
Instruções Gerais

1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
9. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74$ mag	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- 1ª Equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

- Densidade de entropia de um gás ideal:

$$s = nk_B \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{1}{n} \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right] \right)$$

- Forma polar da elipse:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

- Efeito Doppler relativístico:

$$1 + z = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

- Algumas integrais úteis:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

1. (10 pontos)

No esquema genérico abaixo, tanto a Terra quanto a Lua estão representadas pelos seus centros de massa, m_0 está posicionado no ponto L4 e "O" representa o baricentro do sistema Terra-Lua..

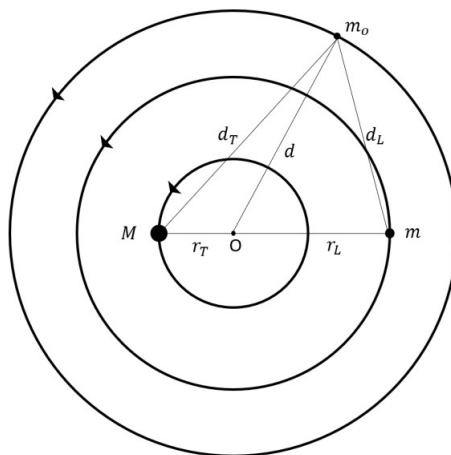


Figura 1: Esquema com Terra, Lua e massa de prova.

- Partindo da configuração genérica dada, demonstre qual é a posição do ponto L4 em relação ao sistema Terra-Lua, usando apenas argumentos matemáticos e físicos. Para tanto, calcule as distâncias d_T , d_L e d .
- A que distância do centro da Lua deve ficar o objeto no ponto L2? Assuma que essa distância é muito menor que $r_L + r_T$.

Adote as notações: M (massa da Terra), m (massa da Lua), r_T (distância Terra-baricentro do sistema) e r_L (distância Lua-baricentro). Use, se necessário, a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, válida quando $x \ll 1$ e para n positivo ou negativo.

Solução: (a) Demonstração da posição do ponto L_4 e cálculo das distâncias:

No problema dos três corpos restrito, analisamos o movimento de uma massa de prova m_0 desprezível sob a influência gravitacional de dois corpos massivos (M e m) que orbitam em torno do seu baricentro comum O com velocidade angular constante ω .

Para encontrar a posição de equilíbrio no referencial que gira junto com o sistema Terra-Lua, a força resultante sobre a massa de prova (composta pelas forças gravitacionais da Terra e da Lua mais a força centrífuga fictícia) deve ser nula.

Seja $R = r_T + r_L$ a distância total entre a Terra e a Lua. Pela definição de centro de massa (baricentro O), temos:

$$Mr_T = mr_L$$

Sabendo que $r_T = R - r_L$, obtemos:

$$r_T = \frac{m}{M+m}R \quad \text{e} \quad r_L = \frac{M}{M+m}R$$

A velocidade angular ω do sistema é dada pela Terceira Lei de Kepler modificada:

$$\omega^2 = \frac{G(M+m)}{R^3}$$

No referencial giratório com origem no baricentro O , a força centrífuga por unidade de massa sobre m_0 posicionada a uma distância d de O é $\omega^2 d$, direcionada radialmente para fora a partir de O . As forças gravitacionais por unidade de massa exercidas pela Terra e pela Lua sobre m_0 são, respectivamente:

$$f_T = \frac{GM}{d_T^2} \quad (\text{em direção à Terra } M)$$

$$f_L = \frac{Gm}{d_L^2} \quad (\text{em direção à Lua } m)$$

Para que o ponto seja de equilíbrio, a soma vetorial destas três forças deve ser nula:

$$\vec{f}_T + \vec{f}_L + \vec{f}_C = 0$$

Uma propriedade geométrica elegante dos pontos lagrangianos triangulares (L_4 e L_5) é que o equilíbrio de forças exige que a aceleração resultante da combinação das forças gravitacionais aponte exatamente para o baricentro O e tenha magnitude igual à aceleração centrífuga $\omega^2 d$.

Substituindo ω^2 :

$$f_C = \frac{G(M+m)}{R^3} d$$

Para que a combinação vetorial de $f_T \propto M/d_T^2$ e $f_L \propto m/d_L^2$ resulte em uma força central em direção a O proporcional a $(M+m)d/R^3$, a única solução geométrica possível para qualquer valor de M e m é que os vetores de distância formem um triângulo equilátero com a linha que une a Terra e a Lua. Isto é:

$$d_T = R = r_T + r_L$$

$$d_L = R = r_T + r_L$$

Vamos verificar esta solução: se $d_T = R$ e $d_L = R$, a força gravitacional da Terra é GM/R^2 e a da Lua é Gm/R^2 . Projetando as forças e aplicando a lei dos cossenos no triângulo formado por M , m e m_0 , confirma-se que a distância d de L_4 ao baricentro O é dada por:

$$d^2 = r_T^2 + r_L^2 - 2r_T r_L \cos(120^\circ) = r_T^2 + r_L^2 + r_T r_L$$

Podemos reescrever d em termos de r_T e r_L :

$$d = \sqrt{r_T^2 + r_L^2 + r_T r_L}$$

Portanto, as distâncias pedidas são:

$$d_T = r_T + r_L$$

$$d_L = r_T + r_L$$

$$d = \sqrt{r_T^2 + r_L^2 + r_T r_L}$$

Isso demonstra que o ponto L_4 forma um triângulo equilátero com a Terra e a Lua, estando rotacionado a 60° à frente da Lua em sua órbita.

(b) Determinação da distância do ponto L_2 ao centro da Lua:

O ponto L_2 está localizado na linha que une os dois corpos massivos, posicionado além do corpo de menor massa (a Lua), ou seja, à direita de m no diagrama linear. Seja r a distância do ponto L_2 ao centro da Lua. Assim, a distância de L_2 até o baricentro O é $d = r_L + r$, e a distância até a Terra é $d_T = R + r = r_T + r_L + r$.

No ponto L_2 , a força centrífuga aponta para fora (no mesmo sentido de afastamento do baricentro), a força gravitacional da Lua aponta para a esquerda (em direção à Lua) e a força gravitacional da Terra também aponta para a esquerda (em direção à Terra). Logo, a equação de equilíbrio de forças por unidade de massa é:

$$\omega^2(r_L + r) = \frac{GM}{(R + r)^2} + \frac{Gm}{r^2}$$

Substituindo $\omega^2 = \frac{G(M+m)}{R^3}$:

$$\frac{G(M+m)}{R^3}(r_L + r) = \frac{GM}{R^2(1 + r/R)^2} + \frac{Gm}{r^2}$$

Sabemos que $r_L = \frac{M}{M+m}R$. Vamos expandir o termo da esquerda:

$$\frac{G(M+m)}{R^3}r_L + \frac{G(M+m)}{R^3}r = \frac{GM}{R^2} + \frac{G(M+m)}{R^3}r$$

Substituindo isso na equação principal:

$$\frac{GM}{R^2} + \frac{G(M+m)}{R^3}r = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2} + \frac{Gm}{r^2}$$

Como nos é dado que $r \ll R$ ($r \ll r_L + r_T$), podemos aplicar a aproximação binomial sugerida: $(1+x)^n \approx 1 + nx$, onde $x = r/R$ e $n = -2$:

$$\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{2r}{R}$$

Substituindo a aproximação na igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{R^2} + \frac{G(M+m)}{R^3}r &\approx \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2r}{R}\right) + \frac{Gm}{r^2} \\ \frac{GM}{R^2} + \frac{GM}{R^3}r + \frac{Gm}{R^3}r &\approx \frac{GM}{R^2} - \frac{2GM}{R^3}r + \frac{Gm}{r^2} \end{aligned}$$

Cancelando o termo $\frac{GM}{R^2}$ de ambos os lados:

$$\frac{GM}{R^3}r + \frac{Gm}{R^3}r \approx -\frac{2GM}{R^3}r + \frac{Gm}{r^2}$$

Agrupando os termos que contêm M :

$$\frac{3GM}{R^3}r + \frac{Gm}{R^3}r \approx \frac{Gm}{r^2}$$

Como $m \ll M$, o termo $\frac{Gm}{R^3}r$ é desprezível em comparação com $\frac{3GM}{R^3}r$. Portanto, simplificamos para:

$$\frac{3GM}{R^3}r \approx \frac{Gm}{r^2}$$

Isolando r^3 :

$$r^3 \approx \frac{m}{3M}R^3$$

Tomando a raiz cúbica em ambos os lados, encontramos a distância r do ponto L_2 ao centro da Lua:

$$r \approx R \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}$$

Como $R = r_T + r_L$, a expressão final em termos das variáveis adotadas é:

$$r \approx (r_T + r_L) \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}$$

2. (10 pontos) Na figura do Analema abaixo, (a) identifique o hemisfério do observador, (b) trace o equador celeste e (iii) identifique cada um dos 4 pontos: Solstícios de junho e de dezembro, Equinócios de março e de setembro.

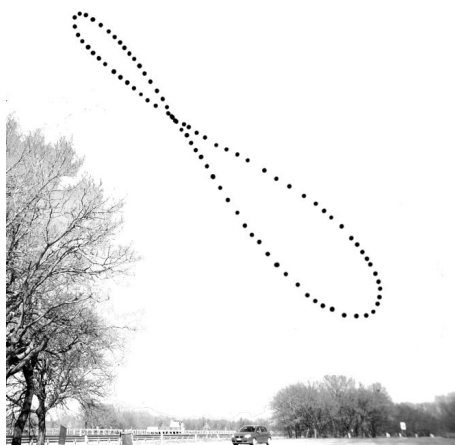
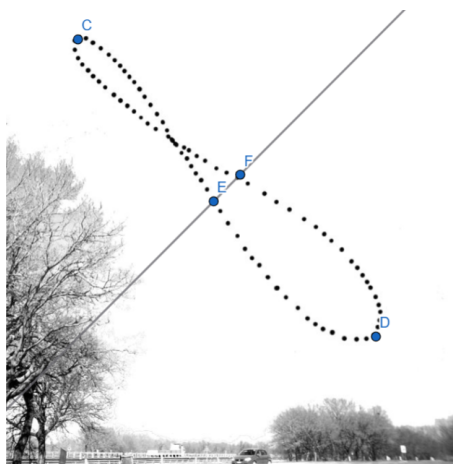


Figura 2: Analema

Solução:

O observador se encontra no hemisfério Norte, pois a "barriga" menor do analema está para cima, indicando que o ponto cardinal Norte está à esquerda na imagem, uma vez que a velocidade orbital da Terra é menor quando está próximo do solstício de Junho. Além disso, a seguir está a imagem do analema com os pontos de solstício de Junho (C), solstício de Dezembro (D), equinócio de Março (E) e equinócio de Setembro (F) e o equador celeste marcados.



3. (10 pontos) Considere um universo com $a \propto t^\gamma$, em que $\gamma \neq 0$. Dentro de uma galáxia distante, uma explosão de supernova lançou um jato de material diretamente para a Terra com uma velocidade v , medida em relação à galáxia, que é comparável à velocidade da luz c . Qual o redshift observado de uma luz emitida desse jato em t_1 e observada aqui na Terra em t_2 ?

Solução: O redshift total observado (z_{total}) de uma fonte em movimento dentro de uma galáxia distante que se afasta devido à expansão métrica do espaço é o resultado da combinação de dois efeitos independentes: o **redshift cosmológico** (z_c), gerado pela expansão do universo entre os instantes de emissão e observação, e o **redshift Doppler relativístico** (z_D), provocado pelo movimento próprio (peculiar) do jato em relação à sua galáxia hospedeira.

A relação multiplicativa entre os fatores de redshift é dada por:

$$1 + z_{\text{total}} = (1 + z_c)(1 + z_D)$$

O redshift devido puramente à expansão do tecido espaço-temporal depende da razão entre os fatores de escala do universo no momento da observação (t_2) e da emissão (t_1):

$$1 + z_c = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}$$

Dado que a lei de evolução do fator de escala é $a(t) \propto t^\gamma$, temos:

$$1 + z_c = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^\gamma$$

A luz é emitida por um jato de matéria que se move com velocidade relativa v *diretamente para a Terra* (aproximação) em relação à galáxia referencial. Pela formulação do efeito Doppler relativístico longitudinal para uma fonte que se aproxima do observador, o fator de deslocamento da frequência/comprimento de onda é:

$$1 + z_D = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

Combinando ambos os efeitos na equação multiplicativa fundamental:

$$1 + z_{\text{total}} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^\gamma \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

Isolando o valor de z_{total} pedido pelo enunciado:

$$z_{\text{total}} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^\gamma \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} - 1$$

$$z = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^\gamma \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} - 1$$

4. (10 pontos)

Considere um universo com $a \propto t^\gamma$, em que $\gamma \neq 0$. Suponha que nós estamos na galáxia A e enviamos em t_1 uma mensagem via ondas de rádio para uma civilização na galáxia B , que recebe essa mensagem em t_2 . Entretanto, após percebermos que tínhamos esquecido de traduzi-la, reenviamos a mensagem em $t_1 + \Delta t$, de tal forma que essa mensagem chega em B no instante t_3 . Assumindo que $\Delta t \ll t_1$, encontre $t_3 - t_2$.

Solução: Aqui, podemos perceber que a situação é similar à do redshift cosmológico, pois estamos interessados em comparar o tempo entre a emissão de dois pulsos e o tempo do recebimento desses

mesmos pulsos, não importando o fato de que são duas ondas diferentes. Para que o resultado seja o mesmo do redshift cosmológico, basta que $\Delta t \ll t_1$. Ou seja, emitir uma onda em t_1 e a outra em $t_1 + \Delta t$ (com $\Delta t \ll t_1$) é equivalente a emitir uma crista de onda em t_1 e a próxima em $t_1 + \Delta t$, em que Δt seria o período da onda na emissão e $t_3 - t_2$ o período da onda no recebimento. Da equação do redshift cosmológico, sabemos que:

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{t_3 - t_2}{\Delta t}$$

Como $a(t) = (t/t_0)^\gamma$, então:

$$t_3 - t_2 \approx \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^\gamma \Delta t \approx \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^\gamma \Delta t$$

Note que por ser uma aproximação em primeira ordem, ambas as respostas (com t_2 ou t_3 no numerador) são corretas. É possível chegar nesse mesmo resultado com a equação da distância comóvel, mas é necessário um desenvolvimento algébrico bem longo, portanto optamos por esse truque que se aproveita do resultado já conhecido do redshift cosmológico.

5. (10 pontos) O número do dia D é utilizado para medir a passagem do ano, de forma que $D = 1$ equivale ao dia 1 de Janeiro e, por exemplo, um $D = 33$ equivale ao dia 2 de Fevereiro. Assim, (i) encontre a data associada a um $D = 73$ em 2022 e (ii) determine quantos dias se passaram entre 17/2/2020 e 13/8/2021 (contando os dias dos extremos).

Solução: (i) Encontrar a data associada a $D = 73$ em 2022:

Primeiramente, devemos verificar se o ano de 2022 é bissexto. Como 2022 não é divisível por 4, trata-se de um ano comum de 365 dias, onde o mês de fevereiro possui 28 dias.

Contabilizando os dias dos meses em ordem cronológica:

- **Janeiro:** 31 dias. Restam: $73 - 31 = 42$ dias.
- **Fevereiro:** 28 dias. Restam: $42 - 28 = 14$ dias.

Como restam 14 dias para o mês seguinte, o dia correspondente é o dia **14 de Março de 2022**.

(ii) Determinar o número de dias entre 17/02/2020 e 13/08/2021 (inclusive):

O ano de 2020 é um ano bissexto (divisível por 4), portanto, o mês de fevereiro de 2020 possui 29 dias. Vamos dividir o cálculo em três partes:

1. **Dias restantes em 2020 (a partir de 17/02):**

- Fevereiro: $29 - 17 + 1 = 13$ dias (incluindo o dia 17).
- Março a Dezembro: $31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 306$ dias.
- Total em 2020: $13 + 306 = 319$ dias.

2. **Dias em 2021 (até 13/08):** O ano de 2021 é um ano comum (fevereiro tem 28 dias).

- Jan + Fev + Mar + Abr + Mai + Jun + Jul: $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 212$ dias.

- Agosto: 13 dias (incluindo o dia 13).
- Total em 2021: $212 + 13 = 225$ dias.

3. Total Geral:

$$319 \text{ dias (em 2020)} + 225 \text{ dias (em 2021)} = 544 \text{ dias}$$

Portanto, passaram-se **544 dias** entre as duas datas.

- 6. (20 pontos)** Considere uma nuvem de poeira uniformemente distribuída formada por grãos que possuem massa $m_P = 1000m_H$, onde m_H é a massa de um átomo de hidrogênio, e raio $r = 1,00 \mu\text{m}$. Sabe-se que a profundidade óptica para uma camada de 20 pc de espessura é $\tau = 1,00 \cdot 10^2$. Calcule a densidade (em m^{-3}) de partículas na nuvem.

Solução:

A profundidade óptica (τ) de uma camada de poeira está relacionada com a densidade numérica de partículas (n), a seção de choque geométrica das partículas (σ) e a espessura da camada (s) pela seguinte expressão:

$$\tau = n \cdot \sigma \cdot s$$

Para grãos de poeira esféricos com raio r , a seção de choque geométrica é dada pela área do seu círculo máximo:

$$\sigma = \pi \cdot r^2$$

Substituindo a expressão da seção de choque na fórmula da profundidade óptica, isolamos a densidade numérica de partículas (n):

$$n = \frac{\tau}{\pi \cdot r^2 \cdot s}$$

Antes de realizar os cálculos, devemos converter todas as grandezas para o Sistema Internacional de Unidades (SI):

- Raio do grão (r):

$$r = 1,00 \mu\text{m} = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

- Espessura da camada (s): Sabendo que $1 \text{ pc} \approx 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$, temos:

$$s = 20 \text{ pc} = 20 \cdot (3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}) = 6,172 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

- Profundidade óptica (τ):

$$\tau = 1,00 \cdot 10^2 = 100$$

Substituindo os valores convertidos na equação de n :

$$n = \frac{100}{\pi \cdot (1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2 \cdot (6,172 \cdot 10^{17} \text{ m})}$$

$$n = \frac{100}{\pi \cdot (1,00 \cdot 10^{-12}) \cdot (6,172 \cdot 10^{17})}$$

$$n = \frac{100}{1,939 \cdot 10^6}$$

$$n \approx 5,16 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-3}$$

(Nota: A informação sobre a massa dos grãos $m_P = 1000m_H$ é um dado extra e não é necessária para calcular a densidade numérica, sendo útil apenas caso fosse pedida a densidade de massa da nuvem).

Portanto, a densidade de partículas na nuvem é de aproximadamente $5,16 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-3}$.

7. (20 pontos)

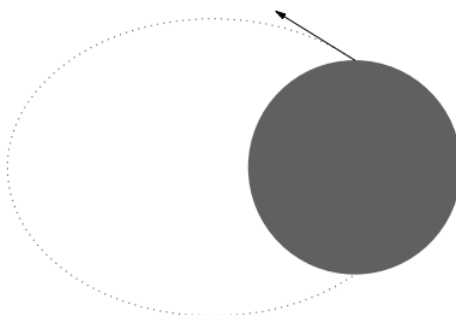


Figura 3: Míssil

Após hackers brasileiros descobrirem que a Rússia estava secretamente guardando a resolução do problema de N-corpos em um bunker no Polo Sul, cientistas russos decidem lançar um míssil balístico ao local para acabar com todos os vestígios de tal solução. O projétil é lançado do Polo Norte ao Polo Sul com $v_0 = 2200 \text{ m/s}$ em um planeta Terra alternativo de massa $M = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ e raio $R = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$. Assim, encontre o tempo de voo.

Dica: você não precisa de um computador

Solução:

A trajetória do míssil será uma elipse com um foco no centro da Terra. Por propriedade da elipse, se dois de seus pontos são equidistantes de um determinado foco, então a mediatriz desses pontos é o eixo de simetria da elipse. Como o míssil viaja do Polo Norte ao Polo Sul, os pontos de lançamento e impacto são simétricos e a reta que os une passa pelo foco (centro do planeta). Portanto, essa corda perpendicular ao eixo maior é o próprio *latus rectum* da elipse.

Pela equação vis-viva:

$$v^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{v_0^2}{G \cdot M}$$

Utilizando $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{1,7 \cdot 10^6} - \frac{2200^2}{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}} \approx 1,176 \cdot 10^{-6} - 0,980 \cdot 10^{-6} = 0,196 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

$$a \approx 5,11 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Conhecemos o *semi-latus-rectum*:

$$l = R$$

$$a \cdot (1 - e^2) = R$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{R}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{1,7 \cdot 10^6}{5,11 \cdot 10^6}} \approx 0,817$$

Primeiramente, vamos calcular a área correspondente no círculo auxiliar de raio a (área de um setor circular somada à área de dois triângulos retângulos formados entre o centro e o foco):

$$A_c = \pi \cdot a^2 \cdot \frac{2 \cdot \pi - 2 \cdot \cos^{-1}(e)}{2 \cdot \pi} + 2 \cdot \frac{a^2 \cdot e \cdot \sqrt{1 - e^2}}{2}$$

$$A_c = a^2 \cdot \left(\pi - \cos^{-1}(0,817) + 0,817 \cdot \sqrt{1 - 0,817^2} \right)$$

Como $\cos^{-1}(0,817) \approx 0,615$ rad:

$$A_c = a^2 \cdot (3,142 - 0,615 + 0,817 \cdot 0,577) \approx 2,998 \cdot a^2$$

Perceba que, se multiplicarmos uma das escalas da nossa figura por $\sqrt{1 - e^2}$, obtemos exatamente a figura cuja área varrida pelo míssil desejamos calcular. Nesse caso, em um argumento por cálculo, se imaginarmos as figuras compostas por uma grade de inúmeros retângulos, ao multiplicar apenas uma das dimensões pelo fator, a área de cada retângulo é multiplicada pelo mesmo, ocorrendo o mesmo para a figura como um todo. Sendo assim:

$$A = A_c \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

Por fim, encontramos o tempo de voo (t) em função da área por meio da segunda e terceira leis de Kepler, relacionando o período total T com a razão entre as áreas:

$$t = \frac{A}{\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}}$$

Substituindo $A = A_c \cdot \sqrt{1 - e^2}$, o termo geométrico $\sqrt{1 - e^2}$ simplifica-se perfeitamente:

$$t = \frac{A_c}{\pi \cdot a^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}} = 2 \cdot \left(\frac{A_c}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}}$$

$$t \approx 2 \cdot 2,998 \cdot \sqrt{\frac{(5,11 \cdot 10^6)^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}} \approx 5,996 \cdot 5192,3 \approx 31133 \text{ s}$$

$$t \approx 8,65 \text{ horas}$$

8. (20 pontos)

Vamos analisar algumas condições de observabilidade de um eclipse solar alternativo no qual o Sol está infinitamente distante e suas coordenadas equatoriais são iguais às da Lua.

- (a) (5 pontos) Sabendo que a declinação da Lua é 20° , encontre a maior e a menor latitude de um observador terrestre que não consegue ver o Sol.
- (b) (5 pontos) Calcule a diferença de longitude dos observadores mais à leste e oeste que não conseguem ver o Sol.

Solução: (10 pontos)

- (a) O enunciado afirma que o Sol está infinitamente afastado da Terra. Isto implica que os raios solares que atingem o sistema Terra-Lua são perfeitamente paralelos. Consequentemente, a sombra projetada pela Lua não forma um cone de umbra convencional (que afunila até um vértice), mas sim um **cilindro perfeito** cujo raio é exatamente igual ao raio físico da Lua, $R_L = 1737$ km.

Para determinar a região da Terra afetada pela umbra, projetamos este cilindro sobre a superfície terrestre. O centro da sombra está alinhado com a posição da Lua, que se encontra a uma latitude de $\phi_0 = 20^\circ\text{N}$.

O tamanho angular da região de sombra na superfície da Terra, visto a partir do centro do nosso planeta, depende do raio da Terra ($R_\oplus \approx 6371$ km) e do raio da sombra (R_L). O ângulo zenital máximo α da borda da sombra em relação ao centro da projeção é dado por:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R_L}{R_\oplus}\right)$$

Substituindo os valores numéricos da tabela de constantes:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1737 \cdot 10^3}{6,38 \cdot 10^6}\right) \approx \arcsin(0,2722) \approx 15,8^\circ$$

Como a sombra está centrada na latitude $\phi_0 = 20^\circ\text{N}$ e o movimento orbital se dá ao longo do equador/paralelo (desprezando inclinações secundárias para os limites extremos), a faixa de latitude delimitada pela umbra estende-se de:

$$\phi_{\min} = \phi_0 - \alpha = 20^\circ - 15,8^\circ = 4,2^\circ\text{N}$$

$$\phi_{\max} = \phi_0 + \alpha = 20^\circ + 15,8^\circ = 35,8^\circ\text{N}$$

Portanto, as latitudes máxima e mínima da Terra que verão o eclipse total são, respetivamente, **$35,8^\circ\text{N}$** e **$4,2^\circ\text{N}$** .

- (b) Para calcular a amplitude de longitude ($\Delta\lambda$) afetada simultaneamente pela umbra num instante fixo ao longo do paralelo de latitude $\phi_0 = 20^\circ\text{N}$, devemos analisar a interseção do cilindro de sombra com a esfera terrestre a essa altura.

A interseção de um cilindro de raio R_L com uma esfera gera uma curva projetada. Na latitude de centro ϕ_0 , o raio do paralelo terrestre (distância da superfície ao eixo de rotação da Terra) é:

$$r_p = R_\oplus \cdot \cos(\phi_0)$$

A corda linear que atravessa a sombra horizontalmente na altura máxima da projeção corresponde ao diâmetro do cilindro de sombra, ou seja, $2R_L$. A relação geométrica para o arco de longitude angular $\Delta\lambda$ coberto por esta corda linear sobre o círculo do paralelo é:

$$2R_L = 2r_p \cdot \sin\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

Isolando $\Delta\lambda$:

$$\sin\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \frac{R_L}{R_{\oplus} \cdot \cos(\phi_0)}$$

Substituindo os valores conhecidos ($\phi_0 = 20^\circ$):

$$\sin\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \frac{1737 \cdot 10^3}{6,38 \cdot 10^6 \cdot \cos(20^\circ)} = \frac{1737 \cdot 10^3}{6,38 \cdot 10^6 \cdot 0,9397} \approx \frac{1737 \cdot 10^3}{5,995 \cdot 10^6} \approx 0,2897$$

Calculando o arco angular:

$$\frac{\Delta\lambda}{2} = \arcsin(0,2897) \approx 16,84^\circ$$

$$\Delta\lambda \approx 33,7^\circ$$

Assim, a diferença máxima de longitude entre dois pontos na mesma latitude que estão dentro da umbra ao mesmo tempo é de aproximadamente **33,7°**.

9. (30 pontos) O astrocuroioso Kotoma quer saber a temperatura de uma estrela conhecida como 3, porém precisa trabalhar um pouco com alguns dados. Ele sabe que a estrela 1 tem índice de cor intrínseco $(B - V)_{0,1} = 0,4$ mag e temperatura $T_1 = 6880$ K e a estrela 2 tem $(B - V)_{0,2} = 0,8$ mag e $T_2 = 5280$ K. Também, tinha a informação de que para sua estrela 3 $(B - V)_3 = 0,66$ mag e a distância era $d_3 = 314$ pc. Qual foi a temperatura encontrada por Kotoma? Considere que para a posição do corpo luminoso no céu, $a_V = 1,00$ mag/kpc, $\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0$ e a relação entre o índice de cor intrínseco e a temperatura é linear para $0,4 \leq (B - V)_0 \leq 0,8$.

Solução:

O problema pode ser dividido em duas etapas principais: determinar o índice de cor intrínseco $(B - V)_{0,3}$ da estrela 3 (corrigindo o efeito da extinção interestelar) e, em seguida, utilizar a relação linear entre o índice de cor intrínseco e a temperatura para encontrar T_3 .

—

Passo 1: Corrigindo o índice de cor da Estrela 3 devido à extinção interestelar

A relação entre o índice de cor observado $(B - V)$ e o intrínseco $(B - V)_0$ é dada pelo excesso de cor E_{B-V} :

$$(B - V) = (B - V)_0 + E_{B-V}$$

Sabemos que a razão entre a extinção na banda V (A_V) e o excesso de cor é $\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0$. Logo:

$$E_{B-V} = \frac{A_V}{3,0}$$

A extinção total A_V depende da distância da estrela d_3 e do coeficiente de extinção por unidade de distância ($a_V = 1,00$ mag/kpc). Como a distância é dada em parsecs ($d_3 = 314$ pc = $0,314$ kpc), temos:

$$A_V = a_V \cdot d_3 = 1,00 \text{ mag/kpc} \cdot 0,314 \text{ kpc} = 0,314 \text{ mag}$$

Agora, calculamos o excesso de cor E_{B-V} :

$$E_{B-V} = \frac{0,314}{3,0} \approx 0,1047 \text{ mag}$$

Substituindo na fórmula do índice de cor observado da estrela 3 para encontrar o intrínseco:

$$(B - V)_{0,3} = (B - V)_3 - E_{B-V} = 0,66 - 0,1047 = 0,5553 \text{ mag}$$

—

Passo 2: Determinar a temperatura através da interpolação linear

O enunciado afirma que a relação entre $(B - V)_0$ e T é linear no intervalo considerado. Como o valor $(B - V)_{0,3} = 0,5553 \text{ mag}$ está contido entre 0,4 e 0,8, podemos aproximar a relação por uma reta que passa pelos pontos das estrelas 1 e 2:

$$\frac{T_3 - T_1}{(B - V)_{0,3} - (B - V)_{0,1}} = \frac{T_2 - T_1}{(B - V)_{0,2} - (B - V)_{0,1}}$$

Substituindo os dados das estrelas 1 e 2:

$$\frac{T_3 - 6880}{0,5553 - 0,4} = \frac{5280 - 6880}{0,8 - 0,4}$$

$$\frac{T_3 - 6880}{0,1553} = \frac{-1600}{0,4}$$

$$\frac{T_3 - 6880}{0,1553} = -4000$$

Isolando T_3 :

$$T_3 - 6880 = -4000 \cdot 0,1553$$

$$T_3 - 6880 = -621,2$$

$$T_3 = 6880 - 621,2 = 6258,8 \text{ K}$$

Portanto, a temperatura encontrada por Kotoma para a estrela 3 foi de aproximadamente 6259 K.

10. (30 pontos)

Prove a equação da magnitude limite de um telescópio refletor de diâmetro D , em mm (magnitude limite do olho humano é 6 e diâmetro da pupila é 6 mm). Caso um dos espelhos tenha refletividade de 98%, qual seria a nova expressão da magnitude limite?

Solução: (10 pontos)

Parte 1: Provando a equação da magnitude limite convencional

A magnitude limite de um instrumento óptico depende da sua capacidade de coletar luz em comparação com o olho humano. A razão entre o fluxo luminoso coletado pelo telescópio (F_t) e pelo olho (F_o) é diretamente proporcional à razão de suas áreas coletoras (diâmetros D e D_o , respectivamente):

$$\frac{F_t}{F_o} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi D_o^2}{4}} = \left(\frac{D}{D_o} \right)^2$$

Utilizando a equação de Pogson para a diferença de magnitudes entre a magnitude limite do teles-

cópio (m_t) e a magnitude limite do olho (m_o):

$$m_t - m_o = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_o}{F_t} \right) = 2,5 \log_{10} \left(\frac{F_t}{F_o} \right)$$

Substituindo a razão das áreas:

$$m_t - m_o = 2,5 \log_{10} \left(\frac{D}{D_o} \right)^2 = 5 \log_{10} \left(\frac{D}{D_o} \right)$$

Substituindo os dados fornecidos para o olho humano ($m_o = 6$ e $D_o = 6$ mm):

$$m_t - 6 = 5 \log_{10} \left(\frac{D}{6} \right)$$

$$m_t = 6 + 5 \log_{10}(D) - 5 \log_{10}(6)$$

Como $5 \log_{10}(6) \approx 5 \cdot 0,77815 = 3,89$, temos:

$$m_t = 6 - 3,89 + 5 \log_{10}(D)$$

$$m_t = 2,11 + 5 \log_{10}(D) \quad (\text{com } D \text{ em mm})$$

Parte 2: Nova expressão considerando a refletividade de 98%

Se um dos espelhos possui uma refletividade de $\eta = 98\% = 0,98$, apenas 98% da luz incidente é aproveitada pelo instrumento. Portanto, a nova razão de fluxos será multiplicada por essa eficiência:

$$\frac{F'_t}{F_o} = \eta \cdot \left(\frac{D}{D_o} \right)^2 = 0,98 \cdot \left(\frac{D}{D_o} \right)^2$$

Aplicando novamente a equação de Pogson:

$$m'_t - 6 = 2,5 \log_{10} \left(0,98 \cdot \left(\frac{D}{6} \right)^2 \right)$$

$$m'_t - 6 = 2,5 \log_{10}(0,98) + 5 \log_{10} \left(\frac{D}{6} \right)$$

Sabendo que $2,5 \log_{10}(0,98) \approx 2,5 \cdot (-0,00877) \approx -0,022$, e reaproveitando o desenvolvimento anterior para o termo do diâmetro:

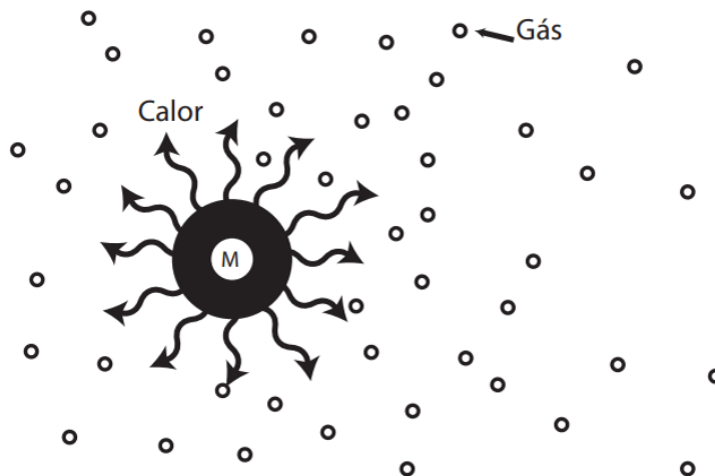
$$m'_t = 6 - 0,022 - 3,89 + 5 \log_{10}(D)$$

$$m'_t = 2,09 + 5 \log_{10}(D)$$

- 11. Modela Aí: Gravidade Entrópica (60 pontos)** Desde os resultados fundamentais de Hawking sobre a entropia e a temperatura associadas a buracos negros, a termodinâmica relativística e a termodinâmica do espaço-tempo vêm se tornando áreas centrais da física teórica moderna.

Um conceito central neste modelo é o de força termodinâmica. Diferentemente de forças fundamentais, essa força emerge de variações espaciais de grandezas termodinâmicas. Adotaremos a interpretação de que toda variação de energia associada a mudanças entrópicas no meio; isto é, transferências de calor; pode ser efetivamente descrita como o trabalho realizado por uma força mecânica equivalente.

Assumiremos que o sistema encontra-se em regime estático, de modo que não há escoamento macroscópico do meio. O vácuo será modelado como um gás ideal monoatômico efetivo, em equilíbrio local, com densidade numérica constante n , atuando como um reservatório térmico contínuo. Esse meio será descrito por um campo de temperatura $T(\vec{r})$ e por uma densidade de entropia $s(\vec{r})$.



- (a) **(12 pontos)** Considere uma densidade de força termodinâmica $\vec{f}$ associada a variações espaciais da densidade de entropia do meio. Mostre que tal força pode ser escrita na forma

$$\vec{f} = T \nabla s,$$

onde T representa a temperatura local do sistema.

- (b) **(6 pontos)** Considere agora o vácuo como um gás ideal monoatômico efetivo em equilíbrio local, com densidade numérica constante n . Utilizando a expressão da densidade de entropia de Sackur-Tetrode, obtenha uma expressão para $\vec{f}$ em função de T , n e ∇T .

Considere agora um corpo pontual de massa M_1 , em repouso, imerso no vácuo termodinâmico descrito anteriormente. Assuma que o sistema possui simetria esférica e encontra-se em regime estacionário, de modo que o fluxo de calor seja puramente radial. Suponha que o corpo atue como uma fonte térmica, transferindo energia ao vácuo com potência total igual a $-\gamma M_1$, onde γ é uma constante positiva característica do meio.

- (c) **(16 pontos)** Admitindo que o transporte de calor no vácuo obedeça à lei de Fourier, com condutividade térmica constante k , determine uma expressão para $\vec{f}$ a uma distância r do corpo. Expresse sua resposta em função de M_1 , γ , n , k e r .

Agora considere a presença de um segundo corpo pontual, de massa M_2 , separado de M_1 por uma distância R . Suponha que o campo de temperatura do vácuo obedeça ao princípio da superposição linear, de modo que a temperatura total seja dada pela soma das contribuições individuais de cada corpo. Assuma ainda que o corpo M_1 ocupe um volume efetivo de vácuo

$$V_1 = \frac{M_1}{\mu n},$$

onde μ representa a massa efetiva associada aos graus de liberdade microscópicos do meio. A força total sobre M_1 deve ser obtida pela integração da densidade de força termodinâmica sobre esse volume efetivo.

- (d) **(26 pontos)** Seja $\vec{R}$ o vetor que aponta de M_1 para M_2 . Determine a força termodinâmica resultante $\vec{F}_1$ exercida sobre M_1 em função de M_1 , M_2 , γ , μ e $\vec{R}$.

Solução:

- (a) Pela primeira lei da termodinâmica, uma variação de energia associada a uma transformação puramente entrópica pode ser escrita como

$$dQ = T dS.$$

Por outro lado, identificando essa transferência de energia com o trabalho realizado por uma densidade de força efetiva,

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Assumindo que a força atua paralelamente ao gradiente de entropia,

$$d\vec{r} = dr \hat{r}.$$

Logo,

$$\vec{f} \cdot \hat{r} dr = T dS.$$

Dividindo por dr ,

$$\vec{f} \cdot \hat{r} = T \frac{dS}{dr}.$$

Como $\vec{f}$ é paralelo a $\hat{r}$,

$$\boxed{\vec{f} = T \nabla s}.$$

- (b) A densidade de entropia de um gás ideal monoatômico é dada pela expressão de Sackur-Tetrode:

$$s = nk_B \left[\frac{5}{2} + \ln \left(\frac{1}{n} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right) \right].$$

Como n é constante, apenas a dependência térmica contribui para o gradiente:

$$\nabla s = \frac{3}{2} nk_B \frac{\nabla T}{T}.$$

Substituindo no resultado do item anterior:

$$\vec{f} = T \nabla s = \frac{3}{2} nk_B \nabla T.$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{f} = \frac{3}{2} nk_B \nabla T}.$$

- (c) Em regime estacionário e com simetria esférica, o fluxo de calor através de qualquer esfera de raio r deve ser constante. Pela lei de Fourier,

$$\vec{\Phi}_Q = -k \nabla T.$$

A potência total que atravessa uma superfície esférica é

$$P = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

Como o corpo fornece potência térmica total $-\gamma M_1$,

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = -\gamma M_1.$$

Logo,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma M_1}{4\pi k r^2}.$$

Como a temperatura decresce radialmente,

$$\nabla T = -\frac{\gamma M_1}{4\pi k r^2} \hat{r}.$$

Substituindo na expressão da densidade de força:

$$\vec{f} = \frac{3}{2} n k_B \nabla T.$$

Assim,

$$\vec{f} = -\frac{3}{2} \frac{\gamma k_B n}{4\pi k} \frac{M_1}{r^2} \hat{r}.$$

(d) Pelo princípio da superposição linear,

$$T = T_1 + T_2.$$

A contribuição produzida por M_1 sobre si mesma não gera força resultante, pois o campo possui simetria esférica completa. Portanto, apenas o gradiente térmico produzido por M_2 contribui para a força total sobre M_1 . A densidade de força produzida por M_2 a uma distância r é

$$\vec{f}_2 = -\frac{3}{2} \frac{\gamma k_B n}{4\pi k} \frac{M_2}{r^2} \hat{r}.$$

A força total sobre M_1 é obtida integrando essa densidade sobre o volume efetivo ocupado pelo corpo:

$$\vec{F}_1 = \int_{V_1} \vec{f}_2 dV.$$

Logo,

$$\vec{F}_1 = -\frac{3}{2} \frac{\gamma k_B n M_2}{4\pi k} \int_{V_1} \frac{\hat{r}}{r^2} dV.$$

A integral vetorial acima é formalmente idêntica ao cálculo do campo gravitacional gerado por uma esfera homogênea observado externamente. Pelo teorema da casca esférica,

$$\int_{V_1} \frac{\hat{r}}{r^2} dV = -\frac{V_1}{R^3} \vec{R}.$$

Substituindo,

$$\vec{F}_1 = \frac{3}{2} \frac{\gamma k_B n M_2}{4\pi k} \frac{V_1}{R^3} \vec{R}.$$

Como

$$V_1 = \frac{M_1}{\mu n},$$

segue que

$$\vec{F}_1 = \frac{3}{2} \frac{\gamma k_B}{4\pi k\mu} \frac{M_1 M_2}{R^3} \vec{R}.$$

Observação: Perceba que essa força termodinâmica é análoga à gravidade newtoniana, sendo G expressa em função de constantes microscópicas do vácuo, como k_B , γ e μ . Ou seja, neste modelo simplificado, a atração gravitacional emerge como um efeito entrópico associado à tendência do meio em maximizar sua entropia.

Observação histórica: Em 1995, Ted Jacobson demonstrou no artigo “*Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*” que, considerando o espaço-tempo como um fluido termodinâmico, as equações de campo de Einstein surgem como uma espécie de equação de estado desse fluido. Assim, a relatividade geral pode ser vista como uma consequência termodinâmica de propriedades locais do espaço-tempo, em vez de uma força fundamental imposta à estrutura do universo. Mais recentemente, em 2011, Erik Verlinde propôs no artigo “*On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*” que a gravidade pode ser interpretada como uma *força entrópica* decorrente de mudanças na informação (entropia) associada às posições de corpos materiais, num cenário holográfico onde o espaço é emergente. Parte-se de princípios termodinâmicos e do princípio holográfico para mostrar heurísticamente que a força gravitacional e as leis de Newton emergem naturalmente dessa tendência entropicamente favorável. No ano de 2025, em um novo artigo intitulado “*On the Quantum Mechanics of Entropic Forces*” os autores constroem modelos quânticos microscópicos em que a atração gravitacional surge como uma força entrópica resultante da extremização da energia livre de um conjunto de osciladores. Eles discutem possíveis maneiras de distinguir esses cenários emergentes da gravidade quântica perturbativa convencional por meio de observações e experimentos. Vale notar que a área de gravidade emergente e forças entrópicas está extremamente ativa atualmente e promete grandes descobertas, conectando conceitos fundamentais de diferentes ramos da física. Pesquisas recentes buscam unificar a relatividade geral, princípios holográficos e mecânica quântica, mostrando como propriedades puramente termodinâmicas e de informação do espaço-tempo podem gerar efeitos gravitacionais.

- 12. A Geometria da Vingança (70 pontos)** Na calada da noite, enquanto satélites observavam silenciosamente a superfície azul da Terra, duas potências, Bibucha e Brasil, decidiram mais uma vez resolver suas diferenças da maneira mais questionável possível: uma disputa de ego envolvendo foguetes absurdamente avançados.

Bibucha, sem hesitar, lança seu projétil supremo, o Fallus U: Desejo de uma Vingança Brutal II, a partir do ponto inicial no equador ($\phi = 0, \lambda = 0$). Seu movimento é impecável: ele percorre a linha do equador com velocidade angular constante ω , seguindo sempre a geodésica perfeita.

Do outro lado, o Bibrasil responde com seu orgulho nacional, o Fallus A: O Vingador Brutal da Vingança IV, lançado a partir de uma posição inicial arbitrária no hemisfério norte (ϕ_0, λ_0). Seu sistema de guiagem é brutal e implacável: ele mantém o módulo da sua velocidade angular estritamente constante em $v = k\omega$ (onde k é uma constante positiva), mas com a regra de que o seu vetor velocidade aponta, a todo instante, na direção da geodésica que liga sua posição atual à posição instantânea do Fallus U.

Parte I: A Anatomia da Trajetória

Para entender o movimento do Fallus A, precisamos construir suas equações de variação passo a passo, utilizando a geometria esférica pura. Seja s a distância angular instantânea entre o Fallus A e o Fallus U. Sendo a defasagem longitudinal entre os projéteis definida como $\Delta\lambda = \omega t - \lambda$, e o azimuth α o ângulo entre o meridiano local do Fallus A e a geodésica que o conecta ao alvo, resolva:

- (a) **(6 pontos)** Prove as seguintes relações geométricas:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \Delta \lambda}{\sin s}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \phi \cos \Delta \lambda}{\sin s}$$

- (b) **(12 pontos)** Prove que as taxas de variação cinemáticas são dadas por:

$$\dot{\phi} = -k\omega \cos \alpha$$

$$\Delta \dot{\lambda} = \omega - k\omega \frac{\sin \alpha}{\cos \phi}$$

- (c) **(22 pontos)** Para encontrar a trajetória puramente geométrica do Fallus A, divida as equações anteriores para eliminar o tempo t . Em seguida, definindo as variáveis auxiliares $u = \sin \phi$ e $v = \cos \phi \sin \Delta \lambda$, manipule a equação diferencial resultante para provar que ela assume a elegante forma homogênea:

$$k(u dv - v du) = -\sin s du$$

- (d) **(16 pontos)** A partir da equação diferencial do item anterior, prove que a trajetória do projétil obedece à seguinte constante de movimento K :

$$\sin^{1-k} \phi (\sin s + \cos \phi \sin \Delta \lambda)^k = K$$

Parte II: O Destino da Perseguição

Com a métrica da trajetória cristalizada na constante de movimento K , os engenheiros balísticos precisam prever o desfecho da interceptação. O destino do Fallus A depende exclusivamente da relação de velocidades k . Considere as condições iniciais do lançamento como ϕ_0, λ_0 e s_0 , as quais definem o valor numérico da constante inicial K_0 .

- (e) **(6 pontos)** Para o caso onde $k = 1$, prove que a perseguição nunca se completa em tempo finito e o Fallus A espirala assintoticamente em direção ao equador ($\phi \rightarrow 0$). Calcule a defasagem longitudinal assintótica $\Delta \lambda_\infty$ entre os dois projéteis no limite $t \rightarrow \infty$ em função de K_0 .
- (f) **(8 pontos)** Se o Fallus A for mais lento, a interceptação é impossível. Demonstre que as latitudes extremas atingidas pelo projétil (a máxima ϕ_{max} e a mínima ϕ_{min}) são as raízes da seguinte equação implícita:

$$K_0 = \sin^{1-k} \phi (1 \pm \cos \phi)^k$$

Solução:

- (a) Observe o seguinte triângulo esférico que é fácil ver que:

Pela Lei dos Senos Esférica:

$$\frac{\sin(90^\circ)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin s}{\sin \Delta \lambda} \implies \boxed{\sin \alpha = \frac{\sin \Delta \lambda}{\sin s}}$$

Pela Lei dos Cossenos Esférica para os lados:

$$\cos(90^\circ) = \cos(90^\circ - \phi) \cos s + \sin(90^\circ - \phi) \sin s \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$0 = \sin \phi \cos s - \cos \phi \sin s \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{\sin \phi \cos s}{\cos \phi \sin s}$$

Como $\cos s = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ) \cos \Delta\lambda \implies \cos s = \cos \phi \cos \Delta\lambda$.
Substituindo $\cos s$ na relação do $\cos \alpha$, obtemos:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \phi \cos \Delta\lambda}{\sin s}$$

- (b) As componentes da velocidade na superfície da esfera são $v_\phi = R\dot{\phi}$ e $v_\lambda = R \cos \phi \dot{\lambda}$. O Fallus A aponta para o alvo com velocidade escalar constante $k\omega R$ no azimute α .

Para a latitude (movimento em direção ao equador requer derivada negativa):

$$v_\phi = -k\omega R \cos \alpha \implies \dot{\phi} = -k\omega \cos \alpha$$

Para a longitude:

$$v_\lambda = k\omega R \sin \alpha \implies R \cos \phi \dot{\lambda} = k\omega R \sin \alpha \implies \dot{\lambda} = k\omega \frac{\sin \alpha}{\cos \phi}$$

Como a defasagem é $\Delta\lambda = \omega t - \lambda$, derivando no tempo temos $\Delta\dot{\lambda} = \omega - \dot{\lambda}$. Logo:

$$\Delta\dot{\lambda} = \omega - k\omega \frac{\sin \alpha}{\cos \phi}$$

- (c) Dividindo $\Delta\dot{\lambda}$ por $\dot{\phi}$ para eliminar dt :

$$\frac{d(\Delta\lambda)}{d\phi} = \frac{\omega - k\omega \frac{\sin \alpha}{\cos \phi}}{-k\omega \cos \alpha} = \frac{\cos \phi - k \sin \alpha}{-k \cos \phi \cos \alpha}$$

Substituindo as relações do item (a), $\sin \alpha = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin s}$ e $\cos \alpha = \frac{\sin \phi \cos \Delta\lambda}{\sin s}$:

$$\frac{d(\Delta\lambda)}{d\phi} = \frac{k \sin \Delta\lambda - \cos \phi \sin s}{k \sin \phi \cos \phi \cos \Delta\lambda}$$

Multiplicando cruzado e separando os termos:

$$k[\sin \phi \cos \phi \cos \Delta\lambda d(\Delta\lambda) - \sin \Delta\lambda d\phi] = -\cos \phi \sin s d\phi$$

Sendo $u = \sin \phi$ e $v = \cos \phi \sin \Delta\lambda$, calculamos as diferenciais:

$$du = \cos \phi d\phi$$

$$dv = -\sin \phi \sin \Delta\lambda d\phi + \cos \phi \cos \Delta\lambda d(\Delta\lambda)$$

Calculando $u dv - v du$:

$$u dv - v du = \sin \phi (-\sin \phi \sin \Delta\lambda d\phi + \cos \phi \cos \Delta\lambda d(\Delta\lambda)) - \cos \phi \sin \Delta\lambda (\cos \phi d\phi)$$

$$u dv - v du = \sin \phi \cos \phi \cos \Delta\lambda d(\Delta\lambda) - (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \sin \Delta\lambda d\phi$$

Note que essa expressão é idêntica ao termo entre colchetes da EDO. Do lado direito da EDO, temos $-\cos \phi \sin s d\phi = -\sin s du$. Substituindo ambas as partes, provamos a relação:

$$k(u dv - v du) = -\sin s du$$

(d) Dividindo a equação homogênea do item (c) por u^2 :

$$k \left(\frac{u dv - v du}{u^2} \right) = -\frac{\sin s}{u^2} du \implies k d \left(\frac{v}{u} \right) = -\frac{\sin s}{u^2} du$$

Usando as relações do item (a), sabemos que:

$$\sin^2 s = 1 - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta\lambda = 1 - \cos^2 \phi (1 - \sin^2 \Delta\lambda) = \sin^2 \phi + (\cos \phi \sin \Delta\lambda)^2$$

Logo, $\sin^2 s = u^2 + v^2 \implies \sin s = \sqrt{u^2 + v^2}$. Substituindo:

$$k d \left(\frac{v}{u} \right) = -\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{1 + (v/u)^2}}{u} du$$

Seja $w = v/u$. A equação se torna separável:

$$\frac{k dw}{\sqrt{1 + w^2}} = -\frac{du}{u}$$

Integrando ambos os lados com as tabelas fornecidas:

$$k \ln \left(w + \sqrt{1 + w^2} \right) = -\ln(u) + \ln(K)$$

Desfazendo a substituição $w = v/u$ e lembrando que $\sqrt{1 + (v/u)^2} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u} = \frac{\sin s}{u}$:

$$k \ln \left(\frac{v + \sin s}{u} \right) = \ln \left(\frac{C}{u} \right) \implies \left(\frac{v + \sin s}{u} \right)^k = \frac{K}{u}$$

$$(v + \sin s)^k u^{1-k} = K$$

Finalmente, substituindo $u = \sin \phi$ e $v = \cos \phi \sin \Delta\lambda$, chegamos à constante de movimento da trajetória:

$$\boxed{\sin^{1-k} \phi (\sin s + \cos \phi \sin \Delta\lambda)^k = K}$$

(e) Se $k = 1$, a constante de movimento simplifica para o expoente $1 - k = 0$, restando:

$$K_0 = \sin s + \cos \phi \sin \Delta\lambda$$

No limite $t \rightarrow \infty$, se o Fallus A se aproxima assintoticamente do alvo que vive no equador, sua latitude tende a zero. No equador, a distância angular s torna-se idêntica à diferença de longitude, logo $s \rightarrow \Delta\lambda_\infty$. Substituindo na constante:

$$K_0 = \sin(\Delta\lambda_\infty) + (1) \sin(\Delta\lambda_\infty) = 2 \sin(\Delta\lambda_\infty)$$

Isolando a defasagem final, provamos que ela "congela" num valor constante:

$$\boxed{\Delta\lambda_\infty = \arcsin \left(\frac{K_0}{2} \right)}$$

(f) Quando o projétil perseguidor é mais lento que o alvo, isto é, $k < 1$, a interceptação torna-se impossível. Como o movimento permanece restrito a uma faixa de latitudes, os extremos da trajetória ocorrem nos pontos onde

$$\dot{\phi} = 0.$$

Pelo item (b),

$$\dot{\phi} = -k\omega \cos \alpha.$$

Logo, os extremos de latitude satisfazem

$$\cos \alpha = 0.$$

Usando a relação geométrica obtida no item (a),

$$\cos \alpha = \frac{\sin \phi \cos \Delta \lambda}{\sin s},$$

segue que, nos extremos,

$$\cos \Delta \lambda = 0.$$

Portanto,

$$\Delta \lambda = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Nessas configurações,

$$\sin \Delta \lambda = \pm 1,$$

e além disso,

$$\cos s = \cos \phi \cos \Delta \lambda = 0.$$

Como $0 \leq s \leq \pi$, concluímos que

$$s = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin s = 1.$$

Substituindo essas relações na constante de movimento obtida no item (d),

$$\sin^{1-k} \phi (\sin s + \cos \phi \sin \Delta \lambda)^k = K_0,$$

obtemos

$$K_0 = \sin^{1-k} \phi (1 \pm \cos \phi)^k.$$

As soluções dessa equação correspondem exatamente às latitudes extremas da trajetória. Assim,

$$K_0 = \sin^{1-k} \phi (1 \pm \cos \phi)^k$$

determina implicitamente os valores de $\phi_{\max}$ e $\phi_{\min}$.