

Instruções Gerais

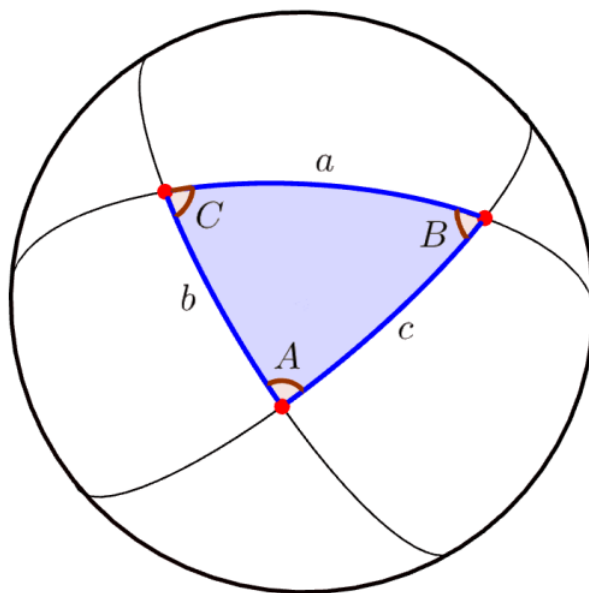
1. Identifique seu ID em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. A duração da prova é de 4 horas e 00 minutos;
3. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos)
4. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
5. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
6. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
7. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
8. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva o caderno de respostas.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74$ mag	
Mês Sinódico	29,53059 dias solares médios	
Mês Draconiano	27,21222 dias solares médios	
Mês Anomalístico	27,55455 dias solares médios	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($M_{\odot}$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656,28 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Equação de Kepler:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

- Equação Polar das Cônicas (Elipse e Hipérbole):

$$r = \frac{a \cdot ||1 - e^2||}{1 + e \cdot \cos(\nu)} = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$$

Questões

1. **Polaris no sul? (10 pontos)** O grande astrônomo Obazs Rotieh está participando de uma expedição científica. Durante um trabalho de campo em Brown University, ele foi enviado para o Hemisfério Sul, mas próximo à linha do Equador e encontra-se no topo de uma montanha a uma altitude de $h = 2500$ m acima do nível do mar. Ele gostaria de observar a estrela Polaris exatamente em sua culminação superior.

Considere:

- Refração atmosférica máxima (no horizonte): $R_0 = 34'$
- Declinação atual de Polaris: $\delta = +89^\circ 15'$

Determine a latitude mais ao sul ($\phi < 0$) a partir da qual ainda é teoricamente possível visualizar Polaris tangenciando o horizonte aparente de Obazs Rotieh.

Solução: Devido à altitude h do observador, o horizonte visível (aparente) sofre uma depressão angular θ em relação ao plano horizontal local. Analisando o triângulo retângulo formado pelo centro da Terra, o observador e o ponto de tangência no horizonte, temos:

$$\cos \theta = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}$$

Como $h \ll R_{\oplus}$, podemos utilizar a aproximação em série de Taylor para $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$:

$$1 - \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{1 + \frac{h}{R_{\oplus}}} \approx 1 - \frac{h}{R_{\oplus}} \implies \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R_{\oplus}}}$$

Substituindo os valores fornecidos ($h = 2,5$ km e $R_{\oplus} = 6371$ km):

$$\theta \approx \sqrt{\frac{2 \times 2,5}{6371}} \approx \sqrt{0,0007848} \approx 0,0280 \text{ rad}$$

Convertendo para graus e minutos de arco:

$$\theta \approx 0,0280 \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 1,605^\circ \approx 1^\circ 36'$$

Portanto, a altura angular do horizonte sensível é $h_{\text{hor}} = -1^\circ 36'$.

Seja ϕ a latitude do observador ($\phi < 0$). A altura do Polo Norte Celeste (PNC) para este observador é dada por $h_{\text{PNC}} = \phi$.

A distância angular de Polaris ao PNC (co-declinação) é $\Delta = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 89^\circ 15' = 0^\circ 45'$.

Na culminação superior, Polaris atinge sua máxima altura geométrica possível para aquela latitude:

$$h_{\text{true}} = h_{\text{PNC}} + \Delta = \phi + 0^\circ 45'$$

A refração atmosférica eleva a posição aparente dos astros próximos ao horizonte em um valor $R_0 = 34'$. Para que a estrela seja visível tangenciando o horizonte sensível, a sua altura aparente (h_{app}) deve ser igual à altura do horizonte:

$$h_{\text{app}} = h_{\text{true}} + R_0 = h_{\text{hor}}$$

Substituindo as expressões obtidas:

$$(\phi + 0^\circ 45') + 34' = -1^\circ 36'$$

$$\phi + 1^\circ 19' = -1^\circ 36'$$

$$\phi = -1^\circ 36' - 1^\circ 19' = -2^\circ 55'$$

A latitude mais ao sul possível é $2^\circ 55'$ **Sul** (ou $\phi = -2^\circ 55'$).

- 2. Luz Vêia (15 pontos)** O espectro de uma galáxia espiral distante revela que a linha de emissão Balmer H- α , cujo comprimento de onda de repouso medido em laboratório é $\lambda_0 = 656,3$ nm, encontra-se deslocada para o vermelho, sendo observada em $\lambda_{\text{obs}} = 689,1$ nm.

Assuma um modelo cosmológico simplificado com taxa de expansão constante, no qual o fator de escala $a(t)$ cresce de forma estritamente linear com o tempo t ($a(t) = t/t_0$). Considere a constante de Hubble atual como $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

- (a) **(5 pontos)** Calcule o redshift da galáxia e determine qual era o fator de escala do universo no instante em que a luz foi emitida.
- (b) **(10 pontos)** Estime a idade atual do universo (t_0) e a idade que o universo tinha quando os fótons observados foram emitidos (t_{em}).

Solução:

a) O redshift é definido por:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{689,1 - 656,3}{656,3} = \frac{32,8}{656,3} \approx 0,050$$

A relação fundamental entre o redshift cosmológico e o fator de escala do universo no momento da emissão (a_{em}) é dada por:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a_{\text{em}}} \implies 1 + 0,050 = \frac{1}{a_{\text{em}}}$$

$$a_{\text{em}} = \frac{1}{1,05} \approx 0,952$$

Logo, o universo tinha 95,2% do seu tamanho atual no momento da emissão.

b) Pela definição da constante de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t}$$

A idade atual do universo (t_0) é igual ao inverso da constante de Hubble:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}$$

Efetuada a conversão de unidades para obter o resultado em anos:

$$t_0 = \frac{3,086 \times 10^{19} \text{ km/Mpc}}{70 \text{ km/s} \times 3,156 \times 10^7 \text{ s/ano}} \approx 13,97 \times 10^9 \text{ anos}$$

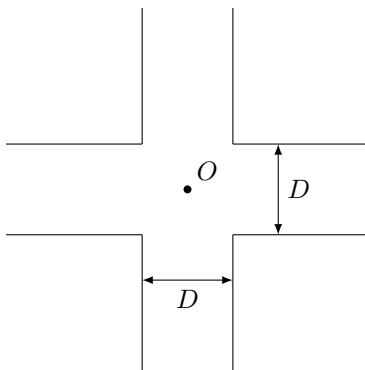
Portanto, a idade atual estimada do universo é de aproximadamente 14,0 bilhões de anos.

Como $a(t) \propto t$:

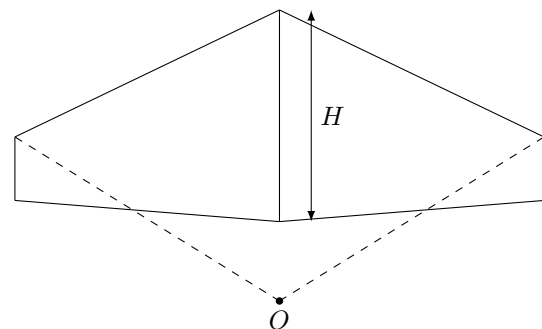
$$\frac{t_{\text{em}}}{t_0} = \frac{a_{\text{em}}}{a(t_0)} = \frac{1}{1+z}$$

$$t_{\text{em}} = \frac{t_0}{1+z} = \frac{13,97 \times 10^9 \text{ anos}}{1,05} \approx 13,30 \times 10^9 \text{ anos}$$

- 3. O Labirinto (20 pontos)** Em um momento de profunda introspecção, Giovanna sentiu-se presa no labirinto de seus próprios pensamentos. Nessa arquitetura mental intransponível, ela se viu perfeitamente ao nível do solo, parada exatamente no centro geométrico de um cruzamento infinito formado por quatro imensas paredes verticais e opacas. O espaço vazio entre as paredes modela dois corredores retilíneos, ortogonais e infinitamente longos, ambos com largura D . Buscando uma fresta de luz e lucidez, ela ergueu os olhos para o alto. Sabendo que todas as paredes possuem uma altura uniforme H , determine, de forma literal, a fração do hemisfério celeste que Giovanna consegue visualizar em função de H e D .



(a) Vista superior do cruzamento infinito.



(b) Vista em perspectiva.

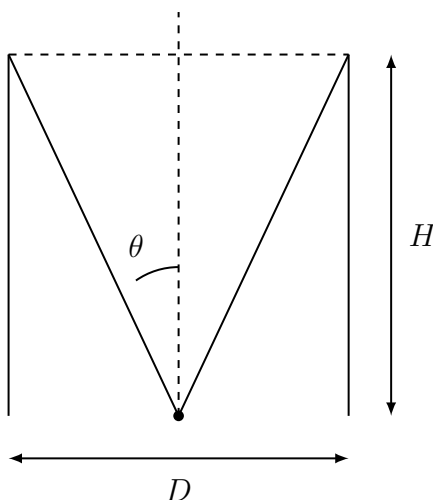
Solução: As bordas superiores das paredes são retas infinitas no espaço tridimensional. O plano que contém o observador e uma dessas retas intercepta a esfera celeste segundo um círculo máximo. Assim, a região visível através de um único corredor infinito corresponde a um fuso esférico delimitado por dois círculos máximos que se interceptam nos pontos do horizonte.

Se a largura do corredor é D e a altura das paredes é H , então a distância horizontal do observador até cada parede vale $D/2$. Portanto, o ângulo θ entre o plano vertical central do corredor e o plano que contém uma das bordas superiores satisfaz

$$\tan \theta = \frac{D}{2H}.$$

O ângulo diedro entre os dois planos que limitam o corredor vale 2θ . Como o ângulo sólido de um fuso esférico em um hemisfério é igual ao dobro do seu ângulo diedro, segue que

$$\Omega_{\text{corredor}} = 2(2\theta) = 4 \arctan\left(\frac{D}{2H}\right).$$



Como Giovanna encontra-se em um cruzamento de dois corredores ortogonais, a região total visível corresponde à união de dois fusos esféricos. Pelo princípio da inclusão-exclusão,

$$\Omega_{\text{vis}} = 2\Omega_{\text{corredor}} - \Omega_{\text{quad}},$$

onde Ω_{quad} representa a região de interseção dos dois fusos. Essa interseção forma um quadrilátero esférico regular.

Para determinar sua área, utilizaremos o Teorema de Girard. Para isso, devemos primeiro determinar seus ângulos internos. Considere dois vértices adjacentes do quadrilátero. Ambos correspondem aos cantos superiores do cruzamento e encontram-se à mesma distância do observador,

$$\ell = \sqrt{H^2 + \frac{D^2}{2}}.$$

A distância euclidiana entre esses dois vértices é simplesmente D . Se s representa o lado esférico do quadrilátero, a relação entre corda e ângulo central fornece

$$D = 2\ell \sin \frac{s}{2}.$$

Logo,

$$\sin \frac{s}{2} = \frac{D}{2\sqrt{H^2 + \frac{D^2}{2}}}.$$

Portanto,

$$s = 2 \arcsin \left(\frac{D}{2\sqrt{H^2 + \frac{D^2}{2}}} \right).$$

Agora consideremos dois vértices opostos do quadrilátero. A distância entre eles é

$$D\sqrt{2}.$$

Se d representa a diagonal esférica correspondente, novamente pela relação corda-ângulo central,

$$D\sqrt{2} = 2\ell \sin \frac{d}{2} \Rightarrow \sin \frac{d}{2} = \frac{D}{\sqrt{4H^2 + 2D^2}}.$$

Considere agora o triângulo esférico isósceles formado por dois lados do quadrilátero e uma de suas diagonais.

Se A representa o ângulo interno do quadrilátero, a Lei dos Cossenos Esférica fornece

$$\cos d = \cos^2 s + \sin^2 s \cos A.$$

Portanto,

$$\cos A = \frac{\cos d - \cos^2 s}{\sin^2 s}.$$

Utilizando

$$\cos s = 1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2},$$

obtemos

$$\cos s = 1 - 2 \left(\frac{D^2}{4H^2 + 2D^2} \right) = \frac{2H^2}{2H^2 + D^2}.$$

De modo análogo,

$$\cos d = 1 - 2 \left(\frac{D^2}{4H^2 + 2D^2} \right) = \frac{2H^2 - D^2}{2H^2 + D^2}.$$

Substituindo essas expressões na lei dos cossenos esférica,

$$\cos A = \frac{\frac{2H^2 - D^2}{2H^2 + D^2} - \left(\frac{2H^2}{2H^2 + D^2} \right)^2}{1 - \left(\frac{2H^2}{2H^2 + D^2} \right)^2}.$$

Após simplificação algébrica,

$$\cos A = -\frac{D^2}{2H^2 + D^2}.$$

Logo,

$$A = \pi - \arccos \left(\frac{D^2}{2H^2 + D^2} \right).$$

Pelo Teorema de Girard, o ângulo sólido de um quadrilátero esférico é igual ao seu excesso esférico:

$$\Omega_{\text{quad}} = 4A - 2\pi.$$

Portanto,

$$\Omega_{\text{quad}} = 2\pi - 4 \arccos \left(\frac{D^2}{2H^2 + D^2} \right).$$

Substituindo em

$$\Omega_{\text{vis}} = 2\Omega_{\text{corredor}} - \Omega_{\text{quad}},$$

obtemos

$$\Omega_{\text{vis}} = 8 \arctan\left(\frac{D}{2H}\right) - 2\pi + 4 \arccos\left(\frac{D^2}{2H^2 + D^2}\right).$$

Como o hemisfério celeste possui ângulo sólido total igual a 2π , a fração visível do céu é

$$f = \frac{\Omega_{\text{vis}}}{2\pi}.$$

Assim,

$$f = \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{D}{2H}\right) - 1 + \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{D^2}{2H^2 + D^2}\right).$$

4. A Grande Harmonia (20 pontos) Muito antes da existência de telescópios modernos, diversas civilizações já eram capazes de prever eclipses com precisão impressionante. Babilônios perceberam que eclipses solares e lunares obedeciam ciclos extremamente regulares, sendo o mais famoso deles o Período de Saros.

- (a) **(12 pontos)** O Período de Saros corresponde ao intervalo necessário para que a geometria relativa entre Terra, Lua e Sol volte a se repetir aproximadamente. Determine o valor do Período de Saros em anos, dias, horas e minutos. Considere a primeira aproximação que apresentar erro de associado menor que 1 h.
- (b) **(8 pontos)** Assuma, por simplicidade, que as órbitas planetárias são perfeitamente circulares e coplanares. Suponha que, em um instante $t = 0$, todos os planetas estejam perfeitamente alinhados em uma mesma longitude heliocêntrica. Determine o intervalo mínimo Δt , em anos, necessário para que todos retornem simultaneamente à mesma configuração espacial, momento conhecido como Grande Ano.

Planeta	Período Sideral (anos)
Mercúrio	0,241
Vênus	0,613
Terra	1,000
Marte	1,879
Júpiter	11,861
Saturno	29,459
Urano	84,013
Netuno	164,791

Solução:

- (a) Matematicamente, devemos procurar inteiros n , m e k tais que:

$$nT_S \approx mT_D \approx kT_A.$$

Começamos comparando o mês dracônico com o mês sinódico:

$$\frac{T_D}{T_S} = \frac{27,212220817}{29,530588853} \approx 0,9214926.$$

Nosso objetivo é encontrar uma aproximação racional particularmente precisa para esse número.

Aplicando o algoritmo de frações contínuas:

$$0,9214926 = \frac{1}{1 + \frac{1}{11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

As aproximações racionais sucessivas associadas a essa expansão são:

$$1, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{13}, \quad \frac{35}{38}, \quad \frac{47}{51}, \quad \frac{223}{242}.$$

A convergente

$$\frac{223}{242}$$

fornece a precisão pedida pelo enunciado, implicando:

$$223T_S \approx 242T_D.$$

Calculando:

$$223T_S = 223 \cdot 29,530588853 = 6585,3213 \text{ dias},$$

enquanto:

$$242T_D = 242 \cdot 27,212220817 = 6585,3574 \text{ dias}.$$

A diferença entre ambos é inferior a:

$$0,04 \text{ dias},$$

ou aproximadamente uma hora. Agora verificamos a compatibilidade com o mês anomalístico:

$$\frac{223T_S}{T_A} = \frac{6585,3213}{27,554549878} \approx 238,99.$$

Portanto:

$$223T_S \approx 239T_A.$$

Assim:

$$223T_S \approx 242T_D \approx 239T_A.$$

Esse intervalo define o chamado Período de Saros. Seu valor numérico é:

$$\boxed{18 \text{ anos, } 10 \text{ dias, } 19 \text{ h e } 42 \text{ min}}$$

- (b) Escrevendo os períodos siderais em forma racional, todos os numeradores são primos entre si. Portanto, o menor tempo para que todos os planetas retornem simultaneamente à configuração inicial é simplesmente o produto de todos esses numeradores:

$$\Delta t = 241 \cdot 613 \cdot 1879 \cdot 11861 \cdot 29459 \cdot 84013 \cdot 164791.$$

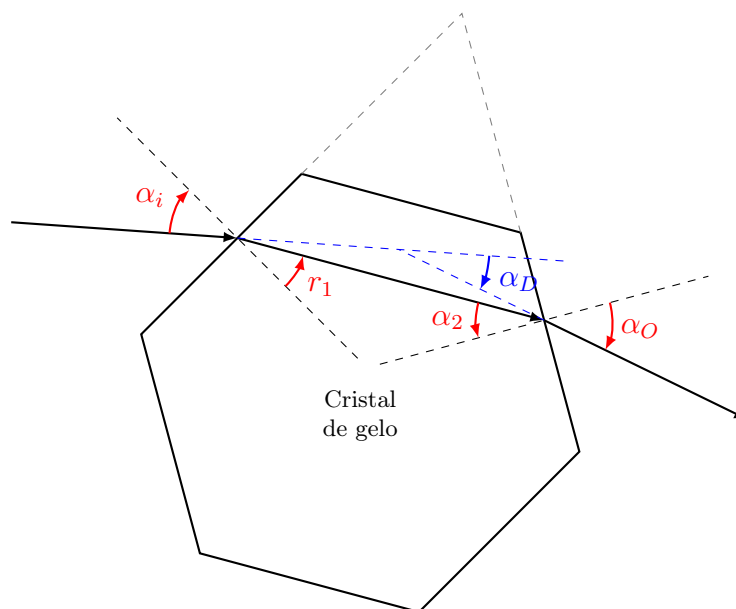
Efetuando o cálculo:

$$\boxed{\Delta t = 1,29 \times 10^{31} \text{ anos}}$$

Portanto, o chamado Grande Ano possui escala temporal colossal, extremamente superior à idade atual do Universo.

- 5. Modela Aí: Halo solar (30 pontos)** O halo solar ao redor do Sol pode ser observado como um anel luminoso de raio angular aproximadamente constante. Esse fenômeno ocorre devido à refração da luz solar através de cristais de gelo hexagonais presentes em nuvens a grandes altitudes.

Considere um desses cristais modelado como um prisma de ângulo de vértice 60° . Um raio de luz incide sobre uma face com ângulo α_i , sofre refração interna com ângulo r_1 , incide na segunda face com ângulo α_2 e emerge com ângulo α_o . O desvio total entre o raio incidente e o emergente é α_D .



- (a) **(14 pontos)** Determine o ângulo de desvio α_D em função do índice de refração do ar n_0 , do índice de refração do gelo n e do ângulo α_2 .
- (b) **(16 pontos)** Determine o raio angular α_B do halo observado, justificando fisicamente sua definição. O índice de refração do gelo é $n = 1,31$.

Solução:

- (a) Pela lei de Snell nas duas interfaces e pela geometria do prisma,

$$n_0 \sin \alpha_i = n \sin r_1, \quad r_1 + \alpha_2 = 60^\circ, \quad n \sin \alpha_2 = n_0 \sin \alpha_O.$$

Eliminando r_1 ,

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin(60^\circ - \alpha_2)\right), \quad \alpha_O = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \alpha_2\right).$$

O desvio total é

$$\alpha_D = \alpha_i + \alpha_O - 60^\circ,$$

logo,

$$\alpha_D(\alpha_2) = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin(60^\circ - \alpha_2)\right) + \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \alpha_2\right) - 60^\circ.$$

- (b) O halo observado corresponde ao mínimo do desvio angular, pois raios próximos a esse valor se concentram formando uma cáustica angular.

Definindo $k = \frac{n}{n_0}$,

$$f(\alpha_2) = \arcsin(k \sin(60^\circ - \alpha_2)) + \arcsin(k \sin \alpha_2).$$

A condição de extremo é $f'(\alpha_2) = 0$, o que leva a

$$\frac{\cos \alpha_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha_2}} = \frac{\cos(60^\circ - \alpha_2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(60^\circ - \alpha_2)}}.$$

Essa igualdade é satisfeita quando

$$\sin \alpha_2 = \sin(60^\circ - \alpha_2) \Rightarrow \alpha_2 = 30^\circ.$$

Substituindo,

$$n_0 \sin \alpha_i = n \sin 30^\circ = \frac{n}{2} \Rightarrow \alpha_i = \arcsin\left(\frac{n}{2n_0}\right),$$

e, por simetria, $\alpha_O = \alpha_i$.

Portanto,

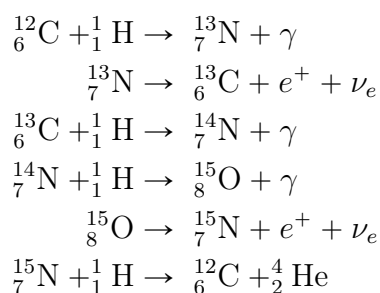
$$\alpha_B = 2 \arcsin\left(\frac{n}{2n_0}\right) - 60^\circ.$$

Para $n \approx 1,31$ e $n_0 \approx 1$,

$$\alpha_B \approx 22^\circ.$$

6. Brilha Brilha Estrelinha (30 pontos) No ano de 2050, astrônomos descobriram um sistema estelar binário consistindo de uma estrela Wolf-Rayet e uma anã branca. Estrelas Wolf-Rayet são estrelas extremamente ativas que possuem fortes ventos estelares e erupções violentas que ocorrem aleatoriamente.

A fusão estelar na estrela Wolf-Rayet é realizada principalmente através do ciclo CNO. O processo do ciclo CNO é mostrado a seguir:



A tabela abaixo lista os dados sobre a massa de certos isótopos de diferentes elementos envolvidos no Ciclo CNO.

Isótopo	Massa
${}^1_1\text{H}$	1.007825031 amu
${}^4_2\text{He}$	4.002603254 amu
${}^{12}_6\text{C}$	12.00000000 amu
${}^{13}_6\text{C}$	13.0033548 amu
${}^{15}_7\text{N}$	15.0001089 amu

- (a) **(8 pontos)** Dado que a estrela WR produz 5.61×10^{24} kg de hélio a cada ano, calcule sua luminosidade máxima. E explique brevemente por que a sua luminosidade real é provavelmente menor do que a calculada.
- (b) **(6 pontos)** Esta estrela tem um raio de $12R_{\odot}$. Calcule o seu comprimento de onda de pico.

Para esta estrela, ela perde aproximadamente $0.0003M_{\odot}$ para a anã branca por ano, dos quais 35% se devem à acreção dos ventos estelares ejetados. O restante foi acretado diretamente do envelope estelar da estrela WR.

Por simplicidade, assuma que a densidade de uma camada da estrela WR é inversamente proporcional ao quadrado de sua distância do centro da estrela. Também assumiremos que a estrela WR está aproximadamente no seu limite de Eddington (fórmula fornecida abaixo).

$$L_{\text{Edd}} \approx 5.5 \times 10^4 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) L_{\odot}$$

A cada 64 anos, uma nova é observada neste sistema. A massa da anã branca logo antes da nova foi determinada como sendo de $1.28M_{\odot}$. A anã branca libera material apenas o suficiente para retornar à sua massa inicial após cada nova.

O raio de uma anã branca pode ser relacionado à sua massa pela seguinte equação:

$$R_{\text{WD}} \approx 7.8 \times 10^6 \text{ m} \times \left[\left(\frac{1.4M_{\odot}}{M_{\text{WD}}} \right)^{2/3} - \left(\frac{M_{\text{WD}}}{1.4M_{\odot}} \right)^{2/3} \right]^{1/2}$$

- (c) **(18 pontos)** Encontre o raio orbital da anã branca. Assuma uma órbita circular e ignore a velocidade inicial das partículas acretadas pela anã branca.

Dica: Esta fórmula calcula a distância do Lobo de Roche R_L no referencial da anã branca, onde a é o semieixo maior.

$$R_L = a \frac{0.49 q^{2/3}}{0.6 q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}, \quad q = \frac{M_{\text{WD}}}{M_{\text{WR}}}$$

Solução:

- (a) A taxa de produção de núcleos de Hélio é $\dot{N} = \frac{\dot{M}_{\text{He}}}{m_{\text{He}}}$. A energia liberada por núcleo formado é dada pelo defeito de massa $\Delta E = (4m_{\text{H}} - m_{\text{He}})c^2$. A lumino-

sidade máxima teórica é o produto dessas grandezas:

$$L = \frac{\dot{M}_{\text{He}}}{m_{\text{He}}} (4m_{\text{H}} - m_{\text{He}}) c^2.$$

Substituindo os valores numéricos,

$$L \approx 1,15 \times 10^{32} \text{ W}.$$

O ciclo CNO emite elétrons-neutrinos (ν_e) durante os decaimentos β^+ . Esses neutrinos escapam livremente da estrela sem interagir com o plasma, roubando parte da energia produzida e reduzindo a luminosidade térmica real.

- (b) Pela Lei de Stefan-Boltzmann e Lei de Wien, temos $T = \left(\frac{L}{4\pi R_{\text{WR}}^2 \sigma} \right)^{1/4}$ e $\lambda_{\text{pico}} = \frac{b}{T}$. Substituindo T , obtemos a relação algébrica direta:

$$\lambda_{\text{pico}} = b \left(\frac{4\pi R_{\text{WR}}^2 \sigma}{L} \right)^{1/4}.$$

Para $R_{\text{WR}} = 12R_{\odot}$, resulta em:

$$\lambda_{\text{pico}} \approx 74,4 \text{ nm}.$$

- (c) Assumindo o limite de Eddington, a massa da estrela WR é $M_{\text{WR}} = \frac{L}{5,5 \times 10^4 L_{\odot}} M_{\odot} \approx 5,44 M_{\odot}$. A massa acretada diretamente do envelope a cada ciclo de $\Delta t = 64$ anos é $\Delta M = 0,65 \dot{M}_{\text{perda}} \Delta t$. Como $\rho \propto 1/r^2$, a massa externa cedida pela WR é proporcional à fração do raio que excede seu próprio limite gravitacional. Logo, o Lóbulo de Roche da WR é:

$$R_L = R_{\text{WR}} \left(1 - \frac{\Delta M}{M_{\text{WR}}} \right) \approx 0,9977 R_{\text{WR}}.$$

Para usar a fórmula de Eggleton no referencial da estrela doadora (WR), inverte-se a razão de massas da fórmula original: $q' = \frac{M_{\text{WR}}}{M_{\text{WD}}} = \frac{5,44}{1,28} = 4,25$.

Isolando o semieixo maior da órbita a da equação de Eggleton:

$$a = R_L \left[\frac{0,6(q')^{2/3} + \ln(1 + (q')^{1/3})}{0,49(q')^{2/3}} \right].$$

Substituindo os valores,

$$a \approx 23,6 R_{\odot} \approx 1,64 \times 10^{10} \text{ m}.$$

- 7. É Bucha (30 pontos)** Ao fixar a origem de um sistema de coordenadas na origem do vetor velocidade de um objeto, a trajetória descrita pela extremidade desse vetor ao

longo do movimento é chamada de hodógrafo.

- a) **(10 pontos)** Mostre que o hodógrafo de uma órbita kepleriana é um círculo com centro deslocado. Depois, determine a razão entre a distância do centro à origem e o raio do círculo.
- b) **(20 pontos)** Em dois diferentes pontos da órbita de um cometa, observou-se que ele tem vetores velocidade $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ perpendiculares. Determine o intervalo das possíveis excentricidades do cometa em função da razão $\lambda = \frac{v_1}{v_2}$ de seus módulos. Considere $v_1 \geq v_2$.

Solução:

- a) **Solução 1:** Considere uma órbita de semieixo maior a e excentricidade e , com um sistema de coordenadas definido com origem no foco e eixo x no semieixo maior. Inicialmente, decompomos a velocidade em componentes radiais e tangenciais.

Substituindo a forma polar da elipse na conservação do momento angular $v_\theta r = \sqrt{GMa(1-e^2)}$, temos

$$v_\theta = (1 + e \cos \theta) \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}.$$

$$\text{De Vis-Viva, } v^2 = v_\theta^2 + v_r^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Substituindo v_θ e r ,

$$v_r^2 = \frac{GM}{a} \left(\frac{2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2} - 1 - \frac{1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta}{1 - e^2} \right)$$

$$v_r^2 = \frac{GM}{a} \frac{e^2 - e^2 \cos^2 \theta}{1 - e^2}$$

$$v_r = e \sin \theta \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}.$$

Pela rotação de coordenadas, $v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$ e $v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta$.

Com v_θ e v_r ,

$$v_x = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} (e \sin \theta \cos \theta - (1 + e \cos \theta) \sin \theta)$$

$$v_x = -\sin \theta \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}},$$

e

$$v_y = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} (e \sin^2 \theta + (1 + e \cos \theta) \cos \theta)$$

$$v_y = (e + \cos \theta) \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}}.$$

Note que

$$v_x^2 + \left(v_y - e \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}} \right)^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)},$$

que é um círculo de raio $\sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}}$ e centro $\left(0, e \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}} \right)$.

Solução 2: Na questão 1 da lista 1, foi provado que o vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL) $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r}$ é uma constante de movimento em uma órbita sujeita à força $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$. Na força gravitacional, $k = GMm$.

Dividindo $\vec{A}$ por mk , obtém-se o vetor excentricidade $\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{GM} - \hat{r}$, de módulo e igual à excentricidade da órbita e com direção do foco ao periélio. Daí, $\vec{v} \times \vec{h} = GM(\vec{e} + \hat{r})$.

Note que $\vec{v} \times \vec{h}$, por ser perpendicular ao momento angular, está contido no plano da órbita e, por ser perpendicular ao vetor velocidade, rotaciona $\vec{v}$ em 90° no sentido horário.

A rotação de $\vec{v}$ apenas altera a orientação do hodógrafo, e as constantes GM e h apenas mudam sua escala e unidade dimensional, mantendo o formato do hodógrafo, que, por isso, é definido por $\vec{e} + \hat{r}$.

Finalmente, veja que $\vec{e}$ é um vetor de módulo e e direção fixa para o periélio e $\hat{r}$ é um vetor de módulo 1 que aponta para o cometa em todo instante, ou seja, forma um círculo ao longo de uma órbita completa.

Portanto, o formato do hodógrafo, encontrado a partir da soma vetorial $\vec{e} + \hat{r}$, é um

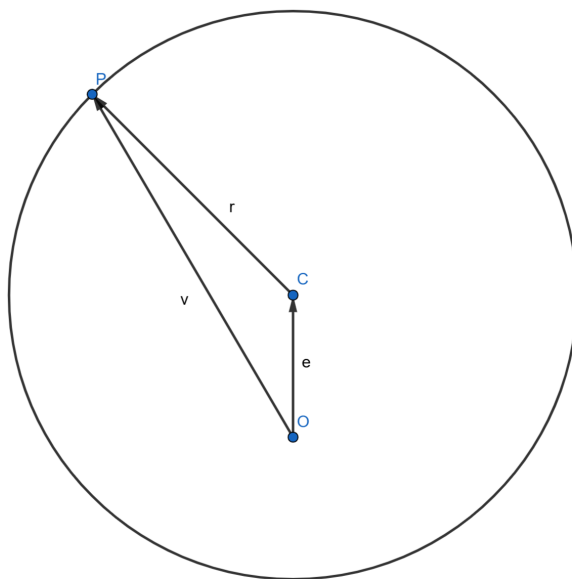
$$\boxed{\text{círculo com centro deslocado}},$$

e a razão entre a distância da origem ao seu centro e o raio do círculo é

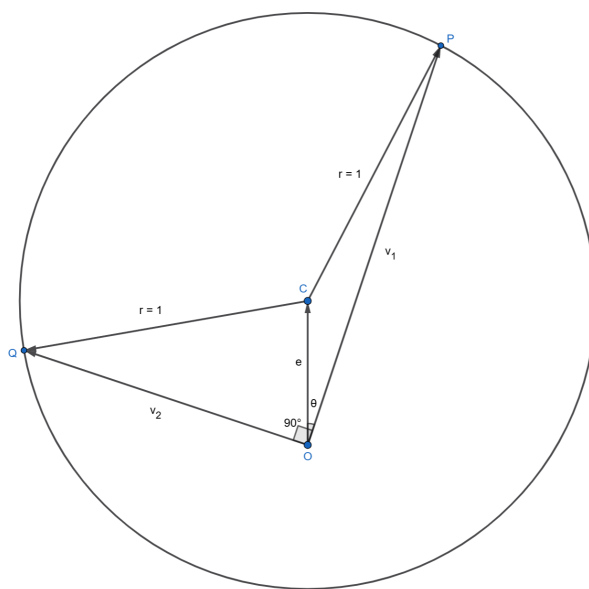
$$\boxed{\frac{OC}{R} = e}.$$

Em uma órbita parabólica, a origem pertence à circunferência e nela ocorre o caso limite do círculo completo. Em uma órbita hiperbólica, a origem encontra-se externa à circunferência e o círculo do hodógrafo é incompleto, uma vez que há um desvio na direção dos vetores velocidade no infinito.

Multiplicando vetorialmente a expressão por $-\hat{z}$, pela regra da mão direita, o hodógrafo fica na orientação de uma órbita com semieixo maior no eixo x, assim como na solução 1.



b) **Solução 1:** Colocando os vetores velocidades no hodógrafo e definindo $\theta = \widehat{COP}$,



Pela lei dos cossenos no triângulo $\triangle OCP$,

$$e^2 + v_1^2 - 2ev_1 \cos \theta = 1.$$

Pela lei dos cossenos no triângulo $\triangle OCQ$ e utilizando $\widehat{COQ} = 90^\circ - \theta$,

$$e^2 + v_2^2 - 2ev_2 \sin \theta = 1.$$

Dessas duas equações, isola-se $\sin \theta$ e $\cos \theta$ para encontrar, a partir da relação fundamental da trigonometria e de $v_1 = \lambda v_2$ do enunciado,

$$2e\lambda v_2 \cos \theta = e^2 + \lambda^2 v_2^2 - 1 \quad 2e\lambda v_2 \sin \theta = (e^2 + v_2^2 - 1)\lambda$$

$$4e^2 \lambda^2 v_2^2 = (e^2 + \lambda^2 v_2^2 - 1)^2 + (e^2 + v_2^2 - 1)^2 \lambda^2$$

$$4e^2 \lambda^2 v_2^2 = e^4 + \lambda^4 v_2^4 + 1 + 2e^2 \lambda^2 v_2^2 - 2e^2 - 2\lambda^2 v_2^2 \\ e^4 \lambda^2 + \lambda^2 v_2^4 + \lambda^2 + 2e^2 \lambda^2 v_2^2 - 2e^2 \lambda^2 - 2\lambda^2 v_2^2.$$

Daí,

$$(\lambda^4 + \lambda^2)v_2^4 - 4\lambda^2 v_2^2 + (\lambda^2 + 1)(e^4 - 2e^2 + 1) = 0.$$

Como v_2^2 é real, o determinante da equação deve ser maior ou igual a 0. Então,

$$16\lambda^4 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 1)^2(e^2 - 1)^2 \geq 0$$

$$-\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \leq e^2 - 1 \leq \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \\ \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 + 1} \leq e^2 \leq \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda^2 + 1}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \leq e \leq \frac{\lambda + 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}}.$$

Solução 2: A questão pode ser resolvida geometricamente de diversas outras maneiras: desigualdade de Ptolomeu, propriedades ópticas da elipse, teorema de Poncelet e números complexos. A fim de complementação, segue a resolução do item pela desigualdade de Ptolomeu.

Em um quadrilátero $ABCD$ de diagonais AC e BD , a desigualdade de Ptolomeu garante a validade da relação

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} \geq \overline{AD} \cdot \overline{BC},$$

em que a igualdade ocorre para um quadrilátero cíclico.

Note, pelo Teorema de Pitágoras em $\triangle OPQ$, que $\overline{PQ} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Agora, aplicando a desigualdade de Ptolomeu no quadrilátero $OCPQ$ do hodógrafo,

$$\overline{OC} \cdot \overline{PQ} + \overline{OQ} \cdot \overline{CP} \geq \overline{OP} \cdot \overline{QC}$$

$$e \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} + v_2 \cdot 1 \geq v_1 \cdot 1$$

$$e \geq \frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

A depender da anomalia verdadeira θ , as diagonais do quadrilátero tornam-se OC e PQ . Novamente, pela desigualdade de Ptolomeu,

$$\overline{OP} \cdot \overline{QC} + \overline{OQ} \cdot \overline{CP} \geq \overline{OC} \cdot \overline{PQ}$$

$$v_2 \cdot 1 + v_1 \cdot 1 \geq e \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$e \leq \frac{\lambda + 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

Assim,

$$\boxed{\frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \leq e \leq \frac{\lambda + 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}}.$$

No item a) e nas duas soluções do item b), observe a simplificação da questão ao se utilizar a geometria do hodógrafo e o vetor de Laplace-Runge-Lenz. A decomposição da velocidade em v_x e v_y também resolve ambos os itens, porém os torna extremamente mais extensos e com um desenvolvimento algébrico muito mais pesado.

- 8. Modela Af: Efeito Estufa Discreto (35 pontos)** Considere um planeta esférico de raio R cuja superfície comporta-se como um corpo negro perfeito. A atmosfera é modelada por N cascas esféricas concêntricas, infinitamente finas, numeradas de baixo para cima. O sistema recebe uma potência estelar total constante L_0 distribuída sobre todo o topo da atmosfera. A interação da radiação com cada casca depende da banda espectral considerada. Na banda solar, cada casca possui transmissividade t_S , refletividade r_S e absorvidade a_S , satisfazendo

$$t_S + r_S + a_S = 1.$$

Assuma que nenhuma casca emite radiação nesta banda. Na banda térmica, cada casca possui transmissividade t_T , refletividade r_T e absorvidade a_T , satisfazendo

$$t_T + r_T + a_T = 1.$$

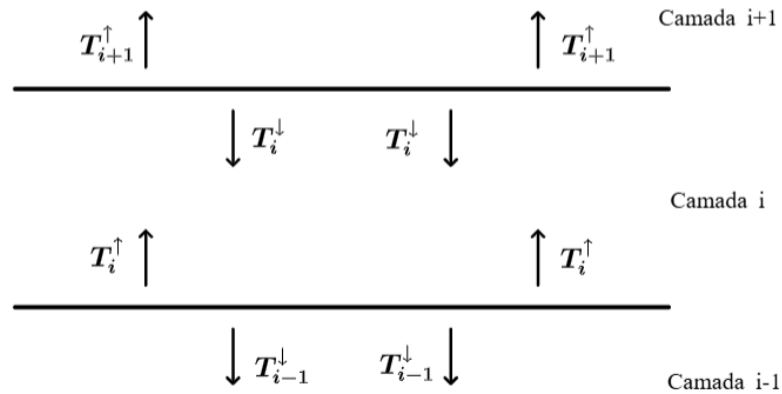
As cascas encontram-se em equilíbrio termodinâmico local. Além disso, toda emissão térmica é isotrópica.

- a) **(13 pontos)** Defina a emissividade geométrica do sistema ϵ_{geo} como a razão entre a potência térmica que escapa para o espaço e a potência térmica emitida pela superfície planetária. Determine uma expressão fechada para ϵ_{geo} em função de N , t_T , r_T e a_T .
- b) **(18 pontos)** Defina o albedo geométrico do sistema A_{geo} como a razão entre a potência estelar refletida para o espaço e a potência incidente L_0 . Determine uma expressão para A_{geo} em função, mesmo que implicitamente, de N , t_S , r_S e a_S .

- c) (4 pontos) Em equilíbrio radiativo global, determine a temperatura da superfície planetária T em função de L_0 , R , ϵ_{geo} e A_{geo} .

Solução:

- (a) Seja $T_i^\uparrow$ a potência térmica propagando-se para cima na região imediatamente acima da casca i , e $T_i^\downarrow$ a potência térmica propagando-se para baixo nessa mesma região. A superfície planetária emite uma potência térmica total L_{sup} , de modo que $T_0^\uparrow = L_{\text{sup}}$. Além disso, não existe radiação térmica incidente do espaço, logo $T_N^\downarrow = 0$.



Considere uma casca arbitrária i . A potência térmica incidente sobre ela provém de baixo ($T_{i-1}^\uparrow$) e de cima ($T_i^\downarrow$). Como a absorvidade térmica da casca é a_T , a potência absorvida vale

$$E_i = a_T (T_{i-1}^\uparrow + T_i^\downarrow).$$

Pelo equilíbrio termodinâmico local, a potência total emitida pela casca também é E_i . Como a emissão térmica é isotrópica, metade dessa potência é emitida para cada lado. A potência ascendente imediatamente acima da casca é então composta pela radiação ascendente transmitida através da casca, pela radiação descendente refletida pela casca e pela parcela da emissão térmica dirigida para cima. Portanto,

$$T_i^\uparrow = t_T T_{i-1}^\uparrow + r_T T_i^\downarrow + \frac{E_i}{2}.$$

De modo análogo, a potência descendente imediatamente abaixo da casca é composta pela radiação descendente transmitida através da casca, pela radiação ascendente refletida pela casca e pela parcela da emissão térmica dirigida para baixo. Assim,

$$T_{i-1}^{\downarrow} = t_T T_i^{\downarrow} + r_T T_{i-1}^{\uparrow} + \frac{E_i}{2}.$$

Substituindo a expressão de E_i ,

$$T_i^{\uparrow} = t_T T_{i-1}^{\uparrow} + r_T T_i^{\downarrow} + \frac{a_T}{2} (T_{i-1}^{\uparrow} + T_i^{\downarrow}),$$

$$T_{i-1}^{\downarrow} = r_T T_{i-1}^{\uparrow} + t_T T_i^{\downarrow} + \frac{a_T}{2} (T_{i-1}^{\uparrow} + T_i^{\downarrow}).$$

Definindo

$$\alpha = t_T + \frac{a_T}{2}, \quad \beta = r_T + \frac{a_T}{2},$$

obtemos

$$T_i^{\uparrow} = \alpha T_{i-1}^{\uparrow} + \beta T_i^{\downarrow},$$

$$T_{i-1}^{\downarrow} = \beta T_{i-1}^{\uparrow} + \alpha T_i^{\downarrow}.$$

Da primeira equação,

$$T_i^{\downarrow} = \frac{T_i^{\uparrow} - \alpha T_{i-1}^{\uparrow}}{\beta}.$$

Substituindo na segunda,

$$T_{i-1}^{\downarrow} = \frac{\alpha}{\beta} T_i^{\uparrow} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta} \right) T_{i-1}^{\uparrow}.$$

Aplicando a mesma relação ao índice $i + 1$,

$$T_i^{\downarrow} = \frac{\alpha}{\beta} T_{i+1}^{\uparrow} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta} \right) T_i^{\uparrow}.$$

Igualando as duas expressões obtidas para $T_i^{\downarrow}$,

$$\frac{T_i^{\uparrow} - \alpha T_{i-1}^{\uparrow}}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} T_{i+1}^{\uparrow} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta} \right) T_i^{\uparrow}.$$

Multiplicando por β e rearranjando,

$$\alpha T_{i+1}^{\uparrow} - (1 + \alpha^2 - \beta^2) T_i^{\uparrow} + \alpha T_{i-1}^{\uparrow} = 0.$$

Como

$$\alpha + \beta = t_T + r_T + a_T = 1,$$

segue que

$$1 + \alpha^2 - \beta^2 = 1 + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1 + \alpha - \beta = 2\alpha.$$

Logo, a equação de recorrência simplifica-se para:

$$T_{i+1}^\uparrow - 2T_i^\uparrow + T_{i-1}^\uparrow = 0.$$

A equação característica é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

A solução geral é

$$T_i^\uparrow = A + Bi.$$

Substituindo na expressão de $T_i^\downarrow$,

$$T_i^\downarrow = \frac{(A + Bi) - \alpha[A + B(i-1)]}{\beta} = \frac{A(1-\alpha) + Bi(1-\alpha) + B\alpha}{\beta}.$$

Usando o fato de que $1 - \alpha = \beta$, temos:

$$T_i^\downarrow = \frac{A\beta + Bi\beta + B\alpha}{\beta} = A + Bi + \frac{B\alpha}{\beta}.$$

Como não há radiação térmica incidente do espaço ($T_N^\downarrow = 0$),

$$A + BN + \frac{B\alpha}{\beta} = 0.$$

Além disso, a radiação na superfície é a própria emissão planetária ($T_0^\uparrow = L_{\text{sup}}$), logo

$$A = L_{\text{sup}}.$$

Portanto, isolando B :

$$L_{\text{sup}} + B \left(N + \frac{\alpha}{\beta} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{L_{\text{sup}}}{N + \frac{\alpha}{\beta}}.$$

A potência que escapa para o espaço é $T_N^\uparrow$:

$$T_N^\uparrow = L_{\text{sup}} + BN = L_{\text{sup}} \left[1 - \frac{N}{N + \frac{\alpha}{\beta}} \right].$$

Manipulando a fração, obtemos

$$T_N^\uparrow = L_{\text{sup}} \left[\frac{N + \frac{\alpha}{\beta} - N}{N + \frac{\alpha}{\beta}} \right] = L_{\text{sup}} \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{N + \frac{\alpha}{\beta}} = L_{\text{sup}} \frac{\alpha}{\alpha + N\beta}.$$

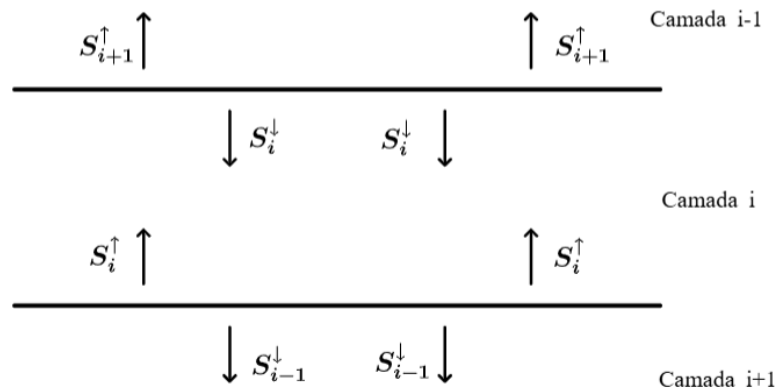
Pela definição,

$$\epsilon_{\text{geo}} = \frac{T_N^\uparrow}{L_{\text{sup}}},$$

portanto, substituindo as definições de α e β ,

$$\epsilon_{\text{geo}} = \frac{t_T + \frac{a_T}{2}}{t_T + \frac{a_T}{2} + N \left(r_T + \frac{a_T}{2} \right)}.$$

- (b) Para a banda solar, visando facilitar a aplicação das condições de contorno, é matematicamente conveniente inverter o referencial: numeramos o topo da atmosfera como interface 0 e a superfície como interface N . Sejam $S_i^\downarrow$ e $S_i^\uparrow$ as potências estelares propagando-se para baixo e para cima, respectivamente, na região imediatamente abaixo da i -ésima casca.



Desconsiderando o termo de emissão das cascas (pois não emitem no visível), o balanço radiativo para uma casca i resulta em:

$$S_i^\downarrow = t_S S_{i-1}^\downarrow + r_S S_i^\uparrow.$$

$$S_{i-1}^\uparrow = r_S S_{i-1}^\downarrow + t_S S_i^\uparrow.$$

As condições de contorno refletem que a radiação estelar vem do topo e a superfície funciona como um corpo negro perfeito (não reflete no visível):

$$S_0^\downarrow = L_0, \quad S_N^\uparrow = 0.$$

Da primeira recorrência,

$$S_i^\uparrow = \frac{S_i^\downarrow - t_S S_{i-1}^\downarrow}{r_S}.$$

Substituindo na segunda,

$$S_{i-1}^\uparrow = \frac{t_S}{r_S} S_i^\downarrow + \frac{r_S^2 - t_S^2}{r_S} S_{i-1}^\downarrow.$$

Aplicando a mesma expressão ao índice $i + 1$,

$$S_i^\uparrow = \frac{t_S}{r_S} S_{i+1}^\downarrow + \frac{r_S^2 - t_S^2}{r_S} S_i^\downarrow.$$

Igualando as duas expressões para $S_i^\uparrow$,

$$\frac{S_i^\downarrow - t_S S_{i-1}^\downarrow}{r_S} = \frac{t_S}{r_S} S_{i+1}^\downarrow + \frac{r_S^2 - t_S^2}{r_S} S_i^\downarrow.$$

Multiplicando por r_S e rearranjando os termos,

$$t_S S_{i+1}^\downarrow - (1 + t_S^2 - r_S^2) S_i^\downarrow + t_S S_{i-1}^\downarrow = 0.$$

O polinômio característico é:

$$t_S \lambda^2 - (1 + t_S^2 - r_S^2) \lambda + t_S = 0.$$

As raízes são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 + t_S^2 - r_S^2 \pm \sqrt{(1 + t_S^2 - r_S^2)^2 - 4t_S^2}}{2t_S}.$$

Logo, a solução geral é

$$S_i^\downarrow = A \lambda_+^i + B \lambda_-^i.$$

Usando as condições de contorno do problema,

$$S_0^\downarrow = L_0 \Rightarrow A + B = L_0.$$

Além disso,

$$S_N^\uparrow = \frac{S_N^\downarrow - t_S S_{N-1}^\downarrow}{r_S} = 0 \Rightarrow S_N^\downarrow = t_S S_{N-1}^\downarrow.$$

Substituindo a solução geral,

$$A\lambda_+^N + B\lambda_-^N = t_S (A\lambda_+^{N-1} + B\lambda_-^{N-1}).$$

Rearranjando os fatores de A e B ,

$$A\lambda_+^{N-1}(\lambda_+ - t_S) + B\lambda_-^{N-1}(\lambda_- - t_S) = 0.$$

Definindo a constante Q ,

$$Q = \frac{\lambda_+^{N-1}(\lambda_+ - t_S)}{\lambda_-^{N-1}(\lambda_- - t_S)},$$

temos que

$$B = -AQ.$$

Substituindo no sistema $A + B = L_0$,

$$A = \frac{L_0}{1 - Q}, \quad B = -\frac{L_0 Q}{1 - Q}.$$

A potência refletida para o espaço, que escapa pelo topo da atmosfera, é

$$L_{\text{ref}} = S_0^\uparrow.$$

Aplicando a segunda recorrência para a camada do topo ($i = 1$),

$$S_0^\uparrow = r_S S_0^\downarrow + t_S S_1^\uparrow.$$

Por outro lado, isolando $S_1^\uparrow$ na primeira recorrência,

$$S_1^\uparrow = \frac{S_1^\downarrow - t_S S_0^\downarrow}{r_S}.$$

Substituindo e lembrando que $S_0^\downarrow = L_0$,

$$L_{\text{ref}} = r_S L_0 + \frac{t_S}{r_S} (S_1^\downarrow - t_S L_0).$$

Sabemos que a solução no índice 1 é

$$S_1^\downarrow = A\lambda_+ + B\lambda_-.$$

Logo,

$$L_{\text{ref}} = r_S L_0 + \frac{t_S}{r_S} [A(\lambda_+ - t_S) + B(\lambda_- - t_S)].$$

Substituindo as expressões obtidas para A e B ,

$$L_{\text{ref}} = L_0 \left[r_S + \frac{t_S}{r_S} \frac{(\lambda_+ - t_S) - Q(\lambda_- - t_S)}{1 - Q} \right].$$

Finalmente,

$$A_{\text{geo}} = \frac{L_{\text{ref}}}{L_0} = r_S + \frac{t_S}{r_S} \frac{(\lambda_+ - t_S) - Q(\lambda_- - t_S)}{1 - Q},$$

onde

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 + t_S^2 - r_S^2 \pm \sqrt{(1 + t_S^2 - r_S^2)^2 - 4t_S^2}}{2t_S},$$

e

$$Q = \frac{\lambda_+^{N-1}(\lambda_+ - t_S)}{\lambda_-^{N-1}(\lambda_- - t_S)}.$$

- (c) Em equilíbrio radiativo global, a potência absorvida pelo sistema deve ser igual à potência térmica emitida para o espaço. A potência estelar absorvida vale

$$L_{\text{abs}} = (1 - A_{\text{geo}})L_0.$$

A superfície emite

$$L_{\text{sup}} = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Entretanto, apenas uma fração ϵ_{geo} escapa para o espaço. Assim, a emissão global é

$$L_{\text{emit}} = \epsilon_{\text{geo}} L_{\text{sup}}.$$

Impondo o balanço energético,

$$(1 - A_{\text{geo}})L_0 = \epsilon_{\text{geo}} 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow T = \left[\frac{(1 - A_{\text{geo}})L_0}{4\pi R^2 \sigma \epsilon_{\text{geo}}} \right]^{1/4}.$$

9. A Volta de Henri Lebesgue (50 pontos) Lebesgue está novamente irado. Após corrigir mais uma pilha de exercícios nos quais o Universo era tratado como sendo composto por apenas uma única componente cosmológica, sua paciência finalmente se esgotou. Segundo ele, a humanidade tornou-se excessivamente confortável com aproximações e simplificações. Tomado pela fúria, Lebesgue jurou destruir o Universo utilizando a arma mais poderosa já concebida: uma mudança arbitrária de sistema de coordenadas seguida por uma integral imprópria mal comportada. Contudo, durante os preparativos para o apocalipse, ele tentou resolver exatamente a equação de Friedmann contendo matéria, radiação, curvatura e energia escura. Poucas horas depois, encontrava-se soterrado sob integrais elípticas incompletas, funções elípticas de Jacobi, funções $\wp$ de Weierstrass e outras monstruosidades analíticas que nem mesmo ele desejava corrigir em uma prova. Reconhecendo que talvez algumas aproximações tenham seu valor, Lebesgue decidiu dar uma última chance ao Universo. Para convencê-lo a poupar a existência, você deverá resolver o problema que ele considera digno de um cosmólogo: a evolução de um Universo contendo simultaneamente matéria, radiação e curvatura espacial.

Ao longo desta questão, assuma que o Universo pode ser tratado newtonianamente como homogêneo, isotrópico e de dotado com fator de escala $a(t)$. Defina ainda $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e a densidade crítica atual ρ_c como a densidade que produziria um universo espacialmente plano no instante presente e os parâmetros cosmológicos

$$\Omega_i = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_c}.$$

a) **(11 pontos)** Partindo da conservação da energia, deduza a equação de Friedmann na forma

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_k}{a^2} \right).$$

Mostre também que os parâmetros cosmológicos satisfazem uma relação de fechamento no instante atual.

A partir deste ponto, considere $\Omega_\Lambda = 0$. Definindo o tempo conforme por

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}.$$

b) **(13 pontos)** Considere agora apenas o caso de um universo plano. Prove que $a(\eta)$ pode ser escritos como:

$$a(\eta) = \sqrt{\Omega_r} H_0 \eta + \frac{\Omega_m}{4} H_0^2 \eta^2.$$

Além disso, assumindo a normalização $a(t_0) = 1$, determine explicitamente a idade atual do Universo em função de H_0 , Ω_r e Ω_m .

Dado:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}} = \sqrt{x+a} + C.$$

- (c) **(13 pontos)** Considere agora apenas o caso de um universo fechado. Prove que $a(\eta)$ pode ser escrito como:

$$a(\eta) = \frac{\Omega_m}{2(-\Omega_k)} \left[1 - \cos(H_0 \sqrt{-\Omega_k} \eta) \right] + \sqrt{\frac{\Omega_r}{-\Omega_k}} \sin(H_0 \sqrt{-\Omega_k} \eta).$$

Além disso, mostre que a expansão não pode prosseguir indefinidamente e determine o fator de escala máximo $a_{\max}$ atingido durante a evolução cosmológica. Em seguida, obtenha, mesmo que em função de variáveis auxiliares, o tempo total de vida total T do Universo, desde o Big Bang até o Big Crunch. Deixe sua resposta em função dos parâmetros cosmológicos Ω_i .

Dado:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

- (d) **(13 pontos)** Considere agora apenas um universo aberto. Prove que $a(\eta)$ pode ser escrito como:

$$a(\eta) = \frac{\Omega_m}{2\Omega_k} \left[\cosh(H_0 \sqrt{\Omega_k} \eta) - 1 \right] + \sqrt{\frac{\Omega_r}{\Omega_k}} \sinh(H_0 \sqrt{\Omega_k} \eta).$$

Além disso, considere que um fóton é emitido no instante do Big Bang ($t = 0$) e propaga-se radialmente com velocidade local c . Obtenha a distância comóvel χ_0 percorrida até o instante presente em função dos parâmetros cosmológicos Ω_i .

Dado:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$$

Solução:

- a) Considere uma esfera material de raio físico $R(t) = a(t)\chi$, onde χ é uma coordenada comóvel constante. Pela homogeneidade do Universo, apenas a matéria contida no interior da esfera contribui para a dinâmica de sua borda. A massa encerrada vale

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3.$$

A energia mecânica específica de uma partícula situada na borda da esfera é

$$\varepsilon = \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{2\varepsilon}{R^2}.$$

Usando $R = a\chi$, obtemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2\varepsilon}{\chi^2 a^2} \Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2},$$

onde definimos $-\frac{kc^2}{a^2} \equiv \frac{2\varepsilon}{\chi^2 a^2}$.

Para matéria não relativística, a massa contida em um volume comóvel é conservada. Como o volume cresce proporcionalmente a a^3 , $\rho_m \propto a^{-3}$. Para radiação, além da diluição volumétrica, a energia de cada fóton sofre redshift cosmológico, $E_\gamma \propto a^{-1}$, de modo que $\rho_r \propto a^{-4}$. Por definição, $\rho_\Lambda = \text{constante}$. Já o termo de curvatura obtido acima possui dependência

$$\rho_k \equiv -\frac{3kc^2}{8\pi G a^2},$$

de modo que $\rho_k \propto a^{-2}$. Assim,

$$\rho = \frac{\rho_{r,0}}{a^4} + \frac{\rho_{m,0}}{a^3} + \rho_{\Lambda,0} + \frac{\rho_{k,0}}{a^2}.$$

No instante atual ($a_0 = 1$), definimos a densidade crítica como a densidade que produziria um universo espacialmente plano. Portanto, impondo $k = 0$ na equação de Friedmann,

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \Rightarrow \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Definindo os parâmetros cosmológicos

$$\Omega_i = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_c} \Rightarrow H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_k}{a^2} \right).$$

Por fim, avaliando a equação no instante atual ($a = 1$ e $H = H_0$),

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1.$$

b) A partir deste ponto, consideremos $\Omega_\Lambda = 0$. A equação de Friedmann torna-se

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} \right).$$

Definindo o tempo conforme por

$$d\eta = \frac{dt}{a},$$

Substituindo na equação de Friedmann,

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = H_0^2 (\Omega_r + \Omega_m a + \Omega_k a^2) .$$

Para um universo plano ($\Omega_k = 0$), tomando $\eta = 0$ quando $a = 0$

$$\eta = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x}} .$$

Logo,

$$\eta = \frac{2}{H_0 \Omega_m} \left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m a} - \sqrt{\Omega_r} \right) .$$

Invertendo,

$$a(\eta) = \sqrt{\Omega_r} H_0 \eta + \frac{\Omega_m}{4} H_0^2 \eta^2 .$$

Integrando,

$$t(\eta) = \int_0^\eta a(\eta') d\eta' ,$$

o que fornece

$$t(\eta) = \frac{\sqrt{\Omega_r}}{2} H_0 \eta^2 + \frac{\Omega_m}{12} H_0^2 \eta^3 .$$

A condição de normalização $a(t_0) = 1$ implica

$$1 = \sqrt{\Omega_r} H_0 \eta_0 + \frac{\Omega_m}{4} H_0^2 \eta_0^2 .$$

Trata-se de uma equação quadrática para η_0 ,

$$\frac{\Omega_m}{4} H_0^2 \eta_0^2 + \sqrt{\Omega_r} H_0 \eta_0 - 1 = 0 ,$$

cuja solução física é

$$\eta_0 = \frac{2 \left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m} - \sqrt{\Omega_r} \right)}{\Omega_m H_0} .$$

Substituindo este resultado na expressão para $t(\eta)$,

$$t_0 = \frac{\sqrt{\Omega_r}}{2} H_0 \left[\frac{2 \left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m} - \sqrt{\Omega_r} \right)}{\Omega_m H_0} \right]^2 + \frac{\Omega_m}{12} H_0^2 \left[\frac{2 \left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m} - \sqrt{\Omega_r} \right)}{\Omega_m H_0} \right]^3 .$$

Após simplificação algébrica,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\Omega_m^2} \left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m} - \sqrt{\Omega_r} \right)^2 \left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m} + 2\sqrt{\Omega_r} \right).$$

- c) Consideremos agora apenas o caso de um universo fechado, isto é, $\Omega_k < 0$. O fator de escala máximo é atingido quando a expansão para momentaneamente, ou seja, $\dot{a} = 0$. Da equação de Friedmann,

$$\left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 = H_0^2 (\Omega_r + \Omega_m a + \Omega_k a^2) \Rightarrow \Omega_r + \Omega_m a_{\max} + \Omega_k a_{\max}^2 = 0.$$

Trata-se de uma equação quadrática para $a_{\max}$. Como $\Omega_k < 0$, a solução física é

$$a_{\max} = \frac{-\Omega_m - \sqrt{\Omega_m^2 - 4\Omega_k\Omega_r}}{2\Omega_k}.$$

Para determinar o tempo total de vida do Universo, vamos resolver a equação de Friedmann para universo fechado ($\Omega_k < 0$). Neste caso,

$$\eta = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_k x^2}}.$$

Escrevendo o denominador como

$$\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_k x^2 = \frac{\Omega_m^2 - 4\Omega_k\Omega_r}{4(-\Omega_k)} - (-\Omega_k) \left(x + \frac{\Omega_m}{2\Omega_k} \right)^2,$$

obtemos

$$\eta = \frac{1}{H_0\sqrt{-\Omega_k}} \int_{-\frac{\Omega_m}{2\Omega_k}}^{a - \frac{\Omega_m}{2(-\Omega_k)}} \frac{du}{\sqrt{\frac{\Omega_m^2 - 4\Omega_k\Omega_r}{4(-\Omega_k)^2} - u^2}}.$$

Portanto,

$$H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta = \arcsin \left(\frac{2(-\Omega_k)a - \Omega_m}{\sqrt{\Omega_m^2 - 4\Omega_k\Omega_r}} \right) + \arcsin \left(\frac{\Omega_m}{\sqrt{\Omega_m^2 - 4\Omega_k\Omega_r}} \right).$$

Invertendo a expressão e eliminando a constante angular através das identidades trigonométricas,

$$a(\eta) = \frac{\Omega_m}{2(-\Omega_k)} \left[1 - \cos(H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta) \right] + \sqrt{\frac{\Omega_r}{-\Omega_k}} \sin(H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta).$$

Agora,

$$t(\eta) = \int_0^\eta a(\eta') d\eta',$$

de modo que

$$t(\eta) = \frac{\Omega_m}{2H_0(-\Omega_k)^{3/2}} \left[H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta - \sin(H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta) \right] + \frac{\sqrt{\Omega_r}}{H_0(-\Omega_k)} \left[1 - \cos(H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta) \right].$$

O Universo retorna ao estado $a = 0$ quando ocorre o Big Crunch. Assim,

$$0 = \frac{\Omega_m}{2(-\Omega_k)} \left[1 - \cos u \right] + \sqrt{\frac{\Omega_r}{-\Omega_k}} \sin u,$$

onde definimos

$$u = H_0\sqrt{-\Omega_k} \eta.$$

Utilizando

$$1 - \cos u = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right), \quad \sin u = 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right),$$

obtemos

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right) \left[\frac{\Omega_m}{\sqrt{-\Omega_k}} \sin\left(\frac{u}{2}\right) + 2\sqrt{\Omega_r} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right] = 0.$$

A solução não trivial fornece

$$\tan\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{\Omega_r(-\Omega_k)}}{\Omega_m}.$$

Como o Big Crunch ocorre após a fase de expansão máxima, devemos escolher a solução no intervalo $(\pi, 2\pi)$:

$$u_f = 2\pi - 2 \arctan\left(\frac{2\sqrt{\Omega_r(-\Omega_k)}}{\Omega_m}\right).$$

O tempo total de vida é então $T = t(\eta_f)$, onde

$$t(\eta) = \frac{\Omega_m}{2H_0(-\Omega_k)^{3/2}} \left[u - \sin u \right] + \frac{\sqrt{\Omega_r}}{H_0(-\Omega_k)} \left[1 - \cos u \right].$$

Substituindo $u = u_f$,

$$T = \frac{\Omega_m}{2H_0(-\Omega_k)^{3/2}} \left[u_f - \sin u_f \right] + \frac{\sqrt{\Omega_r}}{H_0(-\Omega_k)} \left[1 - \cos u_f \right],$$

com

$$u_f = 2\pi - 2 \arctan \left(\frac{2\sqrt{\Omega_r(-\Omega_k)}}{\Omega_m} \right).$$

- d) Considere um intervalo de tempo infinitesimal dt . Nesse intervalo, o fóton percorre uma distância física $dR = c dt$. Por outro lado, pela definição da coordenada comóvel, uma variação infinitesimal $d\chi$ corresponde a uma distância física $dR = a(t) d\chi$. Igualando as duas expressões para a distância percorrida,

$$d\chi = \frac{c dt}{a(t)}.$$

Utilizando a definição de tempo conforme,

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow d\chi = c d\eta.$$

Integrando desde o Big Bang até o instante atual,

$$\chi_0 = c \int_0^{\eta_0} d\eta = c \eta_0.$$

Resta determinar η_0 . Resolvendo a equação de Friedmann para um universo aberto ($\Omega_k > 0$), tomando novamente $\eta = 0$ quando $a = 0$,

$$\eta = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_k x^2}}.$$

Completando o quadrado,

$$\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_k x^2 = \Omega_k \left(x + \frac{\Omega_m}{2\Omega_k} \right)^2 + \frac{4\Omega_k \Omega_r - \Omega_m^2}{4\Omega_k}.$$

Assim,

$$\eta = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_k}} \int_{\frac{\Omega_m}{2\Omega_k}}^{a + \frac{\Omega_m}{2\Omega_k}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{4\Omega_k \Omega_r - \Omega_m^2}{4\Omega_k^2}}}.$$

Portanto,

$$H_0 \sqrt{\Omega_k} \eta = \sinh^{-1} \left(\frac{2\Omega_k a + \Omega_m}{\sqrt{4\Omega_k \Omega_r - \Omega_m^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\Omega_m}{\sqrt{4\Omega_k \Omega_r - \Omega_m^2}} \right).$$

Invertendo e eliminando a constante hiperbólica,

$$a(\eta) = \frac{\Omega_m}{2\Omega_k} \left[\cosh(H_0\sqrt{\Omega_k}\eta) - 1 \right] + \sqrt{\frac{\Omega_r}{\Omega_k}} \sinh(H_0\sqrt{\Omega_k}\eta).$$

Finalmente,

$$t(\eta) = \int_0^\eta a(\eta') d\eta',$$

o que resulta em

$$t(\eta) = \frac{\Omega_m}{2H_0\Omega_k^{3/2}} \left[\sinh(H_0\sqrt{\Omega_k}\eta) - H_0\sqrt{\Omega_k}\eta \right] + \frac{\sqrt{\Omega_r}}{H_0\Omega_k} \left[\cosh(H_0\sqrt{\Omega_k}\eta) - 1 \right].$$

No instante atual, $a = 1$. Definindo

$$u = H_0\sqrt{\Omega_k}\eta_0,$$

obtemos

$$1 = \frac{\Omega_m}{2\Omega_k} (\cosh u - 1) + \sqrt{\frac{\Omega_r}{\Omega_k}} \sinh u.$$

Escrevendo

$$\cosh u = \frac{y + y^{-1}}{2}, \quad \sinh u = \frac{y - y^{-1}}{2},$$

com $y = e^u$, segue que

$$4\Omega_k = \Omega_m \left(y + \frac{1}{y} - 2 \right) + 2\sqrt{\Omega_r\Omega_k} \left(y - \frac{1}{y} \right).$$

Multiplicando por y ,

$$(\Omega_m + 2\sqrt{\Omega_r\Omega_k})y^2 - (2\Omega_m + 4\Omega_k)y + (\Omega_m - 2\sqrt{\Omega_r\Omega_k}) = 0.$$

A solução fisicamente relevante é

$$y = \frac{\Omega_m + 2\Omega_k + 2\sqrt{\Omega_k(1 - \Omega_r)}}{\Omega_m + 2\sqrt{\Omega_r\Omega_k}}.$$

Portanto,

$$u = \ln \left[\frac{\Omega_m + 2\Omega_k + 2\sqrt{\Omega_k(1 - \Omega_r)}}{\Omega_m + 2\sqrt{\Omega_r\Omega_k}} \right].$$

Como

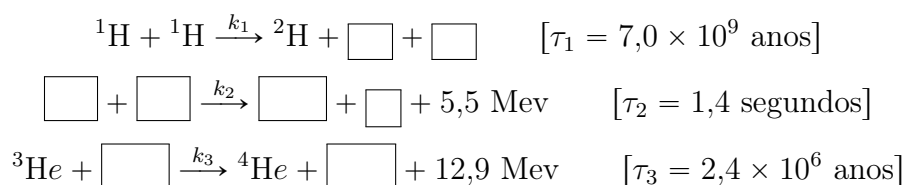
$$\eta_0 = \frac{u}{H_0\sqrt{\Omega_k}},$$

obtemos finalmente

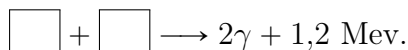
$$\chi_0 = \frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_k}} \ln \left[\frac{\Omega_m + 2\Omega_k + 2\sqrt{\Omega_k(1 - \Omega_r)}}{\Omega_m + 2\sqrt{\Omega_r\Omega_k}} \right].$$

10. Modela Ai: Reações Nucleares (60 pontos) BiBucha, depois de passar horas infinitas sendo forçado a estudar química, teve uma ideia aparentemente maníaca: tentar usar reações nucleares para modelar a evolução térmica de estrelas reais. Apesar da ideia soar inicialmente como uma heresia termodinâmica duvidosa, a física nuclear estelar realmente controla quase toda a evolução de estrelas de baixa massa. O equilíbrio entre colapso gravitacional, transporte radiativo e produção de energia por fusão nuclear determina a estrutura interna, estabilidade e tempo de vida dessas estrelas. O objetivo deste problema será desenvolver um modelo extremamente simplificado, e propositalmente pouco realista, para investigar como reações nucleares podem influenciar a evolução térmica de uma estrela de baixa massa ao longo do tempo.

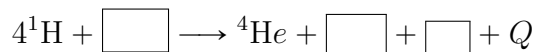
Modele inicialmente o núcleo estelar como uma esfera homogênea composta de gás ideal e isotérmica de raio R_c , massa M_c , densidade uniforme ρ_c e temperatura uniforme T_c . Suponha ainda que a estrela seja composta inicialmente apenas por hidrogênio ionizado e que toda a produção energética nuclear ocorra exclusivamente através da cadeia pp-I. Considere as seguintes reações nucleares dessa cadeia, onde os valores entre colchetes indicam a escala de tempo τ da respectiva reação:



Além disso, considere o processo de aniquilação subsequente:



- (a) **(4 pontos)** Complete as reações nucleares acima e determine a reação global líquida da cadeia pp-I na forma



e determine o valor aproximado de Q em MeV.

- (b) **(6 pontos)** Considere as densidades numéricas $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ e $n_4(t)$, correspondentes respectivamente a ^1H , ^2H , ^3He e ^4He . Determine explicitamente as expressões para todas essas densidades numéricas em função do tempo e das constantes cinéticas k_1 , k_2 e k_3 . Obtenha também a expressão da luminosidade nuclear total $L_{pp}(t)$ em função de Q , das constantes cinéticas e de R_c .

O núcleo não está isolado, mas envolvido por um envelope estelar esférico espesso de massa desprezível frente à massa do núcleo. Suponha que o transporte de energia nesse envelope ocorra exclusivamente por difusão radiativa, de modo que a estrutura térmica do envelope seja descrita por

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi a c r^2 T^3},$$

onde L representa a luminosidade transportada através da camada de raio r , a é a constante da radiação e κ é a opacidade do plasma estelar. Considere ainda que a opacidade siga a lei de Kramers,

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-7/2}.$$

- (c) **(8 pontos)** Desprezando pressão e temperatura superficiais frente aos valores centrais, mostre que a luminosidade transportada pelo envelope satisfaz

$$L = \alpha \frac{T_c^{17/2}}{P_c^2},$$

e determine a constante α em função de M_c .

- (d) **(4 pontos)** Determine a expressão para R_c em função de T_c e M_c . Justifique cuidadosamente as relações utilizadas.

Considerações quânticas associadas ao tunelamento Coulombiano, combinadas com a distribuição de velocidades de Maxwell–Boltzmann do plasma estelar, permitem mostrar que a taxa efetiva da reação inicial da cadeia pp pode ser aproximada por

$$k_1 = AT^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}},$$

onde A e B são constantes positivas.

- (e) **(20 pontos)** Utilizando os resultados anteriores, prove que a evolução térmica do núcleo pode ser escrita na forma

$$\frac{dT}{dt} = \gamma T^{1/2} - \beta \frac{T^{-11/3} e^{-B/T^{1/3}}}{(1 + n_0 A t T^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}})^2}.$$

e determine explicitamente as constantes β e γ em função de M_c , Q , κ_0 e A .

(f) (6 pontos) Defina as variáveis adimensionais

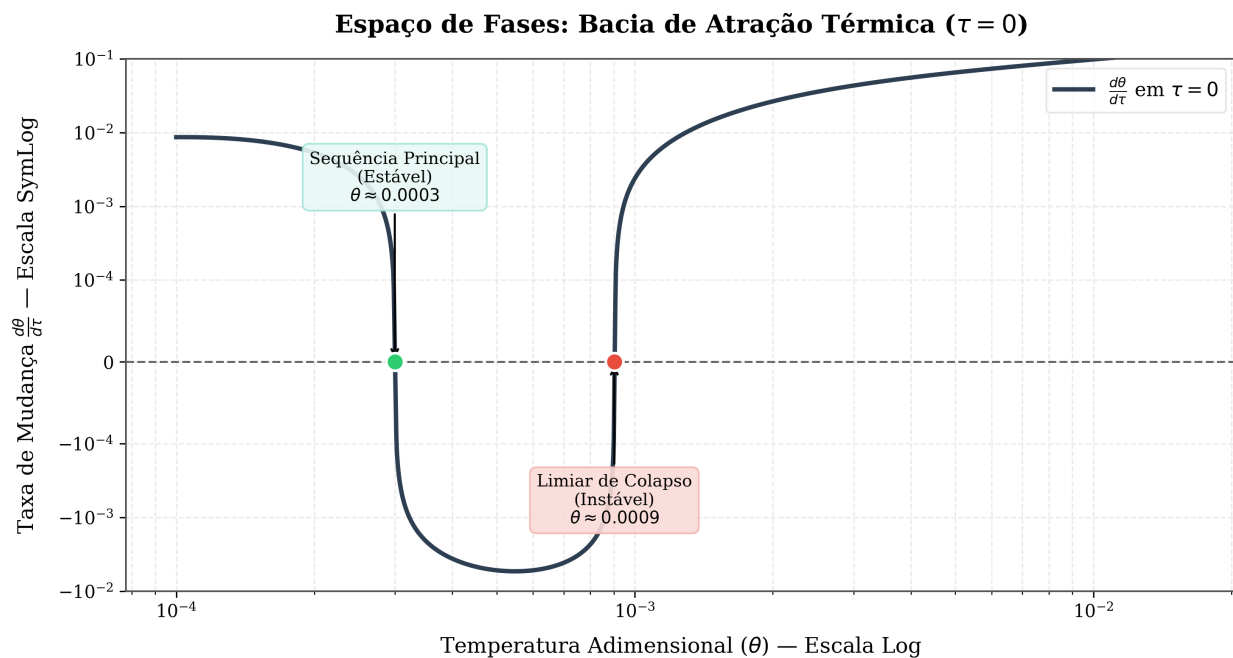
$$\theta = \frac{T}{B^3}, \quad \tau = \frac{\gamma}{B^{3/2}} t.$$

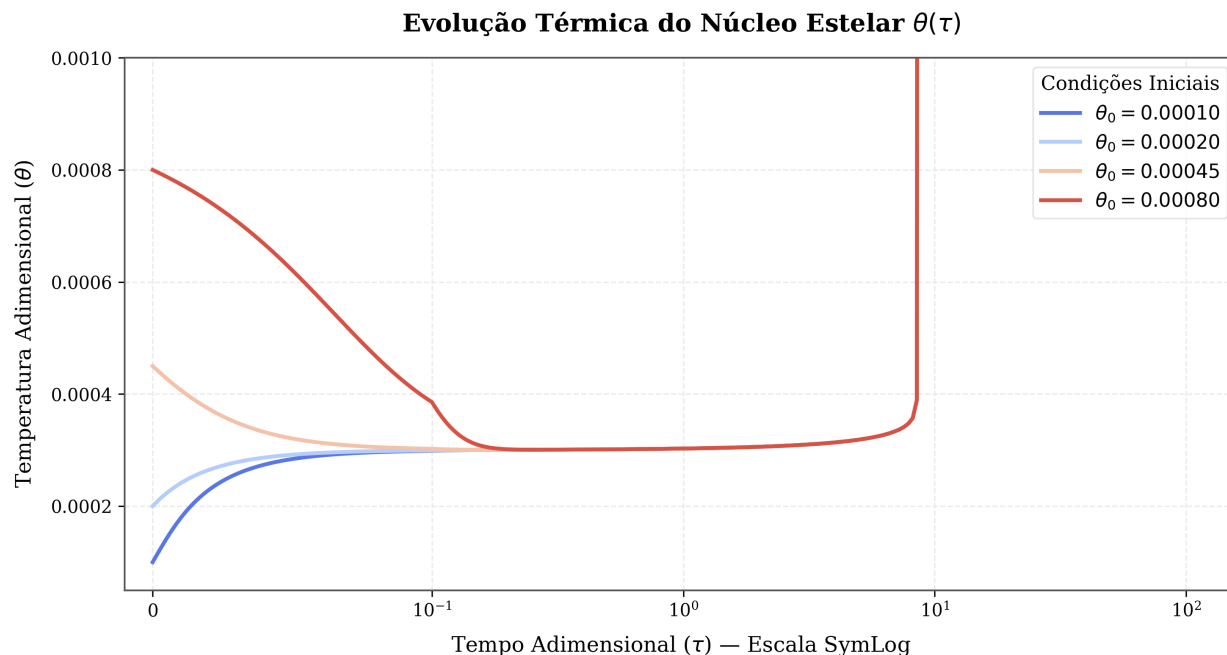
A partir da equação diferencial térmica obtida no item anterior, mostre que a evolução do núcleo pode ser escrita na forma adimensional

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \theta^{1/2} - \Lambda \frac{\theta^{-11/3} e^{-\theta^{-1/3}}}{[1 + \Theta \tau \theta^{-2/3} e^{-\theta^{-1/3}}]^2}.$$

Determine explicitamente as constantes adimensionais Λ e Θ em função de A , B , n_0 , β e γ .

A solução numérica dessa equação diferencial para diversas condições iniciais de temperatura da estrela jovem, fixada uma massa no núcleo, resulta nos seguintes gráficos.





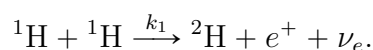
(g) **(12 pontos)** Com base no comportamento obtido para as soluções da equação adimensional e nos gráficos fornecidos, faça o que se pede:

- (i) explicita três previsões físicas principais fornecidas pelo modelo para a evolução térmica do núcleo estelar;
- (ii) discuta se tais previsões são qualitativamente compatíveis com estrelas do tipo solar reais;
- (iii) identifique três fenômenos físicos relevantes para a estrutura e evolução estelar que não são adequadamente descritos pelo modelo desenvolvido;
- (iv) associe cada uma dessas limitações às hipóteses simplificadoras adotadas ao longo da modelagem.

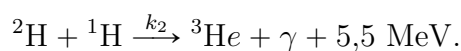
Solução:

- (a) O preenchimento das reações nucleares segue diretamente das leis de conservação de carga elétrica, número bariônico e número leptônico. Na primeira reação, dois prótons produzem um núcleo de deutério. Como a carga total inicial vale +2 e o deutério possui carga +1, deve ocorrer emissão de um pósitron e^+ . Além disso, o pósitron possui número leptônico -1 , exigindo simultaneamente a emissão de um neutrino eletrônico ν_e para conservar o número leptônico total.

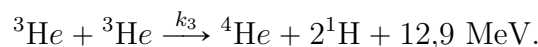
Assim,



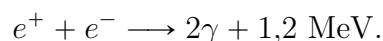
Na segunda reação, o deutério captura um próton formando hélio-3. O excesso energético é emitido na forma de um fóton gama:



Na terceira reação, dois núcleos de hélio-3 fundem produzindo um núcleo de hélio-4 e dois prótons livres:



Os pósitrons produzidos aniquilam-se rapidamente com elétrons do plasma:



Para que a terceira reação ocorra uma vez, as duas primeiras devem ocorrer duas vezes. Somando todas as equações, os núcleos intermediários e os pósitrons cancelam-se, resultando em



A energia total liberada é

$$Q = 2(5,5) + 12,9 + 2(1,2),$$

portanto,

$$\boxed{Q = 26,3 \text{ MeV}}.$$

- (b) A evolução temporal das abundâncias nucleares é descrita pelas equações cinéticas

$$\frac{dn_1}{dt} = -k_1 n_1^2 - k_2 n_1 n_2 + k_3 n_3^2,$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \frac{1}{2} k_1 n_1^2 - k_2 n_1 n_2,$$

$$\frac{dn_3}{dt} = k_2 n_1 n_2 - k_3 n_3^2,$$

$$\frac{dn_4}{dt} = \frac{1}{2} k_3 n_3^2.$$

Como as escalas de tempo satisfazem

$$\tau_2 \ll \tau_3 \ll \tau_1,$$

as espécies intermediárias entram rapidamente em equilíbrio secular. Assim,

$$\frac{dn_2}{dt} \approx 0 \quad \text{e} \quad \frac{dn_3}{dt} \approx 0.$$

Da segunda equação segue

$$n_2 = \frac{k_1}{2k_2} n_1,$$

enquanto da terceira obtemos

$$n_3 = n_1 \sqrt{\frac{k_1}{2k_3}}.$$

Substituindo essas relações na equação de n_1 ,

$$\frac{dn_1}{dt} = -k_1 n_1^2.$$

Separando variáveis,

$$\int_{n_0}^{n_1} \frac{dn_1}{n_1^2} = -k_1 \int_0^t dt.$$

Logo,

$$n_1(t) = \frac{n_0}{1 + n_0 k_1 t}.$$

As abundâncias intermediárias tornam-se

$$n_2(t) = \frac{k_1}{2k_2} \frac{n_0}{1 + n_0 k_1 t}$$

e

$$n_3(t) = \sqrt{\frac{k_1}{2k_3}} \frac{n_0}{1 + n_0 k_1 t}.$$

Usando conservação do número total de núcleons,

$$n_0 = n_1 + 4n_4,$$

segue que

$$n_4(t) = \frac{n_0^2 k_1 t}{4(1 + n_0 k_1 t)}.$$

A luminosidade nuclear total é dada por

$$L_{pp} = QV_c \frac{dn_4}{dt},$$

com

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R_c^3.$$

Portanto,

$$L_{pp} = Q \left(\frac{4}{3}\pi R_c^3 \right) \left(\frac{1}{4}k_1 n_1^2 \right).$$

Finalmente,

$$L_{pp}(t) = \frac{\pi}{3} Q R_c^3 k_1 \frac{n_0^2}{(1 + n_0 k_1 t)^2}.$$

- (c) Reescrevemos inicialmente a equação do transporte radiativo em termos da pressão. Dividindo a equação do gradiente térmico pela equação do equilíbrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_c \rho}{r^2},$$

obtemos

$$\frac{dT}{dP} = \frac{dT/dr}{dP/dr} = \frac{3\kappa_0 \rho L}{16\pi ac G M_c T^{13/2}}.$$

Agora utilizamos a equação de estado do gás ideal,

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H},$$

ou equivalentemente,

$$\rho = \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{P}{T}.$$

Substituindo na equação diferencial anterior,

$$\frac{dT}{dP} = \frac{3\kappa_0 \mu m_H L}{16\pi ac G M_c k_B} \frac{P}{T^{15/2}}.$$

Separando variáveis,

$$T^{15/2}dT = \frac{3\kappa_0\mu m_H L}{16\pi acGM_c k_B} P dP.$$

Integramos agora desde a superfície estelar, onde desprezamos a pressão e a temperatura, até o centro da estrela:

$$\int_0^{T_c} T^{15/2} dT = \frac{3\kappa_0\mu m_H L}{16\pi acGM_c k_B} \int_0^{P_c} P dP.$$

A integração fornece

$$\frac{2}{17} T_c^{17/2} = \frac{3\kappa_0\mu m_H L}{16\pi acGM_c k_B} \frac{P_c^2}{2}.$$

Isolando a luminosidade,

$$L = \left(\frac{64\pi acGM_c k_B}{51\kappa_0\mu m_H} \right) \frac{T_c^{17/2}}{P_c^2}.$$

Portanto,

$$L = \alpha \frac{T_c^{17/2}}{P_c^2}$$

com

$$\alpha = \frac{64\pi acGM_c k_B}{51\kappa_0\mu m_H}.$$

- (d) Como o modelo assume uma esfera homogênea suportada pela pressão térmica de um gás ideal monoatômico, podemos aplicar diretamente o Teorema do Virial escalar,

$$2K + \Omega = 0.$$

A energia potencial gravitacional de uma esfera homogênea vale

$$\Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM_c^2}{R_c},$$

enquanto a energia cinética térmica total do gás é

$$K = \frac{3}{2} N k_B T_c.$$

O número total de partículas é dado por

$$N = \frac{M_c}{\mu m_H},$$

logo,

$$K = \frac{3}{2} \left(\frac{M_c}{\mu m_H} \right) k_B T_c.$$

Aplicando agora o Teorema do Virial,

$$2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{M_c}{\mu m_H} \right) k_B T_c \right] - \frac{3}{5} \frac{G M_c^2}{R_c} = 0.$$

Simplificando,

$$\frac{3 M_c k_B T_c}{\mu m_H} = \frac{3}{5} \frac{G M_c^2}{R_c}.$$

Isolando o raio do núcleo,

$$R_c = \frac{1}{5} \frac{G M_c \mu m_H}{k_B T_c}.$$

- (e) Inicialmente, a evolução térmica do núcleo é governada pela primeira lei da termodinâmica:

$$\frac{dQ}{dt} = L_{pp} - L = \frac{dU}{dt} + P \frac{dV}{dt}.$$

Para um gás ideal monoatômico homogêneo,

$$U = \frac{3}{2} N k_B T, \quad N = \frac{M_c}{\mu m_H}.$$

Logo,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{3}{2} N k_B \frac{dT}{dt}.$$

Do item anterior,

$$R_c = \frac{G M_c \mu m_H}{5 k_B T},$$

de modo que

$$V \propto R_c^3 \propto T^{-3}.$$

Assim,

$$\frac{dV}{dt} = -3 \frac{V}{T} \frac{dT}{dt}.$$

Usando agora a equação de estado do gás ideal,

$$P = \frac{Nk_B T}{V},$$

segue que

$$P \frac{dV}{dt} = \left(\frac{Nk_B T}{V} \right) \left(-3 \frac{V}{T} \frac{dT}{dt} \right) = -3Nk_B \frac{dT}{dt}.$$

Substituindo tudo na primeira lei,

$$L_{pp} - L = \frac{3}{2} Nk_B \frac{dT}{dt} - 3Nk_B \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} Nk_B \frac{dT}{dt}.$$

Portanto,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2\mu m_H}{3M_c k_B} (L - L_{pp}).$$

Do item radiativo,

$$L = \alpha \frac{T_c^{17/2}}{P_c^2}.$$

Além disso,

$$P_c = \frac{\rho_c k_B T}{\mu m_H}, \quad \rho_c \propto R_c^{-3} \propto T^3.$$

Logo,

$$P_c \propto T^4 \quad \Rightarrow \quad L \propto T^{17/2} T^{-8} = T^{1/2}.$$

Agora analisamos a produção nuclear.

Do item (b),

$$L_{pp}(t) = \frac{\pi}{3} Q R_c^3 k_1 \frac{n_0^2}{(1 + n_0 k_1 t)^2}.$$

Além disso, pelo fator de Gamow,

$$k_1 = A T^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}}.$$

Como

$$R_c^3 \propto T^{-3},$$

segue inicialmente que

$$L_{pp} \propto \frac{T^{-11/3} e^{-B/T^{1/3}}}{(1 + n_0 k_1 t)^2}.$$

Entretanto, o próprio termo temporal ainda depende de T , pois k_1 aparece explicitamente no denominador. Substituindo novamente a expressão do fator de Gamow,

$$L_{pp} \propto \frac{T^{-11/3} e^{-B/T^{1/3}}}{[1 + n_0 A t T^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}}]^2}.$$

Substituindo a expressão de $R_c(T)$ obtida anteriormente e simplificando os fatores algébricos, segue que

$$L_{pp} = \frac{\pi Q A G^3 M_c^3 \mu^3 m_H^3 n_0^2}{375 k_B^3} \frac{T^{-11/3} e^{-B/T^{1/3}}}{[1 + n_0 A t T^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}}]^2}.$$

De maneira análoga, substituindo a relação hidrostática na luminosidade radiativa e simplificando as dependências térmicas, obtemos

$$L = \frac{1024 \pi^3 a c G^7 M_c^6 \mu^9 m_H^9}{2689453125 \kappa_0 k_B^9} T^{1/2}.$$

Finalmente, inserindo ambas as expressões na equação térmica global e absorvendo os fatores constantes nas definições de β e γ , segue

$$\frac{dT}{dt} = \gamma T^{1/2} - \beta \frac{T^{-11/3} e^{-B/T^{1/3}}}{[1 + n_0 A t T^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}}]^2}$$

com

$$\beta = \frac{2 \pi Q A G^3 M_c^2 \mu^4 m_H^4 n_0^2}{1125 k_B^4}$$

e

$$\gamma = \frac{2048 \pi^3 a c G^7 M_c^5 \mu^8 m_H^8}{8068359375 \kappa_0 k_B^{10}}.$$

(f) Partimos da equação térmica obtida anteriormente:

$$\frac{dT}{dt} = \gamma T^{1/2} - \beta \frac{T^{-11/3} e^{-B/T^{1/3}}}{[1 + n_0 A t T^{-2/3} e^{-B/T^{1/3}}]^2}.$$

Agora introduzimos as variáveis adimensionais

$$\theta = \frac{T}{B^3}, \quad \tau = \frac{\gamma}{B^{3/2}} t.$$

Equivalentemente,

$$T = B^3 \theta, \quad t = \frac{B^{3/2}}{\gamma} \tau.$$

Derivando $T = B^3 \theta$ em relação ao tempo,

$$\frac{dT}{dt} = B^3 \frac{d\theta}{dt}.$$

Como

$$\tau = \frac{\gamma}{B^{3/2}} t,$$

segue que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma}{B^{3/2}} \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Logo,

$$\frac{dT}{dt} = \gamma B^{3/2} \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Agora substituímos todas as dependências térmicas:

$$T^{1/2} = B^{3/2} \theta^{1/2},$$

$$T^{-11/3} = B^{-11} \theta^{-11/3},$$

$$e^{-B/T^{1/3}} = e^{-\theta^{-1/3}},$$

pois

$$T^{1/3} = B \theta^{1/3}.$$

Além disso,

$$tT^{-2/3} = \left(\frac{B^{3/2}}{\gamma} \tau \right) (B^{-2} \theta^{-2/3}) = \frac{\tau}{\gamma B^{1/2}} \theta^{-2/3}.$$

Substituindo tudo na equação diferencial,

$$\gamma B^{3/2} \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma B^{3/2} \theta^{1/2} - \beta B^{-11} \frac{\theta^{-11/3} e^{-\theta^{-1/3}}}{\left[1 + \frac{n_0 A}{\gamma B^{1/2}} \tau \theta^{-2/3} e^{-\theta^{-1/3}} \right]^2}.$$

Dividindo toda a equação por $\gamma B^{3/2}$,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \theta^{1/2} - \frac{\beta}{\gamma B^{25/2}} \frac{\theta^{-11/3} e^{-\theta^{-1/3}}}{\left[1 + \frac{n_0 A}{\gamma B^{1/2}} \tau \theta^{-2/3} e^{-\theta^{-1/3}} \right]^2}.$$

Portanto,

$$\boxed{\Lambda = \frac{\beta}{\gamma B^{25/2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\Theta = \frac{n_0 A}{\gamma B^{1/2}}}.$$

- (g) (i) A primeira previsão importante é a existência de uma fase inicial de aquecimento gravitacional. Para estrelas iniciadas abaixo da temperatura de equilíbrio, o termo radiativo domina inicialmente sobre a geração nuclear, fazendo com que o núcleo contraia e aqueça rapidamente.

O gráfico também revela a existência de um regime de equilíbrio térmico estável extremamente duradouro, correspondente a um platô aproximadamente horizontal. Nesse regime, a produção de energia nuclear compensa quase exatamente as perdas radiativas, produzindo um mecanismo de autorregulação térmica.

Além disso, o modelo prevê uma lenta elevação da temperatura mesmo durante o equilíbrio. À medida que o combustível é consumido, a estrela precisa contrair gradualmente para manter a taxa de fusão necessária contra as perdas energéticas.

Por fim, o modelo prevê uma ruptura tardia desse equilíbrio. Quando a abundância de hidrogênio torna-se insuficiente, o núcleo perde sustentação térmica eficiente, sofre nova contração gravitacional e entra numa fase de rápido aquecimento final acompanhada de diminuição do raio nuclear.

- (ii) As previsões qualitativas obtidas são, em grande parte, compatíveis com a evolução conhecida de estrelas do tipo solar. A fase inicial de aquecimento reproduz corretamente a contração de Kelvin–Helmholtz observada em protoestrelas antes do início da fusão nuclear sustentada.

O longo platô de estabilidade corresponde naturalmente à Sequência Principal, fase em que estrelas solares passam bilhões de anos convertendo hidrogênio em hélio através da cadeia pp.

O lento aumento de temperatura durante o equilíbrio também está de acordo com a evolução real do Sol. Conforme o núcleo acumula hélio, ele se contrai lentamente e sua temperatura central cresce progressivamente ao longo do tempo.

A ruptura final do equilíbrio reproduz qualitativamente o colapso do núcleo após o esgotamento do hidrogênio central, etapa que antecede a formação de gigantes vermelhas.

Portanto, apesar das simplificações severas do modelo, sua estrutura global consegue reproduzir corretamente os principais estágios qualitativos da evolução de estrelas de baixa massa.

- (iii) Apesar dos sucessos qualitativos, o gráfico também evidencia diversos comportamentos fisicamente inadequados ou excessivamente simplificados. As curvas podem iniciar em temperaturas arbitrariamente altas e depois resfriar até o equilíbrio. Estrelas reais não nascem quentes; elas se formam a partir do colapso gravitacional de nuvens moleculares frias.

A região de estabilização é excessivamente suave e regular. Em estrelas jovens reais, o transporte convectivo domina grande parte da dinâmica interna, produzindo regiões turbulentas e estruturas muito menos suaves.

O equilíbrio térmico previsto pelo modelo também apresenta uma inclinação relativamente forte. Em estrelas solares reais, a estabilidade da Sequência Principal é significativamente mais rígida e prolongada.

Além disso, o modelo não prevê mudanças estruturais abruptas associadas à ignição de novos ciclos de fusão, nem reproduz a formação de regiões de queima em casca.

Finalmente, a temperatura cresce indefinidamente no regime final sem qualquer novo mecanismo de estabilização, o que é incompatível com a física real de núcleos estelares degenerados.

- (iv) A possibilidade de iniciar o sistema em temperaturas arbitrárias surge do fato de o modelo ignorar completamente o processo físico real de formação estelar, tratando apenas a evolução térmica interna através de uma equação diferencial efetiva.

A ausência de turbulência e de regiões convectivas decorre diretamente da hipótese de transporte puramente radiativo no envelope estelar. O modelo ignora completamente o critério de Schwarzschild e, portanto, não reproduz zonas convectivas.

A estabilidade excessivamente simples da Sequência Principal aparece porque toda a produção energética foi reduzida exclusivamente à cadeia pp-I. O modelo ignora ciclos nucleares mais sensíveis à temperatura, como o ciclo CNO, que alterariam fortemente a rigidez do termostato estelar.

A inexistência de transições estruturais violentas está ligada à hipótese de núcleo homogêneo com densidade e temperatura uniformes. Isso impede

o aparecimento de regiões distintas de queima nuclear, como a importante queima em casca.

Já o crescimento assintótico e ilimitado da temperatura decorre da manutenção artificial do gás ideal em qualquer regime físico, além da proibição explícita de novos canais de nucleossíntese, como o processo triplo-alfa e os efeitos de degenerescência eletrônica.