simplificar sua expressão.

Algumas constantes úteis:

$$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}\,\text{kg};\ L_\odot = 3,828 \cdot 10^{26}\,\text{W};\ R_\oplus = 1,5 \cdot 10^{11}\,\text{m};\ \lambda_{\text{max}} = 500\,\text{nm}.$$

Solução: a) i. A intensidade da radiação solar a uma distância R é dada por $I = \frac{L_\odot}{4\pi R^2}$. Como a pressão de radiação P para absorção total é dada pela razão entre a intensidade e a velocidade da luz ($P = \frac{I}{c}$), temos:

$$P = \frac{L_\odot}{4\pi R^2 c}$$

$$\boxed{P = \frac{L_\odot}{4\pi R^2 c}}$$

ii. A força gravitacional sobre a partícula esférica de massa m é:

$$F_{gravity} = \frac{GM_\odot}{R^2} \cdot \frac{4\pi\rho r^3}{3}$$

Substituindo a pressão de radiação encontrada no item anterior na fórmula do enunciado:

$$F_{radiation} = PQ\pi r^2 = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R^2 c}\right) Q\pi r^2 = \frac{L_\odot Q r^2}{4R^2 c}$$

Dividindo as duas equações, os termos R^2 e π se simplificam:

$$\frac{F_{radiation}}{F_{gravity}} = \frac{(\frac{L_\odot Q r^2}{4R^2 c})}{(\frac{GM_\odot}{R^2} \cdot \frac{4\pi\rho r^3}{3})}$$

$$\frac{F_{radiation}}{F_{gravity}} = \frac{3L_\odot}{16\pi G c M_\odot \rho} \frac{Q}{r}$$

$$\boxed{\frac{F_{radiation}}{F_{gravity}} = \frac{3L_\odot}{16\pi G c M_\odot \rho} \frac{Q}{r}}$$

iii. Analisando a razão $\frac{F_{radiation}}{F_{gravity}} \propto \frac{Q}{r}$ obtida no item anterior para os três regimes de tamanho: No caso em que $r \ll \lambda$, temos $Q \sim (r/\lambda)^2$, logo $\frac{Q}{r} \propto r$. Assim, quando r diminui, a razão também diminui. No caso em que $r \gg \lambda$, temos $Q \sim 1$, logo $\frac{Q}{r} \propto \frac{1}{r}$. Assim, quando r aumenta, a razão diminui. No caso em que $r \sim \lambda$, temos $Q \sim 1$, o que implica em $\frac{Q}{r} \sim \frac{1}{\lambda}$. Este regime representa o ponto onde a razão atinge o seu valor máximo. Portanto, as partículas com $r \sim \lambda$ (tamanho da ordem do comprimento de onda da radiação solar) são as que possuem a maior razão entre força de radiação e força gravitacional, sendo as mais propensas a serem repelidas para fora do sistema solar interno.

b) i. Como a partícula está em órbita circular estável, a força centrípeta é provida unicamente pela força gravitacional:

$$F_{grav.} = F_{centrípeta}$$

$$\frac{GM_\odot m}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{GM_\odot}{R} = v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}}$$

ii. Devido ao movimento orbital com velocidade tangencial v, a partícula observa a radiação vindo com um pequeno ângulo de aberração $\sin\theta \approx \frac{v}{c}$ em relação à direção radial. Isso gera uma força de arrasto oposta ao movimento (Efeito Poynting-Robertson):

$$F_{tan} = -F_{radiation} \cdot \sin\theta = -\left(\frac{L_\odot Q r^2}{4R^2 c}\right)\frac{v}{c} = -\frac{L_\odot Q r^2 v}{4R^2 c^2}$$

Como o torque atua contra o movimento orbital, temos:

$$\tau = RF_{tan} = -R\left(\frac{L_\odot Q r^2 v}{4R^2 c^2}\right)$$

$$\boxed{\tau = -\frac{L_\odot Q r^2 v}{4Rc^2}}$$

iii. O momento angular orbital da partícula é dado por:

$$L = mvR = m\left(\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}\right)R = m\sqrt{GM_\odot R}$$

Sendo $\tau = dL/dt$, diferenciamos o momento angular L em relação ao tempo via regra da cadeia:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = m\sqrt{GM_\odot}\frac{d}{dt}(R^{1/2}) = m\sqrt{GM_\odot}\left(\frac{1}{2\sqrt{R}}\frac{dR}{dt}\right)$$

Substituindo o torque encontrado no item anterior e a velocidade orbital $v = \frac{\sqrt{GM_\odot}}{\sqrt{R}}$:

$$-\frac{L_\odot Q r^2 \sqrt{GM_\odot}}{4Rc^2\sqrt{R}} = m\sqrt{GM_\odot}\left(\frac{1}{2\sqrt{R}}\frac{dR}{dt}\right)$$

Simplificando os termos comuns $\sqrt{GM_\odot}$ e $\frac{1}{\sqrt{R}}$ em ambos os lados:

$$-\frac{L_\odot Q r^2}{4Rc^2} = \frac{m}{2}\frac{dR}{dt}$$

Substituindo a massa da partícula esférica $m = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$:

$$-\frac{L_\odot Q r^2}{4Rc^2} = \frac{2\pi\rho r^3}{3}\frac{dR}{dt}$$

Isolando os termos correspondentes, obtemos a equação diferencial correta para a variação da posição radial:

$$\boxed{-\frac{L_\odot Q}{c^2 R} = \frac{8\pi\rho r}{3}\frac{dR}{dt}}$$

iv. Separando as variáveis R e t da equação diferencial obtida anteriormente:

$$R\,dR = -\frac{3L_\odot Q}{8\pi\rho r c^2}dt$$

Integrando de ambos os lados, desde a posição orbital da Terra ($R = R_\oplus$) em $t = 0$ até a superfície do Sol ($R = 0$) no tempo limite $t = T$:

$$\int_{R_\oplus}^{0} R\,dR = \int_{0}^{T} -\frac{3L_\odot Q}{8\pi\rho r c^2}dt$$

$$\left[\frac{R^2}{2}\right]_{R_\oplus}^{0} = -\frac{3L_\odot Q}{8\pi\rho r c^2}T$$

$$-\frac{R_\oplus^2}{2} = -\frac{3L_\odot Q}{8\pi\rho r c^2}T$$

Isolando T, obtemos a expressão literal correta para o tempo de queda:

$$T = \frac{4\pi\rho r c^2 R_\oplus^2}{3L_\odot Q}$$

Como $r = 1\,\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$ e $\lambda_{\text{max}} = 500\,\text{nm}$, temos que $r \gg \lambda$, logo utilizaremos $Q \sim 1$. Substituindo os valores numéricos fornecidos:

$$T = \frac{4\pi \cdot 1000 \cdot 0,01 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^2}{3 \cdot 3,828 \cdot 10^{26} \cdot 1}$$

$$T \approx 2,22 \cdot 10^{14}\ s$$

Convertendo o intervalo de tempo para anos:

$$T \approx \frac{2,22 \cdot 10^{14}}{3,156 \cdot 10^7}\ anos \approx 7 \cdot 10^6\ anos$$

$$\boxed{T \approx 7 \cdot 10^6\ anos}$$

pr 14. (P1 Vinhedo 2022) O estudo de buracos negros e o processo de acreção de massa é muito valioso no campo da astrofísica, ajudando a explicar, por exemplo, o processo de formação de galáxias. Por conta disso, trataremos nesta questão sobre os diversos processos de acreção de massa e liberação de energia em buracos negros.

a) Sabendo que o raio externo do disco de acreção de um buraco negro é R e ele está localizado a uma distância D da Terra, qual seria o diâmetro mínimo de um telescópio para resolver o disco na banda do raio-X (comprimento de onda λ)?

Muitos são os mecanismos pelos quais um buraco negro irradia; analisaremos 3 principais processos. Considere inicialmente um buraco negro sem rotação cuja massa vale $M_0 = 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$ e que acreta massa a uma taxa constante $\frac{dm}{dt} = 90M_\odot/\text{dia}$.

b) Para efeitos de análise, utilize que no processo de acreção a massa acreatada libera energia gravitacional na forma de luz de uma distância inicial $d_i \gg r_s$ até uma distância final $d_f = 3r_s$, onde r_s é o raio de Schwarzschild do buraco negro. Qual a eficiência de tal processo quando comparado com a energia de repouso da massa acreatada?

c) Considerando o disco de acreção rígido, esfericamente simétrico e de hidrogênio ionizado, e sendo m_p a massa do próton e σ_t a seção transversal de Thomson por elétron, encontre a expressão da luminosidade L_{edd} no limite de Eddington (situação em que a resultante de forças da camada exterior do nuvem de acreção vale 0).

d) Caso o buraco negro em questão acrete massa tal que a luminosidade do disco de acreção é $L_{\text{acc}} = L_{\text{edd}}$, mostre que a massa M evolui tal que $M = M_0 e^{t/\tau}$. Qual o valor de τ? Dados:

$$\frac{4\pi G m_p}{\sigma_t c} = 2,6 \cdot 10^8 \,\text{anos}, \; \sigma_t = 6,65 \cdot 10^{-29}\,\text{m}^2, \; m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}.$$

e) A dissipação do momento angular é um outro problema interessante do disco de acreção do buraco negro, mas notório no disco precisa perder ou transportar uma enorme quantidade de momento angular para existir acreção.

f) O buraco negro de M87 consome aproximadamente 90 Terras em massa por dia. Considerando a massa de M87 como a utilizada até agora, estime o mínimo torque necessário para causar tal acreção de massa.

Solução:

a) Comprimento angular do disco de acreção:

$$\theta = \frac{2R}{D}$$

Pelo critério de Rayleigh, o mínimo diâmetro angular que um telescópio de abertura d é capaz de resolver é dado por:

$$\theta_{\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{d}$$

Igualando as duas expressões:

$$\frac{2R}{D} = 1{,}22\frac{\lambda}{d}$$

$$\boxed{d = 0{,}61\frac{\lambda D}{R}}$$

b) Em uma determinada distância r, uma massa Δm carrega uma energia potencial gravitacional $\Delta U = \frac{GM\Delta m}{r}$. Dessa forma, calculando a variação de energia entre d_i e d_f:

$$\Delta U = -\left(\frac{GM\Delta m}{d_f}\right) - \left(-\frac{GM\Delta m}{d_i}\right)$$

Como $d_i >> r_s$ e consequentemente $d_i >> d_f$, podemos desconsiderar a contribuição do primeiro termo:

$$\Delta U = \frac{GM\Delta m}{d_i}$$

Dividindo por Δt e considerando a variação temporal de energia potencial gravitacional como a luminosidade do disco de acreção:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = L = \frac{GM}{3r_s}\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{GM}{3r_s}\frac{dm}{dt}$$

Relembrando que $r_s = \frac{2GM}{C^2}$, temos:

$$L = \frac{GM}{3}\frac{dm}{dt}\frac{c^2}{2GM} \implies L = \frac{c^2}{6}\frac{dm}{dt}$$

Pela equivalência entre massa e energia, a luminosidade considerando a energia de repouso seria:

$$\frac{dE_{\text{repouso}}}{dt} = L_{\text{repouso}} = \frac{dm}{dt}c^2$$

De forma que:

$$\boxed{\frac{L}{L_{\text{repouso}}} = \frac{1}{6}}$$

c) No caso da resultante de forças valer zero, a força gravitacional será igual àquela exercida pela radiação:

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{rad}}$$

A força de radiação em questão será exercida sobre os elétrons, os quais absorverão a radiação. Nestas condições, e considerando um fluxo de energia F(r), a força da radiação será dada pela seguinte expressão:

$$F_{\mathrm{rad}} = \frac{F(r)}{c}\sigma_t \implies F_{\mathrm{rad}} = \frac{L\sigma_t}{4\pi r^2 c}$$

Quanto à força gravitacional, esta será simplesmente:

$$F_{\mathrm{g}} = \frac{GMm}{r^2}$$

Igualando-as e considerando a massa da interação gravitacional como sendo a massa do próton:

$$\frac{GMm_p}{r^2} = \frac{L\sigma_t}{4\pi r^2 c}$$

$$\boxed{L_{\mathrm{edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_t}}$$

d) Considerando as expressões encontradas anteriormente, podemos escrever que:

$$\eta\frac{dm}{dt}c^2 = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_t}$$

$$\frac{dm}{dt} = kM \text{ em que } k = \frac{4\pi Gm_p}{\eta c\sigma_t}$$

Rearranjando os termos e integrando a equação:

$$\frac{dM}{M} = kt \implies \int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = \int_0^t kt$$

$$\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = kt$$

Com isso:

$$M = M_0 e^{kt}$$

Disso podemos extrair que:

$$\tau = \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\tau \approx 7{,}53 \cdot 10^7 \text{ anos}}$$

e)

f) O momento angular de uma partícula de massa dm, raio orbital r e velocidade v é dado pela seguinte expressão:

$$dL = rv \cdot dm$$

Considerando o processo de acreção como sendo localizado na região interna do disco e assumindo uma órbita circular kepleriana para as partículas acretadas:

$$dL = 3r_s\sqrt{\frac{GM}{3r_s}}dm = 6\frac{GM}{c^2}\sqrt{\frac{c^2}{6}}dm \implies dL = \sqrt{6}\frac{GM}{c}dm$$

Dividindo por dt:

$$\frac{dL}{dt} = \tau = \sqrt{6}\frac{GM}{c}\frac{dm}{dt}$$

$$\boxed{\tau \approx 4{,}38 \cdot 10^{43} \text{ N} \cdot \text{m}}$$

pr 15. Os astrônomos do planeta Kafsh estão intrigados com uma nuvem de poeira que misteriosamente surgiu no sistema planetário da estrela Jann, no idioma Kafshimiano, eles imediatamente convencem as autoridades do planeta a entender que se tratava daquela nuvem. Seus primeiros objetivos foram determinar a composição da nuvem, a densidade numérica das suas partículas e aproveitar para medir com precisão o raio dela, tudo por meio da sonda que enviaram orientada para a nebulosidade. Conseguiram medir por paralaxe a distância d_n até o centro da nuvem: $0,7\,\text{UA}$. A sonda desenvolveu durante a missão uma velocidade $v_s = 0,05c$ e após certa distância percorrida, foi mantida com luminosidade L_e e sua magnitude aparente foi monitorada. A partir de determinado ponto, o aumento de magnitude começa a ser mais intenso, processo que dura $2,6\,\text{s}$ (medido em Kafsh), e depois retorna à normalidade. Considere que a sonda não possui nenhuma interação com as partículas. Desconsidere efeitos relativísticos e alterações devido ao efeito Doppler.

a) Descreva algebraicamente a magnitude aparente m_s da sonda em função do tempo enquanto passava pela nuvem. Utilize o Sol como referência. Considere que a sonda passa pelo centro da nuvem de densidade constante e desconsidere qualquer reflexão da luz de Jann pelas partículas da sonda. Escreva sua resposta utilizando as constantes: a densidade numérica de partículas n, o raio da sonda R_s, o raio médio das partículas r.

b) Qual foi o raio da nuvem (em km) encontrado pelos astrônomos de Kafsh?

c) Enquanto passava pela nuvem, a sonda coletou uma das partículas de poeira e determinou $0,3\,\mu$m como seu raio. Sabendo que a diferença de magnitude da sonda entre o início e o fim desse tempo de $2,6$ s foi de $0,08$, determine a densidade numérica de partículas da nuvem (em partículas/m^3).

Solução: a) Ao passar pela nuvem, a luz da sonda vai sofrer extinção devido às partículas. No vazio, a magnitude se comportaria a seguir:

$$m_0 - m_{sol} = -2,5\log\left(\frac{L_e}{d_n^2}\frac{d_{sol}^2}{L_{sol}}\right)$$

Num ambiente com extinção, a luminosidade decrescente exponencialmente, e temos a variação de magnitude como:

$$\Delta m = 2,5\tau\log(e)$$

Com $\tau = n.\sigma.x(t)$. Aproximadamente:

$$\Delta m = 1,086\tau = 1,086.n.\sigma.x(t)$$

σ é a área efetiva: $\sigma = \pi r^2$ Além disso, como $\Delta m + m_0 = m_s$, e se considerarmos $t = 0$ no instante em que a sonda entra na nuvem, $x(t) = v_x.t$. Portanto:

$$\boxed{m_s = m_{sol} - 2,5\log\left(\frac{L_e}{d_n^2}\frac{d_{sol}^2}{L_{sol}}\right) + 1,086.n.\pi r^2.v_s.t}$$

b) Como a sonda passa exatamente no centro da nuvem, o diâmetro será o tempo vezes a velocidade, $t = 2,6s$,$v_s = 0,05c = 15000\frac{km}{s}$:

$$D = 15000.2,6 = 39000km$$

O raio é a metade do diâmetro:

$$\boxed{R = 19500km}$$

c) Para achar a densidade, vamos utilizar a fórmula da variação de magnitude. Como a sonda passou pola nuvem inteira, $x = D$:

$$\Delta m = 1,086.n.\pi r^2.D$$

Isolando n:

$$n = \frac{\Delta m}{1,086.\pi r^2.D} = \frac{0,08}{1,086.\pi.(0,3.10^{-6})^2.(39.10^6)}$$

Realizano os cálculos:

$$\boxed{n = 6,68.10^3 \frac{partculas}{m^3}}$$

pr 16. (P1 Vinhedo 2023)Após se irritar com questionamentos sobre um uso diferenciado de anzóis, Jânio Bojânio decide tirar férias jantando no planeta KLFK. O planeta em questão possui uma lua que o orbita no mesmo plano de seu equador celeste e tem uma atmosfera muito espessa e densa, que funciona como uma grande casca esférica que envolve o planeta. Como Jânio achou a lua absurdamente bonita, a janta só será boa se ele puder observar o satélite natural durante toda a refeição, assim ajude Jânio a desfrutar de uma janta sem cálculos ou anzóis!

a) Chegando no sistema de KLFK, Jânio nota que uma estrela de que gosta muito, Uapyle, tem magnitude aparente igual a 0 quando vista do espaço próximo do planeta. Entretanto, ao pousar no planeta, a estrela, a qual estava no zênite, teve sua magnitude aumentada para 4,34. Calcule a profundidade óptica no zênite da atmosfera de KLFK.

b) Jânio obteve a informação de um habitante de KLFK, Bpizza, de que a lua tem magnitude igual a $m_L = 2$ quando vista no zênite. Sabendo que a atmosfera de KLFK é homogênea e tem altura de $H = 500\,\text{km}$, e que KLFK tem raio $R_p = 5100\,\text{km}$, calcule qual a distância zenital máxima que ainda permite a observação lunar, tendo em vista que a atmosfera não apresenta refração atmosférica por alguma razão desconhecida. Considere que os olhos de Jânio funcionam em KLFK do mesmo jeito que na Terra; como Jânio gosta de precisão, nem pense em aproximar a atmosfera para um plano!

Dica: A profundidade óptica é proporcional à distância percorrida pelos raios de luz em um meio com opacidade constante.

c) O jantar está acompanhado no Pnamá, localizado no equador do planeta. Calcule qual é o intervalo de tempo em que Jânio consegue ver a lua nas condições dadas. Saiba que o planeta tem raio de $R_p = 5100\,\text{km}$ e um dia sideral de $10\,\text{h}$; o raio da órbita circular da lua é $R_L = 2,10^8\,\text{m}$, e o período orbital da lua é de $175\,\text{h}$, e que a lua gira no mesmo sentido de rotação de KLFK. Lembre-se de que Jânio não está no centro da esfera celeste dada a proximidade da lua com o planeta.

Solução: a) Seja o fluxo da estrela no espaço perto de KLFK F_0, o fluxo visto no zênite do planeta é $F = F_0 e^{-\tau_z}$. Por Pogson, teremos:

$$m - m_0 = -2,5 \log \frac{F}{F_0}$$

$$m - m_0 = -2,5 \log \frac{F_0 e^{-\tau_z}}{F_0}$$

$$m - m_0 = 2,5 \tau_z \log e$$

$$\tau_z = \frac{(m - m_0)}{2,5 \log e}$$

Onde m é a magnitude de Uapyle vista do planeta e m_0 é a magnitude de Uapyle vista do espaço. Assim:

$$\tau_z = \frac{(4,34 - 0)}{2,5 \log e} = 4$$

$$\boxed{\tau_z = 4}$$

b) Analisando a situação por um esquema

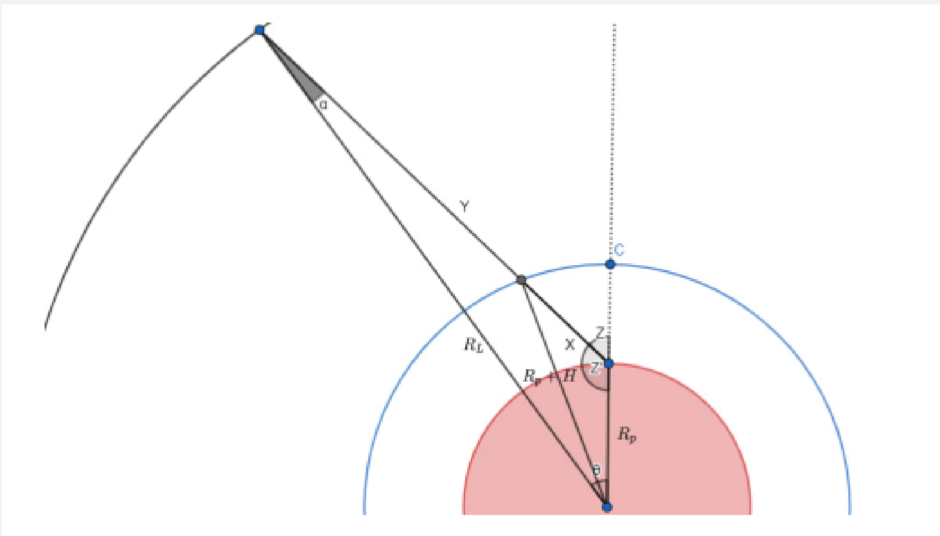

Figura 5.10: Caption

Para alguns ângulos e distâncias foram dados nomes arbitrários. É importante notar que $z' = 180° - z$

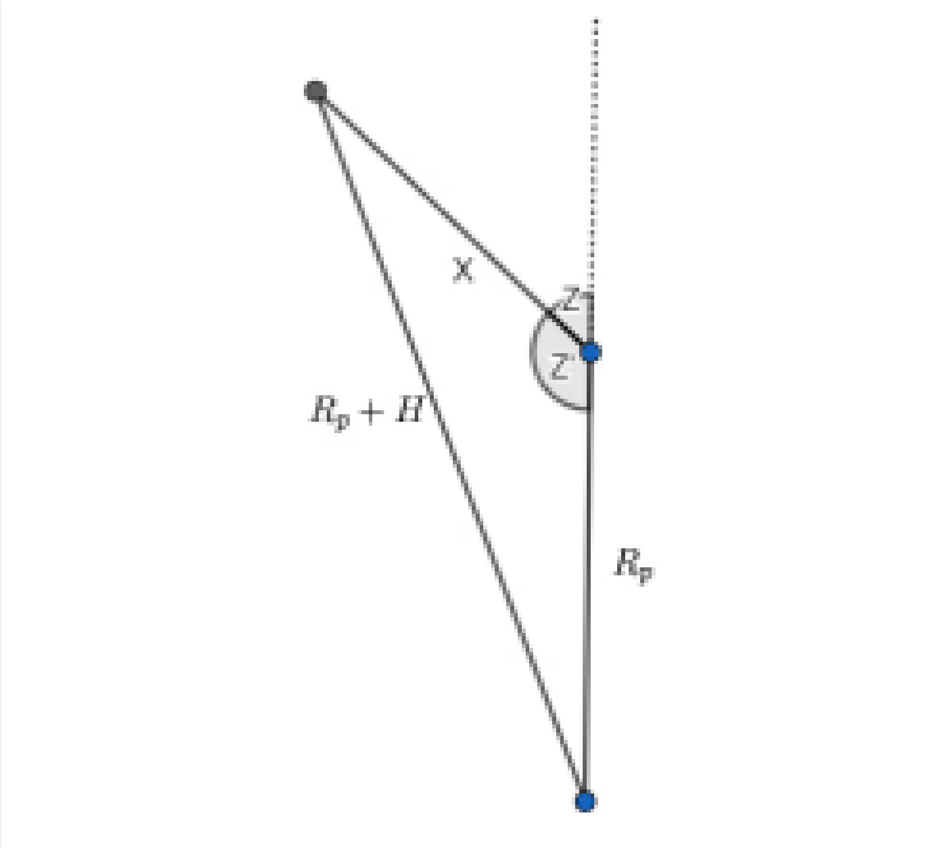

Figura 5.11: Caption

O fluxo vindo da Lua é $F_z = F_0 e^{-\tau_z}$. Já o fluxo recebido por Jânio é $F_{lim} = F_0 e^{-\tau_{lim}}$. Por Pogson, temos:

$$m_z - m_{lim} = -2,5 \log \frac{F_z}{F_{lim}}$$

$$m_z - m_{lim} = -2,5 \log \frac{F_0 e^{-\tau_z}}{F_0 e^{-\tau_{lim}}}$$

$$m_z - m_{lim} = -2,5 \log e^{(\tau_{lim} - \tau_z)}$$

$$m_z - m_{lim} = -2,5(\tau_{lim} - \tau_z) \log e$$

$$\tau_{lim} - \tau_z = -\frac{(m_z - m_{lim})}{2,5 \log e}$$

$$\tau_{lim} = \tau_z - \frac{(m_z - m_{lim})}{2,5 \log e}$$

$$\tau_{lim} = 7,68$$

Usando o fato de que a profundidade óptica da atmosfera é proporcional a distância percorrida pela luz em um meio constante, tal como a atmosfera de KLFK, a distância que queremos encontrar, denotada por x, é:

$$\frac{\tau_z}{\tau_{lim}} = \frac{H}{x}$$

$$\frac{4}{7,68} = \frac{500\ km}{x} \longrightarrow x \approx 960\ km$$

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$(R_P + H)^2 = R_P^2 + x^2 - 2R_P x \cos z'$$

$$\cos z' = \frac{R_P^2 + x^2 - (R_P + H)^2}{2R_P x}$$

$$z' = 116,9°$$

Logo,

$$\boxed{z = 63,1°}$$

c)Usando o outro triângulo do esquema do item anterior:

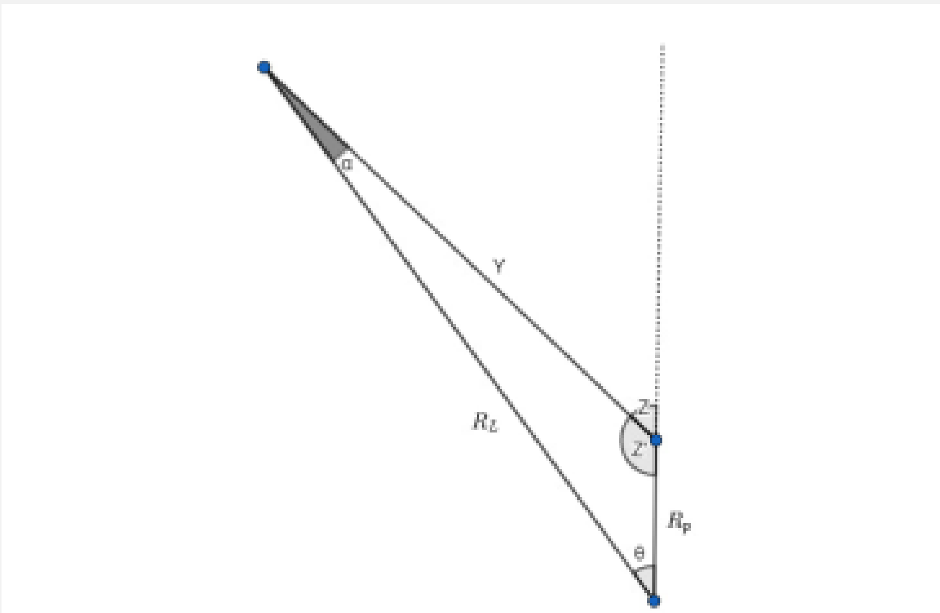

Figura 5.12: Caption

Aplicando a Lei dos Senos, temos:

$$\frac{\sin z'}{R_L} = \frac{\sin \alpha}{R_P}$$

$$\alpha = 1,3^\circ$$

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo:

$$\theta = 180^\circ - z' - \alpha$$

$$\theta = 61,8^\circ$$

Importante notar que o ângulo encontrado é justamente o ângulo percorrido em metade do tempo de visibilidade. Logo, este tempo é $t = \frac{2\theta}{\omega_{ap}}$. Como o KLFK rotaciona no mesmo sentido que a Lua, ω_{ap} é encontrado a partir da subtração da velocidade angular da Lua com a velocidade angular de KLFK:

$$\omega_{ap} = \frac{2\pi}{P_{Rot}} - \frac{2\pi}{P_{Lua}}$$

$$t = \frac{2\theta}{\omega_{ap}}$$

Substituindo:

$$\boxed{t = 3,64\ h}$$

pr 17. Uma nebulosa planetária antiga, com uma anã branca em seu centro, está localizada a 50 pc da Terra. Exatamente na mesma direção, mas atrás da nebulosa, está outra anã branca, idêntica à primeira, mas distante 150 pc de nós. Considere que as duas anãs brancas possuem magnitude bolométrica absoluta $+14,2$ e índices de cor intrínsecos $(B-V)_0 = 0,300$ e $(U-V)_0 = 0,330$. Há extinção no meio interestelar e na nebulosa planetária.

Quando medimos os índices de cor para a anã branca mais próxima (aquela no centro da nebulosa planetária), encontramos os valores $(B-V)_1 = 0,327$ e $(U-B)_1 = 0,038$. Nesta parte da Galáxia, as taxas de extinção interestelar são $1,50$, $1,23$ e $1,00$ magnitudes por kiloparsec para os filtros U, B e V, respectivamente.

Calcule os índices de cor que seriam medidos para a segunda anã branca.

Solução: Sejam B_0,V_0 e U_0 as magnitudes absolutas das anãs brancas, $A_{Nebulosa_V}$, $A_{Nebulosa_B}$ e $A_{Nebulosa_U}$ os coeficientes de extinção devido à nebulosa, A_V,A_B e A_U os coeficientes de extinção do meio estelar.

$$(U-B)_0 = (U-V)_0 - (B-V)_0 = 0,330 - 0,300$$

$$(U - B)_0 = 0,030$$

$$(U - V)_1 = (U - B)_1 + (B - V)_1 = 0,038 + 0,327$$

$$(U - V)_1 = 0,365$$

Aplicando o módulo de distância, com d em pc, para a anã branca no centro da nebulosa, temos:

$$m_{Nebulosa_V} - M_{Nebulosa_V} = 5\log d - 5 + A_V \frac{d}{1000} + A_{Nebulosa_V} \ \textbf{(eq.I)}$$

$$m_{Nebulosa_U} - M_{Nebulosa_U} = 5\log d - 5 + A_U \frac{d}{1000} + A_{Nebulosa_U} \ \textbf{(eq.II)}$$

$$m_{Nebulosa_B} - M_{Nebulosa_B} = 5\log d - 5 + A_{Nebulosa_B} \frac{d}{1000} + A_{Nebulosa_U} \ \textbf{(eq.III)}$$

Localizada a 150 pc, distância 3 vezes maior que a da Nebulosa em relação a Terra denotada por d, a segunda anã branca apresenta o efeito de extinção da nebulosa dobrado pelo fato de o diâmetro da nuvem cobrir a segunda estrela, diferentemente do primeiro caso em que só o raio da nuvem cobre a primeira anã branca. Assim, o módulo de distância passa a ser:

$$m_{anã_V} - M_{anã_V} = 5\log d - 5 + 3A_V \frac{d}{1000} + 2A_{Nebulosa_V} \ \textbf{(eq.IV)}$$

$$m_{anã_U} - M_{anã_U} = 5\log d - 5 + 3A_U \frac{d}{1000} + 2A_{Nebulosa_U} \ \textbf{(eq.V)}$$

$$m_{anã_B} - M_{anã_B} = 5\log d - 5 + 3A_B \frac{d}{1000} + 2A_{Nebulosa_B} \ \textbf{(eq.VI)}$$

Para a obtenção dos indices de cor da segunda estrela, é necessário fazer antes **(eq.II)**− **(eq.I)**, **(eq.III)** − **(eq.I)** e **(eq.II)** − **(eq.III)** para avaliar os efeitos de extinção da nebulosa, que serão importantes para o cálculo dos índices de cor da segunda anã branca:

(eq.II) − (eq.I)

$$(m_{Nebulosa_U} - M_{Nebulosa_U}) - (m_{Nebulosa_V} - M_{Nebulosa_V}) = (A_U - A_V)\frac{d}{1000} - (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_V})$$

Seja $m_{Nebulosa_U} - m_{Nebulosa_V} = (U-V)_1$ e $M_{Nebulosa_U} - M_{Nebulosa_V} = (U-V)_0$, então:

$$(U - V)_1 - (U - V)_0 = (A_U - A_V)d + (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_V})$$

$$0,365 - 0,330 = (1,50 - 1,00) \cdot \frac{50}{1000} + (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_V})$$

Assim:

$$(A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_V}) = +0,100$$

Aplicando o mesmo raciocínio no caso **(eq.III)** – **(eq.I)**:

(eq.III) – **(eq.I)**

$$(m_{Nebulosa_B} - M_{Nebulosa_B}) - (m_{Nebulosa_V} - M_{Nebulosa_V}) = (A_B - A_V)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

Seja $m_{Nebulosa_B} - m_{Nebulosa_V} = (B - V)_1$ e $M_{Nebulosa_U} - M_{Nebulosa_V} = (B - V)_0$, então:

$$(B - V)_1 - (B - V)_0 = (A_B - A_V)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

$$0,327 - 0,300 = (1,23 - 1,00) \cdot \frac{50}{1000} + (A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

Assim:

$$(A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V}) = +0,0155$$

Aplicando o mesmo raciocínio no caso **(eq.III)** – **(eq.I)**:

(eq.II) – **(eq.III)**

$$(m_{Nebulosa_U} - M_{Nebulosa_U}) - (m_{Nebulosa_B} - M_{Nebulosa_B}) = (A_U - A_B)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_B})$$

Seja $m_{Nebulosa_U} - m_{Nebulosa_B} = (U - B)_1$ e $M_{Nebulosa_U} - M_{Nebulosa_B} = (U - B)_0$, então:

$$(U - B)_1 - (U - B)_0 = (A_U - A_B)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_B})$$

$$0,038 - 0,300 = (1,23 - 1,50) \cdot \frac{50}{1000} + (A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

Assim:

$$(A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_B}) = -0,0055$$

Com os efeitos de extinção calculados, é possível calcular os índices de cor aparentes da segunda anã branca a partir de **(eq.VI)** – **(eq.IV)**, **(eq.V)** – **(eq.IV)** e **(eq.V)** –

(eq.VI). Dessa forma:

(eq.VI) − (eq.IV)

$$(m_{an\tilde{a}_B} - M_{an\tilde{a}_B}) - (m_{an\tilde{a}_V} - M_{an\tilde{a}_V}) = 3(A_B - A_V)\frac{d}{1000} + 2(A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

Seja $m_{an\tilde{a}_B} - m_{an\tilde{a}_V} = (B-V)_2$ e $M_{an\tilde{a}_B} - M_{an\tilde{a}_V} = (B-V)_0$, então:

$$(B-V)_2 - (B-V)_0 = 3(A_B - A_V)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

$$(B-V)_2 - 0,300 = 3 \cdot (1,23 - 1,00) \cdot \frac{50}{1000} + 2 \cdot 0,0155$$

$$\boxed{(B-V)_2 = 0,3655 \approx 0,366}$$

(eq.V) − (eq.IV)

$$(m_{an\tilde{a}_U} - M_{an\tilde{a}_U}) - (m_{an\tilde{a}_V} - M_{an\tilde{a}_V}) = 3(A_B - A_V)\frac{d}{1000} + 2(A_{Nebulosa_B} - A_{Nebulosa_V})$$

Seja $m_{an\tilde{a}_U} - m_{an\tilde{a}_V} = (U-V)_2$ e $M_{an\tilde{a}_U} - M_{an\tilde{a}_V} = (U-V)_0$, então:

$$(U-V)_2 - (U-V)_0 = 3(A_U - A_V)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_V})$$

$$(U-V)_2 - 0,330 = 3 \cdot (1,53 - 1,00) \cdot \frac{50}{1000} + 2 \cdot 0,0100$$

$$\boxed{(U-V)_2 = 0,425}$$

(eq.V) − (eq.VI)

$$(m_{an\tilde{a}_U} - M_{an\tilde{a}_U}) - (m_{an\tilde{a}_B} - M_{an\tilde{a}_B}) = 3(A_U - A_B)\frac{d}{1000} + 2(A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_B})$$

Seja $m_{an\tilde{a}_U} - m_{an\tilde{a}_B} = (U-B)_2$ e $M_{an\tilde{a}_U} - M_{an\tilde{a}_B} = (U-B)_0$, então:

$$(U-B)_2 - (U-B)_0 = 3(A_U - A_B)\frac{d}{1000} + (A_{Nebulosa_U} - A_{Nebulosa_B})$$

$$(U-B)_2 - 0,030 = 3 \cdot (1,50 - 1,23) \cdot \frac{50}{1000} + 2 \cdot 0,0055$$

$$\boxed{(U-B)_2 = 0,0595 \approx 0,060}$$

pr 18. Uma estrela semelhante ao Sol tem índice $(U - B) = 0,15$. Se o brilho dela no visível é 2 vezes maior que o brilho no ultravioleta, qual é o seu índice de cor $(B - V)$?
Solução: Sabendo que o brilho da estrela no visível é 2 vezes maior que o brilho no ultraviolta, é possível inferior que o fluxo de luz no visível corresponde ao dobro do fluxo de luz no violeta. Assim, temos:

$$(U - V) = -2,5 \log \frac{F_U}{F_V}$$

$$(U - V) = -2,5 \log \left(\frac{F_U}{2F_U} \right) = -2,5 \log \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$(U - V) = 0,75$$

Conhecidos os índices $(U - V)$ e $(U - B)$, teremos:

$$(B - V) = (U - V) - (U - B) = 0,75 - 0,15$$

$$\boxed{(B - V) = 0,60}$$

pr 19. (Vinhedo 2020 - Adaptado)O astrocurioso Nathan quer saber a temperatura de uma estrela conhecida como 3, porém precisa trabalhar um pouco com alguns dados. Ele sabe que a estrela 1 tem índice de cor intrínseco $(B-V)_{0,1} = 0,4\,\text{mag}$ e temperatura $T_1 = 6880\,\text{K}$ e a estrela 2 tem $(B - V)_{0,2} = 0,8\,\text{mag}$ e $T_2 = 5280\,\text{K}$, respectivamente. Também, tinha que para sua estrela 3 $(B - V)_3 = 0,66\,\text{mag}$. Qual foi a temperatura encontrada por Nathan?
Considere que, para a posição desse corpo luminoso, a extinção é $A_V = 0,314\,\text{mag}$, a relação conhecida entre índices e extinção é

$$\frac{A_V}{(B - V) - (B - V)_0} = 3,0,$$

e a relação entre o índice de cor intrínseco e a temperatura é linear para $0,4 \leq (B - V)_0 \leq 0,8$.
Solução: Para encontrarmos a temperatura da estrela 3, precisa-se conhecer o seu índice de cor intríseco $(B - V)_{0,3}$, algo possível de conseguir com o excesso de cor:

$$E_{B-V} = (B - V)_3 - (B - V)_{0,3}$$

$$\frac{A_V}{(B-V)-(B-V)_0} = 3,0$$

$$\frac{A_{V,3}}{3,0} = [(B-V)_3 - (B-V)_{0,3}]$$

O índice de cor intrínseco é dado por:

$$(B-V)_{0,3} = (B-V)_3 - \frac{A_{V,3}}{3,0}$$

Do enunciado, $(B-V)_3 = 0,66\ mag$, $A_V = 0,314\ mag$. Substiuindo:

$$(B-V)_{0,3} = 0,66 - \frac{0,314}{3,0} = 0,55533$$

A relação linear descrita pelo enunciado para qualquer índice de cor íntriseco no intervalo $0,4 \leq (B-V)_0 \leq 0,8$ é:

$$\frac{T-6680}{(B-V)_0 - 0,4} = \frac{5280-6880}{0,8-0,4} \longrightarrow T = -4000((B-V)_0 - 0,4) + 6880$$

Como o índice de cor pertence ao intervalo $0,4 \leq (B-V)_0 \leq 0,8$, a temperatura da estrela 3 será:

$$T_3 = -4000((B-V)_{0,3} - 0,4) + 6880$$

$$T_3 = -4000((0,55533 - 0,4) + 6880$$

$$T_3 = 6258,667\ K$$

$$\boxed{T_3 = 6260\ K}$$

pr 20. Fazendo algumas observações, você determinou que os raios angulares das componentes de um sistema binário são $1,5\,\text{mas}$ e $3,1\,\text{mas}$, e suas magnitudes são 7 e 6,8; respectivamente. Determine as variações de magnitude em cada eclipse.

OBS.: Considere que a primeira estrela é mais quente.

Solução: Aplicando a equação de Pogson para estimar a relação entre as temperaturas, então:

$$m_2 - m_1 = -2,5\log\frac{F_2}{F_1}$$

$$m_2 - m_1 = -2,5\log\frac{\frac{L_2}{4\pi d^2}}{\frac{L_1}{4\pi d^2}}$$

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \frac{L_2}{L_1}$$

Da Lei de Stephan-Boltzmann:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R_2^2 T_2^4}{4\pi\sigma R_1^2 T_1^4} \right)$$

$$m_2 - m_1 = -5 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 10 \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Do enunciado, $R_2 = 3,1\ mas$ e $R_1 = 1,5\ mas$. Então:

$$6,8 - 7,0 = -5 \log \left(\frac{3,1}{1,5} \right) - 10 \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \longrightarrow \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = -0,14 \longrightarrow \frac{T_2}{T_1} = 0,73$$

O mínimo primário ocorre no momento em que a estrela de maior raio cobre a que possui menor tamanho, correspondendo a diferença de magnitude da estrela maior com a magnitude combinada das duas estrelas. Assim:

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5 \log \frac{F_2}{F_{total}}$$

Como as estrelas estão uma mesma distância da Terra, então:

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5 \log \frac{L_2}{(L_1 + L_2)}$$

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5 \log \frac{4\pi\sigma R_2^2 T_2^4}{(4\pi\sigma R_1^2 T_1^4 + 4\pi\sigma R_2^2 T_2^4)}$$

Simplificando:

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5 \log \frac{R_2^2 T_2^4}{(R_1^2 T_1^4 + R_2^2 T_2^4)}$$

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5 \log \left(\frac{3,1^2 (0,73 T_1)^4}{(1,5^2 T_1^4 + 3,1^2 (0,73 T_1)^4)} \right)$$

$$\boxed{\Delta m_{primário} = 0,66}$$

O mínimo secundário ocorre no momento em que a estrela de menor raio cobre parcialmente a que possui maior raio, resultando em um eclipse parcial e cujo fluxo observado corresponde à soma do fluxo da estrela menor com o fluxo remanescente da estrela maior. Assim:

$$\Delta m_{secundário} = m_{secundário} - m_{total} = -2,5\log\left(\frac{((R_2^2 - R_1^2)T_2^4 + R_1^2T_1^4)}{(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)}\right)$$

$$\Delta m_{secundário} = m_{secundário} - m_{total} = -2,5\log\left(\frac{(3,1^2 - 1,5^2)(0,73T_1)^4 + 1,5^2T_1^4}{(1,5^2T_1^4 + 3,1^2(0,73T_1)^4)}\right)$$

$$\boxed{\Delta m_{secundário} = 0,15}$$

pr 21. (Vinhedo 2023)Wesley observa um sistema binário eclipsante. Durante o mínimo primário, o astrônomo observa uma variação de magnitude $\Delta m_1 = 1,0\,\text{mag}$ em relação à situação sem eclipse. Para os itens a seguir, despreze os efeitos do escurecimento dos discos das estrelas nas bordas.

a) Qual é o valor máximo de variação de magnitude Δm_2 do sistema durante o mínimo secundário?

b) Qual a razão entre os brilhos aparentes das estrelas na condição do item anterior?

Solução: a) O mínimo primário em uma binário eclipsante ocorre no momento em que a estrela de maior raio cobre a que possui menor tamanho, correspondendo a diferença de magnitude da estrela maior com a magnitude combinada das duas estrelas. Assim:

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5\log\frac{F_2}{F_{total}}$$

Como as estrelas estão uma mesma distância da Terra, então:

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5\log\frac{L_2}{(L_1 + L_2)}$$

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5\log\frac{4\pi\sigma R_2^2T_2^4}{(4\pi\sigma R_1^2T_1^4 + 4\pi\sigma R_2^2T_2^4)}$$

Simplificando:

$$\Delta m_{primário} = m_{primário} - m_{total} = -2,5\log\frac{R_2^2T_2^4}{(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)}$$

Do enunciado, temos $\Delta m_{primário} = 1,0$. Então:

$$\Delta m_{primário} = 1,0 = -2,5\log\frac{R_2^2T_2^4}{(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)}$$

$$\Delta m_{primário} = -0,4 = \log \frac{R_2^2T_2^4}{(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)} \longrightarrow 10^{-0,4} = 0,4 = \frac{R_2^2T_2^4}{(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)}$$

Assim, temos:

$$0,4(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4) = R_2^2T_2^4 \longrightarrow 0,4R_1^2T_1^4 = 0,6R_2^2T_2^4 \longrightarrow R_1^2T_1^4 = 1,5R_2^2T_2^4 \ \textit{(eq.I)}$$

A variação máxima que pode ocorrer durante o mínimo secundário ocorre quando ambas as estrelas possuem o mesmo raio e cobrem totalmente uma a outra durante os eclipses. Assim:

$$\Delta m_{secundário} = m_{secundário} - m_{total} = -2,5\log \frac{R_1^2T_1^4}{(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)}$$

Usando o resultado da *(eq.I)*, teremos:

$$\Delta m_{secundário} = m_{secundário} - m_{total} = -2,5\log \frac{1,5R_2^2T_2^4}{(1,5R_2^2T_2^4 + R_2^2T_2^4)}$$

$$\Delta m_{secundário} = -2,5\log\left(\frac{1,5}{2,5}\right)$$

$$\boxed{\Delta m_{secundário} = 0,55}$$

b) A razão do brilho das duas estrelas é dada por:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{L_1}{4\pi d^2}}{\frac{L_2}{4\pi d^2}} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi\sigma R_1^2T_1^4}{4\pi\sigma R_2^2T_2^4} = \frac{R_1^2T_1^4}{R_2^2T_2^4}$$

Do item anterior, temos

$$R_1^2T_1^4 = 1,5R_2^2T_2^4 \ \textit{(eq.I)}$$

Então:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1^2T_1^4}{R_2^2T_2^4} = \frac{1,5R_2^2T_2^4}{R_2^2T_2^4} = 1,5$$

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{2}}$$

pr 22. (Vinhedo 2020) Carrit é um astrônomo com muita experiência em observação noturna. Ele conseguiu identificar um sistema formado por 3 estrelas, nomeando-as

Francis, Luke e Hulk. Sabendo que o mínimo fluxo possível proveniente do sistema é $1,41 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W/m^2}$, que as estrelas Luke e Hulk são iguais, e que o raio de Francis é o dobro do raio de Luke, qual é a temperatura de Hulk?

Dados:

$$T_{\text{Francis}} = 20000\,\mathrm{K}, \quad R_{\text{Luke}} = 7,50 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \text{distância do sistema} = 100\,\mathrm{pc}.$$

Solução: Primeiramente, é válido observar que o caso em que o fluxo é mínimo acontece quando as estrelas Luke e Hulk estão eclipsando Francis ao mesmo tempo, e não eclipsam entre si. A seguir, segue a demonstração de que esse é o caso de fluxo mínimo: Suponha que a temperatura de Luke e Hulk é maior que a temperatura de Francis. Então, o fluxo total é maior ou igual a:

$$F_{Francis} >= \frac{R_{Francis}^2}{d^2}\sigma T_{Francis}^4 = 2,14.10^{-5}$$

Portanto, a temperatura de Luke e Hulk é com certeza menor que 20000 K. Suponha agora que nituação de mínimo, Luke e Hulk eclipsam Francis e elas também eclipsam entre si. Definimos então a temperatura de Hulk e Francis. Agora, se as estrelas tiverem dispostas de maneira que elas eclipsam Francis, e não eclipsam entre si, o novo fluxo será menor que o antigo. Ou seja, o antigo não era mínimo. Absurdo! Então, com certeza o caso de mínimo acontece como dito anteriormente.

Vamos então calcular, nessa situação, o fluxo de cada uma dessas estrelas. Como o fluxo é proporcional à área visível da estrela, temos:

Para Francis, como está sendo eclipsada pelas duas outras estrelas, sua área vis´vel será a sua área total menos a área das outras estrelas.

$$F_{Francis} >= \frac{R_{Francis}^2}{d^2}\sigma T_{Francis}^4 \frac{\pi(R_{Francis}^2 - R_{Luke}^2 - R_{Hulk}^2)}{\pi R_{Francis}^2}$$

Como Hulk e Luke não estão sendo eclipsadas, podemos calcular normalmente o fluxo delas.

$$F_{Luke} = F_{Hulk} = \frac{R_{Luke}^2}{d^2}\sigma T_{Luke}^4$$

A soma desses fluxos é o que foi observado por Carrit. Portanto, utilizando os valores do enunciado:

$$1,41.10^{-}5\frac{W}{m2} = F_{Francis} + F_{Luke} + F_{Hulk} = \frac{R_{Luke}^2}{d^2}\sigma(2T_{Luke}^4 + 2T_{Francis}^4)$$

$$\boxed{T_{Luke} = T_{Hulk} = 15000K}$$

pr 23. Considere um sistema binário com inclinação de $i = 78°$ (inclinação entre o eixo do sistema e a linha de visada), as componentes têm raios $R_A = 6R_\odot$ e $R_B = 5R_\odot$, a separação máxima vista entre as estrelas é $r = 2\,\text{mas}$ e o sistema está a $100\,\text{pc}$ de distância da Terra.
Qual a maior variação de magnitude possível para esse sistema?
Dado: A temperatura de A é 20% maior que a de B.
Solução: A separação entre as duas estrelas é:

$$r(UA) = d\ (pc) \cdot \alpha\ ('')$$

$$r = 100 \cdot 0,002 = 0,2\ \ UA$$

A geometria para a ocorrência de eclipses é:

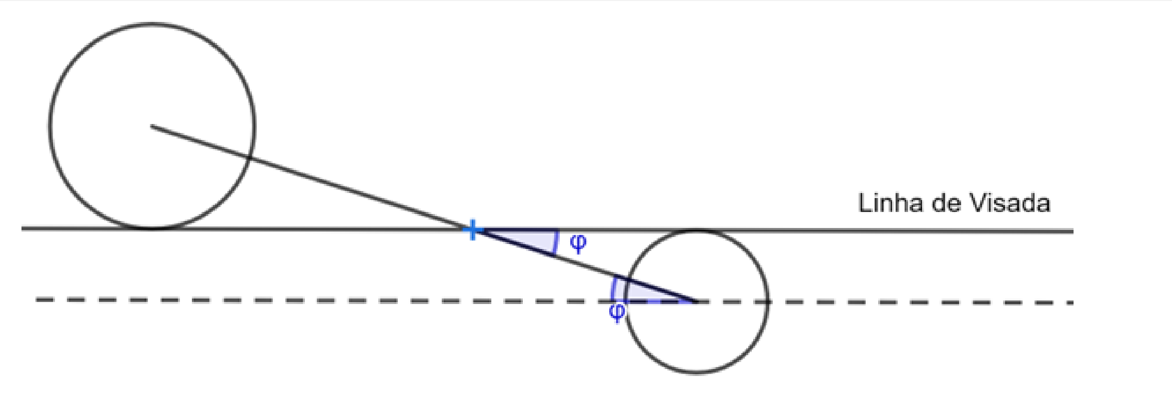

Figura 5.13: Distância entre os centros das estrelas

O ângulo limite para os qual ocorrem eclipses totais é:

$$\phi'_{lim} = \arcsin\left(\frac{R_A - R_B}{r}\right)$$

$$\phi'_{lim} = \arcsin\left(\frac{(6R_\odot - 5R_\odot) \cdot (6,96 \cdot 10^8)\ m}{0,2 \cdot (1,496 \cdot 10^{11}\ m)}\right) = 1,33°$$

O ângulos limite para os qual ocorrem eclipses parciais é:

$$\phi_{lim} = \arcsin\left(\frac{R_A + R_B}{r}\right)$$

$$\phi_{lim} = \arcsin\left(\frac{(6R_\odot + 5R_\odot) \cdot (6,96 \cdot 10^8)\ m}{0,2 \cdot (1,496 \cdot 10^{11}\ m)}\right) = 14,8°$$

No enunciado, $i = 78°$ foi definido como o ângulo entre o eixo do sistema e a linha de visada. Logo, o ângulo entre o plano orbital e a linha de visada é:

$$\phi = 90° - i$$

$$\phi = 90° - 78° = 12°$$

Como $\phi'_{lim} \leq \phi \leq \phi_{lim}$, o sistema apresenta eclipses parciais. Logo, a variação máxima ocorrerá quando a estrela mais quente, a estrela A, for eclipsada pela estrela B. Sendo $T_A = 1,2T_B$, uma vez que a temperatura da estrela A é 20% mais quente que B, a variação de magnitude nesse caso será:

$$\Delta m = -2,5 \log\left(\frac{(1 - \alpha_A)F_A + F_B}{F_A + F_B}\right)$$

Onde α_A representa a fração enconberta de A pela estrela B. Como as estrelas estão uma mesma distância da Terra, então:

$$\Delta m = -2,5 \log\left(\frac{(1 - \alpha_A)L_A + L_B}{L_A + L_B}\right)$$

Um eclipse parcial se dará de acordo com a figura abaixo:

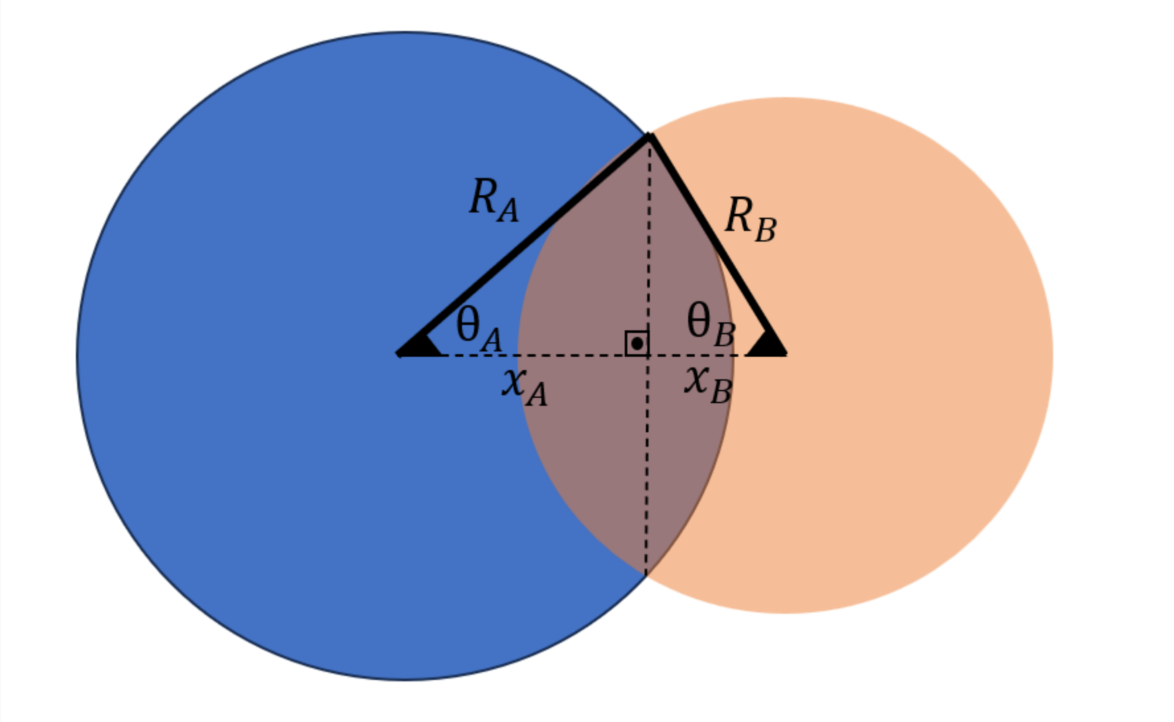

Figura 5.14: Área eclipsada

Por trigonometria, podemos aplicar o teorema de Pitágoras nos dois triângulos retângulos que existem na figura e, com isso, teremos:

$$R_A^2 = x_A^2 + h^2 \longrightarrow h^2 = R_A^2 - x_A^2 \ \textit{(eq.I)}$$

$$R_B^2 = x_B^2 + h^2 \longrightarrow h^2 = R_B^2 - x_B^2 \ \textit{(eq.II)}$$

Onde h é o cateto presente tanto no triângulo retângulo com cateto x_A e hipotenusa R_A e no triângulo retângulo com cateto x_B e hipotenusa R_B Dessa forma, *(eq.I)* $=$ *(eq.II)*. Assim:

$$R_A^2 - x_A^2 = R_B^2 - x_B^2$$

Importante notar que, pela figura 5.11, a distância entre os centros das estrelas é $x_A + x_B = r \sin \phi$. Com isso, teremos:

$$R_A^2 - x_A^2 = R_B^2 - (r \sin \phi - x_A)^2$$

Isolando x_A:

$$x_A = \frac{(r \sin \phi)^2 + R_A^2 - R_B^2}{2(r \sin \phi)}$$

De maneira análoga, x_B será:

$$x_B = \frac{(r \sin \phi)^2 + R_B^2 - R_A^2}{2(r \sin \phi)}$$

Além disso, temos que:

$$\cos \theta_B = \frac{x_B}{R_B}$$

$$\cos \theta_A = \frac{x_A}{R_A}$$

Do enunciado, $R_A = 6R_\odot = 0,0279\ UA$ e $R_B = 5R_\odot = 0,0233\ UA$, $r \sin \phi = 0,2 \cdot \sin \phi = 0,2 \cdot \sin 12° = 0,0419\ UA$. Com isso, obtemos:

$$x_A = \frac{(r \sin \phi)^2 + R_A^2 - R_B^2}{2(r \sin \phi)} = 0,02362\ UA$$

$$x_B = \frac{(r \sin \phi)^2 + R_B^2 - R_A^2}{2(r \sin \phi)} = 0,01759\ UA$$

Conhecidos x_A e x_B, os ângulos θ_A e θ_B serão:

$$\cos \theta_A = \frac{x_A}{R_A} = \frac{0,02362}{0,0279} = 0,8467 \longrightarrow \theta_A = 32,14° = 0,561\ rad$$

$$\cos \theta_B = \frac{x_B}{R_B} = \frac{0,01759}{0,0233} = 0,77 \longrightarrow \theta_B = 39,6° = 0,6907\ rad$$

O caso de maior variação ocorre quando B cobre o máximo possível de área da estrela A dada a inclinação, o que é a união de um segmento circular da estrela com um segmento circular de B. Ante o exposto, a fração eclipsada da estrela será dada por:

$$\alpha_A = \frac{A_{eclipsado}}{A_{disco-total_A}} = \frac{(\frac{1}{2}(2\theta_A \cdot R_A^2) - \frac{1}{2}R_A^2 \sin(2\theta_A)) + (\frac{1}{2}(2\theta_B \cdot R_B^2) - \frac{1}{2}R_B^2 \sin(2\theta_B))}{\pi \cdot R_A^2}$$

$$\alpha_A = \frac{A_{eclipsado}}{A_{disco-total_A}} = \frac{(\theta_A \cdot R_A^2 - \frac{1}{2}R_A^2 \sin(2\theta_A)) + (\theta_B \cdot R_B^2 - \frac{1}{2}R_B^2 \sin(2\theta_B))}{\pi \cdot R_A^2}$$

Substituindo:

$$\alpha_A = (\frac{(6R_\odot)^2[0,561\ rad - \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 0,561\ rad)] + (5R_\odot)^2(0,6907\ rad\ - \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 0,6907\ rad))}{\pi \cdot (6R_\odot)^2})$$

$$\alpha_A = 0,08$$

Aplicando a Lei de Stephan-Boltzmann, temos:

$$\Delta m = -2,5\log\left(\frac{(1-0,08)R_A^2T_A^4 + R_B^2T_B^4}{R_A^2T_A^4 + R_B^2T_B^4}\right)$$

$$\Delta m = -2,5\log\left(\frac{(1-0,08)(6R_\odot)^2(1,2T_B)^4 + (5R_\odot)^2T_B^4}{(6R_\odot)^2(1,2T_B)^4 + (5R_\odot^2)T_B^4}\right)$$

$$\boxed{\Delta m = 0,07}$$