

APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas
internacionais e nacionais



Apostila Magna Solucionário Eletromagnetismo

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia
Giovanna Queiroz

Revisão

Gustavo Sobreira Barroso

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp  Texto do problema 1.

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projetoic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Capítulo 10

Eletromagnetismo

pr 1.

Utilizamos o princípio da conservação de energia para o sistema composto pelos dois prótons. A energia total do sistema é composta pela energia cinética das partículas e a energia de interação eletrostática entre elas.

$$E = 2 \times \frac{m_p v_i^2}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d_i} = 2 \times \frac{m_p v_f^2}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d_f}$$

Na situação inicial, $d_i \approx \infty$, portanto o termo potencial é descartado. No segundo instante, a distância entre eles é mínima. Isso ocorre quando a velocidade é nula.

$$E = m_p v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d_{min}}$$

$$d_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_p v^2}$$

Na distribuição de Boltzman:

$$v^2 = \frac{3k_B T}{m_p}$$

$$d_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B T}$$

A condição proposta no enunciado rege que:

$$d_{min} \leq d$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B T} \leq d$$

$$T \geq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B d} \leq d$$

A temperatura de fusão será a cota inferior:

$$T_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B d} = 5,6 \cdot 10^9 K$$

pr 2. Calculando a força elétrica que o asteroide exerce na carga e vice versa, podemos escrever as equações horárias:

$$M\ddot{x}_{ast} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

$$m\ddot{x}_{car} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

Tal que:

$$r = x_{ast} - x_{car}$$

Como o centro de massa é fixo, e definindo-o como a origem do sistema de coordenadas:

$$X_{CM} = \frac{mx_m + Mx_M}{M + m} = 0 \Rightarrow mx_m = -Mx_M$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_{ast} - x_{car}) = -\frac{F}{M} - \frac{F}{m} = -F \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

pr 3.

No caso de $\theta = 90^\circ$ a velocidade é perpendicular ao campo:

$$F = q \vec{v} \times \vec{B} = qvB \sin \theta = qvB$$

Pela regra da mão direita, a força será perpendicular a velocidade. Uma força perpendicular ao movimento da partícula, não altera seu módulo apenas sua direção, age,

portanto, gerando uma aceleração centrípeta.

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

pr 4.

Retomando a expressão da força magnética, e fazendo o produto vetorial de forma matricial:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

Assim, podemos definir as direções do problema de tal forma:

$$\vec{B} = B\hat{x}$$

$$\vec{v} = v\hat{x} \cos \theta + v\hat{y} \sin \theta$$

$$\vec{F} = qq \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ v \cos \theta & v \sin \theta & 0 \\ B & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = -qvB \sin \theta \hat{z}$$

Agora, podemos reescrever as equações do movimento para cada direção e analisar a progressão do movimento. Como a força elétrica age numa direção perpendicular a velocidade, apenas alterando seu módulo, ela novamente age como força centrípeta.

O movimento circular ocorre no plano yz , perpendicular a força, já na direção x observamos um movimento retilíneo uniforme.

Equações horárias:

$$\begin{cases} x(t) = v \cos \theta t + x_0, \\ y(t) = \frac{mv \sin \theta}{qB} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ z(t) = \frac{mv \sin \theta}{qB} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{cases}$$

onde

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad r = \frac{mv \sin \theta}{qB}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

O que justamente caracteriza uma hélice!

pr 5.

Sob a influência de um campo magnético, uma partícula carregada se move em uma trajetória circular com a força elétrica agindo como força centrípeta:

$$\frac{mv^2}{r} = evB$$

$$T = \frac{2\pi m}{eB}$$

Uma partícula carregada em movimento circular emite radiação eletromagnética na mesma frequência da sua trajetória:

$$\lambda = cT = c \frac{2\pi m}{eB}$$

$$B = \frac{2\pi mc}{e\lambda}$$

$$B \approx 2 \times 10^4 T$$

pr 6.

a) A taxa de massa que entra na lâmina é aproximadamente $2L\rho v_{in}$ onde ρ é a densidade de massa, e a taxa em que a massa sai é $2\delta\rho v_{out}$. Igualando os dois, conseguimos

$$\frac{v_{in}}{\delta} \approx \frac{v_{out}}{L}$$

b) As taxas de energia podem ser calculadas multiplicando a taxa de volume por tempo pela taxa de energia por volume (ou regra da cadeia, se você sabe cálculo):

$$\frac{\Delta\epsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

A energia que entra é totalmente magnética, então temos:

$$\frac{\Delta\epsilon_{in}}{\Delta t} \approx \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} 2Lv_{in}$$

A energia que sai é totalmente cinética:

$$\frac{\Delta\epsilon_{out}}{\Delta t} \approx \frac{\rho v_{out}^2}{2} 2\delta v_{out}$$

Igualando a energia que entra com a energia que sai e usando a expressão encontrada em (a), encontramos:

$$v_{out} \approx \frac{B_{in}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = v_A$$

c) Vamos usar o campo elétrico perpendicular constante no espaço. Fora da lâmina, a resistividade pode ser ignorada e temos simplesmente:

$$E_f - v_{in} B_{in} = 0 \Rightarrow E_f = v_{in} B_{in}$$

Igualando os campos fora e dentro, obtemos:

$$v_{in} \approx \frac{\eta}{\mu_0 \delta}$$

Usando o resultado de (a) para substituir, finalmente:

$$v_{in} \approx \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}}$$

(d) Agora encontramos a fração pedida:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{v_{in}}{v_{out}} \approx \sqrt{\frac{\eta}{\mu_0 L v_A}} = S^{-1/2}$$

Para $S \approx 10^{14}$, $L \approx 10^{-7}$. Isso é consistente com $\delta \ll L$.

(e) Como deduzido no item b, $\Delta\epsilon/\Delta t = \dot{\epsilon}$ é:

$$\dot{\epsilon} \approx \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} 2L v_{in} \approx \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} 2L \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}} = B_{in}^2 \sqrt{\frac{\eta v_A L}{\mu_0^3}}$$

(f) Usando o valor de 9, encontramos que para a erupção solar liberar 1020 J de energia ela duraria cerca de 2 meses, o que não é compatível com a duração de horas típica. Algumas razões para essa diferença são (uma é o suficiente):

- Não consideramos efeitos 3D para um universo 3D.
- Condição quase-estática não são compatíveis com o fenômeno, com parâmetros

que mudam com o tempo e equações não-lineares.

- Consideramos que a densidade é constante (em outras palavras, o fluido é incompressível), o que pode não ser verdade.

pr 7.

O enunciado dispõe que a luminosidade é puramente sustentada pela acreção. Isso indica que, a energia que é emitida é puramente a energia cinética e potencial das partículas absorvidas durante a acreção, portanto:

$$L = \frac{d}{dt} \Delta E = \frac{d}{dt} (E_f - E_0)$$

A energia inicial da partícula é nula, já que ela vem do infinito em repouso. Já no instante de acreção, a partícula apresenta queda livre próxima a superfície da estrela:

$$L = \frac{d}{dt} \left(\frac{dmv^2}{2} - \frac{GMdm}{R} \right)$$

$$v_{queda} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$L = \frac{d}{dt} \left(\frac{dmv^2}{2} - \frac{GMdm}{R} \right)$$

$$\dot{m} = \frac{RL}{GM}$$

No equilíbrio dinâmico, a pressão dinâmica causada por um fluxo de partículas acréscidas congrue com a pressão do campo magnético. Isso ocorre justamente no limite da magnetosfera:

$$B = B_0 \frac{R^3}{r^3}$$

$$m_{estrela} = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$\rho(r) = \dot{m} \frac{1}{4\pi r^2 v}$$

$$P_{din} = P_B = \rho(r) v^2 = k \frac{B_0^2 R^6}{r^6}$$

$$\dot{m} \frac{v}{4\pi r^2} = k \frac{B_0^2 R^6}{r^6} = \frac{RL}{GM} \sqrt{\frac{2GM}{r}} \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$r = \left(\frac{4\pi k B_0 R^6 \sqrt{GM}}{\sqrt{2} R l} \right)^{2/7}$$