

---

## Instruções Gerais

1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 2 horas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
9. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
10. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

## Formulário

Para encontrar a incerteza  $\sigma_\omega$  de uma função genérica  $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

| Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$ | Expressões para $\sigma_\omega$                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\omega = x \pm y \pm \dots$          | $\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$                                                                                                                                                                                        |
| $\omega = x^m$                        | $\sigma_\omega =  mx^{m-1}  \sigma_x$ ou $\left  \frac{\sigma_\omega}{\omega} \right  = \left  m \frac{\sigma_x}{x} \right $                                                                                                               |
| $\omega = ax$                         | $\sigma_\omega =  a  \sigma_x$ ou $\left  \frac{\sigma_\omega}{\omega} \right  = \left  \frac{\sigma_x}{x} \right $                                                                                                                        |
| $\omega = ax + b$                     | $\sigma_\omega =  a  \sigma_x$                                                                                                                                                                                                             |
| $\omega = axy$                        | $\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$<br>ou $\left( \frac{\sigma_\omega}{\omega} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_y}{y} \right)^2$                                                |
| $\omega = a \frac{x}{y}$              | $\sigma_\omega^2 = \left( \frac{a}{y} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{ax}{y^2} \right)^2 \sigma_y^2$<br>ou $\left( \frac{\sigma_\omega}{\omega} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_y}{y} \right)^2$ |
| $\omega = ax^p y^q$                   | $\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p q y^{q-1})^2 \sigma_y^2$<br>ou $\left( \frac{\sigma_\omega}{\omega} \right)^2 = \left( p \frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left( q \frac{\sigma_y}{y} \right)^2$                      |
| $\omega = a \sin(bx)$                 | $\sigma_\omega =  ab \cos(bx)  \sigma_x$                                                                                                                                                                                                   |
| $\omega = b \log_a x$                 | $\sigma_\omega = \left  \frac{b}{\ln a} \right  \frac{\sigma_x}{x}$                                                                                                                                                                        |

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta  $y = A + Bx$  são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que  $r$  é o coeficiente de correlação linear,  $A$  e  $B$  são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e  $N$  é o número de pontos.

## Questões

### 1. Aglomerado Globular (30 pontos)

A Figura abaixo mostra o histograma das velocidades radiais (em km/s) da distribuição estelar de um aglomerado globular com  $N = 1000$  estrelas. As velocidades foram medidas ao longo da linha de visada.

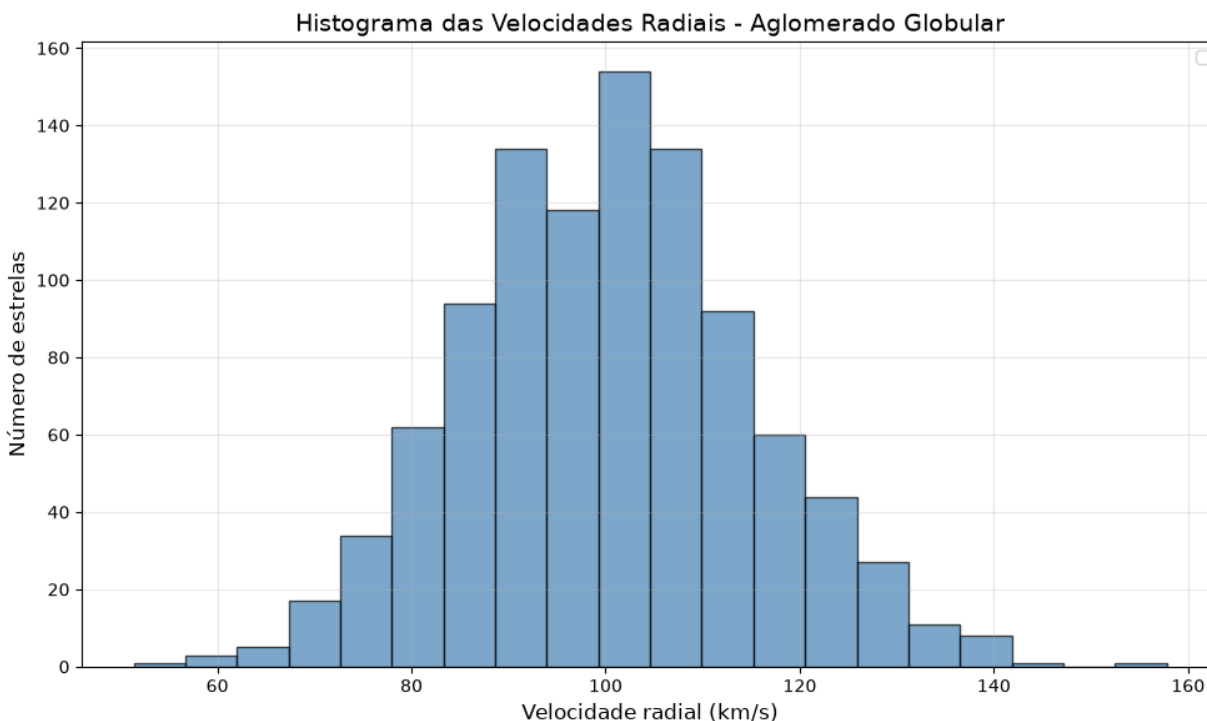


Figura 1: Histograma das velocidades radiais das estrelas do aglomerado. As barras azuis representam os dados.

A partir dos dados do histograma e assumindo isotropia na distribuição de velocidades, responda:

- (16 pontos)** Calcule a dispersão de velocidades radiais  $\sigma_v$  (desvio padrão populacional) do aglomerado.
- (10 pontos)** Para um sistema gravitacional em equilíbrio (como um aglomerado globular), o teorema do virial estabelece que

$$2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Considerando que o aglomerado pode ser modelado como uma esfera homogênea de raio  $R$  e massa total  $M$ , obtenha uma estimativa da massa do sistema em termos de  $\sigma_v$ ,  $R$  e  $G$ .

- (4 pontos)** Utilizando o valor de  $\sigma_v$  obtido no item (a) e o raio efetivo do aglomerado  $R = 10$  pc, calcule a massa total  $M$  do aglomerado em massas solares ( $M_\odot$ ).

#### Solução:

- Para estimar o desvio padrão de um conjunto de dados representados em um histograma, podemos utilizar o seguinte raciocínio:

- i) Calcular o ponto médio de cada classe do histograma;
- ii) Calcular a média ponderada utilizando as frequências das classes;
- iii) Calcular a dispersão (desvio padrão ponderado) a partir dos pontos médios e das frequências.

Agora, seguindo esse raciocínio, temos:

Tabela 1: Centros das classes e frequências do histograma das velocidades radiais.

| Classe | Centro da classe (km/s) | Frequência |
|--------|-------------------------|------------|
| 1      | 54.0                    | 1          |
| 2      | 59.4                    | 3          |
| 3      | 64.7                    | 5          |
| 4      | 70.0                    | 17         |
| 5      | 75.3                    | 34         |
| 6      | 80.6                    | 62         |
| 7      | 86.0                    | 94         |
| 8      | 91.3                    | 134        |
| 9      | 96.6                    | 118        |
| 10     | 101.9                   | 154        |
| 11     | 107.2                   | 134        |
| 12     | 112.6                   | 92         |
| 13     | 117.9                   | 60         |
| 14     | 123.2                   | 44         |
| 15     | 128.5                   | 27         |
| 16     | 133.8                   | 11         |
| 17     | 139.2                   | 8          |
| 18     | 144.5                   | 1          |
| 19     | 149.8                   | 0          |
| 20     | 155.1                   | 1          |

Média ponderada dos pontos médios:

$$\mu \approx 100,3 \text{ km/s}$$

Por fim, o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i f_i (v_i - \mu)^2}{N}}$$

$$\sigma_v \approx 14.8 \text{ km/s}$$

- b) Como mencionado pelo enunciado, podemos assumir isotropia na distribuição de velocidades. Assim, a dispersão tridimensional satisfaz

$$\langle v^2 \rangle = 3\sigma_v^2$$

Logo, a energia cinética total do aglomerado é

$$K = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}M(3\sigma_v^2) = \frac{3}{2}M\sigma_v^2$$

Por outro lado, para uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$ , a energia potencial gravitacional é

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Substituindo essas expressões no teorema do virial,

$$2 \left( \frac{3}{2} M \sigma_v^2 \right) - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 0$$

Simplificando,

$$3M\sigma_v^2 = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Cancelando o fator 3,

$$M\sigma_v^2 = \frac{1}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Multiplicando ambos os lados por  $R$ ,

$$MR\sigma_v^2 = \frac{1}{5} GM^2$$

Dividindo ambos os lados por  $M$ ,

$$R\sigma_v^2 = \frac{1}{5} GM$$

Portanto,

$$M = \frac{5\sigma_v^2 R}{G}$$

c) Substituindo os valores numéricos na fórmula encontrada no item (b), temos:

$$M \approx 2,6 \cdot 10^6 M_{\odot}$$

## 2. The Dark Side of the Universe (50 pontos)

Neste problema, usaremos os dados de observação de supernovas tipo Ia (levantamentos CfA3, CfA4 e Pan-STARRS) para determinar a razão entre as abundâncias de energia escura e matéria no universo atual.

Vamos supor que nosso universo é plano e que contém apenas energia escura e matéria (isto é, a densidade total  $\rho = \rho_m + \rho_{\Lambda}$  do universo é igual à densidade crítica  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ ). Denotemos por

$$\Omega_{m,0} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} = 1 - \Omega_{m,0}$$

os valores atuais dos parâmetros de densidade e por  $H_0$  o valor atual do parâmetro de Hubble–Lemaître.

Lembre-se também de que a magnitude  $m$  (corrigida para extinção) de uma fonte com desvio para o vermelho cosmológico  $z$  e magnitude absoluta  $M$  satisfaz

$$m - \mathcal{M} = 5 \log \frac{D_L(z)}{\text{km s}^{-1}},$$

onde

$$\mathcal{M} = M - 5 \log \frac{H_0}{\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}} + 25$$

e  $D_L$  sendo uma grandeza a ser definida posteriormente.

A tabela abaixo mostra os dados observacionais de supernovas tipo Ia selecionadas (redshift cosmológico  $z$  e magnitude de pico calibrada  $m_B$  na banda B).

Tabela 2: Dados de supernovas tipo Ia selecionadas (Scolnic et al. 2018).

| SN     | $z$     | $m_B$ / mag |
|--------|---------|-------------|
| 2422   | 0.26318 | 21.35760    |
| 80646  | 0.31811 | 21.81160    |
| 8921   | 0.14393 | 19.83575    |
| 110460 | 0.19958 | 20.61175    |
| 12898  | 0.08286 | 18.51790    |
| 370595 | 0.18141 | 20.42600    |
| 13689  | 0.24999 | 21.20115    |
| 440005 | 0.30549 | 21.69950    |
| 14212  | 0.20284 | 20.73490    |
| 440050 | 0.28546 | 21.46645    |
| 15132  | 0.15286 | 20.00240    |
| 2008bw | 0.03348 | 16.48020    |
| 15203  | 0.20291 | 20.64165    |
| 1999cc | 0.03144 | 16.31895    |
| 15440  | 0.26110 | 21.20360    |

a) **(15 pontos)** Encontre o valor de

$$I_{SN} = \frac{10^{0.2m_B}}{cz/\text{km s}^{-1}}$$

para cada supernova na tabela.

b) **(10 pontos)** Faça um gráfico dos valores de  $I_{SN}$  em função de  $z$ .

c) **(10 pontos)** Para redshifts pequenos, demonstre que, sendo  $d_L$  a distância luminosa,  $D_L \equiv H_0 d_L$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$D_L(z) \approx cz \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{4} \Omega_{m,0} \right) z \right]$$

d) **(15 pontos)** Determine graficamente o melhor ajuste para os parâmetros  $\mathcal{M}$ ,  $\Omega_{m,0}$  e  $\Omega_{\Lambda,0}$ .

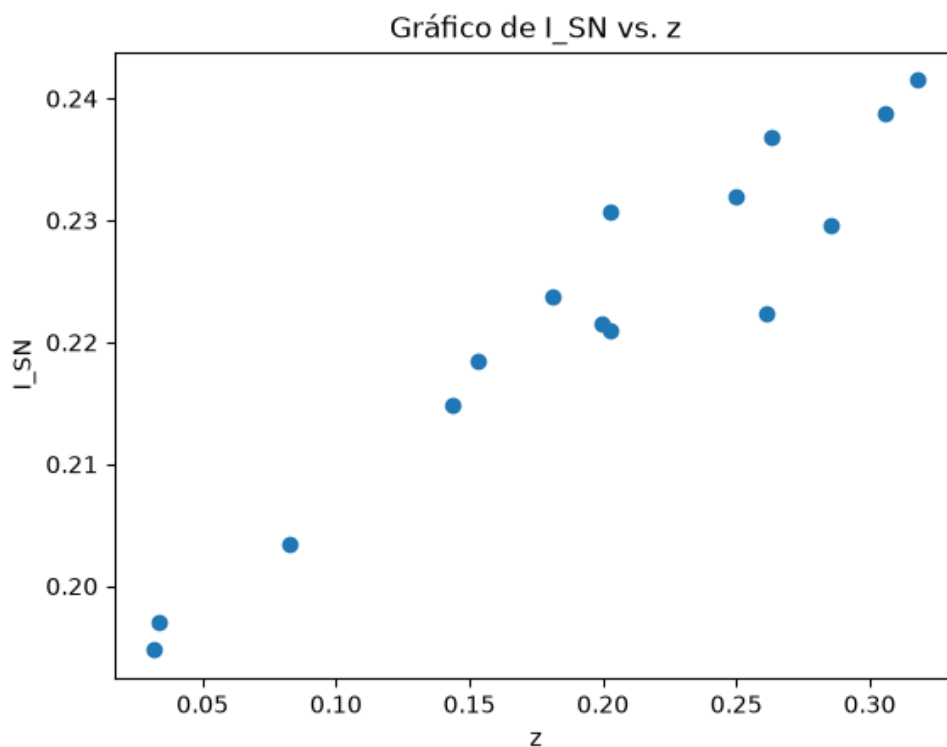
**Solução:**

a) Calculando os valores, podemos montar a seguinte tabela:

| SN     | $I_{\text{SN}}$ |
|--------|-----------------|
| 2422   | 0.236835        |
| 80646  | 0.241502        |
| 8921   | 0.214871        |
| 110460 | 0.221519        |
| 12898  | 0.203429        |
| 370595 | 0.223726        |
| 13689  | 0.231999        |
| 440005 | 0.238826        |
| 14212  | 0.230677        |
| 440050 | 0.229574        |
| 15132  | 0.218456        |
| 2008bw | 0.196985        |
| 15203  | 0.220905        |
| 1999cc | 0.194754        |
| 15440  | 0.222378        |

Tabela 3: Valores do índice  $I_{\text{SN}}$  para as supernovas.

b) Plotando os pontos, obtemos o seguinte gráfico:



c) Partimos da equação de Friedmann para um universo plano contendo apenas matéria e energia escura,

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}]$$

Como o universo é plano,

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1,$$

de modo que

$$H(z) = H_0 \sqrt{1 + \Omega_{m,0} [(1+z)^3 - 1]}$$

Para  $z \ll 1$ ,

$$(1+z)^3 = 1 + 3z + \mathcal{O}(z^2),$$

e portanto

$$H(z) = H_0 \sqrt{1 + 3\Omega_{m,0}z + \mathcal{O}(z^2)}$$

Utilizando a expansão binomial

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2),$$

obtemos

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{H_0} \left[ 1 - \frac{3}{2}\Omega_{m,0}z + \mathcal{O}(z^2) \right]$$

A distância comóvel é dada por

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')},$$

logo

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \left( 1 - \frac{3}{2}\Omega_{m,0}z' \right) dz' + \mathcal{O}(z^3),$$

o que fornece

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \left[ z - \frac{3}{4}\Omega_{m,0}z^2 \right] + \mathcal{O}(z^3)$$

A distância luminosa é

$$d_L(z) = (1+z)\chi(z),$$

de modo que

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} (1+z) \left[ z - \frac{3}{4}\Omega_{m,0}z^2 \right] + \mathcal{O}(z^3)$$

Mantendo termos até segunda ordem,

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} \left[ z + \left( 1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0} \right) z^2 \right]$$

Finalmente,

$$d_L(z) = \frac{cz}{H_0} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0} \right) z \right] + \mathcal{O}(z^3)$$

Definindo  $D_L \equiv H_0 d_L$ , obtemos

$$D_L(z) \approx cz \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0} \right) z \right]$$

- d) Para determinar os parâmetros cosmológicos, partimos da expressão teórica para  $D_L$  em baixos redshifts:

$$D_L(z) \approx cz \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0} \right) z \right]$$

Da relação entre magnitude e distância luminosa, temos:

$$m - \mathcal{M} = 5 \log \frac{D_L(z)}{\text{km s}^{-1}},$$

Reescrevendo em termos exponenciais:

$$10^{0.2(m_B - \mathcal{M})} = \frac{D_L(z)}{\text{km s}^{-1}}$$

Substituindo a expansão para  $D_L(z)$ , obtemos:

$$\frac{10^{0.2(m_B - \mathcal{M})}}{cz/\text{km s}^{-1}} \approx 1 + \left( 1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0} \right) z$$

Definindo o observável:

$$I_{SN} = \frac{10^{0.2m_B}}{cz/\text{km s}^{-1}}$$

podemos escrever o modelo como uma relação aproximadamente linear:

$$I_{SN}(z) \approx A [1 + Bz],$$

onde:

$$A = 10^{0.2\mathcal{M}}, \quad B = 1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0}$$

Reorganizando, obtemos uma forma linear em  $z$ :

$$I_{SN}(z) \approx A + (AB)z$$

Assim, o problema reduz-se a um ajuste linear do tipo:

$$I_{SN}(z) = a + bz,$$

onde os parâmetros ajustados  $a$  e  $b$  estão relacionados aos parâmetros cosmológicos por:

$$a = A = 10^{0.2\mathcal{M}}, \quad b = AB$$

Dessa forma, obtemos:

$$B = \frac{b}{a},$$

e portanto:

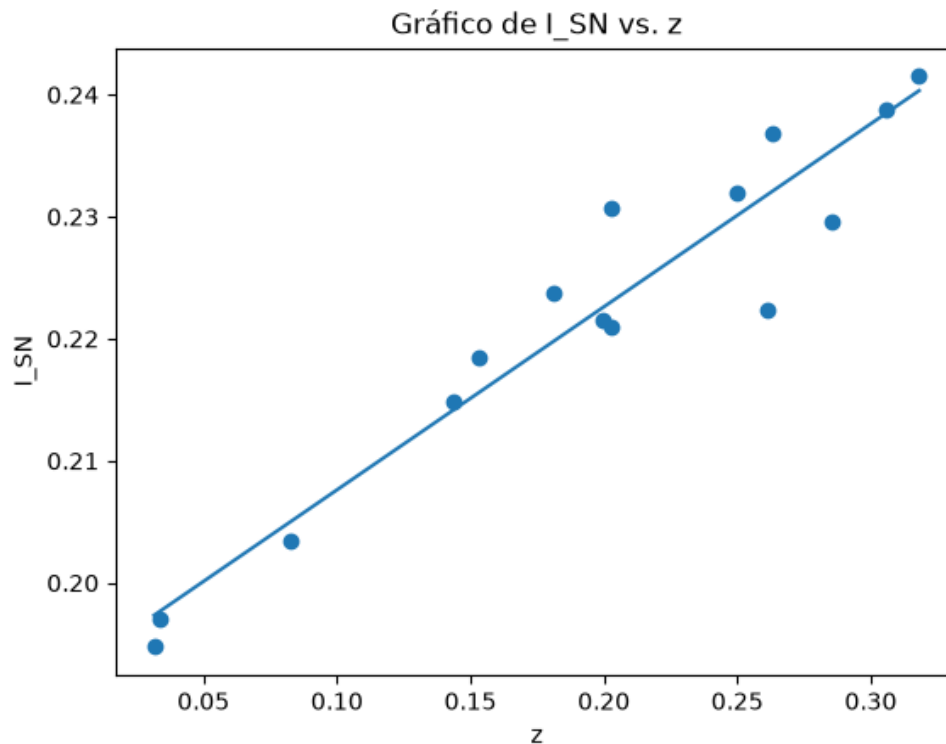
$$\Omega_{m,0} = \frac{4}{3}(1 - B), \quad \Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$$

Antes de determinar os valores de  $\mathcal{M}$  e  $\Omega_{m,0}$ , é necessário calcular os coeficientes do ajuste linear utilizando as expressões fornecidas no formulário para o método dos mínimos quadrados.

$$a \approx 0,193 \quad \text{e} \quad b \approx 0,150 \quad \text{e} \quad r \approx 0.9562$$

Sendo este último o coeficiente de correlação linear.

O gráfico com a reta de ajuste fica da seguinte forma:



Primeiramente, para o parâmetro

$$\mathcal{M} = 5 \log_{10}(a),$$

Logo,

$$\mathcal{M} = -3,57$$

Para o parâmetro

$$B = \frac{b}{a},$$

Substituindo os valores numéricos:

$$B \approx \frac{0,15}{0,193} \approx 0,777,$$

Finalmente, para a densidade de matéria:

$$\Omega_{m,0} = \frac{4}{3}(1 - B),$$

obtemos:

$$\Omega_{m,0} \approx \frac{4}{3}(1 - 0,777) \approx 0,30,$$

Como o universo é assumido plano:

$$\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$$

Portanto:

$$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0,70$$

- 3. SUPREMO! (70 pontos)** Depois de anos dedicado à física teórica, Coutinho decidiu finalmente seguir pelo caminho das observações estelares. Entretanto, fiel ao seu espírito analítico, recusou-se terminantemente a utilizar aproximações simplificadoras. Para ele, se a natureza resolve exatamente o problema de dois corpos, então também devemos fazê-lo. Infelizmente, Coutinho também é preguiçoso.

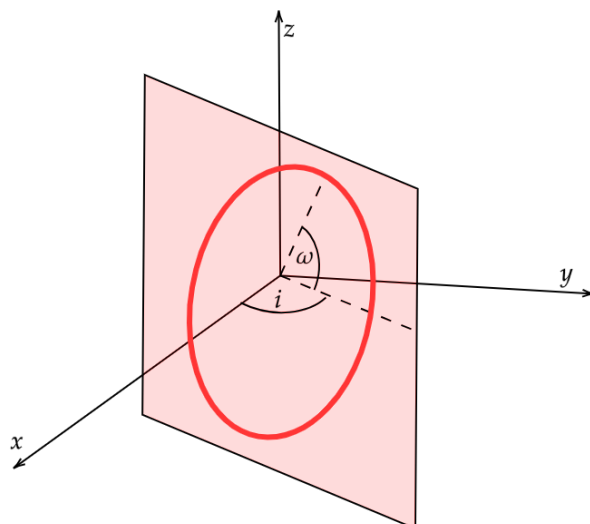
Após vários meses de observações do sistema binário D4V, ele processou apenas parte dos dados coletados. Algumas informações foram organizadas em tabelas, outras em gráficos e outras sequer chegaram a ser reduzidas. Seu objetivo será reconstruir completamente os parâmetros físicos do sistema utilizando apenas os dados disponibilizados.

Considere um sistema binário composto pelas estrelas D4V1 e D4V2. As estrelas possuem massas  $M_1$  e  $M_2$ , semi-eixos maiores  $a_1$  e  $a_2$ , excentricidade orbital  $e$  e período orbital  $P$ .

### Parte I: Velocidades Radiais

Tome o centro de massa do sistema como origem de um sistema cartesiano. O eixo  $x$  aponta na direção

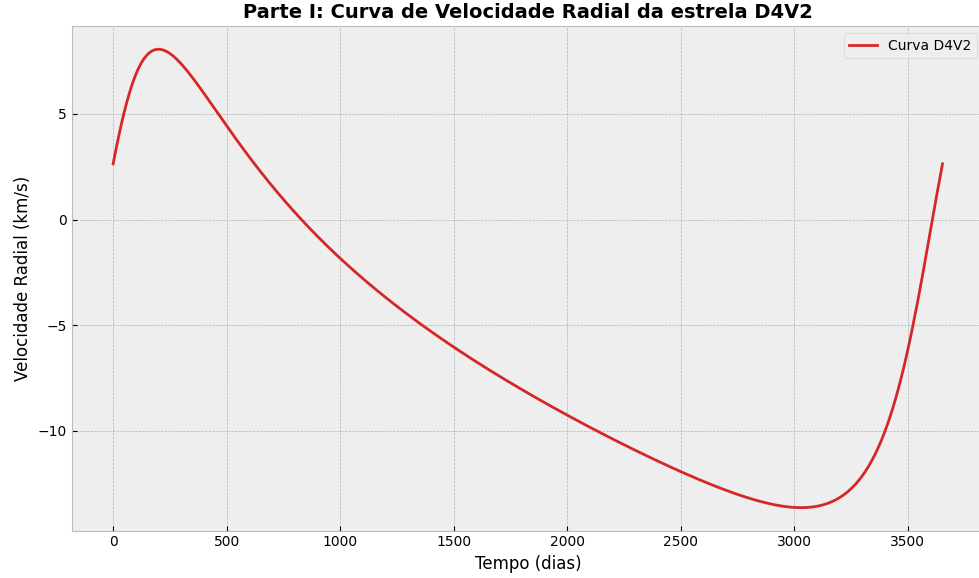
do observador, enquanto os eixos  $y$  e  $z$  pertencem ao plano do céu, com o eixo  $z$  pertencente ao plano da órbita. O plano orbital possui inclinação  $i \in [0, \frac{\pi}{2}]$  em relação à linha de visada, e o periastro faz um ângulo  $\omega$  com o plano  $xy$  medido no plano orbital, como representado na imagem a seguir:



A tabela abaixo apresenta os comprimentos de onda observados para D4V1.

| Tempo (dias) | $\lambda_{\text{obs}}$ (nm) |
|--------------|-----------------------------|
| 0.00         | 656.25905                   |
| 405.83       | 656.25550                   |
| 811.67       | 656.26171                   |
| 1217.50      | 656.26614                   |
| 1623.33      | 656.26949                   |
| 2029.17      | 656.27226                   |
| 2435.00      | 656.27466                   |
| 2840.83      | 656.27652                   |
| 3246.67      | 656.27592                   |
| 3652.50      | 656.25905                   |

Já a curva de velocidade radial de D4V2 encontra-se representada abaixo.



- (a) **(10 pontos)** Construa o gráfico de velocidade radial de D4V1 a partir dos dados espectroscópicos fornecidos, trace a curva que melhor ajusta as observações e determine o valor da velocidade radial do centro de massa  $v_{r,CM}$  do sistema.
- (b) **(6 pontos)** Seja  $\nu$  a anomalia verdadeira da órbita relativa entre as estrelas e  $r$  a distância instantânea entre elas. Mostre que as coordenadas da órbita no sistema observacional podem ser escritas como

$$x = r \cos(\nu + \omega) \cos i,$$

$$y = r \cos(\nu + \omega) \sin i,$$

$$z = r \sin(\nu + \omega),$$

onde

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}.$$

Além disso, prove que a velocidade radial relativa observada satisfaz

$$v_x = \frac{2\pi a \cos i}{P\sqrt{1 - e^2}} [e \sin \omega + \sin(\nu + \omega)].$$

- (c) **(12 pontos)** Seja  $\Delta t_1$  o intervalo temporal entre dois zeros consecutivos da curva de velocidade radial e  $\Delta t_2$  o intervalo temporal entre um máximo e o mínimo consecutivo da curva. Prove que

$$\Delta t_1 = \frac{P}{2} + \frac{Pe}{\pi} \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}$$

e

$$\Delta t_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \arccos \left( \frac{e \sin \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}} \right) - \frac{e \sin \omega \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cos^2 \omega} \right].$$

Utilizando os gráficos observacionais, determine os valores de  $e$  e  $\omega$ .

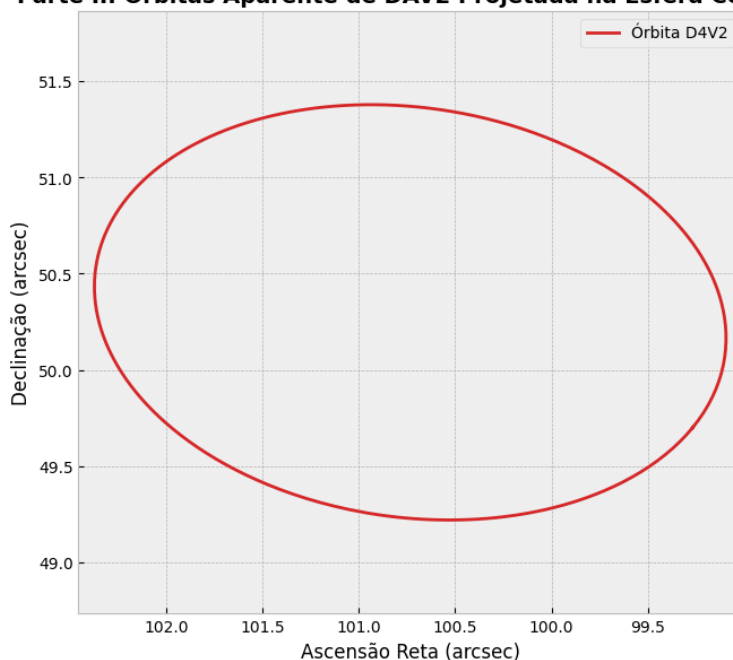
## Parte II: Astrometria

A tabela abaixo contém as posições observadas da estrela D4V1 ao longo de um período orbital. As coordenadas estão expressas em segundos de arco relativos a um sistema de referência fixo.

| Tempo (dias) | Ascensão reta (") | Declinação (") |
|--------------|-------------------|----------------|
| 0.00         | 100.3664          | 50.1496        |
| 260.89       | 99.8724           | 50.3819        |
| 521.79       | 99.4054           | 50.3458        |
| 782.68       | 99.0918           | 50.2076        |
| 1043.57      | 98.9062           | 50.0374        |
| 1304.46      | 98.8231           | 49.8627        |
| 1565.36      | 98.8251           | 49.6976        |
| 1826.25      | 98.9008           | 49.5512        |
| 2087.14      | 99.0422           | 49.4317        |
| 2348.04      | 99.2434           | 49.3480        |
| 2608.93      | 99.4989           | 49.3115        |
| 2869.82      | 99.8001           | 49.3400        |
| 3130.71      | 100.1262          | 49.4630        |
| 3391.61      | 100.4039          | 49.7309        |
| 3652.50      | 100.3664          | 50.1496        |

Além disso, as posições observadas de D4V2 já foram marcadas sobre uma projeção equiretangular do céu.

### Parte II: Órbitas Aparente de DAV2 Projetada na Esfera Cele



- (10 pontos) Utilizando a grade fornecida, plote os pontos correspondentes às observações de D4V1 e determine a curva que melhor ajusta a trajetória observada.
- (4 pontos) Determine as coordenadas de ascensão reta e declinação do centro de massa do sistema.
- (20 pontos) Mostre que a projeção da órbita kepleriana sobre o plano  $yz$  continua sendo uma elipse. Sabendo que os quadrados dos semi-eixos maior e menor aparentes da órbita observada são dados por

$$a_{\text{proj}}^2 = \frac{a^2}{2} \left[ \Sigma_0 + \sqrt{\Sigma_0^2 - 4(1 - e^2) \sin^2 i} \right] \quad \text{e} \quad b_{\text{proj}}^2 = \frac{a^2}{2} \left[ \Sigma_0 - \sqrt{\Sigma_0^2 - 4(1 - e^2) \sin^2 i} \right],$$

onde  $\Sigma_0 = 1 + \sin^2 i - e^2(\sin^2 \omega + \sin^2 i \cos^2 \omega)$ , determine a inclinação orbital  $i$  do sistema D4V.

(g) **(8 pontos)** Prove que a velocidade radial máxima relativa satisfaz

$$v_{\text{max}} = \frac{2\pi a \cos i}{P\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \sin \omega).$$

Utilizando os dados observacionais, determine  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $d$  distância do sistema ao observador.

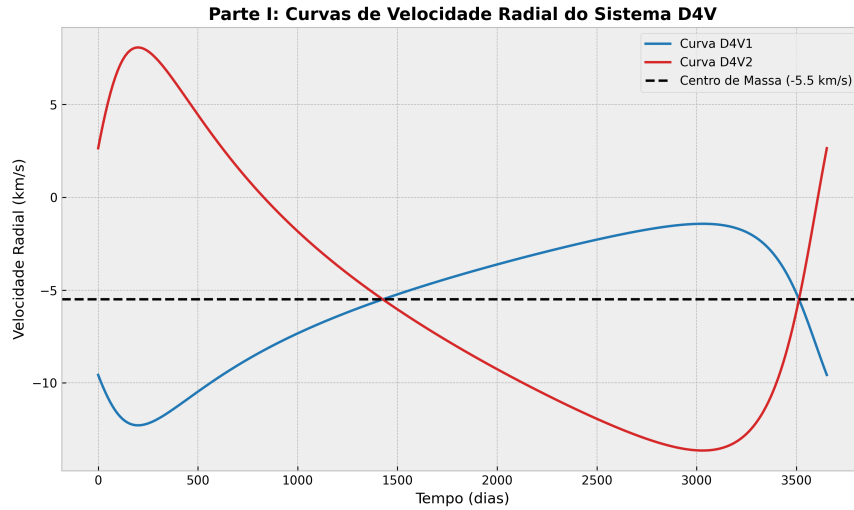
**Solução:**

(a) A partir da relação de efeito Doppler não relativístico,

$$\frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c},$$

obtêm-se as velocidades radiais observadas de D4V1 para cada instante da tabela.

Com esses pontos, constrói-se a curva de velocidade radial de D4V1. Como ambas as estrelas orbitam o centro de massa com o mesmo período e mesma excentricidade, suas curvas possuem a mesma forma funcional e diferem apenas por um fator de escala e uma inversão de fase de  $\pi$ .



O ajuste dos dados fornece os valores observacionais de

$$P = 3652.50 \text{ dias}, \quad v_{\text{max},1} = 6.78 \text{ km/s}, \quad v_{\text{max},2} = 13.57 \text{ km/s}.$$

Esses parâmetros serão utilizados nas partes seguintes.

(b) Seja  $(Y, z)$  um sistema de coordenadas pertencente ao plano orbital, com o eixo  $Y$  sendo a intersecção entre o plano orbital e o plano  $xy$ . A órbita relativa pode ser parametrizada pela anomalia verdadeira  $\nu$  como

$$Y = r \cos(\nu + \omega),$$

$$z = r \sin(\nu + \omega),$$

onde

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}.$$

O plano orbital encontra-se inclinado de um ângulo  $i$  em relação à linha de visada. Como o eixo  $x$  aponta na direção do observador e os eixos  $y$  e  $z$  pertencem ao plano do céu, a transformação para o sistema observacional é dada por

$$x = Y \cos i,$$

$$y = Y \sin i.$$

Logo,

$$x = r \cos(\nu + \omega) \cos i,$$

$$y = r \cos(\nu + \omega) \sin i,$$

$$z = r \sin(\nu + \omega),$$

O momento angular específico da órbita vale

$$h = r^2 \dot{\nu}.$$

Para uma órbita kepleriana,

$$h = \sqrt{GMa(1 - e^2)},$$

onde

$$M = M_1 + M_2.$$

Utilizando a terceira lei de Kepler,

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2},$$

segue que

$$h = \frac{2\pi a^2}{P} \sqrt{1 - e^2}.$$

Portanto,

$$\dot{\nu} = \frac{2\pi}{P} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$

A velocidade radial observada é

$$v_x = \dot{x}.$$

Derivando,

$$v_x = \frac{d}{dt} [r \cos(\nu + \omega) \cos i].$$

Usando

$$\dot{r} = \frac{he}{a(1-e^2)} \sin \nu,$$

e substituindo as expressões de  $r$ ,  $\dot{r}$  e  $\dot{\nu}$ , obtém-se após simplificações

$$v_x = \frac{2\pi a \cos i}{P\sqrt{1-e^2}} [e \sin \omega + \sin(\nu + \omega)].$$

(c) Os zeros da velocidade radial satisfazem

$$\sin(\nu + \omega) = -e \sin \omega.$$

As soluções consecutivas são

$$\nu_1 = -\omega - \arcsin(e \sin \omega),$$

$$\nu_2 = \pi - \omega + \arcsin(e \sin \omega).$$

Introduzimos agora a anomalia excêntrica  $E$ , definida pelas relações

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

$$\sin \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}.$$

Substituindo na condição dos zeros e simplificando,

$$\tan E = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \omega}{\sin \omega}.$$

As duas soluções consecutivas diferem de

$$\Delta E = \pi + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \omega}{\sin \omega} \right).$$

Utilizando a equação de Kepler,

$$t = \frac{P}{2\pi} (E - e \sin E),$$

segue

$$\Delta t_1 = \frac{P}{2} + \frac{Pe}{\pi} \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \omega}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \omega}}.$$

Para os extremos da velocidade radial,

$$\frac{dv_x}{dt} = 0.$$

Como

$$\frac{d\nu}{dt} \neq 0,$$

isso equivale a

$$\frac{dv_x}{d\nu} = 0.$$

Derivando,

$$\cos(\nu + \omega) = 0.$$

Logo,

$$\nu + \omega = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\nu + \omega = \frac{3\pi}{2}.$$

Substituindo novamente nas relações entre  $\nu$  e  $E$  e utilizando a equação de Kepler, obtém-se

$$\Delta t_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \arccos \left( \frac{e \sin \omega}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \omega}} \right) - \frac{e \sin \omega \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \omega} \right].$$

As duas equações

$$\Delta t_1 = \frac{P}{2} + \frac{Pe}{\pi} \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \omega}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \omega}}$$

e

$$\Delta t_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \arccos \left( \frac{e \sin \omega}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \omega}} \right) - \frac{e \sin \omega \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \omega} \right]$$

formam um sistema fechado para  $e$  e  $\omega$ .

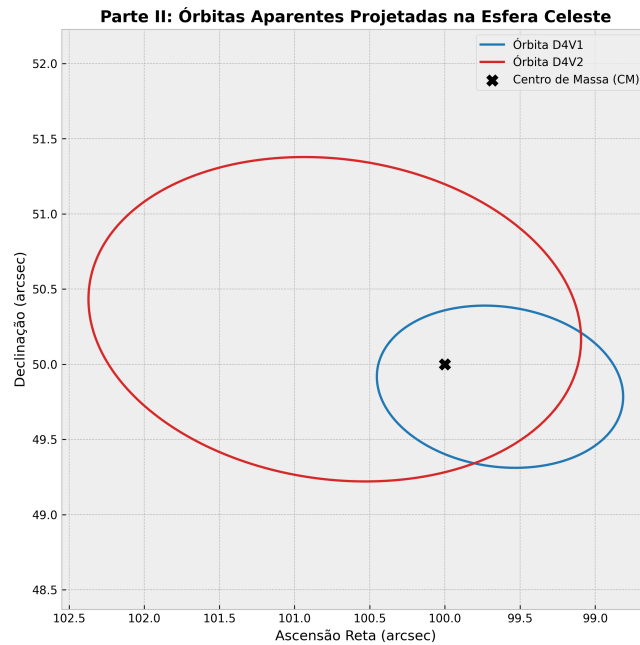
Medindo experimentalmente  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  nos gráficos observacionais e resolvendo numericamente o sistema acima, obtém-se

$$e = 0.5$$

e

$$\omega = 30^\circ.$$

- (d) Plotando os pontos fornecidos para D4V1 no plano  $(\alpha, \delta)$  e ajustando a curva que melhor representa as observações, obtém-se a órbita aparente projetada da estrela.

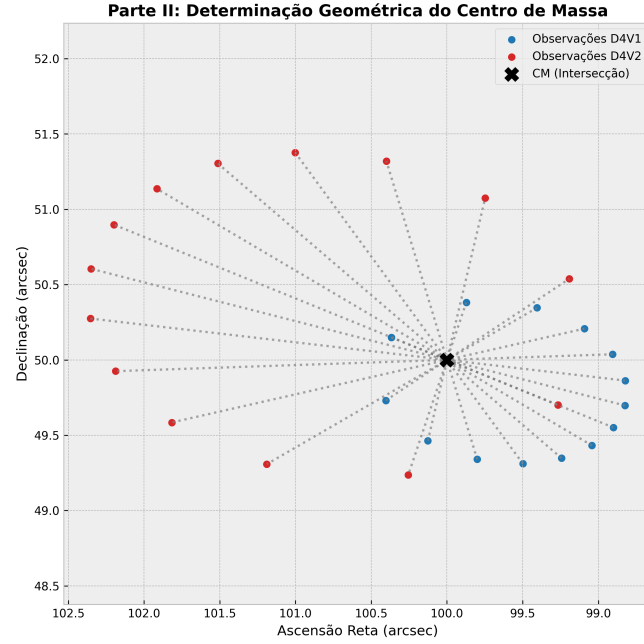


- (e) As observações de D4V1 e D4V2 foram realizadas nos mesmos instantes de tempo. Em qualquer sistema binário, as duas estrelas e o centro de massa permanecem sempre alinhados. Portanto, para cada instante observacional, o centro de massa deve pertencer à reta que une as posições observadas das duas estrelas naquele mesmo instante.

Sejam  $\vec{r}_1(t_k)$  e  $\vec{r}_2(t_k)$  as posições observadas das estrelas no instante  $t_k$ . Então o centro de massa deve pertencer à reta

$$\overline{\vec{r}_1(t_k) \vec{r}_2(t_k)}.$$

Repetindo esse procedimento para todos os instantes observacionais disponíveis, obtemos um conjunto de retas que, idealmente, intersectam-se em um único ponto. Como o centro de massa permanece fixo em relação ao sistema de referência adotado, esse ponto comum corresponde precisamente à sua posição na esfera celeste.



Assim, traçando as retas que unem as posições simultâneas de D4V1 e D4V2 e determinando seu ponto de concorrência, obtemos

$$(\alpha_{\text{CM}}, \delta_{\text{CM}}) = (100.00'', 50.00'').$$

(f) Utilizando as relações usuais entre a anomalia verdadeira  $\nu$  e a anomalia excêntrica  $E$ ,

$$r \cos \nu = a(\cos E - e),$$

$$r \sin \nu = a\sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

podemos reescrever as coordenadas observadas:

$$y = r \cos(\nu + \omega),$$

$$z = r \sin(\nu + \omega) \sin i.$$

Expandindo os ângulos das coordenadas observacionais utilizando as identidades de soma, temos:

$$y = r \cos \nu \cos \omega - r \sin \nu \sin \omega,$$

$$z = (r \sin \nu \cos \omega + r \cos \nu \sin \omega) \sin i.$$

Substituindo as relações de  $r \cos \nu$  e  $r \sin \nu$  nas equações acima:

$$y = a(\cos E - e) \cos \omega - a\sqrt{1 - e^2} \sin E \sin \omega,$$

$$z = \left[ a\sqrt{1-e^2} \sin E \cos \omega + a(\cos E - e) \sin \omega \right] \sin i.$$

Podemos reagrupar esses termos para separar a parte paramétrica (que depende de  $E$  e dita a forma da curva aparente) da parte constante:

$$y = \left( a \cos \omega \cos E - a\sqrt{1-e^2} \sin \omega \sin E \right) - ae \cos \omega,$$

$$z = \left( a \sin i \sin \omega \cos E + a \sin i \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin E \right) - ae \sin i \sin \omega.$$

Os termos constantes da direita ( $-ae \cos \omega$  e  $-ae \sin i \sin \omega$ ) representam a posição do foco (o centro de massa do sistema) em relação ao centro geométrico da elipse projetada. Para estudar a forma geométrica da órbita, trasladamos a origem do nosso sistema de coordenadas do foco para o centro geométrico da curva aparente. Definimos as novas coordenadas centradas ( $Y, Z$ ):

$$Y = y + ae \cos \omega,$$

$$Z = z + ae \sin i \sin \omega.$$

Definindo as constantes geométricas  $A = a \cos \omega$ ,  $B = -a\sqrt{1-e^2} \sin \omega$ ,  $C = a \sin i \sin \omega$  e  $D = a \sin i \sqrt{1-e^2} \cos \omega$ , obtemos o sistema centrado parametrizado por  $E$ :

$$Y = A \cos E + B \sin E,$$

$$Z = C \cos E + D \sin E.$$

Como  $Y$  e  $Z$  são combinações lineares de  $\cos E$  e  $\sin E$ , o vetor  $(Y, Z)$  descreve a imagem linear de um círculo unitário parametrizado por  $E$ . Portanto, a órbita projetada no plano do céu continua sendo uma elipse. Para deduzir as fórmulas fornecidas no enunciado, basta encontrar os semi-eixos maximizando e minimizando a distância ao centro geométrico. O quadrado dessa distância é  $R^2(E) = Y^2 + Z^2$ . Substituindo as coordenadas e utilizando as identidades de arco duplo ( $\cos^2 E = \frac{1+\cos 2E}{2}$ ,  $\sin^2 E = \frac{1-\cos 2E}{2}$  e  $2 \cos E \sin E = \sin 2E$ ), a equação assume a forma harmônica:

$$R^2(E) = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} + \left( \frac{A^2 + C^2 - B^2 - D^2}{2} \right) \cos 2E + (AB + CD) \sin 2E.$$

Os extremos de uma função  $M + U \cos 2E + V \sin 2E$  são  $M \pm \sqrt{U^2 + V^2}$ . Substituindo  $A, B, C, D$  e simplificando com a variável auxiliar  $\Sigma_0 = 1 + \sin^2 i - e^2(\sin^2 \omega + \sin^2 i \cos^2 \omega)$ , recuperam-se exatamente as expressões rigorosas para  $a_{\text{proj}}^2$  e  $b_{\text{proj}}^2$  dadas no enunciado.

A partir da razão dos quadrados dos semi-eixos aparentes, temos a relação:

$$R = \frac{\Sigma_0 - \sqrt{\Sigma_0^2 - 4(1-e^2) \sin^2 i}}{\Sigma_0 + \sqrt{\Sigma_0^2 - 4(1-e^2) \sin^2 i}}.$$

Para obter uma solução analítica para a inclinação, isolamos o termo radical multiplicando cruzado:

$$\sqrt{\Sigma_0^2 - 4(1 - e^2) \sin^2 i} = \Sigma_0 \left( \frac{1 - R}{1 + R} \right).$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e reorganizando os termos, obtemos:

$$4(1 - e^2) \sin^2 i = \Sigma_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{1 - R}{1 + R} \right)^2 \right].$$

Simplificando o termo entre colchetes abrindo os produtos notáveis, chegamos à forma enxuta:

$$(1 - e^2) \sin^2 i = \Sigma_0^2 \frac{R}{(1 + R)^2}.$$

Sabemos que  $\Sigma_0 = 1 + \sin^2 i - e^2(\sin^2 \omega + \sin^2 i \cos^2 \omega)$ . Agrupando os termos em função de  $\sin^2 i$ , podemos escrever  $\Sigma_0 = C_1 + C_2 \sin^2 i$ , onde definimos as constantes geométricas conhecidas:

$$C_1 = 1 - e^2 \sin^2 \omega, \quad C_2 = 1 - e^2 \cos^2 \omega.$$

Substituindo essa expressão na equação simplificada e definindo a variável  $x = \sin^2 i$ :

$$(1 - e^2)x = (C_1 + C_2 x)^2 \frac{R}{(1 + R)^2}.$$

Isolando o polinômio e definindo a constante auxiliar  $\Lambda = \frac{(1 - e^2)(1 + R)^2}{R}$ , obtemos:

$$(C_1 + C_2 x)^2 = \Lambda x.$$

Expandindo o quadrado e agrupando as potências, chegamos a uma equação quadrática exata para  $x$ :

$$C_2^2 x^2 + (2C_1 C_2 - \Lambda)x + C_1^2 = 0.$$

Como os parâmetros  $e$ ,  $\omega$  e  $R$  já foram determinados nas etapas anteriores, os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $\Lambda$  são puramente numéricos. Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos as raízes matemáticas para  $x$ . A raiz com significado físico deve obrigatoriamente satisfazer  $0 \leq x \leq 1$ . Tomando essa raiz, concluímos que:

$$\boxed{i = 45^\circ}.$$

(g) Os extremos da velocidade radial ocorrem para

$$\nu + \omega = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\nu + \omega = \frac{3\pi}{2}.$$

Substituindo esses valores na expressão geral da velocidade radial,

$$v_x = \frac{2\pi a \cos i}{P\sqrt{1 - e^2}} [e \sin \omega + \sin(\nu + \omega)],$$

segue que

$$v_{\max} = \frac{2\pi a \cos i}{P\sqrt{1-e^2}}(1 + e \sin \omega).$$

Aplicando o resultado às duas componentes do sistema,

$$v_{\max,1} = \frac{2\pi a_1 \cos i}{P\sqrt{1-e^2}}(1 + e \sin \omega),$$

$$v_{\max,2} = \frac{2\pi a_2 \cos i}{P\sqrt{1-e^2}}(1 + e \sin \omega).$$

Logo,

$$a_1 = \frac{v_{\max,1} P \sqrt{1-e^2}}{2\pi \cos i (1 + e \sin \omega)},$$

$$a_2 = \frac{v_{\max,2} P \sqrt{1-e^2}}{2\pi \cos i (1 + e \sin \omega)}.$$

Assim,

$$a_1 = 2.2 \text{ UA}, \quad a_2 = 4.5 \text{ UA}.$$

A terceira lei de Kepler fornece

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{GP^2}.$$

Além disso,

$$M_1 a_1 = M_2 a_2,$$

de modo que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Combinando as duas relações, obtém-se

$$M_1 = 2M_{\odot}, \quad M_2 = 1M_{\odot}.$$

Seja agora  $\alpha_{\text{proj}}$  o semi-eixo maior angular medido diretamente na projeção celeste. Pela aproximação de pequenos ângulos,

$$\alpha_{\text{proj}} = \frac{a_{\text{proj}}}{d} \Rightarrow d = 2.64 \text{ pc}.$$