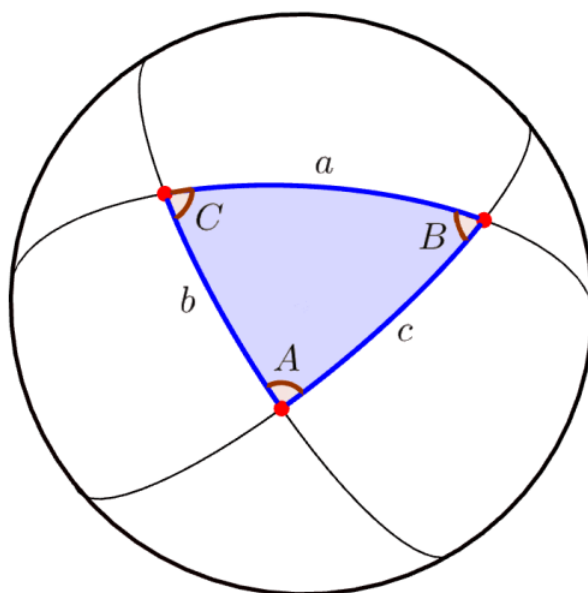


Instruções Gerais

1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 1 hora e 30 minutos;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
9. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
10. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
11. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

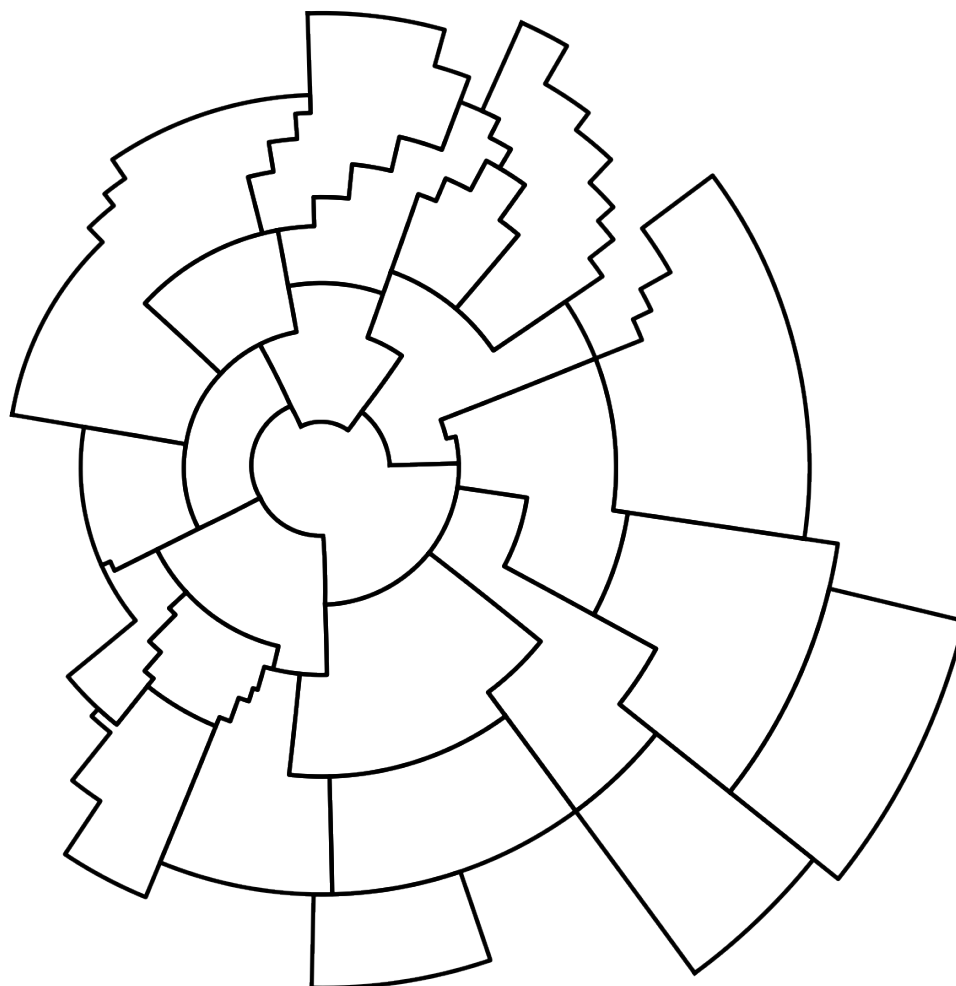
$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

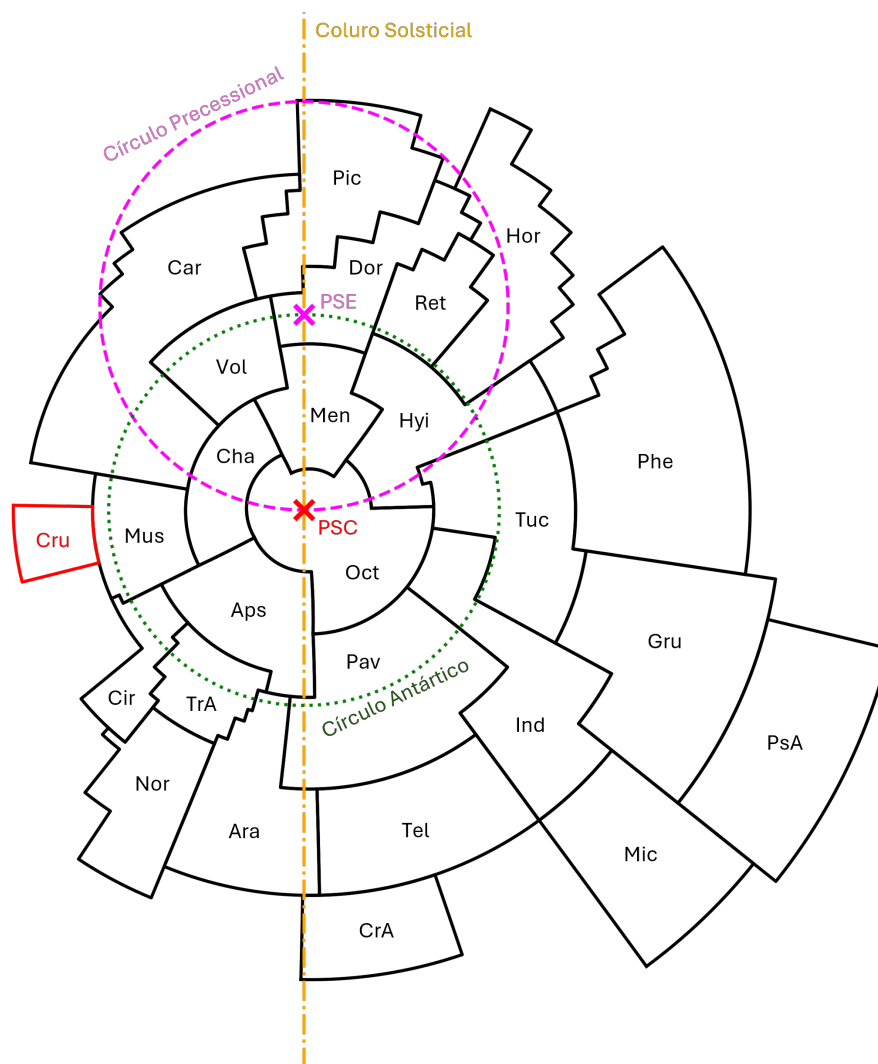
$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

1. Fronteiras (60 pontos) A carta a seguir representa as constelações de uma porção do céu. Pede-se:

- (a) **(2 pontos)** Qual o hemisfério no qual o observador se encontra?
- (b) **(3 pontos)** Marque o Polo Celeste Visível com um X.
- (c) **(5 pontos)** Marque o Polo Eclíptico Visível com um X.
- (d) **(10 pontos)** Marque o Círculo Precessional Visível.
- (e) **(10 pontos)** Marque o Círculo Circumpolar Visível.
- (f) **(10 pontos)** Marque o Coluro Solsticial.
- (g) **(10 pontos)** Desenhe as fronteiras do Cruzeiro do Sul.
- (h) **(10 pontos)** Escreva o nome em latim ou a abreviação IAU de cada constelação dentro de sua respectiva fronteira.



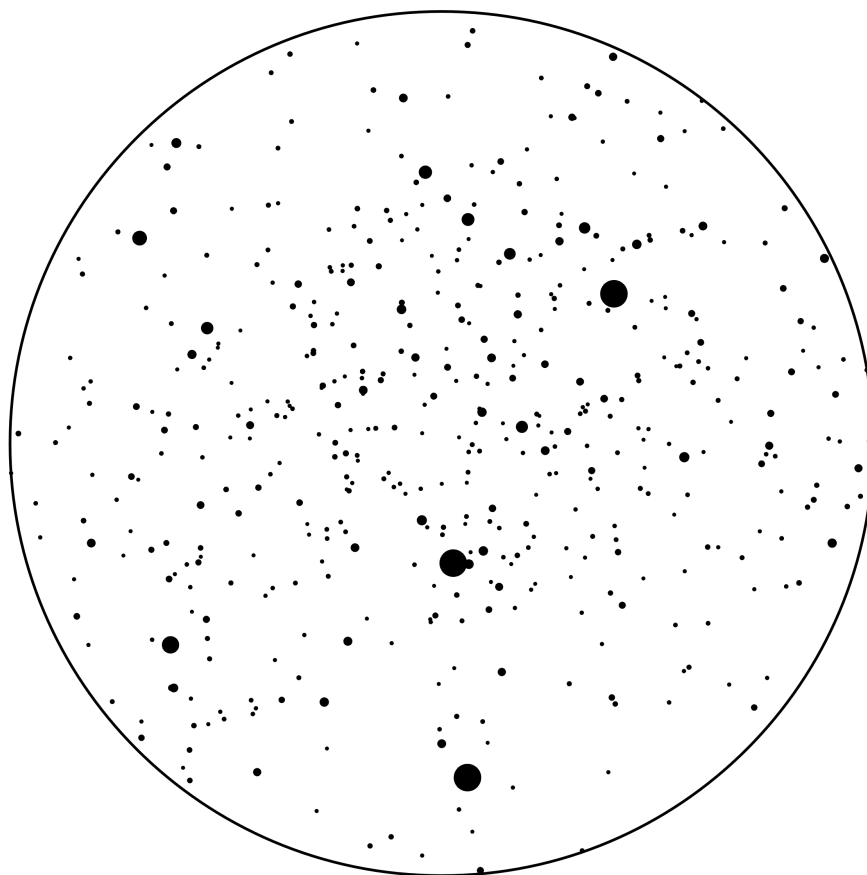
Solução: Observador está no Hemisfério Sul. As demais marcações encontram-se na carta:



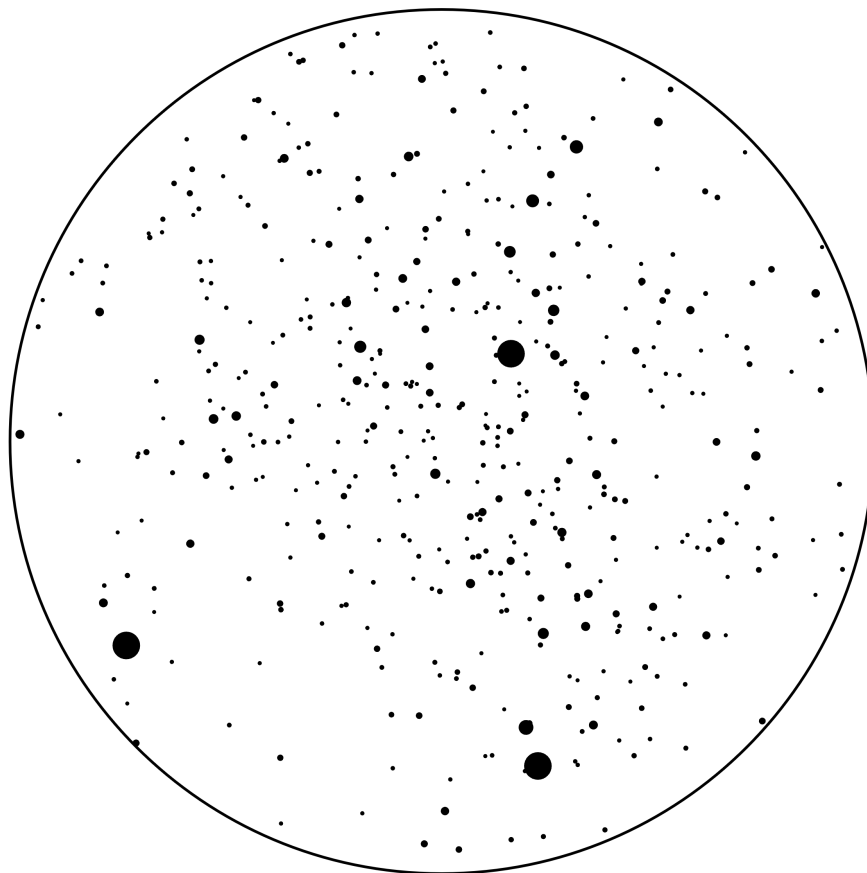
- 2. Maritana: sem volta para casa (90 pontos)** Maritana adora passear. Certo dia, ela partiu sem rumo, para onde quer que o destino a levasse. Então viajou... Viajou... Viajou até começar a reparar que o céu estava estranho... Oh não! Maritana se perdeu e agora está em outro sistema estelar!

Trata-se de um pequeno exoplaneta, desprovido de atmosfera, que orbita uma anã branca. Mesmo quando a anã branca está visível, seu brilho é insuficiente para ofuscar o resto do céu. Enquanto não conseguia retornar para casa, Maritana criou um assentamento onde observava o céu. As cartas a seguir, em projeção estereográfica, mostram o céu visto por ela, separadas pelo intervalo de um ano terrestre ambas com a anã branca acima do horizonte. Todas as marcações solicitadas pela questão devem ser feitas na segunda carta.

Dados: Tanto a rotação quanto a translação do pequeno exoplaneta levam mais de dois anos terrestres.



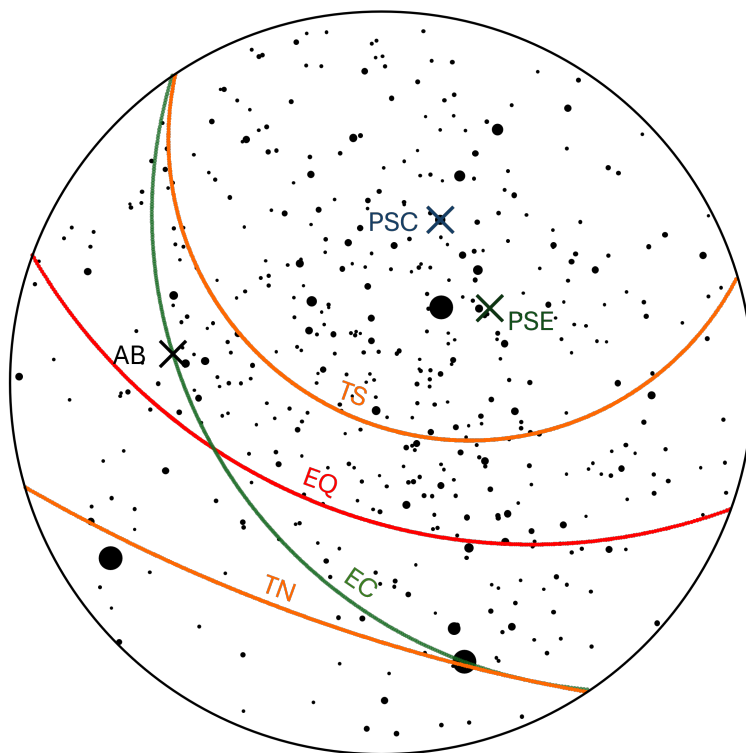
Primeira observação



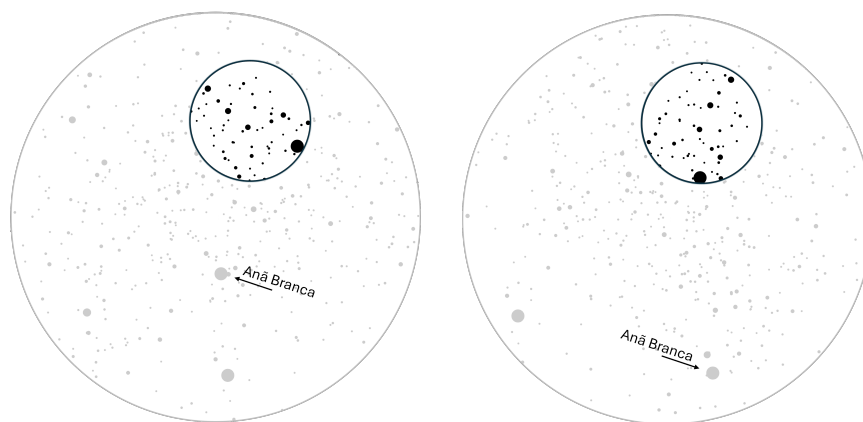
Segunda observação, depois de um ano

- (a) **(15 pontos)** Considere a posição que a anã branca ocupa na primeira carta, em relação às estrelas fixas. Marque com X essa mesma posição na segunda carta, levando em consideração a rotação do céu (identifique-a por AB).
- (b) **(15 pontos)** Na segunda carta, trace a Eclíptica (identifique-a por EC) e marque com X o polo eclíptico visível (identifique-o por PNE ou PSE). Adote a convenção de que o exoplaneta translaciona em sentido direto (mão direita para o PNE).
- (c) **(15 pontos)** Na segunda carta, marque com X a posição do polo celeste visível (identifique-o por PNC ou PSC) e trace o Equador (identifique-o por EQ). A rotação é direta (mesmo sentido de translação) ou retrógrada (sentido oposto)?
Adote a convenção de que o polo norte celeste é o polo mais próximo do polo norte eclíptico, independente do sentido de rotação.
- (d) **(15 pontos)** Determine a inclinação axial ε do exoplaneta e, na segunda carta, trace os trópicos (identifique-os por TN e TS).
- (e) **(15 pontos)** Qual o período de rotação do exoplaneta?
- (f) **(15 pontos)** Qual o período de translação do exoplaneta?

Solução:



- (a) Vamos começar comparando as duas cartas. Existe uma estrela que não altera sua posição (estrela polar), e sua vizinhança aparenta girar em torno dela. Um corpo visivelmente não acompanha a rotação do resto. Trata-se da anã branca.



Para marcar a posição do corpo na segunda carta, utilizaremos como guia as estrelas de fundo, como o próprio enunciado sugere. A marcação está representada.

- (b) Uma vez que temos a posição do objeto em dois momentos distintos, a Eclíptica é o círculo máximo que passa por esses dois pontos. Para a projeção estereográfica, o círculo máximo é uma circunferência que cruza o horizonte em pontos diametralmente opostos, conforme a marcação.

O Polo Eclíptico Visível é um ponto perpendicular à Eclíptica. Ele se localiza na reta que liga o zênite (centro da carta) ao centro da circunferência que traça a Eclíptica, e sua distância de 90° pode ser calculada utilizando a conversão entre distância física e distância zenital da estereográfica.

Comparando as imagens, perceba que o objeto gira em sentido de mão esquerda em relação às estrelas fixas. Nesse exemplo específico, ele gira em sentido de mão esquerda enquanto o céu gira em sentido de mão direita, o que torna a comparação mais evidente. Mesmo que ambos, objeto e céu, girassem no mesmo sentido, ainda seria necessário fazer a comparação do movimento relativo. Sabemos que a translação não altera a orientação de giro, portanto, não só o objeto compacto gira em sentido de mão esquerda, mas o planeta translaciona em sentido de mão esquerda em relação a esse polo. Trata-se, portanto, do PSE.

- (c) O Polo Celeste Visível é o centro de rotação do céu. Perceba que uma certa estrela não se move, enquanto sua vizinhança notoriamente gira ao redor dela, trata-se de uma estrela polar, demarcando o polo com maior facilidade.

Como esse é o polo mais próximo do PSE, trata-se do Polo Sul Celeste. O Equador é o círculo máximo perpendicular a esse polo. Pela condição de perpendicularidade, podemos encontrar o ponto desse círculo mais próximo do zênite, utilizando a conversão entre distância física e distância zenital na estereográfica. Ademais, o polo e o zênite demarcam um eixo de simetria, o que permite encontrar os cruzamentos do Equador com o horizonte. A partir desses três pontos, podemos marcar a circunferência do Equador.

Por fim, percebemos que o céu gira em sentido de mão direita em relação ao PSC (mesmo sentido que a Terra), o que significa que sua rotação é direta. Se lembrarmos que a rotação altera o sentido de giro aparente, concluímos que, se o céu gira em sentido de mão direita para o sul, então o planeta gira em sentido de mão esquerda para o sul, que é o mesmo sentido de translação.

- (d) Para encontrar a inclinação axial, primeiro medimos as distâncias zenitais dos polos celeste e eclíptico, bem como sua diferença de azimute, com auxílio da carta, e depois aplicamos a lei dos cossenos:

$$\cos(\varepsilon) = \cos(z_{PSC}) \cdot \cos(z_{PSE}) + \sin(z_{PSC}) \cdot \sin(z_{PSE}) \cdot \cos(\Delta A)$$

$$\varepsilon \approx 27^\circ$$

Os trópicos são círculos menores paralelos ao Equador, cuja distância aos polos é $90 \pm \varepsilon$. Na projeção estereográfica, esses círculos também são circunferências com o centro deslocado do polo, mas não cruzam com o horizonte em pontos diametralmente opostos. Para determiná-los, podemos calcular a distância do polo a dois pontos diametralmente opostos, e então traçar a circunferência representada na imagem do início do gabarito.

- (e) A projeção estereográfica conserva o ângulo de intersecção entre quaisquer duas curvas, isto é, o ângulo entre suas tangentes. Para determinar a rotação do céu, queremos descobrir o ângulo no qual os meridianos giraram, com vértice no polo.

Poderíamos determinar esse ângulo de forma rigorosa. Perceba que os meridianos são círculos máximos, portanto, na estereográfica, suas projeções são círculos que cruzam o horizonte em pontos diametralmente opostos. Se traçarmos o mesmo meridiano em dois momentos diferentes, o ângulo entre eles poderia ser encontrado a partir do ângulo entre os centros das circunferências.

No entanto, quando tratamos da vizinhança do polo, é suficiente aproximar essas tangentes como retas que ligam o polo a uma estrela próxima. A medição do ângulo pode ser feita diretamente com transferidor, pois a estereográfica é conforme.

Realizando esse procedimento, encontramos por volta de 72° de rotação no período de um ano. Ou seja, a rotação do exoplaneta tem período de 5 anos.

- (f) Para determinar o quanto o planeta girou, precisamos determinar o ângulo entre as posições da anã branca nas duas cartas. Vamos aproveitar a marcação que já foi feita e corrigida pela rotação do céu. Para isso, usamos o seguinte triângulo esférico que é trivial ver:

$$\cos(\theta) = \cos(z_1) \cdot \cos(z_2) + \sin(z_1) \cdot \sin(z_2) \cdot \cos(\Delta A)$$

$$\Rightarrow \theta \approx 103^\circ$$

Se, em um ano, a anã branca aparenta se mover 103° , então, para o período de translação, são necessários 3,5 anos.