

Linearidade da Potência de Ponto

Por Rodolfo Rodrigues

Convenções

Vamos usar (XYZ) para se referir ao circuncírculo do triângulo $\triangle XYZ$, $\text{Pot}_C(P)$ a potência de ponto de P em relação a circunferência C e, quando necessário, $AB = -BA$ para se referir ao segmento direcionado $\overrightarrow{AB}$.

Introdução

A linearidade da potência de ponto é uma propriedade que nos ajuda a caracterizar melhor um ponto dados outros dois na mesma reta.

Teorema 1 (Linearidade da potência de ponto “LinPoP”). Dadas duas circunferências C_1, C_2 , defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(X) = \text{Pot}_{C_1}(X) - \text{Pot}_{C_2}(X)$$

Então f será linear, isto é, para qualquer ponto X em uma reta BC qualquer:

$$f(X) = \frac{BX \cdot f(C) + XC \cdot f(B)}{BC},$$

onde BX e CX são segmentos direcionados.

Prova. Suponha que X está no segmento BC . Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências C_1, C_2 , respectivamente. Aplicando o Teorema de Stewart em $\triangle O_1BC$ e $\triangle O_2BC$, e subtraindo, obtemos que:

$$\begin{aligned} BX(CO_1^2 - CO_2^2) + XC(BO_1^2 - BO_2^2) &= BC(XO_1^2 - XO_2^2) \\ \iff \frac{BX(f(C) - (R_1^2 - R_2^2)) + XC(f(B) - (R_1^2 - R_2^2))}{BC} &= f(X) - (R_1^2 - R_2^2) \end{aligned}$$

Como $BX + XC = BC$, a propriedade segue daí. Caso X não esteja no segmento BC , verifica-se que o resultado também é válido, mas nesse caso temos que usar segmentos direcionados. Por exemplo, se a ordem dos pontos é $B - C - X$, BX e XC possuem orientações opostas, logo fazemos $XC = -CX$ para poder usar segmentos da maneira usual. $\square$

Exemplo 1 (ELMO Shortlist 2013). Em $\triangle ABC$, D está na reta BC . Os circuncírculos de ABD e ADC encontram AC e AB em F e E , respectivamente. Prove que, à medida que D varia, o circuncírculo de AEF passa por um ponto fixo diferente de A , e que esse ponto está na mediana de A ao lado BC .

- Seja $X = (AEF) \cap AM$. Queremos mostrar que $\text{Pot}_{(AEF)}(M)$ é constante.
- Ache a outra circunferência para definir a função f e use LinPoP para calcular $f(M)$.

Exemplo 2 (G4 IMO Shortlist 2015). Seja ABC um triângulo acutângulo e seja M o ponto médio de BC . Uma circunferência ω passando por A e M encontra lados AB e AC nos pontos P e Q respectivamente. Seja T o ponto tal que $APTQ$ é paralelograma. Suponha que T está no circuncírculo de ABC . Determine todos os valores possíveis de $\frac{AT}{AM}$.

- (a) Como um paralelograma nos ajuda com uma função linear?
- (b) A maior dificuldade do problema está em calcular AT , então defina f de modo que: $f(T) = AT^2$. (Dica: Uma das circunferências tem raio 0.)
- (c) Finalize usando a relação em (a) e computando os segmentos.

Exemplo 3 (AoPS). Dado um triângulo $\triangle ABC$ de circuncentro O , seja M o ponto médio de BC e D o pé de A em BC . OD encontra AM em P . Prove que P está no eixo radical de (BOC) e o círculo de 9 pontos de ABC .

- (a) Ache quais serão as duas circunferências usadas para definir nossa função.
- (b) Explore o que acontece na função se e somente se P está nesse eixo radical.
- (c) Use trigonometria para demonstrar a relação em (b).

LinPoP com coordenadas baricêntricas

Vamos usar do seguinte resultado para conectar LinPoP com coordenadas baricêntricas:

Teorema 2. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear, e (x, y, z) são as coordenadas baricêntricas normalizadas ($x + y + z = 1$) do ponto P em relação a $\triangle ABC$, então:

$$f(P) = xf(A) + yf(B) + zf(C).$$

Prova. Se $P' = AP \cap BC$, é fácil ver que $P' = (0 : y : z)$ e pela definição de função linear na reta BCP' :

$$f(P') = \frac{y}{y+z}f(B) + \frac{z}{y+z}f(C).$$

Aplicando a definição novamente para APP' :

$$\begin{aligned} f(P) &= \frac{AP \cdot f(P') + PP' \cdot f(A)}{AP'} \\ &= \frac{[PBC]}{[ABC]}f(A) + \left(1 - \frac{[PBC]}{[ABC]}\right)\left(\frac{y}{y+z}f(B) + \frac{z}{y+z}f(C)\right). \end{aligned}$$

Como $x = \frac{[PBC]}{[ABC]}$, e $1 - \frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{[PCA]}{[ABC]} + \frac{[PAB]}{[ABC]} = y + z$, o resultado segue. $\square$

Exemplo 4 (G6 IMO Shortlist 2012). Seja $\triangle ABC$ um triângulo com circuncentro O e incentro I . Pontos D , E e F estão em BC , CA e AB respectivamente de modo que $BD + BF = CA$ e $CD + CE = AB$. (BDF) e (CDE) se intersectam em $P \neq D$. Prove que $OP = OI$.

- (a) Mostre que o problema é simétrico em todos os pontos, ou seja, $AE + AF = BC$ e $(AEFP)$ cíclico.
- (b) Qual potência de ponto precisamos calcular para acabar o problema?
- (c) Defina f_A , f_B e f_C de forma que fique o mais simétrico possível e meio que filtre, ajudando a calcular a potência em (b).
- (d) Finalize com algumas manipulações algébricas já que todas as equações são cíclicas.

Heurísticas

- Potência de ponto é, antes de tudo, uma ferramenta de length bash, então se você consegue modificar o que o problema pede para ser expresso em termos de razões entre comprimentos, pode ser uma boa ideia usar LinPoP.
- Pontos médios, paralelismos, e reflexões se relacionam muito bem com LinPoP e às vezes facilitam calcular a potência de alguns pontos que não é imediata.
- Quase nunca os pontos corretos para aplicar potência de ponto vão estar imediatamente óbvios. Portanto, não tenha medo de introduzir vários pontos auxiliares.
- LinPoP pode ser muito útil em problemas envolvendo pontos ou circunferências fixos, como visto no exemplo 1. Mostrar que a potência de um determinado ponto permanece constante é bem subestimado.
- Lembre-se que LinPoP é só uma ferramenta, então provar lemas auxiliares e saber usar trigonometria vai te ajudar mais ainda a resolver os problemas.

Problemas propostos

Problema 1 (USAMO 2013). Seja ABC um triângulo, e P , Q , e R pontos sobre os lados BC , CA , AB , respectivamente. Sejam ω_A , ω_B , ω_C os circuncírculos de AQR , BRP , CPQ , respectivamente. Dado que AP intersecta ω_A , ω_B , ω_C em X , Y , Z , respectivamente, prove que:

$$\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}.$$

Problema 2 (G2 IMO Shortlist 2011). Seja $ABCD$ um quadrilátero não cíclico. Prove que:

$$\frac{1}{\text{Pot}_{(A)}(BCD)} + \frac{1}{\text{Pot}_{(B)}(ACD)} + \frac{1}{\text{Pot}_{(C)}(ABD)} + \frac{1}{\text{Pot}_{(D)}(ABC)} = 0$$

Problema 3 (Sharygin 2023). O incírculo de $\triangle ABC$ toca BC em D . Seja M o ponto médio do arco BAC , P e Q projeções de M nas bissetrizes externas de B e C , respectivamente. Prove que a reta PQ bissecta AD .

Problema 4 (Olimpíada de Geometria do Discord 2024). Seja $ABCD$ um paralelograma. Seja ℓ a bissetriz externa de $\angle DCA$ e ℓ' a reta por D paralela a AC . Suponha que ℓ' intersecta AB em E e ℓ em F , e que ℓ intersecta a bissetriz interna de $\angle BAC$ em X . A circunferência (EXF) encontra BX em $Y \neq X$ e a bissetriz interna de $\angle DCA$ encontra (AXC) em $Z \neq C$. Prove D , X , Y e Z concíclicos.

Problema 5 (Taiwan TST 2016). Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$, e ω o circuncírculo de BOC . A reta AO intersecta ω novamente em G . Seja M o ponto médio de BC , e a mediatriz de BC encontra ω em O e N . Prove que o ponto médio de AN está no eixo radical de (OMG) e o círculo de diâmetro AO .

Problema 6 (Lema bacana). Seja $\triangle ABC$ um triângulo com circuncentro O , incentro I e seja D o ponto de contato do incírculo com o lado BC . Seja M o ponto médio de BC e seja M' o reflexo de M por AI . Então $M'D \perp OI$.

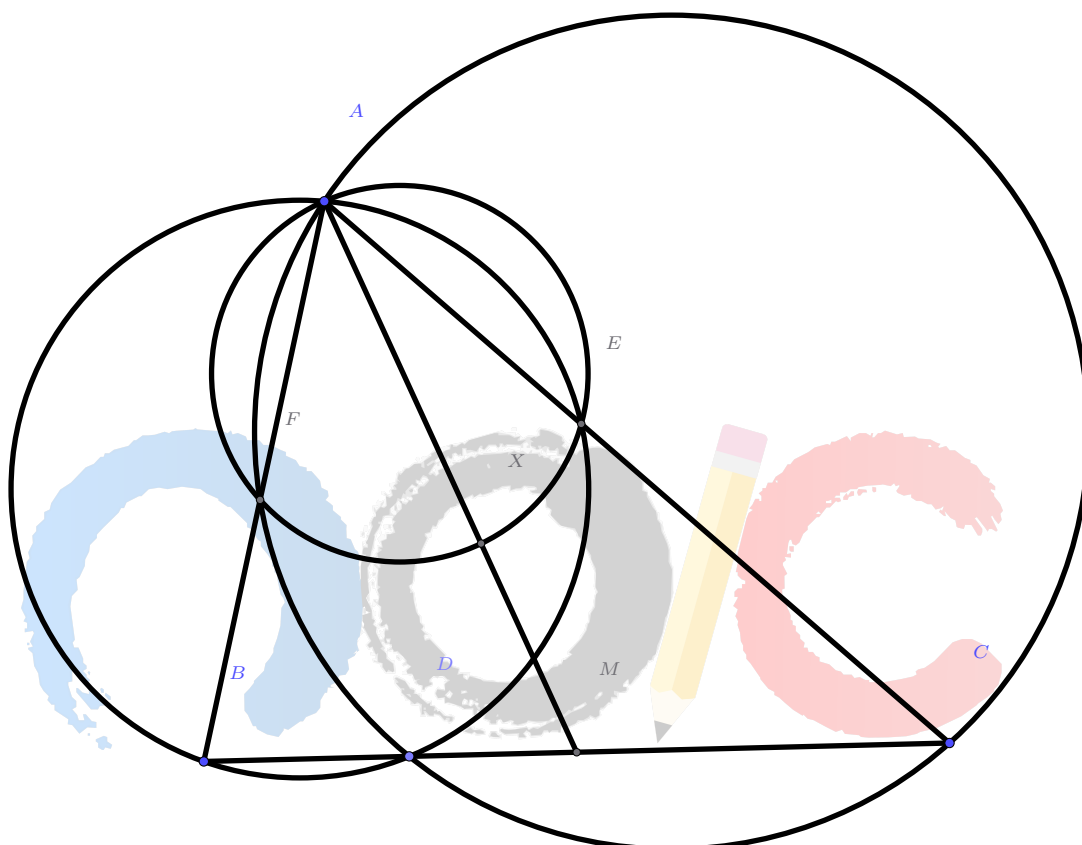
Problema 7 (Vingança Olímpica 2026 extravertido). Seja $\triangle ABC$ um triângulo, I_A o A-exincentro, (ACI_A) , (ABI_A) intersectam os lados AB e AC em D e E . (ADE) corta BC em R e S de modo que R está mais perto de B do que C . Mostre que o incentro I de ABC está no eixo radical de (SCD) e (RBE) .

Problema 8 (AoPS, Luis González). Sejam I , O e G o incentro, circuncentro e baricentro de $\triangle ABC$, respectivamente. IO e IG cortam BC em X e Y , respectivamente. Seja Z a reflexão de Y pelo ponto médio de $\overline{BC}$. Prove que o circuncírculo de $\triangle AXZ$ passa pelo Sharky-Devil de $\triangle ABC$.

Soluções dos exemplos

Exemplo 1 (ELMO Shortlist 2013). Em $\triangle ABC$, D está na reta BC . Os circuncírculos de ABD e ADC encontram AC e AB em F e E , respectivamente. Prove que, à medida que D varia, o circuncírculo de AEF passa por um ponto fixo diferente de A , e que esse ponto está na mediana de A ao lado BC .

Solução.



Defina $f(P) = \text{Pot}_{(AEF)}(P) - \text{Pot}_{(ABC)}(P)$. Temos que

$$\begin{aligned} f(M) &= \frac{1}{2}(f(B) + f(C)) \\ &= \frac{1}{2}(BF \cdot BA - 0 + CE \cdot CA - 0) \\ &= \frac{1}{2}(BD \cdot BC + CD \cdot BC) \\ &= \frac{BC^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim, segue que $\text{Pot}_{(AEF)}(M)$ é constante.

Exemplo 2 (G4 IMO Shortlist 2015). Seja ABC um triângulo acutângulo e seja M o ponto médio de BC . Uma circunferência ω passando por A e M encontra lados AB e AC nos pontos P e Q respectivamente. Seja T o ponto de modo que $APTQ$ é paralelograma. Suponha que T está no circuncírculo de ABC . Determine todos os valores possíveis de $\frac{AT}{AM}$.

Solução.

Seja (A) a circunferência de centro A e raio 0. Defina $f(P) = \text{Pot}_{(A)}(P) - \text{Pot}_{(ABC)}(P)$. Pela linearidade de f segue que:

$$f(A) + f(T) = 2f(AT \cap PQ) = f(P) + f(Q)$$

Logo,

$$AT^2 = PA^2 - (-BP \cdot PA) + QA^2 - (-CQ \cdot QA) = PA \cdot BA + QA \cdot CA$$

Ainda podemos melhorar a expressão, percebendo que:

$$AT^2 = AB^2 + AC^2 - (BP \cdot BA + CQ \cdot CA) = AB^2 + AC^2 - (BR \cdot BM + CR \cdot CM) = AB^2 + AC^2 - BC^2/2$$

Para concluir, vamos calcular AM^2 . Por Stewart:

$$\frac{BC}{2}(AB^2 + AC^2) = BC \cdot \left(AM^2 + \frac{BC^2}{4}\right)$$

Assim, $\frac{AT}{AM} = \sqrt{2}$.

Perceba que nessa solução só usamos o que T está na circunferência no momento que calculamos $\text{Pot}_{(ABC)}(T)$, então não tivemos que deduzir nenhuma outra propriedade auxiliar para fazer um desenho preciso.

Exemplo 3 (AoPS). Dado um triângulo $\triangle ABC$ de circuncentro O , seja M o ponto médio de BC e D o pé de A em BC . OD encontra AM em P . Prove que P está no eixo radical de (BOC) e o círculo de 9 pontos de ABC .

Solução.

Seja H o ortocentro de ABC , ω o círculo de nove pontos de ABC , e E o ponto médio de AH . Defina $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(P) = \text{Pot}_{(BOC)}(P) - \text{Pot}_{\omega}(P)$.

Basta provar que:

$$0 = f(P) = \frac{OP}{OD}f(D) + \frac{PD}{OD}f(O) \iff \frac{OP}{DP} = -\frac{f(O)}{f(D)}$$

Usando as propriedades da reta de Euler:

$$f(O) = -\text{Pot}_{\omega}(O) = -\text{Pot}_{\omega}(H) = EH \cdot HD = (R \cos A)(2R \cos B \cos C)$$

$$f(D) = \text{Pot}_{(BOC)}(D) = -BD \cdot DC = -(AB \cos B)(AC \cos C)$$

Logo,

$$-\frac{f(O)}{f(D)} = \frac{2R^2 \cos A}{AB \cdot AC}$$

Pelo paralelismo,

$$\frac{OP}{DP} = \frac{OM}{DA} = \frac{R \cos A}{AB \sin B} = \frac{2R^2 \cos A}{AB \cdot AC}$$

Ok!

Exemplo 4 (G6 IMO Shortlist 2012). Seja $\triangle ABC$ um triângulo com circuncentro O e incentro I . Pontos D , E e F estão em BC , CA e AB respectivamente de modo que $BD + BF = CA$ e $CD + CE = AB$. (BDF) e (CDE) se intersectam em $P \neq D$. Prove que $OP = OI$.

Solução.

É fácil ver que $AE + AF = BC$ e $P \in (AEF)$ por Miquel. Sejam (x, y, z) as coordenadas baricêntricas de P em relação a $\triangle ABC$. Defina:

$$f_A(X) = \text{Pot}_{(AEF)}(X) - \text{Pot}_{(ABC)}(X)$$

$$f_B(X) = \text{Pot}_{(BDF)}(X) - \text{Pot}_{(ABC)}(X)$$

$$f_C(X) = \text{Pot}_{(CDE)}(X) - \text{Pot}_{(ABC)}(X)$$

Temos

$$\begin{aligned} -\text{Pot}_{(ABC)}(P) &= xf_A(A) + yf_A(B) + zf_A(C) = y(c \cdot BF) + z(b \cdot CE) \\ &= xf_B(A) + yf_B(B) + zf_B(C) = z(a \cdot CD) + x(c \cdot AF) \\ &= xf_C(A) + yf_C(B) + zf_C(C) = x(b \cdot AE) + y(a \cdot BD) \end{aligned}$$

Logo,

$$-\text{Pot}_{(ABC)}(P) \cdot \sum_{cyc} a = \sum_{cyc} ayc \cdot BF + zab \cdot CE = \sum_{cyc} ayc(BF + BD) = abc(x + y + z) = abc$$

Finalmente, pelo teorema de Euler,

$$-\text{Pot}_{(ABC)}(P) = \frac{abc}{a+b+c} = \frac{4R[ABC]}{\frac{2[ABC]}{r}} = 2Rr = -\text{Pot}_{(ABC)}(I).$$

Dicas

Problema 6. Calcule $f(M')$ com as circunferências mais simples e transforme a condição de perpendicularidade em medidas.

Problema 7. Defina os pontos D e E de uma maneira melhor e use LinPoP com bary.

Problema 8. Reduza o enunciado usando Forgotten (o Teorema Esquecido da Coaxialidade), use LinPoP e confie muito na trigonometria para calcular as potências de X e de Z . Não é uma conta difícil por ser longa mas tem que ter sagacidade para manipular os termos da forma certa.

Referências

- Power of a Point, Albert Zhu
- Different Perspectives on Power of a Point, Yerkebulan Bolat

Quaisquer dúvidas ou sugestões podem ser enviadas para o meu e-mail: rorcf2010@gmail.com