

Astronomia Olímpica

Feito por medalhistas nacionais e internacionais

Primeira edição



Esta página fue dejada en blanco intencionalmente.

Astronomía Olímpica

Edición 1.2

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Octubre de 2021

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Sumário

Créditos y Contato	7
Guía y Erratas	11
Tabla de Constantes	14
Donaciones	15
1 Métodos Matemáticos	16
1.1 Estrategias Generales	16
1.2 Unidades y Análisis Dimensional	19
1.3 Aproximaciones	24
1.3.1 Numericas	25
1.3.2 Trigonómicas	25
1.3.3 Binomial	28
1.3.4 Ideas Importantes	30
1.4 Calculadora	38
1.4.1 Interfaz	38
1.4.2 SHIFT y ALPHA	41
1.4.3 Teclas Especiales	42
1.4.4 Uso de los Paréntesis	44
1.4.5 Memoria de la Calculadora	46
1.4.6 Ángulos	49
1.5 Cifras Significativas	51
1.5.1 Reglas	52
1.5.2 Operaciones	53
1.6 Matemática Elemental	54
1.6.1 Operaciones con fracciones	54
1.6.2 Potenciación	56
1.6.3 Notación científica	60
1.6.4 Conversión de unidades	61
1.6.5 Razones y proporciones	64
1.6.6 Ecuaciones de Primer Grado	67
1.6.7 Ecuaciones de segundo grado	70

1.6.8	Logaritmos	73
1.7	Geometría Elemental	77
1.7.1	Rectas paralelas y perpendiculares	77
1.7.2	Ángulos Complementarios y Suplementarios	78
1.7.3	Ángulos Opuestos por el Vértice	79
1.7.4	Ángulos en Rectas Paralelas	80
1.7.5	Similitud	81
1.7.6	Círculo y Circunferencia	83
1.7.7	Áreas y Volúmenes	89
1.8	Trigonometría Elemental	91
1.8.1	Teorema de Pitágoras	91
1.8.2	Relaciones Trigonométricas	92
1.8.3	Propiedades	93
1.8.4	Círculo Trigonométrico	98
1.8.5	Otras Funciones	101
1.8.6	Ecuaciones Trigonométricas	102
1.8.7	Ley de Senos y Ley de Cosenos	105
1.9	Problemas	112
1.10	Solución	114
2	Mecánica Celeste	124
2.1	Leyes de Newton	124
2.2	Órbitas circulares	128
2.2.1	Movimiento Circular Uniforme	128
2.2.2	Aceleración centrípeta	129
2.2.3	La Órbita Circular	131
2.3	Elipses	133
2.3.1	Definiciones	133
2.3.2	Propiedades	134
2.4	Leyes de Kepler	143
2.5	Energías	145
2.6	Tipos de Órbitas	148
2.6.1	Hipérbola	151
2.6.2	Parábola	154
2.6.3	Velocidad de Escape	155
2.6.4	Radio de Schwarzschild	157
2.7	Momento Lineal	160
2.8	Momento Angular	161
2.9	Problemas	169
2.10	Solución	176

3	Fotometría	194
3.1	Espectroscopía	194
3.1.1	Radiación	194
3.1.2	Espectro	197
3.1.3	Leyes de Kirchhoff	198
3.1.4	Espectro de las Estrellas	199
3.2	Efecto Doppler y Redshift	200
3.2.1	Efecto Doppler	200
3.2.2	No Relativista	201
3.2.3	Relativista	204
3.3	Luminosidad y Flujo	207
3.3.1	Luminosidad	207
3.3.2	Flujo	207
3.4	Cuerpo Negro	210
3.4.1	Radiancia Espectral	211
3.4.2	Importancia de los Cuerpos Negros	212
3.4.3	Ley de Wien	213
3.4.4	Ley de Stefan-Boltzmann	215
3.5	Albedo	216
3.5.1	Temperatura de um Planeta	217
3.5.2	Brillo de la Luna	219
3.6	Magnitudes	222
3.6.1	Absoluta	224
3.6.2	Distancias	225
3.6.3	Bandas	227
3.7	Clasificación Estelar	228
3.7.1	Clasificación de Harvard	228
3.7.2	Clasificación de Yerkes	229
3.7.3	El Diagrama HR	232
3.8	Problemas	235
3.9	Gabarito :) (Soluciones)	242
4	Telescopios y Detectores	264
4.1	Luz	264
4.1.1	Reflexión y Refracción	265
4.2	Lentes y Espejos	267
4.2.1	Espejos Planos	267
4.2.2	Lentes	268
4.2.3	Espejos Esféricos	273
4.3	Formación de imágenes	276
4.4	Tipos de telescopios	280
4.4.1	Refractores	280
4.4.2	Reflectores	281
4.4.3	Compuestos o Catadióptricos	283
4.4.4	Radiotelescopios	284

4.5	Monturas y Accesorios	286
4.5.1	Altazimutal	286
4.5.2	Equatorial	287
4.5.3	Accesorios	289
4.5.4	CCD's	290
4.6	Ganancia y Magnitud Límite	291
4.6.1	Ganancia	291
4.6.2	Magnitud Límite	292
4.7	Resolución Angular	294
4.7.1	Difracción de la Luz	294
4.7.2	Criterio de Rayleigh	295
4.8	Características Físicas	297
4.8.1	Distancia Focal	297
4.8.2	Aumento	297
4.8.3	Relación (Razón) Focal	301
4.8.4	Salida de Pupila	301
4.8.5	Eficiencia Cuántica	303
4.8.6	Longitud	303
4.9	Escala de Placa	305
4.9.1	Definición	305
4.9.2	En CCD's	307
4.10	Fenómenos Ópticos	309
4.10.1	Aberración Cromática	309
4.10.2	Refracción Atmosférica	312
4.10.3	Extinción Atmosférica	313
4.10.4	Seeing/Cintilación	316
4.11	Problemas	317
4.12	Gabarito	320
5	Astronomía de Posición	327
5.1	La Esfera Celeste	327
5.1.1	Elementos	328
5.2	Sistemas de Coordenadas	329
5.2.1	Geográficas	330
5.2.2	Ecuatoriales	331
5.2.3	Horizontales	332
5.2.4	Horarias	337
5.2.5	Eclípticas	340
5.2.6	Galácticas	344
5.2.7	Resumo	346
5.3	Movimiento Diurno de los Astros	346
5.3.1	Salida, Puesta y Pasaje Meridiano de un Astro	349
5.3.2	Culminación	349
5.3.3	Estrellas Circumpolares	352
5.3.4	Sol	356

5.3.5	Luna	359
5.4	Trigonometría Esférica	359
5.4.1	Triángulos Esféricos	359
5.4.2	Ley de los Cosenos	362
5.4.3	Ley de los Senos	363
5.4.4	Ley de los Cuatro Elementos	364
5.5	Ejemplos	365
5.5.1	Distancia Angular	365
5.5.2	Triángulo de Posición	366
5.5.3	Tiempo Encima del Horizonte	368
5.5.4	Conversión entre Sistemas de Coordenadas	369
5.6	Consejos	372
5.7	Problemas	373
5.8	Solución	378
6	Escalas de Tiempo	401
6.1	Proyectando en el Ecuador Celeste	401
6.2	Sol Verdadero y Sol Medio	402
6.3	Escala Solar	405
6.4	Escala Sideral	406
6.4.1	Período Sideral e Sinódico	406
6.4.2	Conversión	409
6.4.3	Tiempo Sideral	411
6.5	Definiciones	412
6.6	Definiciones	412
6.6.1	Greenwich	412
6.6.2	Husos horarios	413
6.6.3	Tiempo de fuso	414
6.7	Traslación de la Tierra y la Luna	415
6.7.1	Tipos de años	416
6.7.2	Meses de la Luna	416
6.8	Problemas	417
6.9	Gabarito	420
7	Sistemas Binarios	424
7.1	Centro de Masa	424
7.2	Órbitas Circulares	428
7.2.1	Velocidades y Distancias	430
7.3	Caso general	431
7.3.1	Formato	432
7.3.2	Excentricidad	433
7.4	Inclinación orbital	436
7.5	Binarias Visuales	443
7.6	Binarias Astrométricas	444
7.7	Binarias Espectroscópicas	446

7.8	Binarias Eclipsantes	451
7.8.1	Flujos	452
7.8.2	Intervalos de Tiempo	455
7.9	Problemas	460
7.10	Gabarito	471
A	Cosmología	487
A.1	Lei de Hubble-Lemaître	487
A.2	Redshift Cosmológico	490
B	Paralaxe	492
C	Órbitas dos Planetas	497
C.1	Planetas Interiores e Exteriores	497
C.2	Inclinação da Órbita	497
C.3	Inclinação do Eixo de Rotação	499
C.4	Precessão e Nutação	500
C.5	Configurações Planetárias	502
D	Analema	504
D.1	Variação da Declinação do Sol	505
D.2	Equação do Tempo	507
D.3	Efeitos Combinados	509
E	Relógio de Sol	513
E.1	Horizontal	513
E.2	Vertical	516
F	Movimento Próprio	519
F.1	Esfera Celeste	521
G	Eclipses	530
G.1	Fases da Lua	530
G.2	Eclipses	535
H	Ângulo Sólido	541
H.1	Cones	542
H.2	Conversão	543

Créditos y Contato

Autores

- Breno de Carvalho Correia
- Bruno Makoto Tanabe de Lima (Coordenador)
- Caroline Vasconcelos Schmitt
- Davi Lucas Marques de Freitas
- Fabrício Melges Ferro
- Felipe Maia Silva (Coordenador)
- Gabriel Consentino B. Chalfun
- Ian Seo Takose
- João Dionísio Ribeiro
- Luan de Souza Silva
- Luís Fernando de Oliveira Souza
- Otávio Casagrande Ferrari

Traductores

- Maria Sophia Gómez Cortes
- Camilo Andrés Cruz González
- Cristian Camilo Echeverri Valencia
- Jaime Miguel Pardo Acevedo
- Juan David Rangel
- Caroline Vasconcelos Schmitt

Autores de los capítulos

1. Métodos Matemáticos

- Teoria: Fabrício e Ian
- Probs.: Bruno
- Revisão: Bruno

2. Mecânica Celeste

- Teoria: Breno/Bruno/Luan
- Probs.: João e Luís
- Revisão: Bruno

- 3. Fotometria
 - Teoria: Gabriel e Otávio
 - Probs.: Davi, Gabriel e Otávio
 - Revisão: Bruno
- 4. Telescópios e Detectores
 - Teoria: Bruno/Gabriel/João
 - Probs.: Carol e João
 - Revisão: Bruno
- 5. Astronomia de Posição
 - Teoria: Otávio
- 6. Escalas de Tempo
 - Probs.: Luís e Otávio
 - Revisão: Bruno
- 7. Sistemas Binários
 - Teoria: Bruno
 - Probs.: Bruno e Felipe
 - Revisão: Otávio

Autores de los apéndices

1. Cosmología

- Teoría: Breno
- Revisión: Bruno

2. Paralaje

- Teoría: Breno
- Revisión: Bruno

3. Órbitas de los Planetas

- Teoría: Bruno
- Revisión: Otávio

4. Analema

- Teoría: Otávio
- Revisión: Bruno

5. Reloj de Sol

- Teoría: Bruno
- Revisión: Otávio

6. Movimiento Propio

- Teoría: Gabriel e Bruno
- Revisión: Bruno

7. Eclipses

- Teoría: Breno
- Revisión: Bruno

8. Ángulo Sólido

- Teoría: Gabriel
- Revisión: Bruno

Portada

- Imagem de fondo: Olga Witzler Ismael ([Astrobin](#), [Instagram](#))
- Formato de la portada: Breno de Carvalho Correia

Descripción de la foto:

(Por Olga W. Ismael) El cometa C/2020 F3 (NEOWISE), el más brillante desde el paso del cometa Halley en 1997, estuvo en su perihelio el 3 de julio de 2020. En los horizontes de la Serra da Mantiqueira, el cometa Neowise pudo revelarse con todo su esplendor, incluso utilizando un equipo simple compuesto por una cámara DSLR, una lente sencilla y un trípode sin seguimiento celeste.

La foto fue tomada el 25 de julio, cuando el cometa ya tenía una magnitud aparente de +5. Los observadores del hemisferio norte fueron privilegiados con una mejor vista del cometa, ya que tenía una órbita perpendicular al ecuador celeste, moviéndose de norte a sur. Mientras el cometa comenzaba a ser visible en el hemisferio sur en dirección noroeste, después de pasar detrás del Sol, cada día se encontraba más alto y menos brillante. La Luna creciente se aproximaba, y su brillo dificultaba la observación y fotografía del cometa. A simple vista, el Neowise apenas podía notarse. Sin embargo, con binoculares, el núcleo del cometa se veía como una mancha gris y difusa.

Así, el 25 de julio, con el cielo completamente despejado, la clásica temperatura seca e intensa del invierno del sur de Minas Gerais y 2 horas de caminata hasta la montaña más cercana con vista despejada al horizonte, se tomaron 120 imágenes de 10 segundos, minutos después del atardecer y fueron procesadas con técnicas avanzadas. Su cola azul, compuesta por gas e iones, fue difícil de observar en el hemisferio sur. Sin embargo, la cola dorada fue fácilmente visible, con una señal destacada en la imagen. Esta fotografía es un registro de una de las efímeras maravillas de la naturaleza. Desafortunadamente, el próximo paso del cometa Neowise será dentro de 6800 años.

Fecha de la foto: 25/07/2020



Figura 1: Ilustración de la trayectoria del cometa en la esfera celeste

Licencia de la foto:

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Contacto

Telegram 

<https://t.me/joinchat/4vexIHlcjE04NDU5/>

Instagram 

@projetonoi

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Guía y Erratas

El objetivo principal de este libro es ayudar a los estudiantes que sueñan con representar a Brasil en una olimpiada internacional de astronomía. El primer paso para ello es conocer el proceso:

1. OBA

La Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) es la puerta de entrada al proceso de selección de los estudiantes que participarán en las pruebas para las competencias internacionales. Al ser una olimpiada de gran escala, su principal objetivo es fomentar el interés de los jóvenes por la astronomía, la física y las ciencias afines. Los estudiantes del 9° año que obtengan más de 9 puntos y los estudiantes de enseñanza media que obtengan más de 7 pasan a la siguiente etapa.

2. Selectivas en línea

Cerca de 10.000 estudiantes son invitados a participar en las selectivas en línea, que consisten en tres pruebas virtuales con el objetivo de seleccionar a 150 alumnos para la siguiente etapa. La nota obtenida en la OBA no influye en la clasificación, pero hay un gran salto de nivel entre estas dos fases: mientras la OBA tiene un carácter más informativo, las selectivas en línea exigen que el alumno haya estudiado previamente varios contenidos fundamentales de astronomía y física.

3. Barra do Piraí

Cada año, por la mitad del mes de marzo, unos 150 jóvenes se reúnen en un hotel hacienda en la ciudad de Barra do Piraí - RJ, para realizar una serie de pruebas que seleccionan a aproximadamente 30 alumnos para la etapa final. La estadía en el hotel tiene un costo aproximado de mil reales - si no tienes condiciones para cubrir ese valor, consulta la sección de [Donaciones](#) al inicio del libro.

4. Entrenamientos en Vinhedo

La última etapa del proceso ocurre durante el primer semestre del año y consiste en dos fases, conocidas como T1 y T2. En la ciudad de Vinhedo - SP, unos 30 alumnos se reúnen en un monasterio para realizar exámenes y tener clases con profesores reconocidos en la enseñanza de astronomía en Brasil y en el mundo. En esta etapa, los estudiantes son evaluados mediante pruebas elaboradas por ex-participantes brasileños de olimpiadas internacionales, para seleccionar a los **10** alumnos que representarán a Brasil en el mundo: 5 en la olimpiada internacional (IOAA) y 5 en la olimpiada latinoamericana (OLAA).

Cada una de estas etapas es más selectiva que la anterior y, por lo tanto, exige cada vez más del estudiante. El NOIC cuenta con guías para cada una de ellas, que pueden ser accedidas a través de [este enlace](#). Sin embargo, todas las pruebas de las etapas selectivas presentan una característica en común: el contenido evaluado es esencialmente el mismo. A lo largo del proceso, el principal factor que hace que las pruebas de Vinhedo sean más difíciles que las selectivas en línea no es la presencia de temas más avanzados, sino un mayor grado de profundización en los mismos conceptos básicos evaluados inicialmente. La astronomía es la herramienta, no la llave de todo el proceso. De este modo, este libro enseña los contenidos principales para que todo estudiante pueda desarrollar la base necesaria para clasificarse en una olimpiada internacional.

El único requisito previo para aventurarse por las próximas páginas es tener la voluntad de aprender - todo lo demás es consecuencia de ello. Sin embargo, vale la pena resaltar que, aunque el primer capítulo posea una sección dedicada a las matemáticas básicas, es inevitable que conocer los fundamentos del lenguaje que será utilizado a lo largo de este libro sea muy útil para aprovecharlo al máximo.

No fim de cada capítulo, há cerca de 10 questões divididas em 3 níveis: iniciante, intermediário e avançado. A primeira divisão foi pensada para uma questão das seletivas online, enquanto a última apresenta o calibre de uma questão de Barra do Piraí. As intermediárias enquadram-se em um meio-termo. Recomendamos que você faça muitos problemas além daqueles presentes neste livro, como os recomendados nos guias de estudo. Além disso, os apêndices são essencialmente capítulos curtos de tópicos que não se enquadravam bem nos demais capítulos. Assim, é fortemente recomendado estudá-los.

Al final de cada capítulo, hay alrededor de 10 preguntas divididas en tres niveles: inicial, intermedio y avanzado. La primera división fue pensada para una pregunta de las etapas selectivas en línea, mientras que la última presenta el nivel de una pregunta de Barra do Piraí. Las intermedias se encuentran en un punto medio. Recomendamos que resuelvas muchos más problemas además

de los presentes en este libro, como los recomendados en las guías de estudio. Además, los apéndices son esencialmente capítulos cortos de temas que no encajaban bien en los demás capítulos, por lo que se recomienda encarecidamente estudiarlos.

Por último, si encuentras algún error (gramatical, algebraico, etc.), por favor completa [este formulario](#) para que el equipo del NOIC pueda corregirlo en una futura edición. Para dudas adicionales, envíanos un mensaje a través de [este canal](#) de Telegram —¡será un placer ayudarte!

Tabla de Constantes

Masa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Tierra
Radio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleración de la gravedad superficial	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Oblicuidad de la eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Año tropical	365,2422 días solares medios	
Año sidereal	365,2564 días solares medios	
Albedo	0,39	
Día sidereal	$23h \ 56min \ 04s$	
Masa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Luna
Radio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distancia media a la Tierra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinación orbital con la eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Mag. aparente (luna llena media)	$-12,74 \text{ mag}$	
Masa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Radio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidad ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitud absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitud aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diámetro angular	$32'$	
Diámetro de la pupila humana	6 mm	Distancias y tamaños
Mag. límite del ojo humano desnudo	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidad de la luz en el vacío (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Donaciones

El Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC — es una iniciativa sin fines de lucro con la intención de ayudar a estudiantes interesados en participar en olimpiadas científicas. La sección de astronomía fue creada en 2017 y, desde entonces, ya ha producido guías de estudio, cientos de clases teóricas, decenas de simulacros y, más recientemente, ¡un libro! De este modo, nos gustaría pedir tu ayuda, lector, en esta misión de democratizar el conocimiento.

Este libro fue escrito principalmente para jóvenes estudiantes que sueñan con representar a Brasil en una olimpiada internacional de astronomía. El proceso para ello comienza en la OBA y pasa por otras 3 etapas, de las cuales dos - Barra do Piraí y Vinhedo - son presenciales y representan un costo para el estudiante (sin contar el desplazamiento, cerca de mil reales). Lamentablemente, la situación económica de Brasil hace que, todos los años, estudiantes clasificados para estas etapas no puedan asistir debido a los gastos, terminando así con el sueño de competir en nombre de Brasil alrededor del mundo.

Por lo tanto, con la intención de remediar este problema, el NOIC está creando una campaña para apoyar económicamente a los estudiantes que comprueben la necesidad financiera de cubrir los costos del viaje. A comienzos de 2022 (¡y, si todo sale bien, también en los años siguientes!) organizaremos una prueba para seleccionar algunos estudiantes que se encuentren en esta condición. Si tienes interés en apoyar la causa, te pedimos que accedas al enlace abajo para entender el funcionamiento del proyecto y encontrar el enlace de la colecta del año en que estés leyendo este libro.

Enlace del proyecto 

<https://noic.com.br/campanha/>

Capítulo 1

Métodos Matemáticos

El estudio de los fenómenos de la naturaleza ha fascinado a la humanidad desde los primordios de nuestra historia. A partir de esta curiosidad nacieron las áreas de las Ciencias de la Naturaleza, como Astronomía, Física y Química. Sin embargo, la comprensión completa de estos acontecimientos trasciende la simple intuición y el lenguaje, de manera que el ser humano notó la necesidad de crear la **Matemática**, ciencia que formalizaría el conteo, la medición y, más tarde, la descripción de los eventos a nuestro alrededor.

En este capítulo exploraremos las ideas y conceptos matemáticos más recurrentes en el universo de las Olimpiadas de Astronomía, para que tu experiencia durante los estudios no se vea limitada por pasajes y fórmulas que desconocías.

1.1 Estrategias Generales

El objetivo de esta sección es presentar algunas estrategias generales que pueden ser utilizadas en la resolución de un problema. Tal vez estrategia no sea el término más apropiado, ya que la resolución de un problema es un proceso extremadamente individual y no necesariamente involucra coordinación. Sin embargo, se proporcionarán algunos puntos relacionados con la resolución de problemas que pueden ser considerados por el lector.

1. La mayoría de los problemas tendrá un enunciado, y todo enunciado bien hecho debe contener consideraciones (valores de algunos parámetros, aproximaciones, relaciones o premisas) y aquello que debes obtener (generalmente el valor de algún parámetro o una relación). Por lo tanto, asegúrate de haber entendido todos ellos y de no haber olvidado ninguno. Si es posible, dibuja un diagrama capturando la esencia del problema; muchas veces esto puede simplificar la búsqueda de la solución, incluso cuando el problema no posee ninguna conexión geométrica evidente.

2. Reconoce el tipo de relaciones que necesitas. ¿Es un problema de astronomía de posición? ¿de fotometría? ¿cosmología? Si se trata de un problema de mecánica celeste, por ejemplo, querrás tener en mente las Leyes de Kepler, las propiedades geométricas de las secciones cónicas, la conservación de la energía, la conservación del momento angular, y así sucesivamente. Pero algo como la primera ley de la termodinámica probablemente no te ayudará.
3. Resuelve los problemas algebraicamente, preferiblemente de tal manera que la cantidad buscada se exprese en términos de las cantidades dadas; una solución general hace clara la relación entre todas las cantidades, además de facilitar el reconocimiento de la precisión del resultado final. Elige los símbolos de las variables de manera que maximicen la conveniencia y la distinción visual. Por ejemplo, usar v , v , v , u , μ en el mismo problema no es una elección sabia. Solo después de haber encontrado una respuesta algebraica, sustituye los valores numéricos proporcionados en el enunciado.
4. Verifica casos particulares y ten en mente el orden de magnitud de la respuesta esperada. Al enfrentarte a un problema difícil, puede ser interesante resolver primero una versión simplificada (despreciando ciertos factores, por ejemplo) antes de abordar el problema en sí. Además, procura siempre comprobar si tu respuesta final numérica tiene sentido: ¿es demasiado pequeña, demasiado grande, contradice alguna ley física? Por ejemplo, si encuentras que la masa de una estrella es cercana a la masa de la Tierra, probablemente algo salió mal.
5. Algunos problemas difíciles se vuelven evidentes utilizando aproximaciones razonables. Consulta la sección 1.3.
6. Verifica la dimensión (unidad) de tu respuesta. En preguntas que involucren muchas variables, puede ser útil detenerse y encontrar la dimensión de tu respuesta; si no coincide con lo esperado (por ejemplo, la dimensión del período de una órbita está en metros), probablemente hayas perdido alguna variable durante la resolución. Además, solo el análisis dimensional puede proporcionar una ecuación que describa correctamente las propiedades de un sistema. Consulta la sección ??.

Finalmente, sería interesante insistir al lector en considerar resolver algunos problemas sin el uso de la calculadora periódicamente. Realmente, la calculadora es un instrumento esencial y es de extrema importancia familiarizarse con ella (ver sección 1.4). Sin embargo, al resolver problemas sin ella, notamos patrones numéricos y manipulaciones que facilitan los cálculos, además de esforzarnos más al obtener resultados generales.

Ejemplo 1

La velocidad de escape es la velocidad mínima necesaria para que un objeto eventualmente escape de la influencia gravitatoria de un cuerpo masivo. Para un objeto en la superficie terrestre (ignorando los efectos atmosféricos), la velocidad de escape es aproximadamente 11.2 km/s. Calcule la velocidad de escape de la superficie de una supertierra potencialmente habitable de radio $R = 1.5R_{\oplus}$ y masa $M = 6M_{\oplus}$. Considere:

Fórmula de la velocidad de escape de un planeta de masa M y radio R :

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Datos:

- $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- Masa terrestre: $M_{\oplus} = 5.96 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Radio terrestre: $R_{\oplus} = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$

Solución

La velocidad de escape de la superficie del planeta en cuestión será simplemente:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Así, solo resta realizar el cálculo. Utilizando la calculadora, podrías proceder de la siguiente manera:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \times 10^{-11} \cdot 6 \cdot 5.96 \times 10^{24}}{1.5 \cdot 6.37 \times 10^6}} \approx 22.4 \text{ km/s}$$

Que es el resultado correcto. Sin embargo, sin la calculadora, probablemente procederías de la siguiente manera:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2G \cdot 6M_{\oplus}}{1.5 \cdot R_{\oplus}}} = \sqrt{4 \cdot \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 2\sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$$

$$v_{esc} = 2v_{e\oplus} = 22.4 \text{ km/s}$$

Por supuesto, el ejemplo anterior es bastante simple, pero en problemas más elaborados, generalmente existen caminos más sencillos que minimizan los cálculos y que pueden no ser notados por quienes utilizan la calculadora de manera ciega.

1.2 Unidades y Análisis Dimensional

Decimos, sin pensarlo mucho, que nuestra altura es 1.73 m, que nuestra masa es 80 kg, que faltan 30 minutos para el mediodía, y que la velocidad del automóvil en el que nos encontramos es 72 km/h. Al reportar una cantidad física, la comparamos (directa o indirectamente) con un patrón apropiado, o, dicho de otra forma, con una unidad de medida apropiada. Así, cuando decimos que tenemos 1.73 m, estamos afirmando que nuestra altura es 1.73 veces un patrón de longitud llamado metro¹.

De igual manera, podríamos comparar nuestra altura con cualquier otra unidad de longitud (pulgadas, por ejemplo); sin embargo, debe ser evidente que la naturaleza de nuestra altura no se altera. Vamos a representar nuestra altura por h , y decimos que la dimensión de h , de ahora en adelante denotada por $[h]$, es **Longitud** (simbolizada por L). Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$h = 1.73 \text{ m} = 173 \text{ cm} = 68.11024 \text{ in} = 5.675853 \text{ ft} \dots$$

$$[h] = L$$

Siguiendo con el ejemplo anterior, representando nuestra masa por m , el intervalo de tiempo hasta el mediodía por Δt , y la velocidad del automóvil por v , tenemos:

$$m = 80 \text{ kg} = 8 \times 10^4 \text{ g} = 176.37 \text{ lbs} = 2821.92 \text{ oz} \dots$$

$$[m] = M$$

$$\Delta t = 1800 \text{ s} = 30 \text{ min} = 0.5 \text{ h} = 1/48 \text{ d} \dots$$

$$[\Delta t] = T$$

$$v = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h} = 44.7387 \text{ mph} = 38.8769 \text{ nudos} \dots$$

$$[v] = LT^{-1}$$

Note que la dimensión de la velocidad es una combinación de las dimensiones de Longitud y Tiempo. Hacemos entonces la siguiente distinción: magnitudes físicas derivadas son aquellas obtenidas a partir de un conjunto limitado de

¹Actualmente definido como la longitud del recorrido realizado por la luz en el vacío durante $1/299792458$ de segundo².

²Actualmente definido como la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133.

magnitudes físicas fundamentales. La elección de las magnitudes fundamentales es, de cierta manera, arbitraria y dependerá de la clase de fenómenos considerados. Un sistema de dos magnitudes fundamentales, por ejemplo, es suficiente para describir fenómenos cinemáticos. En este caso, podríamos adoptar Longitud y Tiempo como las únicas magnitudes fundamentales, pero Velocidad y Tiempo serían elecciones igualmente válidas, así como Aceleración y Longitud. Ahora, si estuviéramos considerando fenómenos termodinámicos, sería necesario añadir una magnitud fundamental al conjunto Masa, Longitud y Tiempo, la Temperatura (por ejemplo); y así sucesivamente. Para la mayoría de los fenómenos físicos que analizaremos, el conjunto de magnitudes físicas fundamentales más conveniente y utilizado por el SI está resumido en la Tabla 1.1. A lo largo de todo el libro, adoptaremos las convenciones dimensionales y unitarias del SI.

Magnitudes Físicas Fundamentales		
Magnitud Física	Símbolo de la Dimensión	Unidad en el SI
Masa	M	kilogramo (kg)
Longitud	L	metro (m)
Tiempo	T	segundo (s)
Temperatura	Θ	kelvin (K)
Corriente Eléctrica	I	amperio (A)
Cantidad de Sustancia	N	mol (mol)
Intensidad Luminosa	J	candela (cd)

Tabela 1.1: Magnitudes físicas fundamentales utilizadas por el SI.

Veamos algunos ejemplos para clarificar estos conceptos.

Ejemplo 2

Obtén la dimensión de la fuerza.

Solución

Para obtener la dimensión de una magnitud física, basta con encontrar una relación entre la magnitud en cuestión y un conjunto de magnitudes físicas cuyas dimensiones sean conocidas. Por ejemplo, a partir de la Segunda Ley de Newton podemos obtener lo siguiente:

$$F = ma$$

Donde F es la fuerza resultante, m la masa y a la aceleración del objeto. Ahora bien, si conocemos la dimensión de m y la de a , podemos obtener la dimensión de F . La dimensión de m es simplemente M (es decir, $[m] = M$), pero ¿cuál es la dimensión de a ? Si no resulta inmediatamente evidente, podemos hallar una relación entre la aceleración y otras magnitudes físicas. Sabemos que la aceleración media de un objeto puede expresarse de la siguiente manera:

$a_m = \Delta v / \Delta t$. Pero $[\Delta v] = LT^{-1}$ y $[\Delta t] = T$, luego $[a_m] = [a] = LT^{-2}$. La dimensión de la fuerza será entonces:

$$[F] = MLT^{-2}$$

Ejemplo 3

Obtenga la dimensión del número 3.

Solución

El número puro 3 carece de cualquier dimensión física (es decir, es adimensional). Y para cualquier número o constante adimensional, la dimensión se define como 1.

$$[3] = 1$$

Ejemplo 4

Obtenga la dimensión de la energía

Solución

Podemos utilizar la clásica fórmula de la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$[K] = [1/2][m][v]^2 = M(LT^{-1})^2$$

$$[K] = ML^2T^{-2}$$

Principio de Homogeneidad

Uno de los objetivos de las ciencias naturales es encontrar una ecuación que relacione las variables de un sistema. Como las relaciones de igualdad son tan útiles, se ha dedicado un enorme esfuerzo a encontrarlas mediante diversos métodos matemáticos. El análisis dimensional es uno de esos métodos que, a partir de uno de los principios más simples, nos lleva desde el casi total desconocimiento de un fenómeno hasta una ecuación que relaciona correctamente las variables de un sistema. Este principio básico es el de la homogeneidad dimensional.

Principio de Homogeneidad Dimensional: Solo las magnitudes conmensurables (es decir, que poseen las mismas dimensiones) pueden ser igualadas, comparadas o sumadas.

Es debido a este principio que no tiene sentido decir que 1 ohm es igual a 1 newton, que 5 tesla es mayor que 3 hertz, o que 2 kelvin más 6 ampere es algo. Pero sí tiene sentido, sin embargo, decir que 4 kilómetros es mayor que 2 millas náuticas (pues ambas poseen la misma dimensión).

Ahora, suponiendo que durante el estudio de un problema sospechamos que una magnitud f en consideración depende de los parámetros $a_1, a_2, \dots, a_n$ del sistema a través de una relación del siguiente tipo:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = k a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$$

donde $k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son constantes adimensionales. Entonces, si las dimensiones de los parámetros $f, a_1, a_2, \dots, a_n$ son conocidas, podemos encontrar los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ debido al principio de homogeneidad (pues ambos lados de la ecuación deben poseer la misma dimensión). Un ejemplo facilitará la comprensión del proceso.

Ejemplo 5

Una masa puntual, suspendida mediante un hilo inextensible de masa despreciable conectado a un soporte fijo, realiza pequeñas oscilaciones. Calcule el período del péndulo simple.

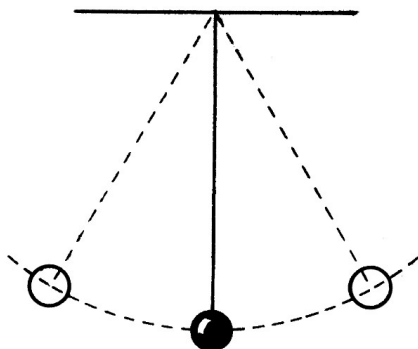


Figura 1.1: Péndulo simple

Solución

Primero, debemos determinar qué parámetros del sistema influyen en el período de oscilación (P) del péndulo. La longitud del hilo (l) probablemente tenga alguna influencia, la masa del objeto suspendido (m) también puede

ser un buen candidato, así como la aceleración gravitacional local (g), que es esencialmente lo que hace oscilar al péndulo. Supongamos entonces (basándonos únicamente en nuestra intuición y en el hecho de que muchas relaciones físicas adoptan esta forma) la siguiente relación:

$$P(m, l, g) = k m^\alpha l^\beta g^\gamma$$

Para continuar, debemos encontrar las dimensiones de todos los parámetros de la ecuación anterior. El lector debe verificar que: $[P] = T$, $[m] = M$, $[l] = L$, $[g] = LT^{-2}$. Debido al principio de homogeneidad, ambos lados de la ecuación deben tener la misma dimensión, por lo tanto, podemos escribir lo siguiente:

$$M^0 L^0 T^1 = M^\alpha L^\beta (LT^{-2})^\gamma$$

$$M^0 L^0 T^1 = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$

Así, $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1/2$. Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$P = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Realmente, para un péndulo simple, el período de una oscilación será:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Este resultado se obtiene generalmente derivando y resolviendo una ecuación diferencial para la oscilación de un péndulo. Nosotros, sin embargo, acabamos de obtenerlo a partir de consideraciones completamente diferentes y sin ningún uso del cálculo. Pero ten en cuenta que el análisis dimensional tiene sus limitaciones y no debe sustituir una derivación teórica. No obstante, cuando una formulación teórica completa de un fenómeno resulta impracticable (como cuando se trabaja con fluidos o turbulencia, por ejemplo), el análisis dimensional ofrece una intuición que es difícil de obtener experimentalmente. A continuación, se presenta un ejemplo con mayor “relevancia” astronómica.

Ejemplo 6

Dos nubes esféricas y difusas de hidrógeno molecular se encuentran ubicadas en el disco de la Vía Láctea. Una de ellas (nube A) tiene un radio cuatro veces mayor que la otra (nube B). Sabiendo que ambas nubes poseen masas similares ($M_A \approx M_B$) y despreciando las velocidades iniciales de las moléculas, calcule la razón entre el tiempo de colapso de la nube A y el de la nube B .

Solución

El colapso de una nube molecular es un fenómeno gravitacional, por lo tanto, se espera que el tiempo de colapso t_c dependa de la constante gravitacional (G), de la masa de la nube (m) y del radio de la nube (r). Así, supongamos la siguiente relación:

$$t_c(G, m, r) = k G^\alpha m^\beta r^\gamma$$

Procediendo como antes, tenemos:

$$M^0 L^0 T^1 = (M^{-1} L^3 T^{-2})^\alpha M^\beta L^\gamma$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha = 1 \end{cases}$$

Así, $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 3/2$. Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$t_c = k \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{t_{cA}}{t_{cB}} = \sqrt{\frac{4^3}{1^3}} = 8$$

1.3 Aproximaciones

A priori, puede parecer irrelevante estudiar cómo resolver preguntas de manera “inexacta”. Sin embargo, las aproximaciones tienen una importancia extrema en situaciones físicas: permiten resolver problemas que, sin ellas, serían imposibles, y pueden simplificar mucho los cálculos en ciertos problemas, ahorrando así tiempo. Dicho esto, veamos los tipos de aproximaciones.

1.3.1 Aproximaciones Numéricas

También conocidas como “redondeo”, las aproximaciones numéricas suelen ser bastante intuitivas. Esencialmente, la idea es no escribir una respuesta final innecesariamente “larga” y saber qué hacer para “reducirla”. Más adelante se verá que, dependiendo de los datos del problema, su respuesta debe tener una cantidad específica de cifras después de la coma decimal —los llamados *dígitos significativos* (sección 1.5). Por lo tanto, saber cómo reducir apropiadamente el número de dígitos de su respuesta es importante.

El procedimiento es simple: si desea que un número tenga 3 cifras después de la coma, basta con eliminar los números que vienen después de la 3^a posición. Ahora tendremos un número con 3 cifras después de la coma, pero queremos que sea lo más cercano posible a nuestro número original. Para ello, basta comparar el 4^o número con 5 - si es mayor o igual a 5, redondeamos hacia arriba, de lo contrario, redondeamos hacia abajo. El siguiente ejemplo ilustra este método:

Ejemplo 7

Redondee los siguientes números:

- a) $6,11526 \rightarrow 3$ cifras
- b) $4,398372394589 \rightarrow 4$ cifras
- c) $8,56453456 \rightarrow 3$ cifras

Solución

- a) Siguiendo el procedimiento descrito, dejamos el número con solo 3 cifras después de la coma: $6,11526$. Ahora miramos la 4^a cifra: 2. Como $2 < 5$, no es necesario redondear hacia arriba, es decir, $6,11526 \approx 6,115$.
 - b) Nuevamente, $4,398372394589$. Como $7 > 5$, $4,398372394589 \approx 4,3984$, es decir, tuvimos que sumar una “unidad” al último dígito.
 - c) Tenemos $8,56453456$. Observe que la cuarta cifra después de la coma es 5, por lo tanto: $8,56453456 \approx 8,565$.
-

1.3.2 Aproximaciones Trigonométricas

A diferencia del tipo anterior, las aproximaciones trigonométricas son importantes para encontrar la respuesta final algebraica de un problema.

Como las distancias a los astros son muy grandes, es frecuente en astronomía tratar con ángulos muy pequeños. Por lo tanto, es conveniente simplificar algunas funciones trigonométricas usando valores más simples. En particular, las aproximaciones más utilizadas son:

$$\boxed{\text{sen } x \approx \tan x \approx x \text{ [rad]}, \text{ para } x \ll 1}$$

Idealmente, esta aproximación solo es válida para ángulos extremadamente pequeños, pero ya es razonable usarla para $x < 10^\circ$. Sin embargo, difícilmente se le pedirá que haga esta aproximación sin alguna indicación previa en el enunciado (por ejemplo, “considere las aproximaciones para ángulos pequeños”). Ahora, veamos dos ejemplos de aplicación de esta aproximación.

Ejemplo 8

Calcule el diámetro angular de la Luna sabiendo que su radio es $R = 1740$ km y que su distancia a la Tierra es $d = 384000$ km. El diámetro angular de la Luna es el ángulo que abarca cuando se observa desde la Tierra.

Solución

Llamemos al diámetro angular de la Luna θ . En la figura 1.2, vemos que el seno de $\theta/2$ es:

$$\text{sen}(\theta/2) = \frac{R}{d}$$

Ahora, observe que D es mucho mayor que R (más de 100 veces). Esto significa que el ángulo θ (y $\theta/2$) es pequeño, por lo que podemos realizar la siguiente aproximación:

$$\text{sen}(\theta/2) \approx \theta/2$$

Uniando estas expresiones:

$$\theta/2 \approx \frac{R}{d} \implies \theta = \frac{2R}{d}$$

$$\theta = \frac{2 \cdot 1740}{384000} = 9,06 \times 10^{-3} \text{ rad}^3 = \boxed{31,2'}$$

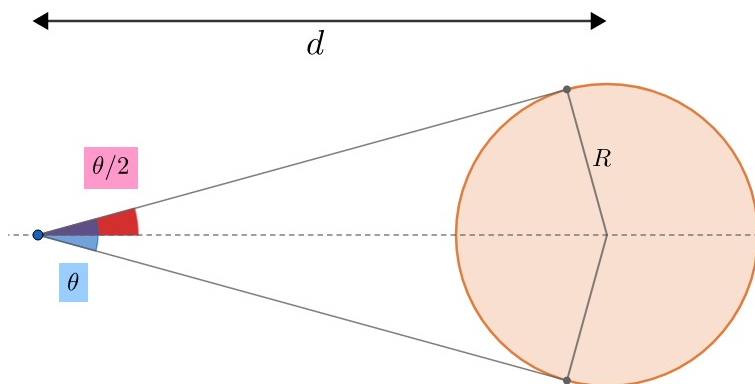


Figura 1.2: Diámetro angular

Ejemplo 9

La resolución angular θ de un instrumento óptico de apertura D observando luz con longitud de onda λ se da por:

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Así, calcule la distancia máxima a la que un objeto de tamaño $L = 2\text{ m}$ puede encontrarse para que podamos verlo. Considere que el diámetro del ojo humano es 6 mm y estamos observando luz con longitud de onda $\lambda = 550\text{ nm}$.

Solución

Para comenzar, observe que D es aproximadamente 10^4 veces mayor que λ , es decir, θ es pequeño. Así, usando $\text{sen } \theta \approx \theta$:

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Luego,

$$\theta = 1,22 \times \frac{550 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-3}} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Ahora, necesitamos interpretar lo que significa este valor. La resolución angular es el tamaño angular mínimo que un objeto puede tener para que podamos verlo. Por lo tanto, siguiendo el ejemplo anterior, sabemos que:

$$\theta \approx \frac{L}{d}$$

³Note que las unidades de R y D son iguales, por lo que el ángulo resulta en radianes. Si desea ver mejor cómo convertir ángulos entre sí, consulte la sección 1.6.4.

Donde d es nuestra distancia hacia el objeto. Finalmente,

$$\frac{2 \text{ m}}{d} = 1,12 \cdot 10^{-4} \implies \boxed{d = 1,79 \cdot 10^4 \text{ m}}$$

A modo de comparación, vamos a encontrar la respuesta final sin aproximar nada. El diámetro angular θ es:

$$\theta = 2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{L}{2d} \right)$$

Por otro lado, la resolución angular (que también vale θ en el caso límite) puede encontrarse mediante:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1,22\lambda}{D} \right)$$

Uniando estas expresiones:

$$2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{L}{2d} \right) = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1,22\lambda}{D} \right)$$

Reescribiendo:

$$d = \frac{L}{2} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{sen}^{-1}(1,22\lambda/D)}{2} \right) \right)^{-1}$$

Lo cual no es una respuesta muy cómoda. Esto muestra uno de los motivos por los cuales las aproximaciones algebraicas son tan importantes.

1.3.3 Aproximación Binomial

Otro tipo de aproximación algebraica extremadamente importante es la aproximación binomial. Aún más que las aproximaciones trigonométricas, es especialmente útil porque permite resolver problemas que serían prácticamente imposibles de resolver sin ella. Tenemos:

$$\boxed{(1+x)^n \approx 1+nx, \text{ para } |x| \ll 1.}$$

Además, es muy común utilizar las siguientes manipulaciones cuando usamos la aproximación binomial:

$$(x+y)^n = x^n \left(1 + \frac{y}{x} \right)^n \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Veamos un ejemplo para ilustrar esta aproximación.

Ejemplo 10

La fórmula general del redshift de un cuerpo luminoso en función de su velocidad se da por:

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1.$$

Sin embargo, esta fórmula resulta innecesariamente laboriosa cuando trabajamos con velocidades relativamente bajas, es decir, en el límite $v \ll c$. De esta manera, demuestre que en este régimen el redshift puede escribirse como:

$$z = \frac{v}{c}$$

Solución

Para resolver el ejercicio, queremos expresar los parámetros en función de la razón v/c , ya que, según el enunciado, $v/c \ll 1$. Entonces, poniendo c en evidencia en el numerador y denominador de la ecuación:

$$z = \sqrt{\frac{c(1 + \frac{v}{c})}{c(1 - \frac{v}{c})}} - 1 = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} - 1 = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

Utilizando la aproximación binomial, obtenemos:

$$z \approx \left(1 + \frac{v}{2c}\right) \left(1 - \left(-\frac{v}{2c}\right)\right) - 1 = \left(1 + \frac{v}{2c}\right)^2 - 1$$

Finalmente, aproximando de nuevo:

$$z \approx 1 + 2 \frac{v}{2c} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{v}{c}}$$

OBS.: Cuando el enunciado dice que la aproximación binomial es válida (generalmente, el ejercicio indica cuándo esta aproximación puede ser útil), es bueno tener en mente que estamos aproximando las cosas en **primera orden**. El porqué de esto no es muy relevante, pero es útil saber que significa que esencialmente estamos despreciando los términos con exponentes mayores que 1. Así, si apareciera un término $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, podríamos simplemente aproximarlos como cero. Dicho esto, observe que podríamos, en lugar de utilizar nuevamente la aproximación binomial, hacer:

$$z = \left(1 + \frac{v}{2c}\right)^2 - 1 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{v}{2c} + \left(\frac{v}{2c}\right)^2 - 1 \approx \frac{v}{c} + \cancel{\left(\frac{v}{2c}\right)^2} \xrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{v}{c}}$$

Es decir, llegaríamos al mismo resultado.

1.3.4 Ideas para la resolución de ejercicios

Además de saber cómo simplificar los cálculos, es esencial poder modelar el enunciado para que sea posible utilizar las aproximaciones presentadas. Para esto, es importante que estés familiarizado con algunas ideas recurrentes en ejercicios. En esta sección, trabajaremos con dos de estas ideas principales y las ilustraremos con ejemplos.

Nota que aún hay otras dos ideas más, pero son avanzadas incluso para el nivel de Barra, aunque se incluyeron por completitud. Están marcadas con **asteriscos (**)**.

Idea 1: Analizar una pequeña variación de tiempo Δt

Al abordar un problema, puede ser útil ver cómo la situación cambia después de un pequeño intervalo de tiempo Δt . Esto puede ser una variación del volumen, distancia o masa, por ejemplo. La ventaja de este método es que, dado que el intervalo de tiempo es pequeño, podemos aproximar las magnitudes que dependen de él en primera orden. A continuación, sigue un ejemplo para ilustrar el método:

Ejemplo 11

(P3 Online/2021) Las estrellas calientes, como las supergigantes de tipo espectral B , presentan vientos estelares rápidos, con velocidades típicamente del orden de 2000 km/s. Estas estrellas tienen luminosidades del orden de $3,8 \cdot 10^{31} W$ y temperaturas efectivas típicas de $T \approx 20\,000 K$. Adopte que los vientos se originan en las cercanías de la superficie de la estrella, donde $r = 2R$ y la densidad media del viento estelar es $\rho \sim 10^{-11} kg/m^3$. El radio de la estrella es R y r es la distancia entre el centro de la estrella y el lugar de origen del viento estelar. Así, calcule la tasa de pérdida de masa de estas estrellas causada por los vientos, sabiendo que $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$.

Dado: la luminosidad L de una estrella de radio R y temperatura T es:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

y el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Solución

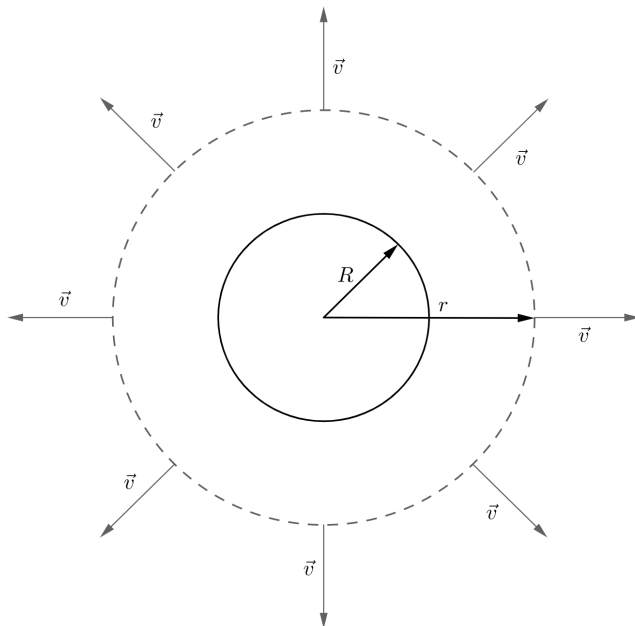


Figura 1.3: Ilustración del problema.

Primero, podemos ver que necesitamos el radio de la estrella para resolver el ejercicio. Para calcularlo, basta usar la fórmula de luminosidad:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{4\pi \sigma T^4}} = \sqrt{\frac{3,8 \cdot 10^{31}}{4\pi \times 5,67 \cdot 10^{-8} \times (2 \cdot 10^4)^4}}$$

$$\Rightarrow R = 1,8 \cdot 10^{10} m$$

Ahora comienza la parte más complicada del ejercicio. En la región a una distancia $r = 2R$ del centro de la estrella, se están formando vientos estelares con velocidades $|\vec{v}| = 2,0 \cdot 10^6 m/s$ apuntando hacia afuera de la estrella, es decir, existe cierta cantidad de masa saliendo de la estrella en todo momento, como se muestra en la Figura 1.3. Una forma conveniente de conocer la cantidad de masa que sale por unidad de tiempo es considerar un Δt pequeño y calcular la cantidad Δm de masa que salió, de manera que la tasa φ será simplemente $\varphi = \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Cuando transcurre este pequeño intervalo de tiempo Δt , los vientos estelares habrán recorrido una distancia $v\Delta t$ ($v\Delta t \ll r$), es decir, los vientos habrán aumentado de volumen en un ΔV representado en la región sombreada de la Figura 1.4.

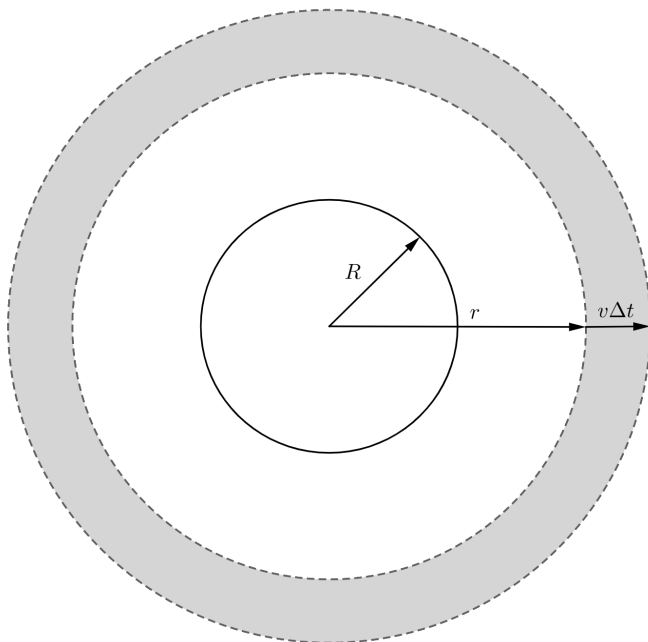


Figura 1.4: Variación del volumen de los vientos estelares.

Este volumen ΔV puede interpretarse como el volumen de una esfera de radio $r + v\Delta t$ menos el volumen de una esfera de radio r . Así:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + v\Delta t)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Recuerde que queremos utilizar la aproximación binomial⁴, entonces es útil expresar $\frac{v\Delta t}{r}$ (que es $\ll 1$), por lo que:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(1 + \frac{v\Delta t}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Usando la aproximación binomial:

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \frac{4}{3}\pi r^3 \left(1 + \frac{3v\Delta t}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = \cancel{\frac{4}{3}\pi r^3} + 4\pi r^2 v\Delta t - \cancel{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ &\Rightarrow \Delta V = 4\pi r^2 v\Delta t \end{aligned}$$

⁴Nuevamente, estamos aproximando en primera orden, por lo que se podría expandir el binomio $(r + v\Delta t)^3$ y decir que todos los términos con Δt con exponente mayor que 1 son aproximadamente 0 para obtener el mismo resultado. Sin embargo, es recomendable acostumbrarse a la aproximación binomial, ya que no sería posible hacerlo si el exponente no fuera natural.

Ahora que tenemos el volumen de viento que salió, la masa expulsada es simplemente este valor multiplicado por la densidad, es decir:

$$\Delta m = \rho \Delta V = 4\pi r^2 \rho v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \varphi = 4\pi r^2 \rho v$$

Sustituyendo los valores:

$$\varphi = 4\pi(2 \times 1,8 \cdot 10^{10})^2 \times 10^{-11} \times 2,0 \cdot 10^6$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 3,3 \cdot 10^{17} \text{ kg/s}}$$

4

Idea 2: Construcciones Geométricas

Sería mucho más sencillo resolver el último ejemplo si existiera una forma rápida de encontrar el valor de ΔV , ¡y eso es exactamente lo que veremos ahora! Presentaremos aquí dos construcciones geométricas que pueden resultar útiles.

• Corona Circular

Este no es un caso muy recurrente, ya que en astronomía los cuerpos suelen ser tridimensionales, pero ayuda a crear una intuición para comprender el siguiente caso. Esencialmente, queremos ver cuánto aumenta el área de nuestro círculo de radio R cuando el radio varía en un pequeño ΔR ($\Delta R \ll R$). La figura 1.5 muestra la situación.

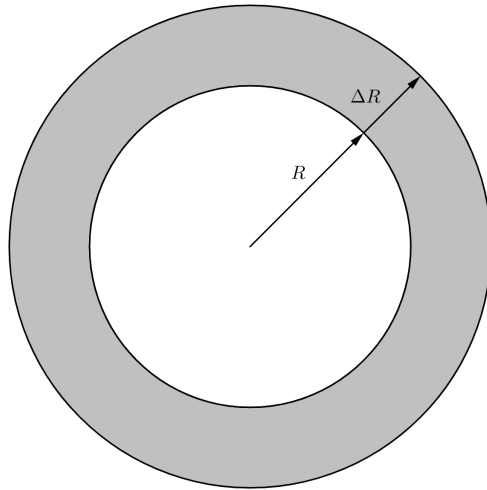


Figura 1.5: Representación de la corona circular.

La forma estándar de resolver esto sería escribir la variación del área como:

$$\Delta A = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^2 - \pi R^2$$

Luego, se realiza la aproximación binomial:

$$\Delta A = \cancel{\pi R^2} + 2\pi R\Delta R - \cancel{\pi R^2} = \boxed{2\pi R\Delta R}$$

Sin embargo, existe una forma mucho más intuitiva de imaginar esta aproximación, ilustrada en la siguiente imagen:

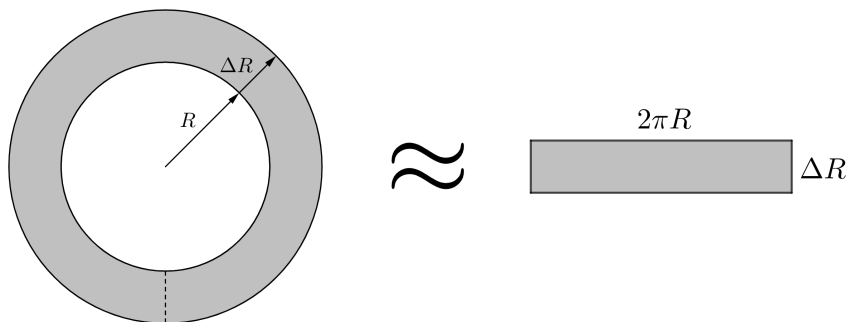


Figura 1.6: Ilustración de la aproximación realizada.

Así, la variación del área ΔA puede tratarse como un rectángulo de base $2\pi R$ y altura ΔR . Por lo tanto:

$$\Delta A = 2\pi R\Delta R$$

Es decir, la variación del área es simplemente el perímetro de la circunferencia original multiplicado por la variación del radio.⁵

• Capa Esférica

En el ejemplo 11, mostramos a partir de la aproximación binomial que el volumen de una capa esférica de espesor ΔR es $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$. Ahora, demostraremos esto de manera análoga a lo que hicimos con la corona circular.

Utilizando la intuición de la construcción anterior, “abriremos” la capa esférica de forma que se convierta en un paralelepípedo con área de base A y espesor ΔR , como se muestra en la figura 1.7. Por construcción, el área A será simplemente el área superficial de la esfera original, es decir, $A = 4\pi R^2$. Por lo tanto, la variación del volumen es:

$$\Delta V = 4\pi R^2\Delta R, \text{ se } \Delta R \ll R.$$

⁵Recordando que esto solo es válido cuando $\Delta R \ll R$.

Así, la variación del volumen es simplemente el área superficial de la esfera original multiplicada por la variación del radio.

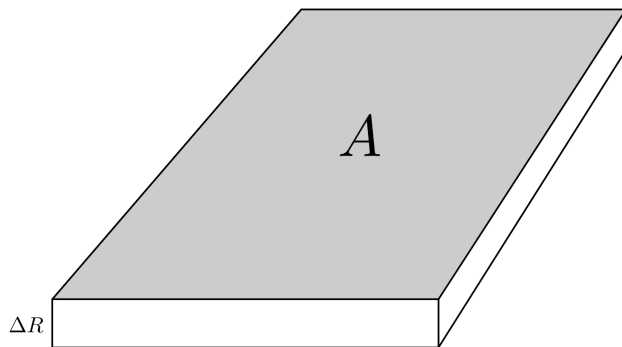


Figura 1.7: Capa esférica abierta como un “plano”.

Idea 3:** Toda curva puede ser recta, dada una variación lo suficientemente pequeña

Este hecho es bastante intuitivo: intenta hacer la letra *O* usando solo 4 líneas rectas. Probablemente obtendrás un cuadrado, haciendo que tu *O* se parezca más a un rectángulo. Ahora, si utilizas 16 líneas en lugar de 4, el resultado será una letra *O* mucho más parecida a la real. Así, es fácil ver que, en el límite en el que puedes usar infinitas líneas rectas, tu letra *O* será exactamente igual a un círculo. Por lo tanto, concluimos que *toda curva está compuesta por un conjunto infinito de líneas rectas*.

Hay una consecuencia extremadamente importante de esto: si tomamos un desplazamiento pequeño en una curva, podemos aproximarla por una línea recta. Más precisamente, si tomamos un tramo **infinitesimalmente** pequeño, el desplazamiento es **exactamente** igual a una línea recta.

Un ejemplo del uso de este método puede verse en la deducción del área de un círculo, mostrada en la figura 1.30. En ella, dividimos el perímetro (que es circular) en infinitos segmentos de línea en la base de infinitos triángulos. Aunque estemos aproximando una curva mediante un conjunto de líneas rectas, esto nos proporciona un resultado exacto, ya que estamos trabajando con medidas infinitesimales⁶.

⁶Este es el fundamento del Cálculo Diferencial e Integral, que está más allá del alcance de este libro.

Idea 4:** Una variable puede considerarse constante para un intervalo pequeño

Esta conclusión puede derivarse de la idea anterior. Como probablemente ya hayas visto en física, el gráfico de distancia frente al tiempo, cuando la velocidad es constante, es simplemente una línea recta⁷. Por otro lado, cuando la velocidad varía, el gráfico de distancia frente al tiempo es una curva.

De acuerdo con la idea anterior, sabemos que si el intervalo de tiempo transcurrido es infinitesimalmente pequeño, la curva se comporta como una línea recta, es decir, el desplazamiento $dx = x - x_0$ ⁸ puede escribirse en función de ese intervalo de tiempo dt como $dx = vdt$, ya que esa es la ecuación de una línea recta. De esta forma, vemos que, aunque la velocidad esté cambiando constantemente, para una variación infinitesimal de tiempo podemos considerarla constante. En el siguiente ejemplo se explorará mejor esta idea.

Ejemplo 12

La 2ª Ley de Kepler dice que el segmento que une un cuerpo en una órbita elíptica con el foco de dicha órbita barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales. Sabiendo que el momento angular $L = mvr \sin \theta$ (vea la notación de θ en la figura 1.8) es constante, demuestre la Segunda Ley de Kepler.

Solución

Primero, analicemos el área barrida en un intervalo de tiempo infinitesimal dt . En él, sabemos que el cuerpo se desplazará una distancia dx en un segmento de recta (ya que estamos tratando con intervalos infinitesimales), como se puede ver en la figura 1.8.

⁷Si no lo has visto, observa que, en este caso, el desplazamiento x puede escribirse como $x = x_0 + vt$, que es precisamente la ecuación $y = ax + b$, solo que con letras diferentes.

⁸La notación d en lugar de Δ para variaciones suele utilizarse cuando estas son infinitesimales.

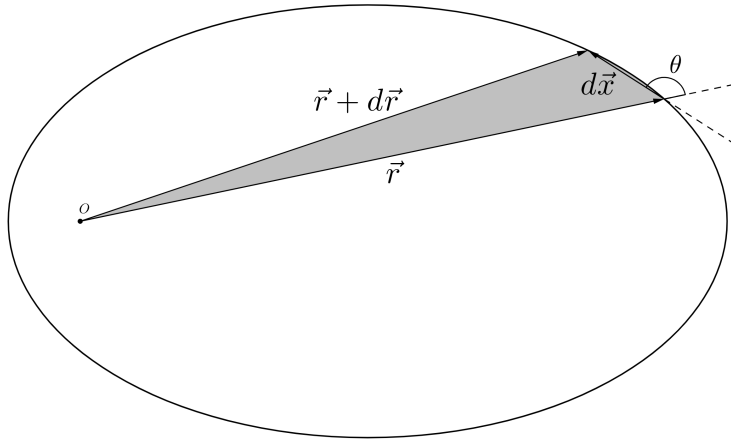


Figura 1.8: Representación de la situación. Nótese que el desplazamiento y el vector posición forman entre sí un ángulo θ .

Así, observe que el área barrida será el área del triángulo con lados $r + dr$, r y dx . Además, sabemos que este desplazamiento dx debe ser igual a vdt , luego:

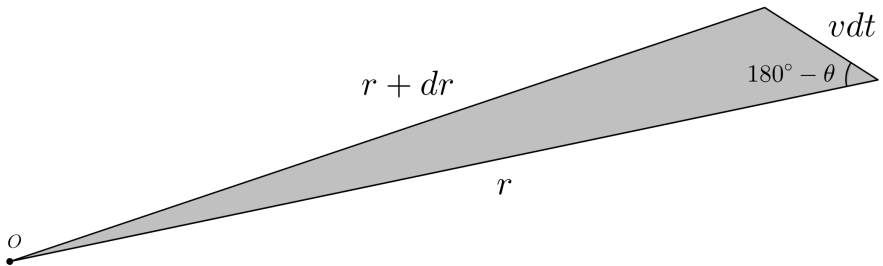


Figura 1.9: Representación del triángulo.

Por lo tanto, el área dA barrida puede encontrarse como⁹:

$$dA = \frac{1}{2}rvdt \sin(180^\circ - \theta)$$

Como $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$:

$$dA = \frac{1}{2}vr \sin \theta dt$$

Entonces, la velocidad areolar, que es la variación del área por unidad de tiempo ($\frac{dA}{dt}$), puede escribirse simplemente como:

⁹Vea la subsección 1.7.7.

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}}$$

Donde $L = mvr \sin \theta$ es el **momento angular** del cuerpo. Como se verá en el capítulo 2, el momento angular de un cuerpo en órbita es constante. Dado que la masa del cuerpo tampoco cambia, concluimos que la velocidad areolar del cuerpo depende solo de términos constantes, es decir, áreas iguales son barridas en tiempos iguales, lo cual constituye la Segunda Ley de Kepler.

1.4 Calculadora

Poseer una calculadora científica es **esencial** para todas las fases de la selectiva, ya que existen ciertos cálculos y métodos que no pueden realizarse sin ella. Además, dominar el uso de ciertas funciones de la calculadora puede ahorrar mucho tiempo (en las pruebas en línea, se disponen de apenas *6 minutos* por pregunta), lo cual es un recurso valioso en los exámenes, y prevenir ciertos errores numéricos que pueden arruinar un problema. Aquí se utilizará como referencia la calculadora CASIO fx-82MS, por ser la más común en el mundo olímpico; sin embargo, cabe destacar que todas las calculadoras científicas deben poseer las mismas funciones, las cuales pueden encontrarse en sus manuales (disponibles en el sitio web del fabricante) o con un poco de exploración de sus interfaces.

Nota: antes que nada, es importante presionar **[SHIFT]** → **[MODE]** → **[3]** → **[=]** para dejar su calculadora idéntica a como salió de fábrica.

1.4.1 Interfaz

Al observar la calculadora, notamos algo como:

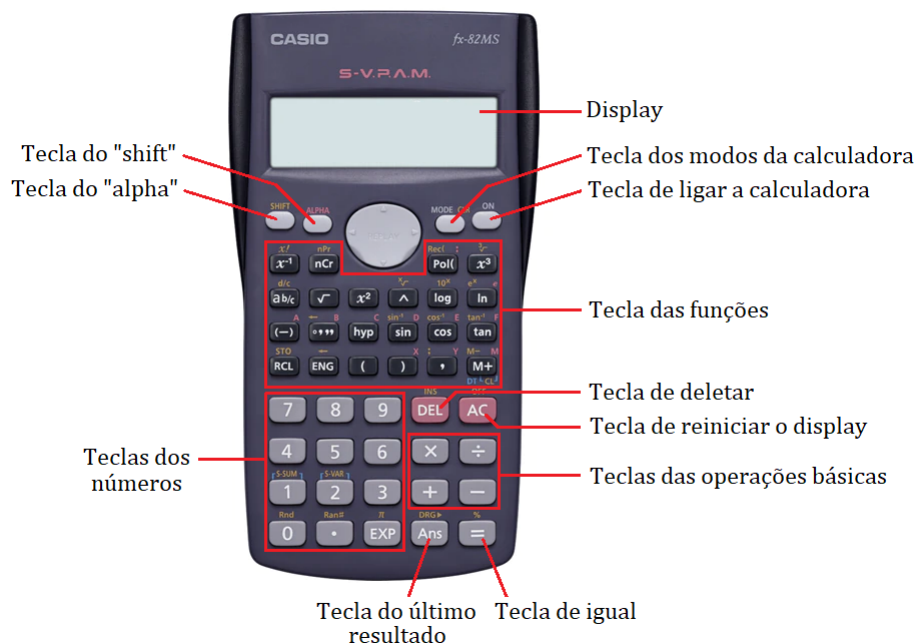


Figura 1.10: Ilustración de la calculadora (recordando que algunos símbolos pueden variar de un modelo a otro).

Para las funciones más comunes, los botones suelen ser bastante intuitivos para realizar sus respectivos cálculos. Aun así, existen algunas funciones útiles que no son tan fáciles de encontrar, pero afortunadamente serán exploradas más adelante. Como prueba, realiza las siguientes operaciones:

- $\text{sen } 30^\circ$ R: 0,5
- $\log 10$ R: 1
- 5^5 R: 3125
- $\frac{10,1}{50,5}$ R: 0,2

Importante: Como la calculadora no tiene origen brasileño, utiliza el punto (.) como separador decimal. Es decir, en el cálculo anterior, al escribir 50,5, será necesario presionar [5] → [0] → [.] → [5]. De hecho, existe un botón con la imagen de una coma, pero este solo se usa para las funciones estadísticas de la calculadora, las cuales no se utilizarán por el momento.

Pantalla

Para el uso adecuado de la calculadora, es importante entender lo que está mostrando. Al observar su pequeña pantalla (display), vemos:

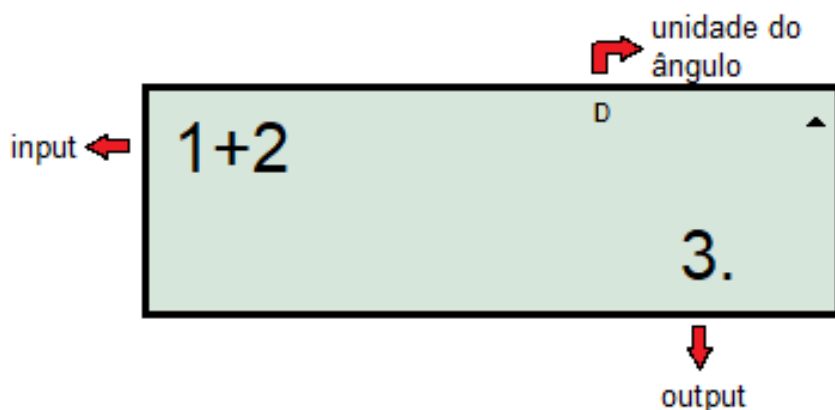


Figura 1.11: Pantalla de la calculadora.

La mitad inferior de la calculadora contiene los números, que pueden relacionarse mediante las operaciones de la calculadora para obtener resultados numéricos. Después de escribir una operación, como $1 + 2$ (la cual aparecerá en la mitad superior de la calculadora), la pantalla muestra lo que se ha introducido y, al presionar [=], se mostrará el resultado.

A la derecha del resultado, hay un pequeño espacio donde aparece un número dependiendo de la magnitud del valor obtenido. Este número aparece cuando el resultado es mayor o igual a 10^{10} o menor o igual a 10^{-10} , y representa la potencia de 10 por la cual el número mostrado está siendo multiplicado. Por ejemplo, si realizas 123415×987651 , la calculadora mostrará 1,218908248 con un pequeño 11 en ese espacio, eso significa que la respuesta es $1,218909482 \cdot 10^{11}$, que es aproximadamente $1,22 \cdot 10^{11}$.

Además, nota que la calculadora usa comas para separar cada 3 dígitos, es decir, si escribes 123456789 y presionas [=], aparecerá 123,456,789. Ten cuidado de no confundir la coma con el punto, recuerda siempre que la calculadora adopta una convención contraria a la nuestra (Para el caso de los brasileños).

Finalmente, en la parte superior hay un pequeño espacio (del tamaño de la letra “D”, que indica que el ángulo está en grados¹⁰) donde pueden aparecer algunas letras que indican el modo o configuración actual de la calculadora. Por ahora, estamos usando sus funciones más básicas, por lo que es importante que no haya ninguno de esos indicadores activos (excepto la “D”, que siempre estará allí).

¹⁰En inglés, grados = degrees, por eso la letra D.

Encender y Apagar

Estas son funciones bastante intuitivas, pero vale la pena mencionarlas:

- **Encender:** ubicado en la primera fila de botones, presiona **[ON]**.
- **Apagar:** botones ubicados en la primera fila de comandos y en la primera de números, respectivamente, presiona **[SHIFT]** → **[AC]**.

Syntax ERROR

Este error aparece cuando la calculadora no entiende algo que escribiste, un paréntesis que no se cerró, una raíz sin argumento, un clic erróneo en el botón de +, entre otros. En general, una rápida revisión de la expresión resuelve el problema.

Math ERROR

Cuando aparece este mensaje, significa que hay un error matemático en el input colocado en la calculadora. Esto puede suceder si sacas una raíz con argumento negativo, un $\sin^{-1}$ con módulo mayor que 1 (recuerda que $-1 \leq \sin x \leq 1$) o incluso una división por 0. Normalmente, si verificas que tu expresión coincide con lo que está en la calculadora y sigue apareciendo este error, significa que hubo algún error en los cálculos durante la resolución, por lo que es recomendable revisar tus operaciones.

1.4.2 SHIFT y ALPHA

Como se vio anteriormente, el **[SHIFT]** se utilizó para apagar la calculadora, pero ¿qué hace exactamente? Observando el **[AC]** (segundo botón presionado), se nota que encima de él está escrito **OFF** del mismo color que el **[SHIFT]**¹¹, es decir, presionarlo nos permite acceder a las funciones de la calculadora que están en ese color. De manera análoga, el botón **[ALPHA]** nos da acceso a las funciones de ese color (en este caso, rosa). Por ejemplo, para encontrar el ángulo cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir, realizar la operación $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$, podemos proceder presionando la secuencia **[SHIFT]** → **[sin]** → **[(]**¹² → **[√]** → **[3]** → **[÷]** → **[2]** → **[)]** → **[=]**. En la figura 1.12 se puede ver por qué presionamos **[sin]** para acceder a $\sin^{-1}$.

Ahora que la mayoría de las funciones han sido aclaradas, es importante que practiques las operaciones para familiarizarte con los botones y adquirir velocidad al realizar los cálculos. A continuación, se presentan algunos ejercicios

¹¹En el caso de la Casio ilustrada, este color es beige, pero el color puede variar según la marca.

¹²El uso de los paréntesis se abordará con detalle más adelante.

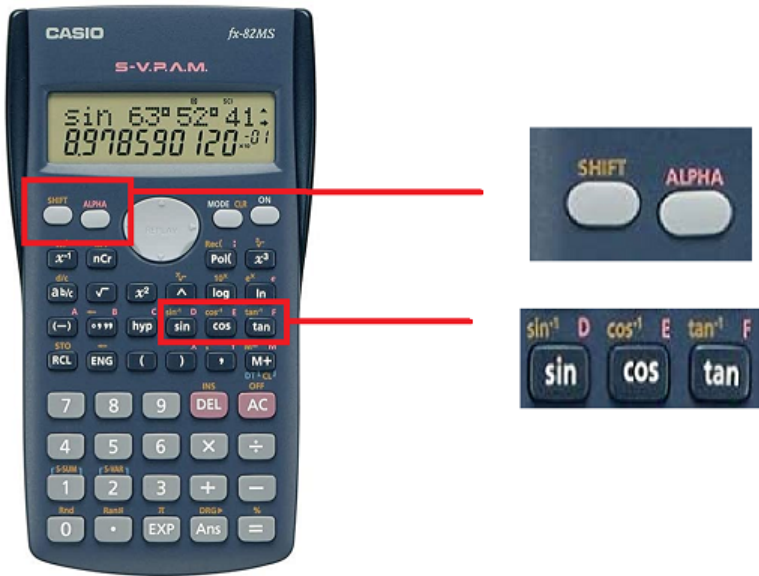


Figura 1.12: Vista aproximada de los botones SHIFT, ALPHA y funciones trigonométricas.

para practicar:

- e^π R: $\approx 23,14$
- $\sqrt[3]{17}$ R: $\approx 2,57$
- $10!$ R: $3.628.800$
- $\tan^{-1}(1)$ R: 45°
- $6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,99 \cdot 10^{30}$ R: $\approx 1,33 \cdot 10^{20}$

1.4.3 Teclas Especiales

Como puedes comprobar, existen algunos botones que no son tan intuitivos como sus funciones. Aquí, vamos a organizar una pequeña descripción sobre lo que hace cada uno de los botones más relevantes. Sin embargo, existen algunos que son un poco más complicados pero útiles, que serán descritos en subsecciones propias.

Tecla 1: [AC]

É uma sigla que significa “All-Clear”, i.e. ela zera a o output da calculadora. Perceba que isso é diferente de resetá-la¹³.

Es una sigla que significa “All-Clear”, es decir, borra el output de la calculadora. Fíjate que esto es diferente a reiniciarla¹⁴.

Tecla 2: Cursor

Son las flechas hacia arriba, abajo, derecha e izquierda. Como se mencionó en el último tema, hay una memoria (a corto plazo) de las últimas operaciones realizadas en la calculadora. Para acceder a ellas, el usuario puede utilizar las flechas hacia arriba y abajo. Al presionar $\uparrow$ muestra la operación anterior y al presionar $\downarrow$ muestra la siguiente. Funcionan bien para comprobar si no hubo algún error en los cálculos. Las flechas laterales sirven para moverse dentro de la expresión. Así, si escribiste $1 + 2$ cuando lo correcto era $2 + 2$, basta con usar la flecha para llegar al 1 y reemplazarlo por un 2. Para operaciones muy cortas no valen mucho la pena, suele ser más rápido simplemente escribir $2 + 2$ de nuevo. Sin embargo, más adelante veremos mejor cómo escribir expresiones más largas, y en esos casos las flechas del cursor ayudan bastante.

Tecla 3: [DEL]

Siguiendo con la idea de editar la expresión del input, el DEL borra números indeseados. Por ejemplo, si escribiste $2 + 12$ en lugar de $2 + 2$, basta usar las flechas del cursor para llegar al 1 y presionar [DEL].

Tecla 4: [EXP]

Tal vez en la última operación de la subsección anterior tardaste un poco en descubrir cómo escribir 10^{-11} . Probablemente escribiste **[10]** $\rightarrow$ **[^]** $\rightarrow$ **[-11]**. Afortunadamente, el botón [EXP] lo hace extremadamente simple. En el mismo ejemplo, bastaría hacer **[EXP]** $\rightarrow$ **[-11]** para representar 10^{-11} . La imagen a continuación lo ilustra:

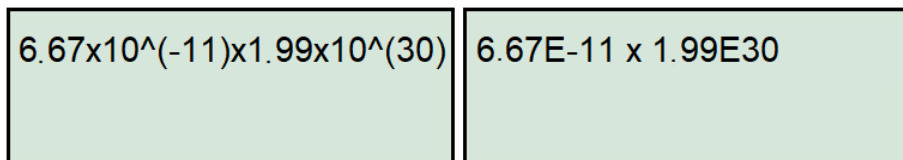


Figura 1.13: Demostración de cómo sustituir 10^x por EXP - los paréntesis no eran necesarios

Tecla 5: [Ans]

¹³Como já vimos, para fazer isso faríamos **[SHIFT]** $\rightarrow$ **[MODE]** $\rightarrow$ **[3]** $\rightarrow$ **[=]**.

¹⁴Como ya vimos, para hacer esto haríamos **[SHIFT]** $\rightarrow$ **[MODE]** $\rightarrow$ **[3]** $\rightarrow$ **[=]**.

“Ans” viene de “Answer” y su función es esencialmente actuar como el último valor calculado. Por ejemplo, para calcular el valor de $\sqrt{\frac{GM}{a}}$, dado que¹⁵ $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$, $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ y $a = 1,50 \cdot 10^{11}$, puedes hacer $G \cdot M$, tomar ese resultado y dividirlo por a para luego sacar la raíz de ese valor. La secuencia de teclas sería $[6.67E-11] \rightarrow [X] \rightarrow [1.99E30] \rightarrow [=] \rightarrow [Ans] \rightarrow [\div] \rightarrow [1.50E11] \rightarrow [=] \rightarrow [\sqrt{}] \rightarrow [Ans] \rightarrow [=]$, obteniendo aproximadamente $2,97 \cdot 10^4$.

1.4.4 Uso de los Paréntesis

Anteriormente, cuando se introdujo el botón **[Ans]**, tuvimos que dividir nuestra operación en varios pasos (si te fijas, esencialmente la hicimos de “dentro hacia afuera”). Sin embargo, si quisiéramos hacerla de una sola vez, ¿cómo procederíamos?

Es a partir de esta pregunta que los paréntesis se muestran extremadamente útiles. La mejor manera de comprender cómo utilizarlos de forma intuitiva es entender que la función de los paréntesis es indicar a la calculadora el argumento de la función que estás aplicando. En otras palabras, especifican dónde la calculadora realizará la operación.

Antes de mostrar la aplicación de los paréntesis, es importante explicar lo que la calculadora entiende en su ausencia. Cuando no hay ninguna señalización, la calculadora siempre hará la operación sobre el número más cercano. Así, si el usuario escribe $[\sqrt{}] \rightarrow [3] \rightarrow [\div] \rightarrow 2$, la calculadora entenderá que la raíz cuadrada se aplica únicamente al 3, ya que este es el número más cercano. De esta forma, dará como resultado $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y no $\sqrt{\frac{3}{2}}$. A continuación, se presentan dos ejemplos para ilustrar el uso de los paréntesis.

¹⁵Se omitieron las unidades ya que el enfoque son los cálculos numéricos.

Ejemplo 13

Realiza la operación del ejemplo citado en [Ans], pero esta vez utilizando paréntesis.

Solución

Primero, observa que no queremos aplicar la raíz cuadrada solo a G , M o $1/a$, sino a todos ellos al mismo tiempo, es decir, a $\frac{GM}{a}$. Por lo tanto, para que la calculadora lo entienda, debemos escribir esta fracción entre paréntesis, quedando la secuencia: $[\sqrt{\quad}] \rightarrow [\quad(\quad)] \rightarrow [\frac{GM}{a}]^{16} \rightarrow [\quad] \rightarrow [=]$. Observa también que, teóricamente, deberíamos poner paréntesis en GM para que la calculadora entienda que estamos dividiendo el producto GM entre a y no solo M ; sin embargo, sabemos que, al menos para multiplicación y división, este orden no altera el resultado, es decir, $GM \times \frac{1}{a} = G \times \frac{M}{a}$, por eso no los incluimos.

Ejemplo 14

Realiza $\sqrt{\frac{1+2}{3+4}}$ utilizando correctamente los paréntesis.

Solución

Antes que nada, es esencial analizar rápidamente la expresión. Queremos calcular la raíz cuadrada del cociente entre dos sumas. Ya sabemos que, para que la calculadora aplique la raíz a toda la fracción y no solo a un elemento, debemos colocarla entre paréntesis. Observando ahora la fracción, debemos asegurarnos de que estamos dividiendo una suma entre otra sin romper la fracción por la mitad. Por ejemplo, si escribiéramos “ $1 + 2 \div 3 + 4$ ”, estaríamos calculando $1 + \frac{2}{3} + 4$, es decir, romperíamos la fracción sin querer. Para evitar que esto ocurra, necesitamos colocar cada suma entre paréntesis.

Así, nota que terminamos teniendo dos paréntesis seguidos al comienzo de la expresión - uno para la raíz cuadrada y otro para la primera suma. De esta forma, debemos escribir en la calculadora la siguiente expresión:

$$\sqrt{((1+2) \div (3+4))},$$

que nos da un resultado de aproximadamente 0,655.

Para practicar, intenta calcular las siguientes operaciones en una sola expresión:

¹⁶Aquí colocarías los valores respectivos de cada letra.

$$\bullet \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 6 \cdot 5,96 \times 10^{24}}{1,5 \cdot 6,37 \times 10^6}} \quad R: \approx 2,24 \cdot 10^4$$

$$\bullet \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{11}{23} \right)}{5 \times 23} \right)^{1/3} \quad R: \approx 0,150$$

Importante: El objetivo de esta subsección es orientar cómo utilizar correctamente los paréntesis. En general, saber usarlos te ahorrará mucho tiempo, pero la facilidad para aplicarlos correctamente varía de persona a persona. Por eso, es esencial que practiques numerosas operaciones hasta tener una idea aproximada del tamaño de expresión (y también de qué funciones podrían confundirte) que te hace perder precisión. En esos casos, vale la pena usar varios [Ans] para asegurarte de que realizarás correctamente los cálculos. Por ejemplo, si aún no estás muy familiarizado con el “ln”, puede funcionar mejor calcular primero $\ln \left(1 + \frac{11}{23} \right)$, y luego hacer $(\text{Ans} \div (5 \times 23)) \wedge (1 \div 3)$ ¹⁷, o incluso dividirlo en más pasos. Como ya se ha mencionado, esto varía según la persona.

1.4.5 Memoria de la Calculadora

En las subsecciones anteriores, ya se explicó cómo manejar la mayoría de las expresiones, especialmente las cortas y las medianas. Sin embargo, para cálculos muy extensos, los métodos presentados son arriesgados¹⁸, pues realizarlos en una sola expresión genera una gran probabilidad de errores debido a la cantidad de paréntesis necesaria. Además, utilizar varios [Ans] también es peligroso, ya que produce numerosos “pasos” y, en caso de cometer algún error, es muy fácil perderse en la secuencia de operaciones, haciendo que todo el tiempo invertido haya sido en vano.

La solución a este problema se encuentra en las letras que tiene la calculadora. Su función es almacenar valores en la memoria del dispositivo.

Para colocar un determinado valor V en una letra N , se debe presionar $[V]$ ¹⁹ $\rightarrow$ [SHIFT] $\rightarrow$ [RCL] $\rightarrow$ [N], donde la tecla [RCL] se encuentra sobre el número 7 y [N] representa cualquiera de las teclas que tenga las letras A, B, C, D, E, F, X, Y o M (dependiendo de cuál se desee usar para guardar el dato). Para acceder a ese valor después de haberlo almacenado, basta con presionar [ALPHA] $\rightarrow$ [N].

Al finalizar el ejercicio en el cual se utilizaron las letras, no olvide borrar los valores de la calculadora para evitar confusiones en otros problemas. Para ello,

¹⁷En lugar de elevar a $1/3$, también podrías calcular la raíz cúbica.

¹⁸Afortunadamente, este tipo de cálculos no suele aparecer en las primeras fases de la selectiva, pero aun así es importante comprender cómo manejarlos, ya que el método es muy útil y puede incluso ayudar en expresiones más cortas.

¹⁹Si desea almacenar el último valor obtenido, puede presionar [Ans].

puede colocar el valor 0 en todas las letras o simplemente presionar [SHIFT] → [MODE] → [1] → [=].

Importante: al asignar un valor a una letra, anote en algún lugar lo que representa; de lo contrario, podría olvidarlo y la variable perdería su sentido. Además, procure establecer relaciones intuitivas. Por ejemplo, si tiene los datos x_1, x_2, x_3 y x_4 y desea guardarlos, intente colocarlos en las letras A, B, C y D (o C, D, E y F, en caso de que A y B ya estén siendo usadas; lo importante es que sea intuitivo), pues así la asociación se vuelve más sencilla.

Finalmente, veremos en los ejemplos siguientes cómo la memoria de la calculadora puede ser útil. **Ejemplo 15**

Calcule el valor de la expresión:

$$\frac{L_{AV} \lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)}{8\pi h c^2 \text{FWHM}_V d^2}$$

sabiendo que $L_{AV} = 1,79 \cdot 10^{27}$, $\lambda = 5,50 \cdot 10^{-7}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$, $c = 2,998 \cdot 10^8$, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$, $T = 7200$, $\text{FWHM}_V = 8,8 \cdot 10^{-8}$ y $d = 4,61 \cdot 10^{17}$.

Solución

En primer lugar, el significado físico de la expresión es completamente irrelevante; se utilizó solo como ejemplo por ser lo suficientemente grande como para que cualquiera se pierda al intentar resolverla sin usar la memoria de la calculadora.

Existen múltiples maneras de realizar este cálculo, ya que la calculadora cuenta con 10 espacios de memoria (A, B, C, D, E, F, X, Y, M y Ans, aunque este último, como ya vimos, cambia su valor en cada nuevo cálculo). Aquí se presentará únicamente un enfoque.

Para comenzar, el denominador es largo, pero bastante sencillo de calcular de una sola vez, ya que consiste básicamente en multiplicaciones. Así, podemos calcular el valor de $8\pi h c^2 \text{FWHM}_V d^2$, que resulta aproximadamente en $2,80 \cdot 10^{13}$, y almacenarlo en la letra A.

Ahora, observando la exponencial, sería conveniente tener fácilmente el valor del exponente. De esta manera, podemos calcular $\frac{hc}{\lambda k_B T} \approx 3,63$ y guardarlo en B.

La expresión queda entonces:

$$\frac{L_{AV} \lambda^5 (e^B - 1)}{A},$$

Lo que ya es relativamente fácil de calcular²⁰. Por lo tanto, sustituyendo los valores restantes, obtenemos:

$$\frac{L_{AV} \lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)}{8\pi h c^2 \text{FWHM}_V d^2} \approx 1,18 \cdot 10^{-16}$$

No obstante, como ya se mencionó, estos cálculos están muy alejados de la realidad de las fases iniciales de la selectiva. ¿Cómo aprovechar entonces este recurso incluso en cálculos más comunes? Para las fases en línea es realmente difícil que esta función sea útil, pero, pensando en Barra, la memoria de la calculadora puede ayudar a agilizar operaciones en ejercicios que requieren un factor numérico recurrente (por ejemplo, GM en problemas de Mecánica Celeste); podría guardarlo en algún espacio y simplemente reutilizarlo, en lugar de escribir $6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,99 \cdot 10^{30}$ múltiples veces.

Además, la memoria de la calculadora también puede ser muy útil en problemas de Astronomía de Posición. En general, los ángulos de este tipo de ejercicios vienen expresados en grados, minutos y segundos²¹, lo cual requiere presionar 9 teclas por cada ángulo escrito. Por tanto, al efectuar alguna operación, además de tomar más tiempo, las expresiones se vuelven más extensas, dificultando la “navegación” por ellas al momento de verificar errores. De este modo, para problemas de Astronomía de Posición más largos, vale la pena guardar los ángulos importantes en la memoria del dispositivo. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 16

Calcule el valor del ángulo β , sabiendo que satisface la relación:

$$\cos \beta = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2},$$

donde $\theta_0 = 06^\circ 56' 24''$, $\theta_1 = 03^\circ 30' 15''$ y $\theta_2 = 07^\circ 12' 26''$.

Solución

Comenzamos almacenando θ_0 en A, θ_1 en B y θ_2 en C²². Luego, simplemente hacemos:

$$\cos \beta = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \approx 0,317 \quad (1.1)$$

²⁰Si desea calcular algunos valores adicionales, como $L_{AV} \lambda^5$ o incluso $e^B - 1$, y almacenarlos en otra variable para asegurarse de que el cálculo final consista solo en multiplicaciones, también puede hacerlo. Es fundamental que elija el método que le resulte más seguro; por eso es importante practicar cálculos con la calculadora, ya que esto ayuda a desarrollar el autoconocimiento al usarla.

²¹En la siguiente subsección explicaremos cómo tratar estos ángulos al realizar los cálculos.

²²Vale la pena recalcar la importancia de definir las variables de manera intuitiva para facilitar su uso. Además, recuerde siempre **anotar** lo que representa cada letra; si olvida su significado, el tiempo que pretendía ahorrar se perderá.

$$\beta = \cos^{-1}(0,319) \approx 71^\circ 31' 52''$$

Observe cómo escribir la Ecuación 1.1 en la calculadora es mucho más organizado que:

$$\cos \beta = \frac{\cos 06^\circ 56' 24'' - \cos 03^\circ 30' 15'' \cos 07^\circ 12' 26''}{\sin 03^\circ 30' 15'' \sin 07^\circ 12' 26''}$$

1.4.6 Ángulos

La calculadora permite ingresar ángulos en grados ($^\circ$), minutos de arco ($'$), segundos de arco ($''$), radianes (rad) y gradians. Recuerde que el radián es la “unidad que representa la ausencia de unidad” (basta observar que $2\pi \text{ rad} = \frac{p}{R}$, donde p y R son el perímetro y el radio del círculo, respectivamente, y ambos poseen dimensión de distancia), y que el problema puede proporcionar datos en horas, minutos y segundos, los cuales son diferentes de las unidades estándar de la calculadora.

Grados, Radianes y Gradians

Para determinar la unidad de ángulo que la calculadora interpretará, basta con presionar **[MODE]** $\rightarrow$ **[MODE]** $\rightarrow$ [1], [2] o [3] $\rightarrow$ [=], siendo estos números correspondientes, respectivamente, a grados, radianes y gradians²³. Mantenga siempre su calculadora en grados, puesto que esta es la unidad angular más común en los ejercicios. Así, siempre que algún ángulo en el problema esté en radianes, recuerde cambiar su calculadora al modo radianes para realizar los cálculos, pero más importante aún, *no olvide volver al modo grados al terminar el ejercicio*. Para probar este cambio de unidad, considere los ejemplos:

- Con la calculadora en grados, calcule $\sin 30$ y $\sin \pi$ R: 0,5 y $\approx 0,0548$
- Ahora en radianes²⁴ realice $\sin 30$ y $\sin \pi$ R: $\approx -0,988$ y 0

Grados, Minutos y Segundos

Es muy común que los problemas pidan, por ejemplo, calcular $12^\circ 34' 56'' + 23^\circ 26' 10''$. Usualmente, sería necesario convertir cada uno de estos números para que tengan la misma unidad. Recordando que:

$$1^\circ = 60' = 3600'', \tag{1.2}$$

²³La función de ángulo en gradians puede ser ignorada, ya que nunca será utilizada.

²⁴Observe que en lugar de la letra “D” aparece ahora una “R”, indicando que está en modo Radianes.

tenemos que $12^{\circ}34'56'' = 45296''$ y $23^{\circ}26'10'' = 84370''$. Sumando los valores, obtenemos $129666''$ y, finalmente, realizamos el procedimiento inverso ($129666'' = 36^{\circ}01'06''$) para llegar a la respuesta final en formato grado-minuto-segundo. Sin embargo, es mucho más rápido utilizar la calculadora.

Debajo del botón de raíz cuadrada ($\sqrt{}$) hay un botón similar a: $\boxed{\circ \, ' \, ''}$. Cada vez que se presiona dicho botón, aparece en la pantalla el símbolo de grado ($^{\circ}$), que puede representar grados, minutos de arco o segundos de arco. Por ejemplo, para ingresar el ángulo $12^{\circ}34'56''$ en la calculadora, se puede hacer $[12] \rightarrow \boxed{\circ \, ' \, ''} \rightarrow [34] \rightarrow \boxed{\circ \, ' \, ''} \rightarrow [56] \rightarrow \boxed{\circ \, ' \, ''}$. El resultado en la pantalla de la calculadora será:

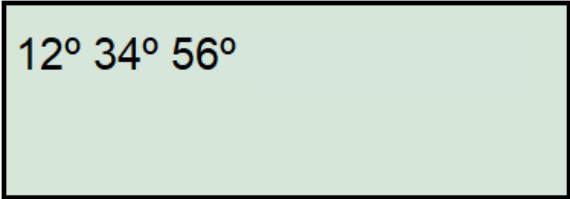


Figura 1.14: Pantalla de la calculadora después de la secuencia de teclas.

Sumando este resultado con el otro ángulo, tenemos:

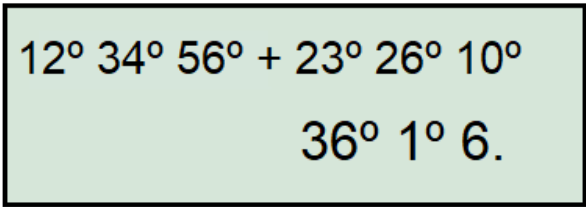


Figura 1.15: Suma de los ángulos. Note que coincide con la respuesta obtenida anteriormente.

Además, puede convertir cualquier valor expresado en grados, minutos o segundos al formato grado-minuto-segundo utilizando la calculadora: simplemente ingrese el valor y presione [=]. Por ejemplo, al convertir $9090''$ a grado-minuto-segundo:

$$0^{\circ} 0^{\circ} 9090^{\circ}$$

$$2^{\circ} 45^{\circ} 51.$$

Figura 1.16: Conversión de segundos a grados, minutos y segundos.

Horas, Minutos y Segundos

En Astronomía de Posición, algunas medidas se expresan en horas, minutos y segundos de arco en lugar de grados, minutos y segundos. Esta unidad se define de manera que $24h = 360^{\circ}$ y $1h = 60min = 3600s$. Así, comparando con las unidades de grados (Ec. 1.2), vemos que $1h = 15^{\circ}$, $1min = 15'$ y $1s = 15''$, es decir, para convertir de una a otra hay un factor de 15: de horas a grados multiplicamos por él y, en sentido contrario, dividimos. Por ejemplo, para $1h30min5s$:

$$1^{\circ} 30^{\circ} 5^{\circ} \times 15$$

$$22^{\circ} 31^{\circ} 15.$$

Figura 1.17: Ejemplo de conversión de horas a grados.

Vemos, por lo tanto, que $1h30min5s = 22^{\circ}31'15''$.

Para practicar estos conceptos, haga lo siguiente:

- Calcule $\cos(23^{\circ}26'10'')$. R: $\approx 0,9175$
- Convierta $56^{\circ}19'15''$ a $h \min s$. R: $3h45min17s$
- Calcule $\sin(6h19min28s)$. R: $\approx 0,996$
- Encuentre el factor de conversión entre radianes y segundos de arco. R: ≈ 206265

1.5 Cifras Significativas

En cualquier ciencia natural, se desea medir constantes y magnitudes físicas con la mayor precisión posible. Sin embargo, por muy cuidadosamente que se

realice una medición, inevitablemente tendrá incertidumbres debido al límite intrínseco del instrumento de medición o a efectos aleatorios.

Un concepto importante para entender el uso de cifras significativas es el de incertidumbres implícitas, que se ilustra mejor con un ejemplo. Suponga que desea medir la altura de una caja de madera utilizando una cinta métrica graduada solo en centímetros (i.e., que solo tiene marcas de valores enteros de centímetros). En este caso, colocaría el cero de la cinta en un extremo de la caja y estiraría la cinta hasta el otro extremo. Al medir, nota que el extremo de la caja está más cerca de la marca de 37 cm. Satisfecho con esta medición, reporta la altura como 37 cm. Claramente, la altura no es exactamente 37 cm, pero probablemente esté entre 36.5 cm y 37.5 cm. Note que hay una incertidumbre implícita de 0,5 cm.

Cualquier constante o magnitud física sin incertidumbres explícitas tiene incertidumbres implícitas. Por ello, al resolver un problema para hallar un parámetro a partir de otros, debemos considerar las diferentes incertidumbres implícitas. Así, no reportamos un valor final con más precisión de la real ni con poca precisión que lo haga inútil.

Volviendo al ejemplo, suponga que midió los otros lados y halló que el largo es 71 cm y el ancho 44 cm; entonces el volumen de la caja es 115588 cm^3 . ¿Es este valor muy preciso? ¿Cuál sería más adecuado reportar: 115590 cm^3 , 115600 cm^3 o 116000 cm^3 ? La pregunta es: ¿cómo determinar la incertidumbre final? Rigurosamente, se usa propagación de errores. Pero propagar errores en todos los problemas consume tiempo. Por eso, el uso de cifras significativas es esencial, pues permite reportar valores sin propagar errores. Estudiaremos ahora las reglas para contar cifras significativas.

OBS.: la comisión de la OBA (ex-olímpicos que hacen y corrigen las pruebas) compiló las reglas que usan [en este documento](#).

1.5.1 Reglas para cifras significativas

Todos los dígitos distintos de cero son significativos 8,26 g tiene 3 cifras significativas; 549,3 kg tiene 4.

Ceros entre dígitos no nulos son significativos 1001 J tiene 4 cifras; 303,002 m tiene 6.

Ceros a la izquierda del primer dígito no nulo no son significativos 0.3 N tiene 1 cifra; 0,00092 K tiene 2.

Ceros a la derecha del último dígito no nulo y del punto decimal son significativos 43,40 cm tiene 4; 19,00 mm tiene 4. Note que, en términos de incertidumbre implícita, 19,00 mm difiere de 19 mm.

Ceros a la derecha del último dígito no nulo y a la izquierda del punto decimal no son necesariamente significativos 180 km tiene 2 o 3 cifras; 80800 g puede tener 3, 4 o 5, pero convencionalmente se usa el menor número. La ambigüedad puede evitarse usando notación científica: 8.08×10^4 g (3 cifras), 8.080×10^4 g (4 cifras), 8.0800×10^4 g (5 cifras).

Números exactos tienen un número “infinito” de cifras significativas El $1/2$ en $\frac{1}{2}mv^2$ es exacto, y puede considerarse con cifras infinitas. No todos los números adimensionales son exactos; p. ej., la razón de la masa de Júpiter a la de la Tierra.

1.5.2 Reglas para operaciones con cifras significativas

La precisión del resultado está limitada por el parámetro menos preciso.

Suma y resta: el resultado se redondea a la última posición común $101 + 48,3897 = 149,3897$, que se redondea a 149. $50,349 + 7,56 + 42,2 = 100,109$, se redondea a 100,1.

Multiplicación, división, funciones exponenciales, trigonométricas, etc.: el resultado tiene el mismo número de cifras que el menos preciso $3,37 \cdot 14,169 = 47,74953 \rightarrow 47,7$. $2,76497^{5,42} = 247,7205843 \rightarrow 248$.

Constantes de alta precisión no alteran las cifras significativas Son números exactos, como π . Ejemplo: $G \cdot M_{\odot} = 1,333 \cdot 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$.

En cálculos largos, mantenga el mayor número de dígitos y redondee solo el resultado final.

Ejemplo 17

Calcule $(5,00 \cdot 1,544) + 4,000 + (\frac{23,3}{3,0})$.

Solución

Realizando la operación y conservando todos los dígitos:

$$(5,00 \cdot 1,544) + 4,000 + (\frac{23,3}{3,0}) = 19,48666 \dots$$

El resultado final correctamente redondeado es 19, que estuvo finalmente limitado por la última división.

1.6 Matemática Elemental

1.6.1 Operaciones con fracciones

Por ser un tema que todas las escuelas suelen enseñar antes del 9º grado, solo listaremos algunas propiedades. Para no perderse en la nomenclatura, recuerde que el numerador es el número de arriba y el denominador el de abajo en una fracción.

Multiplicación

Basta multiplicar denominador con denominador y numerador con numerador, como se muestra a continuación:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

División

Muy simple también: basta invertir el número por el cual se está dividiendo (divisor) y luego realizar la multiplicación con el número dividido (dividendo). Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Además, es posible encontrar esta división de la forma:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Simplificación

A veces es posible hacer nuestra fracción un poco más agradable al notar un factor común en el numerador y el denominador:

$$\frac{2ab}{c^2} \times \frac{c^3}{4a^2b} = \frac{2abc^3}{4a^2bc^2}$$

Note que podemos cancelar un factor de b arriba y abajo, uno de c^2 , uno de a y, por último, un factor de 2, es decir:

$$\frac{2abc^3}{4a^2bc^2} = \frac{c}{2a}$$

OBS.: debemos asegurarnos de que el término cancelado sea diferente de cero.

Suma y Resta

No podemos sumar ni restar fracciones si no tienen el mismo denominador. La manera más fácil de que tengan el mismo denominador es multiplicándolas. Por ejemplo, para sumar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, debemos hacer que ambos tengan el denominador bd . Sin embargo, no podemos cambiar el valor de la fracción, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Note que, al multiplicar por d (o b) arriba y abajo, no alteramos el valor de la fracción, ya que simplemente multiplicamos por 1, dado que $b/b = 1$. Para la resta sería lo mismo — recuerde que $a - b = a + (-b)$. Por último, algunos ejemplos:

Ejemplo 18

Encuentre el período sinódico S de un planeta B respecto a un planeta A dado que sus respectivos períodos siderales son $P_A = 53$ días y $P_B = 73$ días.

Dado:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_B}$$

Solución

El período sinódico S será simplemente:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{53} - \frac{1}{73} = \frac{73 - 53}{73 \cdot 53} = \frac{20}{3869} \Rightarrow S = \frac{3869}{20} = 193 \text{ días}$$

Aunque se aplique la matemática correctamente, este método es, de cierta manera, lento. Solo se recomendaría usarlo si no se tuviera ninguna calculadora o se tuviera únicamente una que realiza operaciones básicas. Sin embargo, en la selectiva está permitido el uso de calculadora científica. Así, la mejor manera de realizar este cálculo sería:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{53} - \frac{1}{73} \Rightarrow S = (53^{-1} - 73^{-1})^{-1}$$

Lo cual se encuentra fácilmente en la calculadora,²⁵ llegando al mismo resultado de 193 días.

Ejemplo 19

²⁵Si tiene dificultades para usar su calculadora científica, vea la sección sobre [este aparato](#).

Para practicar el desarrollo algebraico, demuestre que:

$$\frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}} - R = \frac{v_0^2 R^2}{2GM - v_0^2 R}$$

Solución

Primero, desarrollamos el denominador del primer término:

$$\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM} = \frac{2GM - v_0^2 R}{2GMR}$$

Así,

$$\frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}} - R = \frac{1}{\frac{2GM - v_0^2 R}{2GMR}} - R = 1 \times \frac{2GMR}{2GM - v_0^2 R} - R$$

Ahora podemos realizar la resta con mayor tranquilidad:

$$\frac{2GMR - R(2GM - v_0^2 R)}{2GM - v_0^2 R} = \frac{\cancel{2GMR} - \cancel{2GMR} + v_0^2 R^2}{2GM - v_0^2 R}$$

Finalmente, concluimos que:

$$\frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}} - R = \frac{v_0^2 R^2}{2GM - v_0^2 R}$$

Cabe recordar que el orden en que se realiza el desarrollo es una preferencia personal — por ejemplo, podría haberse hecho la resta antes de simplificar el denominador — y es muy importante que conozca su propio método para no confundirse durante el examen.

1.6.2 Potenciación

Así como definimos la multiplicación a partir de varias sumas, es decir, $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 7 \cdot 2$, definimos las potencias a partir de varios productos, por ejemplo, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$. A partir de esta motivación, podemos explorar las definiciones y propiedades de esta operación. Antes que nada, la nomenclatura usada para una operación x^a es decir que x es la **base** y a el **exponente**.

Exponentes Naturales

Para exponentes naturales, es fácil definir la potenciación como:

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a \text{ veces}}$$

A partir de esto, podemos mostrar algunas propiedades:

1. Multiplicación

Si multiplicamos dos potencias con la misma base, el resultado es la suma de los exponentes:

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{a \text{ veces}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{b \text{ veces}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a+b \text{ veces}} \\ &\Rightarrow \boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}} \end{aligned}$$

2. División

De manera análoga, en la división se realiza la resta de los exponentes. Suponiendo $a > b$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^a}{x^b} &= \frac{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a \text{ veces}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{b \text{ veces}}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a-b \text{ veces}} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}} \end{aligned}$$

3. Potencia de una potencia

Ahora, si un número x elevado a una potencia a se eleva a otra potencia b , el resultado será el producto de los exponentes:

$$(x^a)^b = \underbrace{x^a \cdot x^a \cdot \dots \cdot x^a}_{b \text{ veces}}$$

Utilizando la [Propiedad 1](#):

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= x^{\overbrace{a + a + \dots + a}^{b \text{ veces}}} \\ &\Rightarrow \boxed{(x^a)^b = x^{ab}} \end{aligned}$$

OBS.: $(x^a)^b \neq x^{a^b}$ ²⁶

²⁶Cuando tenemos x^{a^b} , primero debemos calcular a^b y luego elevar x a ese resultado, por ejemplo $2^{2^3} = 2^8 = 256$.

4. Mismo Exponente

En lugar de tener la misma base, consideremos ahora el producto de dos bases diferentes con el mismo exponente. En este caso, es equivalente a elevar el producto de las bases a ese exponente:

$$x^a \cdot y^a = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{a \text{ veces}} \underbrace{(y \cdot y \cdot \dots \cdot y)}_{a \text{ veces}}$$

Como la multiplicación es conmutativa, es decir, $abc = cba = bac$, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} x^a \cdot y^a &= \underbrace{(xy)(xy) \dots (xy)}_{a \text{ veces}} \\ \Rightarrow \boxed{x^a \cdot y^a &= (xy)^a} \end{aligned}$$

Exponentes Negativos

Cuando el exponente es negativo, la definición estándar se complica, ya que no podemos tener “-2 repeticiones”. Sin embargo, es posible definirlo de manera intuitiva.

Recordando la [Propiedad 2](#), podemos interpretar que $\frac{x^a}{x^b} = x^{a+(-b)}$, o mejor $x^a \cdot \frac{1}{x^b} = x^{a+(-b)}$. Comparando con la [Propiedad 1](#), podemos decir que:

$$x^{-b} = \frac{1}{x^b}$$

Y así es exactamente como definimos el signo negativo en el exponente: simplemente invierte la base.

Nótese que no está definido cuando la base es cero, ya que no podemos dividir por cero.

Otra manera de visualizarlo sería:

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

Lo cual debe coincidir con $2^{3-5} = 2^{-2}$ según la [Propiedad 2](#).

Exponentes Racionales

Para exponentes naturales, la definición es simplemente el número de veces que la base se multiplica; para negativos, la definición es similar pero invirtiendo la base. Ahora, para números racionales, necesitamos otro razonamiento.

Supongamos que queremos encontrar $8^{1/3}$. Inicialmente no sabemos el resultado, pero si lo llamamos x y lo elevamos al cubo, tenemos:

$$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^3$$

Según la [Propiedad 3](#), esto es:

$$8^{\frac{1}{3} \times 3} = x^3 \Rightarrow x^3 = 8^1$$

Tomando la raíz cúbica de ambos lados:

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Por lo tanto, $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$, o de manera más general:

$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$$

Además, se puede generalizar a fracciones del tipo b/a . Para esto, usamos la [Propiedad 3](#):

$$\begin{aligned} x^{\frac{b}{a}} &= \left(x^b\right)^{\frac{1}{a}} \\ \Rightarrow \boxed{x^{\frac{b}{a}} &= \sqrt[a]{x^b}} \end{aligned}$$

5. Factorizaciones

Una última propiedad relevante es cómo extraer y colocar números en expresiones elevadas a una potencia. Por ejemplo, si tenemos la expresión $(2x + 4y)^a$, podemos sacar el 2 y escribir:

$$(2x + 4y)^a = (2(x + 2y))^a$$

Para el ejercicio en cuestión, puede ser útil sacar ese 2 de los paréntesis. Para ello usamos la [Propiedad 4](#):

$$(2(x + 2y))^a = 2^a(x + 2y)^a$$

Es decir, al sacar un número de los paréntesis, éste se eleva a la potencia de la expresión. Esta propiedad es muy útil para extraer números de una raíz, por ejemplo:

$$\sqrt{16(x + y)} = 16^{1/2}\sqrt{x + y} = 4\sqrt{x + y}$$

Además, se utiliza mucho para realizar aproximaciones binomiales, esenciales en la resolución de muchos ejercicios, como vimos en la sección de [Aproximaciones](#).

A veces también es útil colocar un número dentro de los paréntesis. Si para sacarlo lo elevamos a a , para colocarlo debemos elevarlo a $1/a$, para que vuelva a ser el mismo número. Por ejemplo, si tenemos $8(x + y)^3$, podemos escribirlo como:

$$8(x + y)^3 = 2^3 \cdot (x + y)^3 = (2x + 2y)^3$$

1.6.3 Notación científica

Cuando queremos escribir un valor que sea muy grande o muy pequeño para una unidad dada, es conveniente expresarlo en notación científica. Por definición, los números escritos de esta forma obedecen la siguiente expresión:

$$a \cdot 10^b$$

Donde a es un número dentro del intervalo $1 \leq a < 10$ y b puede asumir cualquier valor. Por ejemplo, los siguientes números están expresados en notación científica:

- $2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
- $4,5 \cdot 10^5 \text{ s}$

Nótese que es mucho más conveniente leer los números escritos de esta forma que 0,00022 m o 450000. Ahora, vamos a aprender a escribir números en notación científica²⁷.

Caso 1: números mayores que 10

Cuando tenemos un número mayor que 10, movemos la coma decimal hacia la **izquierda** hasta obtener un número entre 1 y 10. Luego, contamos cuántas veces movimos la coma y escribimos ese número como exponente sobre una base de 10. Finalmente, escribimos nuestro número multiplicado por la potencia de 10.

Ejemplo 20

¿Cómo se expresa el número 604.000 en notación científica?

Solución

Si movemos la coma hacia la izquierda una vez, obtenemos 60.400. Debemos seguir moviéndola hasta obtener un número entre 1 y 10.

²⁷Créditos: Khan Academy.

Realizando este procedimiento, se observa que necesitamos mover la coma hacia la izquierda un total de 5 veces. Con esto, tenemos 6,04.

Como la coma se movió 5 veces, la respuesta final es:

$$604.000 = 6,04 \cdot 10^5$$

Caso 2: números menores que 1

Si tenemos un número menor que 1, movemos la coma decimal hacia la **derecha** hasta obtener un número entre 1 y 10. Luego, contamos cuántas veces movimos la coma y escribimos el resultado como un exponente negativo sobre una base de 10. Finalmente, escribimos nuestro número multiplicado por la potencia de 10.

Ejemplo 21

¿Cómo se expresa el número 0,0058 en notación científica?

Solución

Si movemos la coma hacia la **derecha** 3 veces, obtenemos un número entre 1 y 10, que es 5,8. Por lo tanto, la respuesta final es:

$$0,0058 = 5,8 \cdot 10^{-3}$$

1.6.4 Conversión de unidades

Si quisiéramos saber cuántos litros equivalen a 300 mL de leche, basta recordar que un litro posee 1000 mL, es decir, por regla de tres:

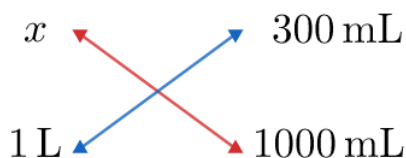


Figura 1.18: Conversión de unidades

Así:

$$x \cdot 1000 \text{ mL} = 300 \text{ mL} \cdot 1 \text{ L} \Rightarrow x = 300 \cancel{\text{mL}} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \cancel{\text{mL}}} = \frac{300}{1000} \text{ L} = \boxed{0,3 \text{ L}}$$

Ahora, yendo un poco más allá, ¿cuántos mm^3 equivalen a $0,3 \text{ L}$? La manera más inmediata de resolver esto sería hacer sucesivas reglas de tres, pero eso tomaría más tiempo del necesario. Para simplificar, presentamos un método más rápido para convertir entre cualquier par de unidades.

Primero, volvamos al ejemplo de la leche. Cuando hicimos la regla de tres, obtenemos:

$$x = 300 \text{ mL} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}$$

Nótese que $1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$, es decir:

$$x = 300 \cancel{\text{mL}} \cdot \underbrace{\frac{1 \text{ L}}{1000 \cancel{\text{mL}}}}_1$$

Esto significa que simplemente multiplicamos el valor original por 1, pero de forma que cancelamos la unidad no deseada, mL. Veamos algunos ejemplos más:

Ejemplo 22

¿300 mL equivalen a cuántos mm^3 ?

Solución

Primero, necesitamos pensar en un “camino”, es decir, qué unidades utilizaremos para la conversión. Una posibilidad sería:

1. Convertir de mL a L;
2. Convertir de L a m^3 ;
3. Convertir de m^3 a mm^3 .

Como $1000 \text{ mL} = 1 \text{ L}$, $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$ y $1 \text{ m}^3 = (1000 \text{ mm})^3 = 1000^3 \text{ mm}^3$, tenemos:

$$300 \text{ mL} = 300 \cancel{\text{mL}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{L}}}{1000 \cancel{\text{mL}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{m}^3}}{1000 \cancel{\text{L}}} \cdot \frac{1000^3 \text{ mm}^3}{1 \cancel{\text{m}^3}}$$

Es decir:

$$300 \text{ mL} = 300 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1000^3}{1} \text{ mm}^3 = \boxed{3 \cdot 10^5 \text{ mm}^3}$$

Ejemplo 23
 $2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ ¿equivalen a cuántos segundos de arco?

Solución

Un camino posible sería:

- 1. Convertir de rad a $^\circ$;
- 2. Convertir de $^\circ$ a $''$;

Como $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ y $1^\circ = 3600''$, tenemos:

$$2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 2,2 \cdot 10^{-5} \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{180 \cancel{^\circ}}{\pi \cancel{\text{rad}}} \cdot \frac{3600''}{1 \cancel{^\circ}}$$

Reescribiendo:

$$2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3600''}{1} = \boxed{4,5''}$$

Finalmente, sigue una tabla con algunos de los prefijos utilizados en la notación del SI:

PREFIJO	SÍMBOLO	FATOR
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

Figura 1.19: Prefijos del SI

Cabe resaltar que también es muy común utilizar la unidad **ångström**, representada por el símbolo Å. No es un prefijo, sino una unidad propia.

$1\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$

1.6.5 Razones y proporciones

Probablemente ya haya escuchado expresiones como “la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia” o “la fuerza es directamente proporcional a la deformación del resorte” y tal vez se haya preguntado qué significan exactamente. Por lo tanto, trabajaremos con la definición de cada tipo y luego analizaremos su relevancia.

- **Magnitudes directamente proporcionales:** dos magnitudes x y y se dicen directamente proporcionales si, y solo si, podemos relacionarlas como $y = kx$ para alguna constante k diferente de cero. También podemos escribir la relación como $\frac{y}{x} = k$, interpretando así que ser directamente proporcional es lo mismo que tener la razón constante.

Para indicar que la variable y es proporcional a la variable x , usamos la notación:

$$y \propto x$$

- **Magnitudes inversamente proporcionales:** dos magnitudes x y y se dicen inversamente proporcionales si, y solo si, podemos relacionarlas como $y = \frac{k}{x}$ para alguna constante k diferente de cero. También podemos escribir la relación como $xy = k$, interpretando así que ser inversamente proporcional es lo mismo que tener el producto constante.

Para indicar que la variable y es inversamente proporcional a la variable x , acostumbramos escribir:

$$xy = \text{cte.}$$

Lo cual no es una notación muy avanzada, “cte.”²⁸ es simplemente una abreviación de “constante”, es decir, estamos diciendo que el producto es constante.

Una cosa a tener en cuenta es que, si tenemos una relación del tipo $y = kx^2$, obviamente no podemos decir que y y x son directamente proporcionales. Sin embargo, **podemos decir que y y x^2 lo son.**

Además, observe que a pesar de recibir nombres diferentes, los dos conceptos esencialmente dicen lo mismo. Por ejemplo, una relación entre x y y como $xy = k$, como vimos, es inversamente proporcional. Pero puede interpretarse como $y = kx^{-1}$, de modo que ahora podemos decir que las variables y y x^{-1} son directamente proporcionales. Así que no se concentre demasiado en la nomenclatura, sino en el mensaje que transmiten.

²⁸También es posible encontrar “const.”

Finalmente, podemos escribir la fuerza gravitatoria como:

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{k}{r^2}$$

Por lo tanto, es fácil ver que F_g y r^2 son inversamente proporcionales.

Para el resorte, tenemos que:

$$F_{el} = kx$$

Que automáticamente nos permite concluir que $F \propto x$. Así, presentaremos algunos ejemplos para ilustrar el uso de las proporciones.

Ejemplo 24

Considere 2 cuerpos en el espacio sujetos únicamente a la atracción gravitatoria. Si la fuerza entre ellos es F , ¿cuál sería la fuerza si la masa de ambos se triplicara, pero la distancia entre ellos se redujera a la mitad?

Solución

Esta es una aplicación directa del concepto de proporcionalidad. Recordando, la fuerza gravitatoria puede escribirse como:

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Es decir, es directamente proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Así, si cada masa se triplica, la fuerza se triplicará para cada una, resultando en un factor de $3^2 = 9$. Además, si la distancia se reduce a la mitad, su cuadrado se reducirá por un factor de $2^2 = 4$. Por lo tanto, tendremos otro factor de 4 en F . Finalmente, concluimos que aparecerá un factor de $9 \cdot 4 = 36$ en la fuerza, es decir:

$$\boxed{F' = 36F}$$

Alternativamente, también podría resolverlo diciendo que la distancia inicial era r , cada masa era m_1 y m_2 , y escribir:

$$\begin{aligned} F' &= \frac{G(3m_1)(3m_2)}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{9Gm_1m_2}{\frac{r^2}{4}} = 9 \cdot 4 \left(\frac{Gm_1m_2}{r^2}\right) \\ &\Rightarrow \boxed{F' = 36F} \end{aligned}$$

Ejemplo 25

En un proceso adiabático, se sabe que la presión P y el volumen V del gas cumplen la relación $PV^\gamma = \text{cte.}$, donde γ es una constante. Además, recuerde que la definición de densidad es $\rho = \frac{m}{V}$, siendo m la masa del gas, que se conserva. Encuentre la densidad ρ_f del gas después de una expansión adiabática en la cual su presión se redujo a la mitad. Considere que su densidad inicial era ρ_0 .

Solución

Si nunca ha visto Termodinámica, este problema puede parecer, al principio, intimidante. Sin embargo, la parte interesante es que el enunciado nos proporciona toda la información para resolverlo sin conocimientos previos (excepto, claro, matemáticas). Esencialmente, queremos encontrar cómo depende la presión de la densidad en un proceso adiabático. Con eso, el ejercicio está resuelto. **Por ejemplo**, si encontramos $P \propto \rho^2$, sabemos que:

$$\frac{P_0}{\rho_0^2} = \frac{P}{\rho^2} \Rightarrow \frac{\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{P}{P_0}$$

Y, según el enunciado, P/P_0 es $1/2$, ya que la presión se redujo a la mitad, por lo que nuestro ejercicio termina.

Para encontrar esta relación, analizamos la información dada. Básicamente, tenemos 3 variables que cambian en el gas: volumen, presión y densidad. Como tenemos 2 relaciones, si despejamos el volumen de una y lo sustituimos en la otra, obtenemos una relación solo entre densidad y presión. Dado que la masa es constante:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V \propto \rho^{-1}$$

Entonces:

$$PV^\gamma = \text{cte.} \Rightarrow P(\rho^{-1})^\gamma = \text{cte.} \Rightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte.} \Rightarrow P \propto \rho^\gamma$$

Finalmente, como ya se discutió:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\Rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 2^{-\frac{1}{\gamma}}} \end{aligned}$$

1.6.6 Ecuaciones de Primer Grado

En este punto, muchas ecuaciones ya se han resuelto en el proceso, pero es importante dedicar una sección a este tema para organizar las ideas generales al resolver ecuaciones.

Todos los métodos se basan en un concepto fundamental para entender ecuaciones. Al resolverlas, al menos al principio, es útil visualizarlas como una balanza equilibrada. Por lo tanto, siempre que realice una operación en un lado, debe hacer la misma en el otro. Por ejemplo, dada la ecuación $2x + 4 = 10$, probablemente se resuelva pasando el 4 al otro lado restando y luego dividiendo entre 2:

$$2x = 10 - 4 = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Esto significa que al "pasar el 4 restando" y "el 2 dividiendo" estamos realizando operaciones inversas para mantener la igualdad. Esto facilita entender funciones inversas, logaritmos y algunas funciones trigonométricas.

Ecuaciones con una sola x

Muchas ecuaciones no son de la forma $ax + b = 0$, como es el estándar. Por ejemplo, $x^3 - 8 = 0$ parece de 3er grado, pero podemos escribir $x^3 = 8$ y resolverla. Sea $x^{a/b} = k$, entonces:

$$x = k^{b/a}$$

Aunque el exponente de x no sea 1, podemos resolver todas estas ecuaciones como ecuaciones de primer grado, porque aislando x llegamos a una forma $x^{a/b} = k$.

Ejemplo 26

Un cascarón esférico²⁹ tiene un volumen de $254 m^3$. Si el radio de la esfera interior es $1,5 m$, ¿cuál es el radio de la esfera exterior?

Solución

Sea R el radio de la esfera mayor. El volumen del cascarón esférico es la diferencia entre los volúmenes de las esferas:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = V + \frac{4}{3}\pi r^3$$

Despejando R :

$$R^3 = r^3 + \frac{3V}{4\pi} \Rightarrow R = \left(r^3 + \frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = \left(1,5^3 + \frac{3 \cdot 254}{4\pi}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 4,00 m}$$

Ejemplo 27

(P1 2022) Suponga un asteroide de órbita circular y situado por dentro de la órbita de la Tierra. Usted, desde su observatorio, descubre con precisión que el período sinódico de ese asteroide es $S = 3,00$ años. De este modo, calcule la distancia, en UA, de ese asteroide al Sol.

Solución

Primero, por ser un planeta interior con respecto a la Tierra, sabemos que su período es menor que el de la Tierra (por la 3ª Ley de Kepler). Así la ecuación del período sinódico queda:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_{\oplus}}$$

Donde T_A es el período del asteroide y $T_{\oplus}$ el de la Tierra, que sabemos vale 1 año.

Además, como queremos la distancia en UA, podemos usar la 3ª Ley de Kepler en la forma:

$$T_A^2 = a_A^3 \Rightarrow T_A = (a_A)^{\frac{3}{2}}$$

siendo a_A la distancia pedida. Note que el período se expresa en años, exactamente la unidad que queremos para el período sinódico. Luego,

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{(a_A)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{T_{\oplus}} \Rightarrow \frac{1}{(a_A)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_{\oplus}}$$

²⁹Espacio entre dos esferas concéntricas, equivalente a una corona circular en 3D

Recordando que $\frac{1}{x} = x^{-1}$ y sustituyendo los valores:

$$a_A^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow a_A = \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_A = 0,82 \text{ UA}}$$

OBS.: hay varias maneras de desarrollar las ecuaciones; por ejemplo, quizás para usted sería más intuitivo hallar T_A directamente con el período sinódico y luego aplicarlo en la 3ª Ley; nosotros lo hicimos de este modo porque ilustraba mejor la idea presentada anteriormente.

Exponentes Pares

Un problema de los exponentes pares es que números negativos, al elevarse a ellos, se vuelven positivos. Esto es un problema, porque si tenemos la ecuación $x^2 = 4$, no podemos limitarnos a decir que $x = 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$, ya que -2 también debería ser solución, puesto que $(-2)^2 = 4$. ¿Cómo proceder?

Antes que nada, aunque $2^2 = (-2)^2 = 4$, no podemos decir que $\sqrt{4}$ valga 2 y -2 . Por definición, la raíz de un número sólo puede asumir un valor y el valor elegido es el no negativo.

A partir de ello podemos concluir que $\sqrt{x} \geq 0$, independientemente del valor de x ³⁰, o también que $\sqrt{x^2} \geq 0$. Por tanto, no podemos decir que $\sqrt{x^2} = x$ para todo x , porque si x fuese negativo tendríamos $\sqrt{x^2} < 0$, lo cual es imposible.

Para hallar cuánto debe valer $\sqrt{x^2}$, basta ver un ejemplo. Como ya vimos $2^2 = (-2)^2 = 4$, luego $\sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Así, si el número es positivo, la raíz de su cuadrado es simplemente él mismo, pero si es negativo vale su módulo; en otras palabras:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ |x|, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Puesto que el módulo de un número positivo es él mismo, podemos generalizar y decir que $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo x real. Entonces, en la ecuación $x^2 = 4$ podemos hacer:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Rightarrow |x| = 2.$$

Entonces, para resolver esta ecuación modular basta recordar que $|-x| = |x|$:

³⁰La única condición es que x no puede ser negativo, pues no definimos raíz de números negativos en el conjunto de los reales.

$$x = \pm 2$$

donde “ $\pm$ ” se lee “más o menos” y es la notación que resume $x = -2$ o 2 .

De nuevo, normalmente en las escuelas sólo enseñan que al «pasar la raíz al otro lado» hay que poner ese $\pm$. En efecto, es un procedimiento más rápido que no obliga a razonar toda la justificación y no hay nada de malo en usarlo para ahorrar tiempo. Sin embargo, es conveniente al menos una vez entender de dónde viene la motivación para introducir el $\pm$, para que no sea algo memorizado sin comprensión.

En general, en Astronomía buscamos soluciones positivas, por lo que muchas soluciones ni siquiera mencionan esta discusión al operar con raíces cuadradas. Incluso en la propia solución del [Ejemplo 27](#) no comentamos sobre ello, pero observe que el período es necesariamente positivo, por lo que no sería preciso considerar la opción negativa (la descartaríamos después).

OBS.: a lo largo del desarrollo del ejemplo utilizamos la raíz cuadrada; no obstante, esta discusión se extiende a cualquier exponente par.

1.6.7 Ecuaciones de segundo grado

Al resolver un ejercicio, con frecuencia encontrará ecuaciones que no encajan en ninguno de los casos anteriores, es decir, la variable x aparece más de una vez con exponentes diferentes. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ no existe una forma rápida de aislar x . Por ello es necesario un nuevo método para poder resolver este tipo de ecuaciones. Con esa motivación se desarrolló el método de **Delta y Bhaskara**.

En términos generales, una ecuación de segundo grado puede escribirse como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c son coeficientes reales.

El método de Delta y Bhaskara establece que, si definimos $\Delta = b^2 - 4ac$ (de ahí el nombre «Delta»), las soluciones de la ecuación son:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

o, de forma más compacta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Demostración

Para mantener el patrón, sigue abajo la demostración. No es necesaria, pero es interesante verla al menos una vez para saber de dónde viene esta fórmula tan utilizada.

En primer lugar, sería interesante que pudiéramos escribir nuestra ecuación en la forma $(x + A)^2 = B$, pues así sería posible resolverla: bastaría con pasar la raíz al lado derecho y luego restar A en ambos lados.

Dicho esto, recordando el trinomio del cuadrado perfecto, sabemos que $(x + B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2$. Comparando con nuestra ecuación, sería bueno que el coeficiente de x desapareciera. Para eso, basta dividir la ecuación por a :

$$\frac{ax^2 + bx + c = 0}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Comparando de nuevo, vemos que queremos que $2B = \frac{b}{a}$, pues ese es el coeficiente de x . Luego, $B = \frac{b}{2a}$. Así, si sumamos B^2 en ambos lados:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Antes de pasar la raíz, mejoremos el lado derecho. Nótese que $4a \cdot a = 4a^2$, es decir:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

Ahora, pasando la raíz (no olvides el $\pm$):

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aislando x :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Usando $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Antes de iniciar los ejemplos, es importante notar que, por haber una raíz en la respuesta final, necesitamos analizar su signo — ya que no podemos calcular la raíz de un número negativo en el universo de los reales. Además, si el Δ , también llamado **discriminante**, es nulo, tendremos solo una respuesta,

o, más rigurosamente, dos respuestas iguales. Entonces, tenemos tres casos a considerar:

$$\begin{cases} \text{si } \Delta < 0, \text{ no hay solución real} \\ \text{si } \Delta = 0, \text{ hay dos soluciones reales e iguales} \\ \text{si } \Delta > 0, \text{ hay dos soluciones reales y distintas} \end{cases}$$

Ejemplo 28

Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solución

Aplicación directa de la fórmula mostrada. Primero, calculando Δ :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \\ &\Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ o } 3} \end{aligned}$$

Ejemplo 29

Resuelve en x la ecuación

$$v_0^2 x^2 + 2GMx - v_0^2 R^2 = \frac{2GM}{R} x^2$$

Solución

Primero, necesitamos dejar solo 0 en un lado:

$$\left(v_0^2 - \frac{2GM}{R}\right)x^2 + 2GMx - v_0^2 R^2 = 0$$

El discriminante queda:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2GM)^2 - 4 \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R}\right) (-v_0^2 R^2) \Rightarrow \\ \Delta &= 4G^2 M^2 + 4v_0^2 R^2 \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R}\right) \Rightarrow \\ \Delta &= 4G^2 M^2 + 4v_0^4 R^2 - 8GMRv_0^2 \end{aligned}$$

Cuando el Δ parezca muy feo, conviene intentar factorizarlo para encontrar una expresión más bonita. Colocando el 4 en evidencia y reescribiendo la expresión:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(G^2 M^2 - 2GM R v_0^2 + v_0^4 R^2) \\ \Delta &= 4 \left((GM)^2 - 2(GM)(v_0^2 R) + (v_0^2 R)^2 \right),\end{aligned}$$

que es un trinomio del cuadrado perfecto. Luego,

$$\Delta = 4(GM - v_0^2 R)^2$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{-2GM \pm \sqrt{4(GM - v_0^2 R)^2}}{2 \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R} \right)}$$

Sacando la raíz,

$$x = \frac{-2GM \pm 2(GM - v_0^2 R)}{2 \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R} \right)}$$

Cancelando el factor 2,

$$x = \frac{-GM \pm (GM - v_0^2 R)}{v_0^2 - \frac{2GM}{R}}$$

Viendo ahora cada caso:

$$x = \begin{cases} \frac{-GM + (GM - v_0^2 R)}{v_0^2 - \frac{2GM}{R}} = -\frac{v_0^2 R}{v_0^2 - \frac{2GM}{R}} = \frac{v_0^2 R}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} \\ \frac{-GM - (GM - v_0^2 R)}{v_0^2 - \frac{2GM}{R}} = \frac{-2GM + v_0^2 R}{v_0^2 - \frac{2GM}{R}} = \left(\frac{v_0^2 - \frac{2GM}{R}}{v_0^2 - \frac{2GM}{R}} \right) R = R \end{cases}$$

Así,

$$x = R \text{ o } x = \frac{v_0^2}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} R$$

1.6.8 Logaritmos

Ya vimos cómo resolver ecuaciones lineales con x , ecuaciones cuadráticas e incluso algunas en las que x aparece con un exponente distinto. Sin embargo, aún no sabemos qué hacer cuando x está en el exponente. Como ya discutimos, necesitamos una función que “anule” la exponenciación. Para eso, se creó el concepto de logaritmo.

Definición

Esencialmente, se define el logaritmo como la operación que satisface

$$a^x = b \Rightarrow \log_a(a^x) = x$$

Es decir, anula el exponente.

Así, si tenemos la ecuación $a^x = b$, podemos aplicar el logaritmo en ambos lados:

$$\log_a(a^x) = \log_a b \Rightarrow x = \log_a b$$

Donde llamamos a la base y b el logaritmando, y se lee “logaritmo de b en base a ”.

De esta manera, sacar el logaritmo de un número es lo mismo que preguntar “¿a qué exponente debemos elevar la base para obtener ese número?”. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$, porque necesitamos elevar 2 al cubo para obtener 8.

Propiedades

Presentada la definición, podemos explorar sus propiedades.

1. Condición de Existencia

Como las bases negativas tendrían comportamientos inconsistentes, se decidió que la base de un logaritmo debe ser positiva. En consecuencia, el logaritmando también debe ser positivo, dado que no existe ninguna potencia que haga que un número positivo se vuelva negativo. Por lo tanto, la condición de existencia del logaritmo es:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b \text{ si } a, b > 0$$

2. Suma y Resta de logaritmos

La suma de dos logaritmos (en la misma base) es igual al logaritmo del producto, es decir, $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$. Es más fácil demostrar lo contrario: el logaritmo del producto es igual a la suma de los logaritmos.

Sea $x = \log_c a$ y $y = \log_c b$. Por la definición de logaritmo, sabemos que $c^x = a$ y $c^y = b$. Luego,

$$ab = c^{x+y} \Rightarrow \log_c(ab) = x + y$$

Pero $x = \log_c a$ y $y = \log_c b$. Entonces:

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

De manera análoga,

$$\log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

No es necesario memorizar la deducción de la propiedad, pero para no olvidarla, recuerda la [Propiedad 1](#) de exponenciación: si el producto suma los exponentes, tiene sentido que el logaritmo del producto sume los logaritmos, ya que son operaciones inversas.

3. Exponenciación en el logaritmo

Esta propiedad dice que $\log_c (a^b) = b \log_c a$. La manera más intuitiva de verlo es recordar la definición de exponenciación y aplicar la Propiedad 2 del logaritmo:

$$\begin{aligned} \log_c (a^b) &= \log_c (\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ veces}}) = \underbrace{\log_c a + \log_c a + \dots + \log_c a}_{b \text{ veces}} \\ &\Rightarrow \boxed{\log_c (a^b) = b \cdot \log_c a} \end{aligned}$$

Aunque esta demostración sea válida solo para números naturales,³¹ la propiedad se aplica para cualquier exponente, sea natural o real.

4. Exponentes con logaritmo

A veces el logaritmo puede aparecer en el exponente y, cuando la base del exponente es la misma que la del logaritmo, podemos aplicar su definición para simplificar el cálculo. Por ejemplo, si queremos calcular $2^{\log_2 3}$, debemos recordar la pregunta que el logaritmo intenta responder: “¿a qué exponente debemos elevar la base para obtener el logaritmando?”. Es decir, $\log_2 3$ es exactamente el exponente que debemos poner en el 2 para que dé 3, o en otras palabras, $2^{\log_2 3} = 3$. En general:

$$\boxed{A^{\log_A b} = b}$$

Bases Principales

Como se dijo anteriormente, las bases de los logaritmos no son algo por lo que debemos preocuparnos. Esto ocurre porque en las olimpiadas nunca aparecerá una base diferente de 10 o del número de Euler e ³² (quizás si estudias informática aparezcan algunas bases 2, pero eso está fuera de nuestro alcance).

³¹Presentamos esta y no la más rigurosa, porque así resulta más intuitiva y, en consecuencia, más fácil de recordar.

³²Es difícil explicar la importancia del logaritmo en base e (llamado logaritmo natural o neperiano) para quien aún no ha estudiado Cálculo, ya que suele ser relevante principalmente en esa área. Por lo tanto, solo recuerda su existencia — no suele aparecer con frecuencia en las olimpiadas de Astronomía.

Estas dos bases son tan recurrentes que sus logaritmos reciben formas especiales. En lugar de escribir $\log_{10}$ y $\log_e$, usamos $\log$ y $\ln$ (como puedes verificar en tu calculadora), respectivamente. Es decir, cuando la base esté omitida, **se sobreentiende que la base es 10**.

Aunque el procedimiento estándar para resolver una ecuación del tipo $a^x = b$ sea aplicar el logaritmo en base a en ambos lados, podemos resolverla usando logaritmos en base 10, gracias a la [Propiedad 3](#) del logaritmo:

$$\log(a^x) = \log b \Rightarrow x \cdot \log a = \log b \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}^{33}$$

Ejemplo 30

La masa de un compuesto radiactivo se describe mediante la ecuación $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$, donde m_0 es su masa inicial, $\tau = 2,00$ días su período de semivida y t es el tiempo transcurrido en días. ¿Después de cuántos días su masa será el 5% de la original?

Solución

Es una aplicación directa de la idea que acabamos de mostrar. Dividiendo ambos lados por m_0 y luego aplicando el logaritmo:

$$\frac{m}{m_0} = 2^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \log\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \log 2$$

Aislando el tiempo t :

$$t = -\tau \frac{\log\left(\frac{m}{m_0}\right)}{\log 2} = -2 \times \frac{\log(0,05)}{\log(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 8,64 \text{ días}}$$

Variable Dentro del Logaritmo

Hasta el momento solo hemos visto ecuaciones en las cuales la variable aparece en el exponente. Sin embargo, a veces podemos encontrar la x dentro del logaritmo. En esos casos, para proceder basta con usar la [Propiedad 4](#) de los

³³Nótese que a partir de esto concluimos que $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$, que es la propiedad de cambio de base. Como la única base que aparece en los exámenes es la base 10, esta propiedad no fue introducida.

logaritmos. Por ejemplo, si tenemos $\log x = a$, podemos elevar el 10 a ambos lados de la ecuación³⁴:

$$10^{\log x} = 10^a \xrightarrow{\text{Prop. 4}} x = 10^a$$

es decir, en esos casos, basta con aislar el log y colocar el otro lado de la ecuación en el exponente del 10.

Ejemplo 31

Si la magnitud absoluta de una estrella es $M = +1,47$ y su magnitud aparente $m = +4,93$, ¿cuál es su distancia, en pársecs, hasta nosotros?

Solución

Nuevamente, una simple aplicación de lo que se ha dicho. Sabemos que si D es la distancia de la estrella en pársecs, tenemos:

$$m - M = 5 \log(D) - 5 \Rightarrow \log(D) = \frac{m - M + 5}{5}$$

Elevando 10 a ambos lados:

$$D = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{4,93-1,47+5}{5}} \\ \Rightarrow \boxed{D = 49,2 pc}$$

1.7 Geometría Elemental

1.7.1 Rectas paralelas y perpendiculares

La imagen de abajo muestra una situación arbitraria en la que hay dos rectas, r y s , que se cruzan.

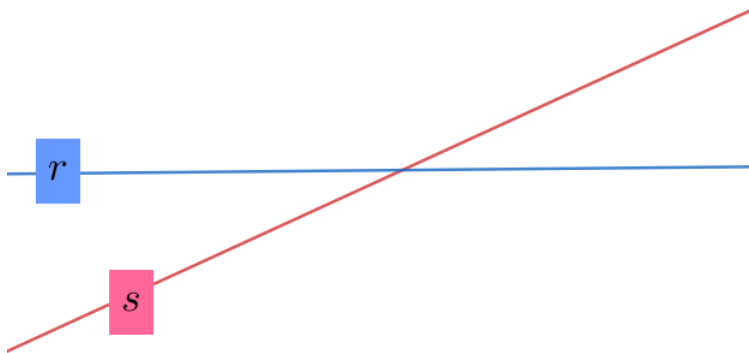


Figura 1.20: Rectas que se cruzan

³⁴Observa que, si $a = b$, entonces $10^a = 10^b$.

Decimos que esas rectas son **paralelas** entre sí cuando no se intersectan, tal como se muestra en la imagen de abajo.

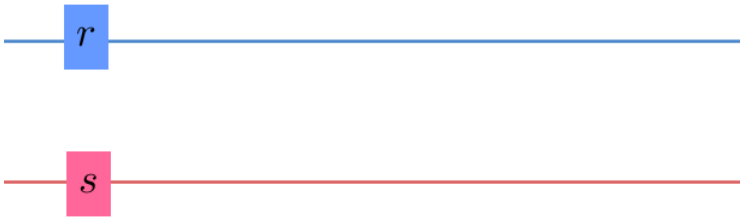


Figura 1.21: Rectas paralelas

Por otro lado, si el ángulo entre las rectas es de 90° , decimos que son **perpendiculares**.

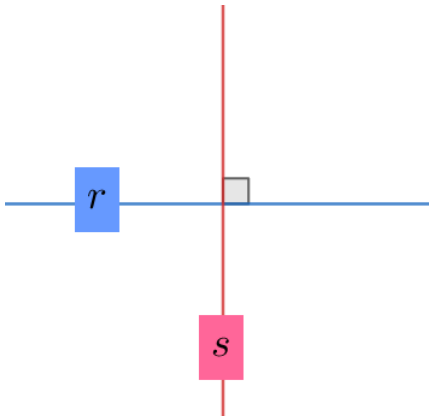


Figura 1.22: Rectas perpendiculares

1.7.2 **Ángulos Complementarios y Suplementarios**

Dados dos ángulos α y β , decimos que son **complementarios** si:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Como 90° es el ángulo entre dos rectas perpendiculares, tenemos que esta condición puede representarse con la imagen de abajo.

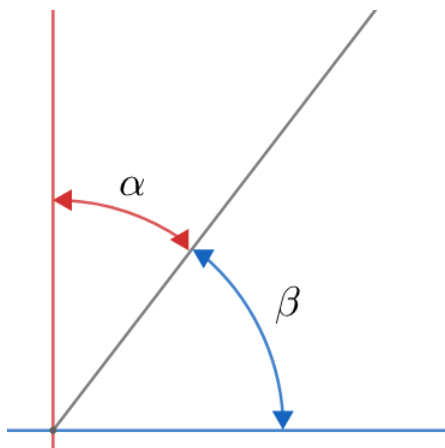


Figura 1.23: Ángulos complementarios

Ahora, decimos que α y β son suplementarios si:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Sabemos que 180° es el ángulo asociado a una recta, por lo tanto podemos representar esta situación con la siguiente imagen:

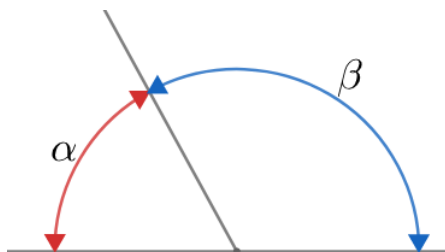


Figura 1.24: Ángulos suplementarios

1.7.3 Ángulos Opuestos por el Vértice

Analicemos los ángulos asociados a la intersección de dos rectas:

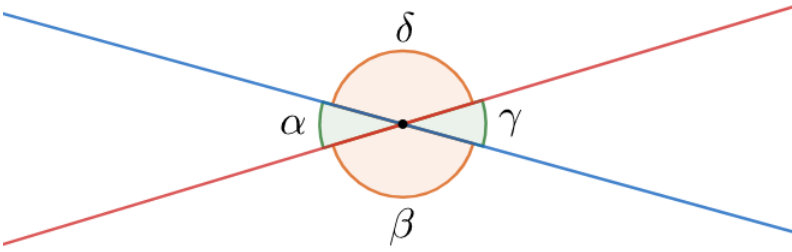


Figura 1.25: Ángulos opuestos por el vértice

Una propiedad extremadamente importante es que los ángulos opuestos por el vértice (punto de intersección entre las rectas) son **idénticos**. Es decir:

$$\alpha = \gamma$$

y

$$\beta = \delta$$

Además, cabe destacar que, de acuerdo con los ángulos suplementarios:

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180^\circ$$

1.7.4 Ángulos en Rectas Paralelas

Analicemos una situación en la que hay dos rectas paralelas entre sí y otra recta que no es paralela con respecto a las demás, tal como se muestra en la imagen de abajo.

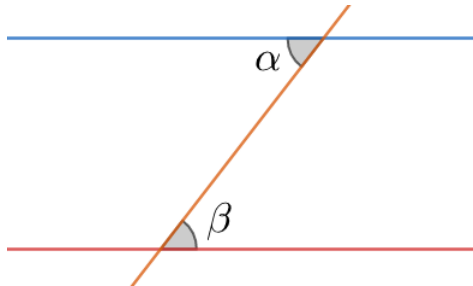


Figura 1.26: Ángulos en rectas paralelas

Una propiedad entre los ángulos α y β es que son **idénticos**. Es decir:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

1.7.5 Similitud de Triángulos

Si tomamos un triángulo y duplicamos todos sus lados, ¿qué ocurre con sus ángulos internos? A primera vista puede parecer difícil de imaginar, pero en realidad es bastante simple.

Toma cualquier triángulo en este PDF y hazle zoom. Algo importante sobre hacer zoom es que altera todas las dimensiones por igual, es decir, si un lado se multiplica por 2, todos los demás también lo hacen. Al hacerlo, observa que la forma del triángulo no cambia, es decir, sus ángulos internos se mantienen.

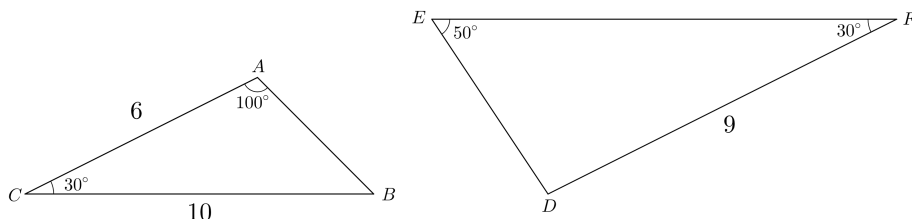
De esta manera, concluimos que al multiplicar todos los lados por el mismo factor, los ángulos internos del triángulo no cambian. De manera análoga, si notamos que dos triángulos tienen los mismos ángulos internos, podemos afirmar que sus lados tienen una razón constante³⁵, es decir, un triángulo es simplemente el otro con los lados multiplicados por algún factor k .

Cuando esto ocurre, decimos que los triángulos son **similares**. Hay más de un caso de similitud, pero no aparecen en las olimpiadas, por lo tanto solo abordaremos el caso en el que los ángulos son iguales.

Nótese que, como la suma de los ángulos internos de un triángulo es fija, si probamos que dos ángulos son iguales, el tercero necesariamente también lo será. Normalmente, para demostrar la igualdad de los ángulos usamos los hechos mostrados en las dos últimas subsecciones, como veremos en los próximos ejemplos.

Ejemplo 32

Dados los dos triángulos de abajo, calcule EF .



³⁵Mostrar esto está fuera del alcance de este libro, pero si te gusta la Matemática intenta usar el Teorema de Tales.

Solución

Primero, vamos a calcular el ángulo interno faltante en $\triangle ABC$. Sabemos que la suma debe ser 180° :

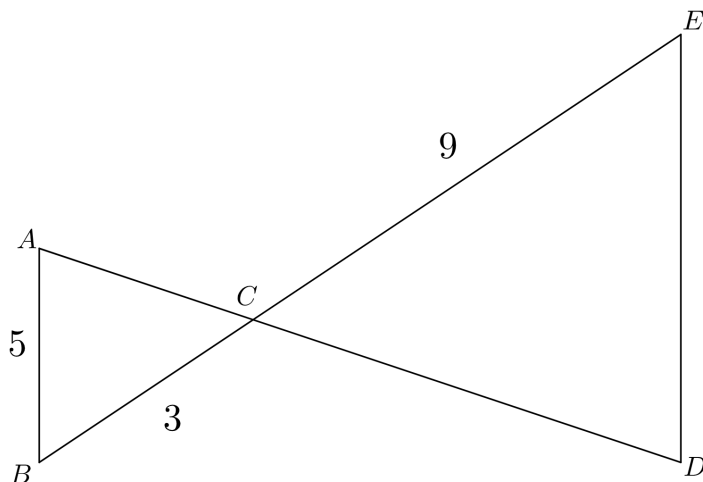
$$\begin{aligned} \hat{A}BC + \hat{A}CB + \hat{B}AC &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A}BC + 30^\circ + 100^\circ = 180^\circ \\ &\Rightarrow \hat{A}BC = 50^\circ \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que dos ángulos entre los triángulos coinciden. Luego, son semejantes y podemos encontrar la razón de sus lados. Primero, es importante identificar los lados correspondientes. Para ello, basta observar el ángulo opuesto al lado. AC es opuesto al ángulo de 50° , entonces su correspondiente es DF . De manera análoga, BC y EF también lo son. Finalmente, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{DF}{AC} &= \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{EF}{10} = \frac{9}{6} \\ &\Rightarrow \boxed{EF = 15} \end{aligned}$$

Ejemplo 33

Dado que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, encuentre DE .

**Solución**

Primero, note que $\hat{A}CB = \hat{D}CE$, ya que son opuestos por el vértice. Ahora, dado que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, vemos que $\hat{B}AC = \hat{E}DC$.

Así, ya que dos ángulos son iguales, podemos afirmar que los triángulos son semejantes. Luego:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{DE}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{DE = 15}$$

1.7.6 Círculo y Circunferencia

Un círculo es un conjunto de puntos que equidistan de un mismo origen. Estudiaremos cinco tipos de longitudes en la circunferencia: cuerda, diámetro, radio, perímetro y arco.

Primero, una **cuerda** es cualquier segmento que une dos puntos de la misma circunferencia, como se muestra en la imagen de abajo. Son segmentos secantes a la circunferencia, ya que pasan por dos de sus puntos. Cabe destacar que las rectas que pasan solo por un punto de la circunferencia se llaman rectas tangentes.

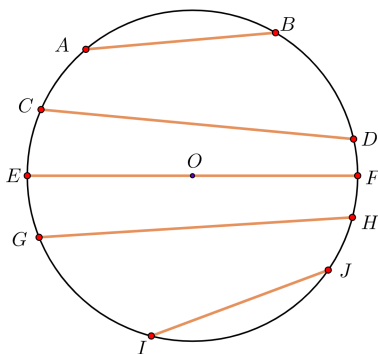


Figura 1.27: Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ y $\overline{IJ}$ son algunos ejemplos de cuerdas.

Además, se define **diámetro** como la cuerda de mayor longitud posible en una circunferencia, como el segmento $\overline{EF}$ en la figura 1.27. Asimismo, el **radio** es la distancia entre el centro de una circunferencia y cualquiera de sus puntos. Puede observarse que la longitud del diámetro equivale al **doblo** de la longitud del radio. Véase la imagen de abajo:

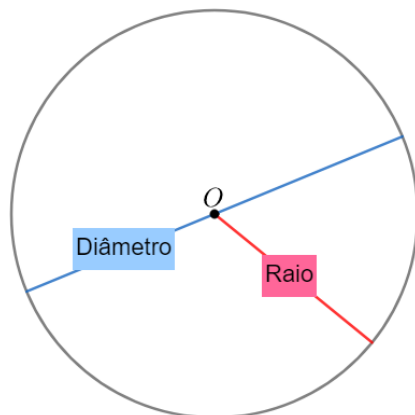


Figura 1.28: Radio y diámetro

Finalmente, el **perímetro** C de una circunferencia es la longitud de su contorno. Por ejemplo, si colocáramos un cordel alrededor de una circunferencia cubriendo todo su contorno, la longitud del cordel sería igual al perímetro. Por argumentos de dimensionalidad, se puede inferir que $C \propto D$, es decir, si el diámetro de una circunferencia se duplica, su perímetro también se duplica. Así, la razón $\frac{C}{D}$ es independiente de los valores individuales de C o D y vale:

$$\frac{C}{D} = \pi \Rightarrow \boxed{C = 2\pi R}$$

Donde π ³⁶ es una constante cuyo valor es aproximadamente $\pi \approx 3,14159\dots$. Cabe destacar que las calculadoras científicas tienen guardado el valor de π , por lo que no es necesario memorizarlo.

Ejemplo 34

Durante un período de 30 minutos, Magda recorrió 5,0 km. Suponiendo que su velocidad fue constante durante el recorrido, con las ruedas a una cadencia de 80 rpm (rotaciones por minuto), calcule el diámetro de la rueda de la bicicleta de Magda.

³⁶Los primeros valores de la constante π fueron difíciles de obtener. En 250 a.C., Arquímedes crea el **Método de la Exhaustión**, que consistía en inscribir un polígono de n lados en una circunferencia y circunscribir la circunferencia en otro polígono de n lados. Este método fue usado por muchos matemáticos a lo largo del tiempo. Ludolph van Ceulen fue uno de los últimos matemáticos conocidos en usar este método. Trabajó con un polígono de 2^{62} lados y obtuvo una precisión de 15 decimales, tomando cerca de 30 años para realizar los cálculos. Este método cayó en desuso tras Newton desarrollar un método mucho más eficiente para calcular el valor de π , siendo una de sus grandes conquistas.

Solución

Como este recorrido duró 30 minutos, las ruedas rotaron $80 \cdot 30 = 2400$ veces. Montando una regla de tres entre rotaciones y distancia:

Rotaciones	Distancia recorrida (m)
1	C
2400	5000

$$C = \frac{25}{12} \Rightarrow d = \frac{C}{\pi} = \frac{25}{12\pi} \approx 0,66 \text{ m}$$

Finalmente, analizamos el **arco** de una circunferencia, que es el segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su perímetro, como se muestra en la imagen de abajo.

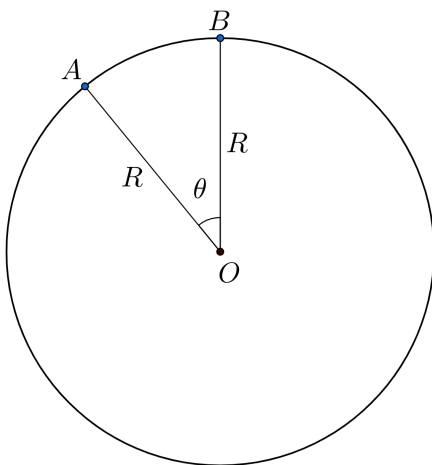


Figura 1.29: Arco de circunferencia

Donde θ es el ángulo referente al arco AB y L su longitud. Observe que el perímetro de una circunferencia puede interpretarse como un arco de $\theta = 2\pi$ radianes (o 360°), es decir, podemos usar una regla de tres para encontrar el valor de L :

- En radianes:

$$\left\{ \frac{L}{C} = \frac{\theta \text{ [rad]}}{2\pi} \Rightarrow \boxed{L = \theta \text{ [rad]} \cdot R} \right.$$

- En grados:

$$\left\{ \frac{L}{C} = \frac{\theta [^\circ]}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi}{180} \cdot \theta [^\circ] \cdot R \right.$$

Se utiliza el término *círculo* para referirse al área delimitada por el perímetro de una circunferencia. Una forma simple de deducir el área de una circunferencia de radio R puede ilustrarse en la imagen abajo:

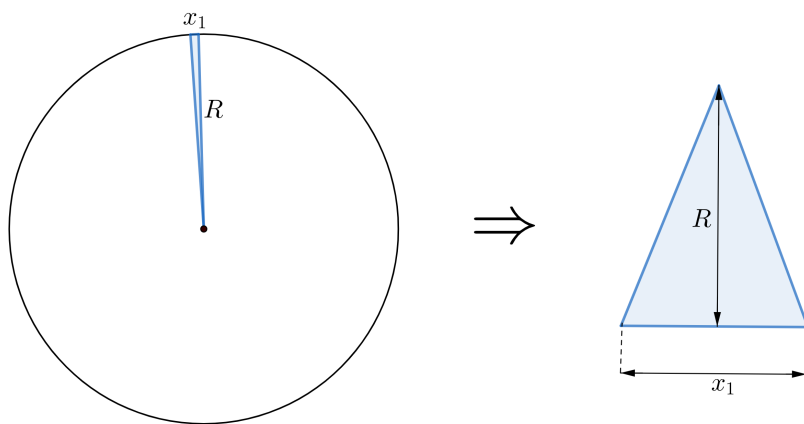


Figura 1.30: Dedución del área del círculo

Podemos dividir el círculo en infinitos triángulos infinitesimalmente pequeños de altura R y base x_n . Así, el área del círculo será la suma de las áreas de cada triángulo formado. En el caso del triángulo de la figura, su área vale $A_1 = \frac{x_1 \cdot R}{2}$. Se pueden formar otros triángulos, también de bases infinitesimales ($x_2, x_3, \dots, x_n$), para completar el círculo. Además, observe que $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 2\pi R$, ya que la suma de las bases de los infinitos triángulos es el perímetro del círculo.

El área A del círculo será numéricamente igual a la suma de las áreas de cada triángulo de base infinitesimal. Matemáticamente:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

$$A = \frac{x_1 \cdot R}{2} + \frac{x_2 \cdot R}{2} + \frac{x_3 \cdot R}{2} + \dots + \frac{x_n \cdot R}{2}$$

$$A = \frac{R}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

$$A = \frac{R}{2} \cdot 2\pi R$$

Es decir:

$$A = \pi R^2$$

Cabe destacar que duplicar el radio de una circunferencia hace que su diámetro y perímetro se dupliquen, pero el área se vuelve **cuatro** veces mayor. Esto es consecuencia directa de la dimensión del área, que es longitud al cuadrado.

Así como calculamos la longitud de arcos, que son “pedazos” del perímetro, podemos calcular el área de **sectores circulares**, que son los “pedazos” del área total del círculo. Sea S el área de un sector asociado a un ángulo θ , donde un $\theta = 2\pi$ está asociado al área total, πR^2 , podemos usar reglas de tres para encontrar su valor:

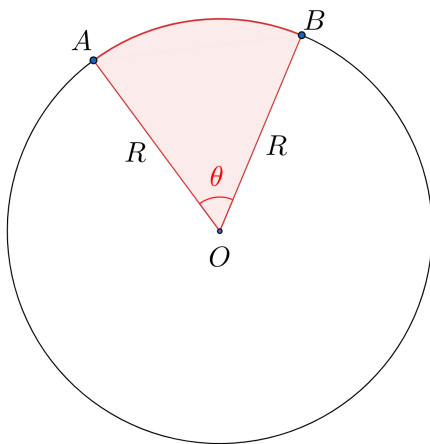


Figura 1.31: Sector circular

Relacionando:

- En radianes:

$$\left\{ \frac{S}{A} = \frac{\theta \text{ [rad]}}{2\pi} \Rightarrow S = \theta \text{ [rad]} \cdot \frac{R^2}{2} \right.$$

- En grados:

$$\left\{ \frac{S}{A} = \frac{\theta \text{ [°]}}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi}{360} \cdot \theta \text{ [°]} \cdot R^2 \right.$$

Ejemplo 35

Desde el centro de una tarta circular se retira una porción (sector circular) que corresponde al 35% del total de la tarta. Calcule el θ asociado a esta porción.

Solución

Basta montar una regla de tres entre *ángulo* y *porcentaje*,

Ángulo	Porcentaje
θ	35%
360°	100%

$$\theta = 360^\circ \cdot \frac{35}{100} = 126^\circ$$

Finalmente, vale recordar las unidades de medida de ángulos. Además del grado y el radián, podemos usar **segundos de arco** ["] y **minutos de arco** [']. Sus conversiones son muy simples:

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

De manera análoga:

$$1' = 60''$$

Finalmente, tenemos la clásica relación:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

1.7.7 Áreas y Volúmenes

En la imagen a continuación se representan algunas expresiones para el perímetro (C), el área (A) y el volumen (V) de algunos sólidos y figuras.

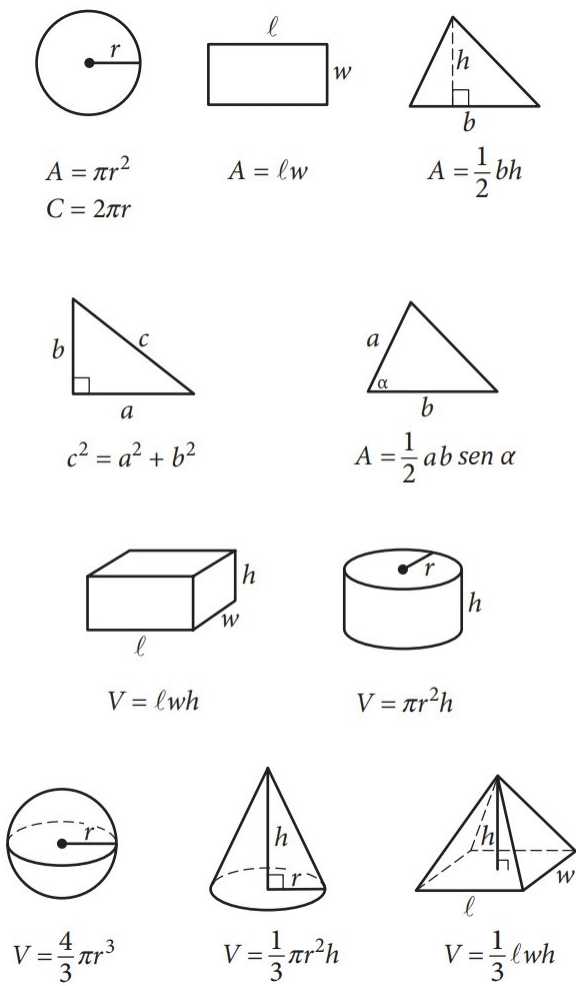


Figura 1.32: Áreas y volúmenes de sólidos y figuras

Podemos deducir la quinta expresión a partir de la tercera. Observe:

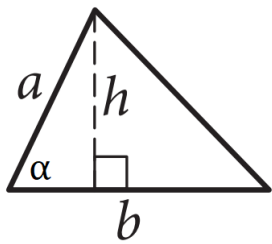


Figura 1.33: Deducción del área del triángulo

Sabemos que $A = \frac{bh}{2}$. Sin embargo, tenemos que $\sin \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin \alpha$. Por lo tanto:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{ba \sin \alpha}{2}$$

1.8 Trigonometría Elemental

Como sabemos, si dos triángulos tienen los mismos ángulos internos, serán semejantes, es decir, sus lados siguen una proporción fija. Pero, ¿y si sólo uno de los ángulos es igual? ¿Se podría afirmar algo? De esta y muchas dudas sobre las relaciones entre los ángulos y lados de un triángulo, surge el estudio de la Trigonometría. En esta sección veremos lo necesario de esta área para Astronomía.

1.8.1 Teorema de Pitágoras

Primero, es necesario repasar el Teorema de Pitágoras, ya que los triángulos rectángulos desempeñan un papel importante en Trigonometría. Hay varias formas de demostrarlo, los pasos a continuación son solo para ilustrar el Teorema.

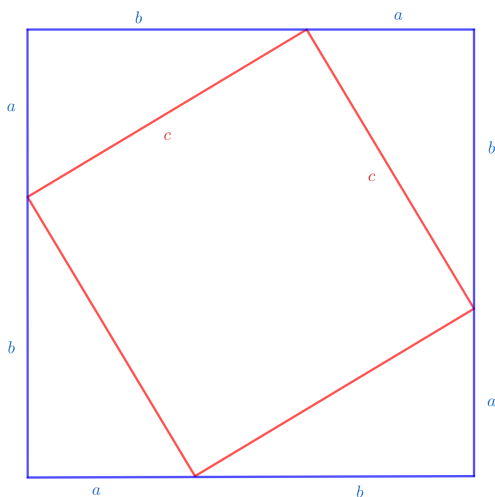


Figura 1.34: Cuadrado de lado c dentro de uno de lado $a + b$ (el cuadrado rojo torcido da la impresión de que la figura está torcida, pero en realidad los lados del cuadrado azul están paralelos a la página).

El área del cuadrado azul es simplemente $(a + b)^2$. Sin embargo, también podemos escribirla como el área del cuadrado rojo más los 4 triángulos de base y altura a y b . Así:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2}$$

Abriendo el binomio:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

1.8.2 Relaciones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo

Revisado el triángulo rectángulo, podemos pasar a la definición de las funciones trigonométricas.

Supongamos un triángulo rectángulo con catetos a y b , hipotenusa c y ángulos internos α y β , como se muestra a continuación:

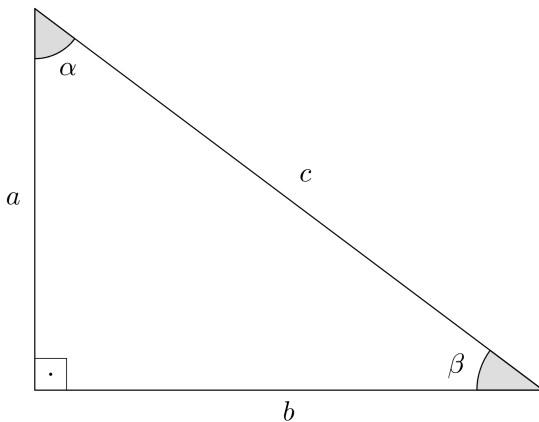


Figura 1.35: Representación del triángulo en cuestión.

Definimos las funciones seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan) de un ángulo como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} \\ \text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c} \\ \text{tan } \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

En este caso, escribimos para el ángulo α . Recuerde que "adyacente" significa "vecino" o "cercano".

Existen varios mnemónicos para recordar la definición de cada función que se pueden encontrar fácilmente en Google, no mencionaremos ninguno aquí, pero es recomendable buscar alguno para fijar los conceptos — con la práctica ya no serán necesarios.

Presentadas las definiciones, quizás se pregunte cuál es su relevancia. Recordando los criterios de semejanza, basta con que dos ángulos sean iguales para que los triángulos sean semejantes. De esta forma, al comparar triángulos rectángulos, sabemos que tienen un ángulo de 90° , es decir, si observamos que también poseen un ángulo α , será semejante al triángulo de la figura 1.35. Como las funciones trigonométricas se escriben en función de la razón de los lados, sabemos que serán constantes para **cualquier** triángulo rectángulo con ángulo α .

Por ejemplo, si tenemos un triángulo rectángulo con cada lado siendo el doble del triángulo original, el seno de α aún sería:

$$\text{sen } \alpha = \frac{2b}{2c} = \frac{b}{c}$$

Y es fácil ver que lo mismo ocurriría con el coseno y la tangente (o para cualquier k por el que multiplicáramos el lado).

1.8.3 Propiedades Trigonométricas

Ahora que tenemos una base de dónde provienen las funciones trigonométricas, podemos explorar algunas propiedades.

Ángulos Complementarios

La propiedad más simple de ver es la de los ángulos complementarios (suman 90°). Por ejemplo, en la figura 1.35 α y β son complementarios. A partir de esto, es fácil ver que el "lado opuesto" para α es el "lado adyacente" para β y

viceversa. Así, si escribiéramos sus senos y cosenos, veríamos que se invierten, es decir:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta \text{ y } \cos \alpha = \text{sen } \beta$$

Además, como el "opuesto" y "adyacente" se invierten en este caso, la tangente también se invierte, es decir, se eleva a -1 . Por lo tanto, aprovechando que $\alpha + \beta = 90^\circ$:

$\begin{aligned}\text{sen } \alpha &= \cos (90^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= \text{sen } (90^\circ - \alpha) \\ \tan \alpha &= \frac{1}{\tan (90^\circ - \alpha)}\end{aligned}$

Tangente y la Relación Fundamental de la Trigonometría

Ahora, para ver algunas otras propiedades, es necesario modificar un poco el triángulo de la figura 1.35. Como se discutió, multiplicar (o dividir) los lados del triángulo por algún factor no altera las propiedades trigonométricas del ángulo. Así, dividamos los lados por la hipotenusa c . Con esto, ahora la hipotenusa vale 1 y los catetos b/c y a/c o, en función de α :

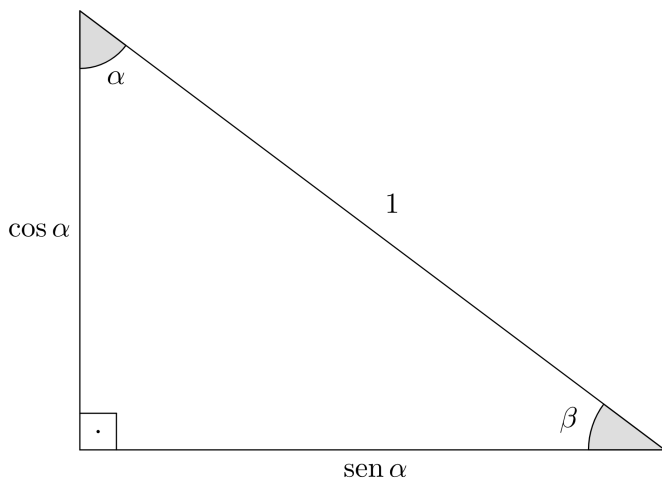


Figura 1.36: Triángulo rectángulo con hipotenusa 1.

A partir de esto, concluimos dos cosas. Primero, viendo la tangente de α , tenemos:

$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$
--

Además, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Esta última ecuación es tan importante que recibe el nombre de **Relación Fundamental de la Trigonometría**.

Suma y Resta de Arcos

Ahora, podemos ver cómo proceder cuando tengamos un seno de la suma de dos ángulos, por ejemplo $\sin(\alpha + \beta)$. Para ello, considere un triángulo $\triangle ABC$ con lados $BC = a$ y $AC = b$ y altura AD , como en la figura 1.37.

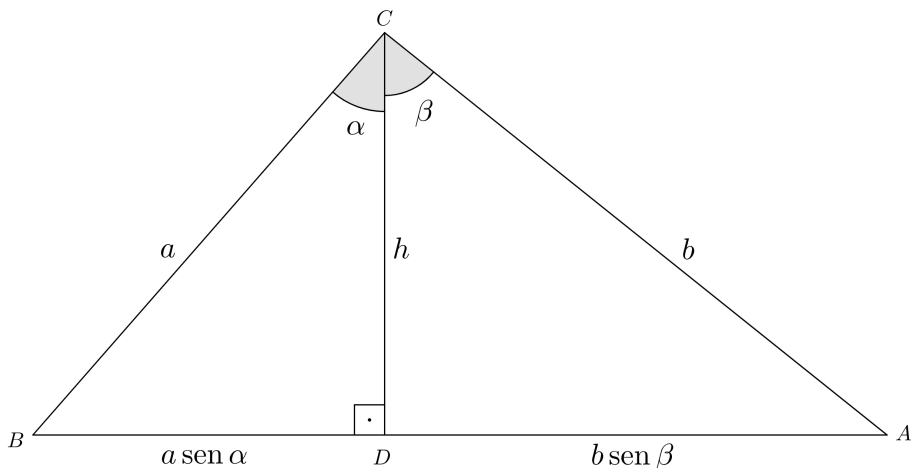


Figura 1.37: Triángulo con el ángulo $\hat{A}$ dividido en dos por la altura.

Note que $\sin \alpha = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = BC \sin \alpha = a \sin \alpha$ y, de manera análoga, $AD = b \sin \beta$. Además, haciendo el mismo proceso con los cosenos, vemos que

$$h = a \cos \alpha = b \cos \beta \quad (1.3)$$

Ahora, la idea es escribir el área del triángulo de dos maneras diferentes y luego compararlas. Dado que el ángulo $\hat{BCA}$ vale $\alpha + \beta$, podemos escribir su área como:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta)$$

Además, podemos calcularla también de la manera estándar como la mitad del producto de base por altura. Note que la base es $AB = BD + AD$, es decir, $AB = a \sin \alpha + b \sin \beta$ y la altura es h :

$$A = \frac{1}{2} (a \sin \alpha + b \sin \beta) h$$

Igualando las expresiones para el área y usando la ecuación 1.3:

$$\frac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(a \sin \alpha + b \sin \beta)b \cos \beta$$

Cancelando el factor $b/2$ e isolando el seno de $\alpha + \beta$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \frac{b}{a} \cos \beta \sin \beta$$

Nuevamente, por la ecuación 1.3, note que podemos dividir ambos lados por a y vemos que:

$$\frac{b}{a} \cos \beta = \cos \alpha$$

Por lo tanto, finalmente llegamos a que:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}$$

Para encontrar el coseno de la suma de arcos, podemos usar la Relación Fundamental de la Trigonometría:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)}$$

Sustituyendo el seno de la suma:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \alpha}$$

Para no ensuciar demasiado, primero desarrollemos solamente la parte $1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha$. Para ello, sustituimos 1 por la suma del seno y coseno al cuadrado de α :

$$1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha$$

Sacando en evidencia $\sin^2 \alpha$ y $\cos^2 \alpha$:

$$1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) + \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta)$$

Nuevamente, ya que $1 = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta$:

$$1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

Sustituyendo de nuevo en la raíz:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \alpha}$$

Reorganizando los términos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{(\cos \alpha \cos \beta)^2 - 2(\cos \alpha \cos \beta)(\sin \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \sin \beta)^2}$$

Así, finalmente:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Por motivos que se aclararán [pronto](#), el coseno satisface la condición $\cos(-x) = \cos(x)$, siendo llamado función par. Mientras que el seno satisface la condición opuesta, es decir, $\sin(-x) = -\sin(x)$, siendo por lo tanto función impar.³⁷

³⁷La motivación de estos nombres viene de los exponentes de funciones pares e impares más fáciles de ver. Por ejemplo $(-x)^2 = x^2$ y $(-x)^3 = -x^3$. Note que la paridad del exponente satisface el nombre de su propiedad, es decir, 2 es par y 3 es impar, tal como dice la propiedad.

Sabiendo esto, podemos encontrar el seno y coseno de la diferencia haciendo:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha \\ \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \end{cases}$$

Resumiendo,

$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$
--

El $\mp$ significa que cuando el $\pm$ sea $+$, será $-$ y cuando sea $-$, será $+$.

En especial, si usamos $\alpha = \beta = \theta$, podemos encontrar el seno y coseno del arco doble:

$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{aligned}$
--

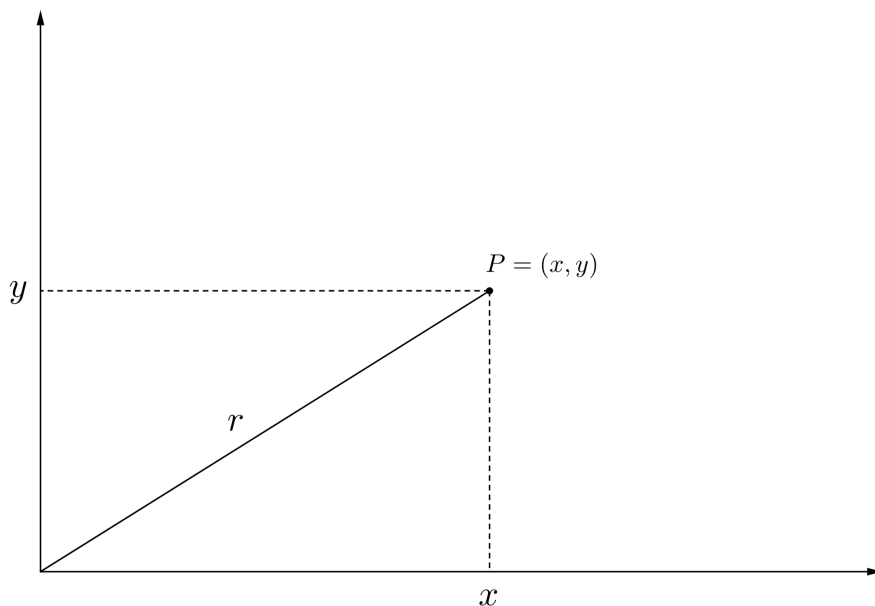
1.8.4 Círculo Trigonométrico

Cuando se introdujeron las funciones trigonométricas, quizás notó que estaban limitadas a ángulos menores que 90° . Para definir las para cualquier ángulo y , por ende, para cualquier número real³⁸, es decir, producir de hecho una función, debemos usar el llamado **círculo trigonométrico**.

Primero, debemos recordar cómo encontrar la distancia de un punto a la origen del sistema de coordenadas.

Dado un punto P cualquiera con coordenadas (x, y) , como en la figura 1.38, podemos encontrar su distancia r a la origen aplicando Pitágoras.

³⁸Recuerde que un ángulo en grados puede transformarse en un número real si lo colocamos en radianes.

Figura 1.38: Punto P cualquiera en el plano cartesiano.

Así:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ahora, note que lo que hicimos fue encontrar r para un x y y dados, pero en lugar de eso, podríamos fijar r , es decir, la distancia de un punto a la origen, y luego encontrar los x y y . Obviamente, como esto es un sistema de dos variables con solo una ecuación, no encontraremos x e y fijos, sino un conjunto infinito de ellos. Sin embargo, no es un conjunto arbitrario de puntos, son todos los puntos que están a una distancia r de la origen — también conocido como circunferencia de radio r con centro en la origen.

Esto es interesante, pues por la Relación Fundamental de la Trigonometría, sabemos que $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$, es decir, si decimos que un eje es $\sin \theta$ y el otro $\cos \theta$, forman un círculo de radio 1 — el llamado *círculo trigonométrico*.

Para ver cuál eje es cuál, recuerde nuestra definición inicial de seno y coseno: si definimos θ como el ángulo que el punto forma con la origen³⁹, el eje x sería el "lado adyacente" y y el "lado opuesto", así que podemos dibujar:

³⁹No el punto en sí, sino el segmento que lo une con la origen.

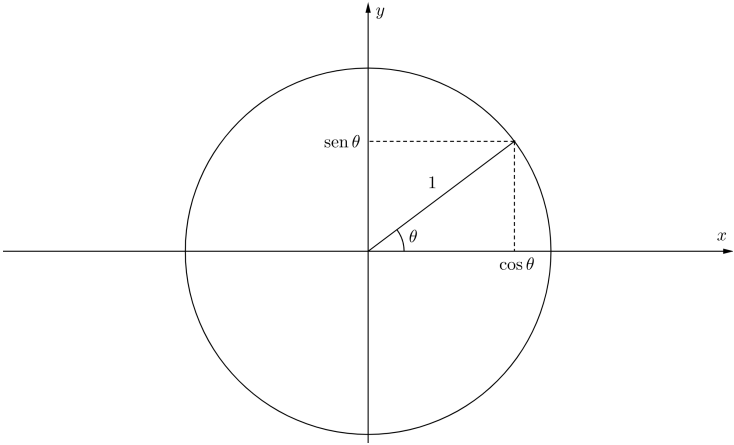


Figura 1.39: Representación de θ en el círculo trigonométrico.

Así, si queremos encontrar, por ejemplo, el seno de 135° , no necesitamos preocuparnos por cómo sería un triángulo rectángulo con un ángulo interno de 135° , basta tomar la coordenada y del punto que forma 135° en el círculo trigonométrico.

Note que, debido a la simetría del círculo, podemos encontrar los valores de seno y coseno de cualquier ángulo si conocemos solo los valores de uno de sus cuadrantes. La figura 1.40 lo muestra. El secreto es reflejar el punto sobre los ejes y y x , ya que esto mantiene su seno y coseno (al menos en módulo) por simetría.

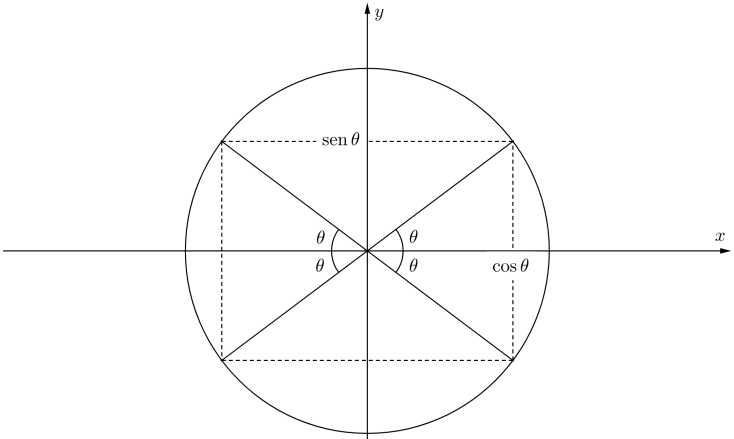


Figura 1.40: Al reflejar, mantenemos el ángulo y, por lo tanto, la altura (seno) y la proyección horizontal (coseno) se mantienen.

Debemos tener en cuenta que cuando el valor está a la izquierda del eje y , x (coseno) es negativo, y cuando está debajo del eje x , y (seno) es negativo. A partir de la figura 1.40, podemos encontrar algunas relaciones:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha & \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha \end{array}$$

Note que si no recuerda estos valores, son fáciles de obtener usando las fórmulas de suma y resta de arcos, observando que $\operatorname{sen} 180^\circ = \operatorname{sen} 360^\circ = 0$ y $\cos 180^\circ = \cos 360^\circ = 1$.

También hay el caso de ángulos mayores que 360° . Cuando esto ocurra, basta con notar que si restamos una vuelta completa, su seno y coseno no cambian. Por ejemplo, el seno de 420° es exactamente igual al de $420^\circ - 360^\circ = 60^\circ$, es decir, sumar o restar una vuelta es lo mismo que sumar o restar 0⁴⁰

Este hecho nos permite observar una propiedad interesante: si restar 360° no cambia el ángulo, sabemos que $(360^\circ - \alpha) - 360^\circ = -\alpha$, es decir:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

que justifica la propiedad de paridad de la función seno y coseno usada en la demostración de la suma de ángulos.

1.8.5 Otras Funciones Trigonómicas

Recíprocas

Para no haber confusión con las funciones inversas, se decidió crear las funciones trigonométricas que son el recíproco (en lugar de x , es $1/x$) de las ya introducidas, a saber secante ($\sec$), cosecante ($\csc$) y cotangente ($\cot$) como:

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}} \quad \boxed{\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}} \quad \boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}}$$

Observe que hay un pequeño “truco”, aunque se llame **secante** es el inverso del **coseno** y aunque sea **cosecante**, es el inverso del **seno**, pero con el tiempo se acostumbrará.

Es posible definir estas funciones en el círculo trigonométrico, sin embargo no es algo que aparezca en las olimpiadas, por lo tanto no lo demostraremos aquí.

⁴⁰Piense que es lo mismo que sumar 12 horas en un reloj de manecillas, no cambia la hora que marcan las agujas.

Inversas

Como se discutió brevemente en [ecuaciones de primer grado](#), para resolver ecuaciones en general es necesario aplicar funciones inversas para poder aislar la variable. Con esto en mente, se definieron las funciones **arco seno** (arcsen o sen^{-1}), **arco coseno** (arccos o cos^{-1}) y **arco tangente** (arctan o tan^{-1}) como las inversas de sus respectivas funciones trigonométricas.

Note que aunque tenga un exponente -1 , $\text{sen}^{-1} \neq \frac{1}{\text{sen}}$. Este “exponente” viene de la notación de funciones inversas: la función inversa de una función $f(x)$ se escribe como $f^{-1}(x)$.

Así, si un ángulo x tiene coseno igual a a , podemos decir:

$$\cos x = a \Rightarrow x = \arccos(a) \text{ o } \cos^{-1}(a)$$

Y para sen^{-1} y tan^{-1} el procedimiento es análogo.

Sin embargo, como vimos, más de un ángulo posee un determinado coseno⁴¹, por lo que es importante tener algunos cuidados, que veremos a continuación.

1.8.6 Ecuaciones Trigonómicas

Por la figura [1.40](#), vemos que los ángulos θ y $180^\circ - \theta$ poseen el mismo seno y θ y $360^\circ - \theta$ poseen el mismo coseno. Por lo tanto, si tenemos una ecuación $\cos x = 1/2$, la respuesta no es solamente $x = \cos^{-1}(1/2)$ que la calculadora daría $x = 60^\circ$, sino $x = \cos^{-1}(1/2)$ o $360^\circ - \cos^{-1}(1/2)$, es decir, $x = 60^\circ$ o 300° . De manera más general:

$$x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ \cdot n \\ 300^\circ + 360^\circ \cdot m \end{cases}$$

Donde m y n son un número *entero* cualquiera.

De manera análoga, si resolviéramos $\text{sen } x = 1/2$, tendríamos:

$$x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ \cdot n \\ 150^\circ + 360^\circ \cdot m \end{cases}$$

Para la tangente es menos directo de ver. En este caso, queremos que la razón sen/cos sea igual. Observando nuevamente la figura [1.40](#), vemos que esto ocurre para $180^\circ + \theta$. Así, resumiendo los datos:

$\begin{aligned} \text{sen } x = a &\Rightarrow x = \text{sen}^{-1}(a) + 2\pi n \text{ o } \pi - \text{sen}^{-1}(a) + 2\pi m \\ \cos x = a &\Rightarrow x = \cos^{-1}(a) + 2\pi n \text{ o } 2\pi - \cos^{-1}(a) + 2\pi m \\ \tan x = a &\Rightarrow x = \tan^{-1}(a) + 2\pi n \text{ o } \pi + \tan^{-1}(a) + 2\pi m \end{aligned}$
--

⁴¹En realidad son infinitos, basta sumar una vuelta indefinidamente.

OBS.: Colocamos los valores en radianes para una mejor visualización de la tabla.

Siempre que se resuelva una ecuación trigonométrica, no olvide comprobar si estos valores adicionales tienen sentido. En general, como un triángulo esférico no puede tener ni lados ni ángulos internos mayores que 180° , este formalismo para la tangente y el coseno acaba siendo innecesario.⁴² Sin embargo, es importante comprobar si la solución con $180^\circ - \theta$ para el seno tiene sentido.

Ejemplo 36

Calcule el tiempo que Rigel (β Ori) permanece en el cielo en São Paulo ($\phi = 23^\circ 37'$, $\lambda = 46^\circ 38'$), sabiendo que sus coordenadas ecuatoriales son $\delta_{Rigel} = -8^\circ 12'$ y $\alpha_{Rigel} = 5^h 15^m$.

Solución

Como veremos en Astronomía de Posición, el ángulo horario cuando el astro está en el horizonte ($z = 90^\circ$) es:

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta$$

$$\cos H = -\tan(23^\circ 37') \tan(-8^\circ 12') = 0,063$$

En este punto, debemos pensar un poco. El arco coseno de 0,063 es $86^\circ 23' = 5h 45min$ ⁴³. Es fácil ver que no es necesario sumar o restar una vuelta (que en este caso sería $24h$), pues volveríamos al mismo lugar (además de que saldríamos de la convención $-12h \leq H \leq +12h$). Sin embargo, es necesario evaluar la opción $24h - 5h 45min + 24h \cdot m$, más específicamente para $m = -1$. Haciendo esto, encontramos $H = -5h 45min$, que está dentro de la convención del ángulo horario. Pero ¿por qué hay dos posibles respuestas para el ángulo horario? ¿Erramos el cálculo? La respuesta es que *no*. En realidad, es muy simple. Durante el día, el astro estará en el horizonte dos veces - al salir y al ponerse. Por lo tanto, dado que tenemos los ángulos horarios de salida y puesta, podemos calcular la duración sobre el horizonte como:

$$\Delta t = |H_{puesta} - H_{salida}|^{44} = 5h 45min - (-5h 45min)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 11h 31min}$$

⁴²Aunque para el coseno, como podemos tener el ángulo $-\theta$, es relevante dependiendo de la convención de signos, como veremos en un ejemplo próximo.

⁴³Si no sabe cómo hacer esta conversión en la calculadora, consulte la sección de [Ángulos](#) en la Calculadora.

⁴⁴Colocamos el módulo, pues a veces puede ocurrir que se use la convención $0h \leq H \leq 24h$ y en ese caso el ángulo horario de salida sería mayor que el de puesta.

Ejemplo 37

Un satélite colector de luz está en una órbita circular de radio $r = 6880 \text{ km}$, resultando en un período de $P = 94,6 \text{ min}$. Sabiendo que el radio $R_{\oplus}$ de la Tierra es 6380 km y considerando que la órbita de la Tierra alrededor del Sol está alineada con la órbita del satélite, calcule el tiempo que el satélite recibe luz del Sol a lo largo de un período.

Solución

Este ejemplo es igual a uno de los [ejercicios finales](#). Por lo tanto, intente resolverlo antes de ver esta discusión.

Lo ponemos aquí para comentar una resolución que lleva a errores si el alumno no tiene cuidado al aislar la variable dentro del seno. Como se resolverá en la resolución al final del capítulo, hablaremos sólo del posible error que la construcción geométrica podría generar.

Si quisiéramos encontrar directamente el ángulo en el que la órbita está iluminada, la construcción sería:

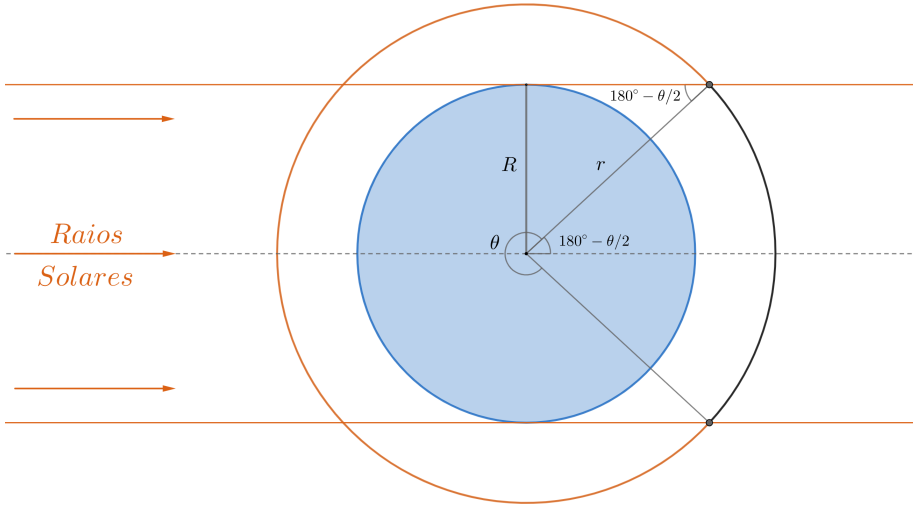


Figura 1.41: Representación del problema. Observe que la línea punteada gris divide el ángulo θ a la mitad, por lo que el ángulo inferior es $180^\circ - \theta/2$ - el superior es igual por ser [rectas paralelas](#).

Para encontrar θ :

$$\text{sen}(180^\circ - \theta/2) = \frac{R}{r}$$

Para simplificar, recuerde que $\sin(180^\circ - \theta/2) = \sin(\theta/2)$:

$$\theta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{R}{r} \right) = 136^\circ$$

Aplicando una regla de tres, esto nos daría un intervalo de tiempo iluminado de:

$$\Delta t = \frac{136^\circ}{360^\circ} \times P = 37,5 \text{ min}$$

Sin embargo, la respuesta correcta es $58,9 \text{ min}$. ¿Dónde nos equivocamos?

El problema ocurrió al aislar $\theta/2$, aunque su seno de hecho sea R/r , su valor no es necesariamente $\sin^{-1}(R/r)$, como ya vimos. Es decir, olvidamos considerar la posibilidad de que $\theta/2$ podría ser $180^\circ - \sin^{-1}(R/r)$. Haciendo los cálculos para este caso:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \left(180^\circ - \sin^{-1} \left(\frac{R}{r} \right) \right) = 224^\circ \Rightarrow \Delta t = t = \frac{224^\circ}{360^\circ} \times P \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta t = 58,9 \text{ min}} \end{aligned}$$

La duda que queda ahora es: ¿cómo evaluaríamos qué ángulo elegir en un examen si no conocemos la respuesta correcta? Para saber cuál ángulo es el correcto, es necesario analizar la situación y ver qué ángulo tiene sentido - de la misma forma que descartamos una solución donde la distancia es negativa al resolver una ecuación de segundo grado, por ejemplo.

En este caso, debemos notar que θ es necesariamente mayor que 180° . Esto ocurre porque, independientemente del radio de la órbita (siempre que sea mayor que el radio terrestre), es imposible que la Tierra haga sombra en su lado izquierdo, es decir, la parte iluminada debe describir un ángulo mayor que la mitad de una vuelta, es decir, 180° .

Otra manera de verlo es notar que $180^\circ - \theta/2$ debe ser menor que 90° , por el triángulo rectángulo construido, y esto sólo ocurre para el caso correcto.

1.8.7 Ley de Senos y Ley de Cosenos

Tal vez después de toda esta discusión sobre la base de la trigonometría aún le quede la duda de por qué esto es tan útil si sólo vale para triángulos rectángulos.

La respuesta es que, al trazar la altura de un triángulo, podemos formar un triángulo rectángulo dentro de él. A partir de esto, podemos utilizar las definiciones vistas en las subsecciones anteriores. Conclusión: podemos formular ecuaciones que valen para *cualquier* triángulo. Ahora, veremos dos de estas relaciones, la Ley de Senos y la de Cosenos.

Ley de Senos

Dado un triángulo $\triangle ABC$ genérico, podemos trazar su altura h y formar dos triángulos rectángulos, como se muestra a continuación.

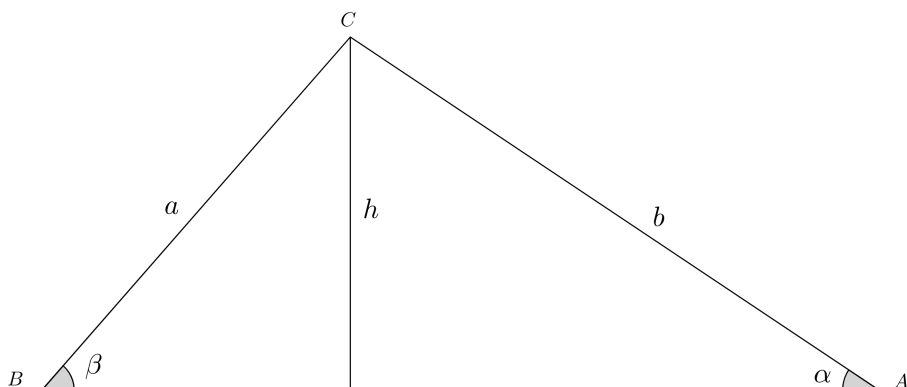


Figura 1.42: Observe que podemos hacer esta construcción con cualquier triángulo.

De manera similar a lo que hicimos en la deducción del seno de la [suma de arcos](#), podemos escribir la altura h de dos formas:

$$h = a \operatorname{sen} \beta = b \operatorname{sen} \alpha$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por ab :

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

Que es la *Ley de Senos*. Es decir, para cada triángulo, la razón entre el lado y el seno de su ángulo opuesto es constante.⁴⁵

De manera más intuitiva, podemos ver la Ley de Senos como:

⁴⁵Observe que si hacemos el procedimiento con otra altura del triángulo, obtenemos la misma relación, pero esta vez con el otro lado.

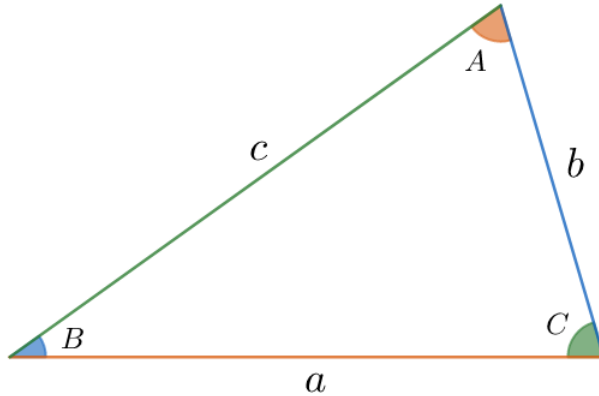


Figura 1.43: Triángulo

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Normalmente se usa cuando tenemos 2 ángulos (o lados) y 1 lado (o ángulo) y queremos otro lado (o ángulo), como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 38

Encuentre los posibles ángulos Marte-Sol-Tierra (es decir, el Sol es el vértice), cuando la elongación⁴⁶ de la Tierra vista desde Marte es 30° . Considere que la distancia Tierra-Sol es $a_T = 1 \text{ U.A.}$ y Sol-Marte $a_M = 1,52 \text{ U.A.}$.

Solución

La parte más difícil de esta cuestión es comprender el esquema. Esencialmente, queremos fijar Marte en un punto y ver dónde puede estar la Tierra. La figura a continuación retrata la situación.

⁴⁶Si aún no ha visto este concepto, consulte el apéndice de [Configuraciones Planetarias](#).

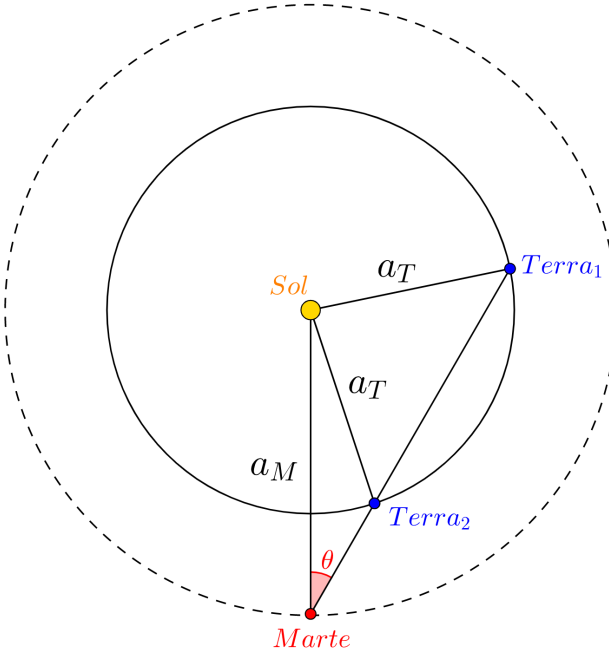


Figura 1.44: Representación de la configuración. No marcamos los ángulos pedidos en la figura para no sobrecargarla.

Antes que nada, observe que hay dos puntos que satisfacen la elongación de 30° - como era de esperar, ya que el enunciado habla de “los ángulos”. Además, note que incluso si extendiéramos 30° hacia la izquierda, no tendríamos ángulos nuevos, pues, por simetría, la situación sería igual, sólo reflejada.

Ahora, debemos identificar lo que queremos. Según el enunciado, el ángulo pedido es Marte - Sol - Tierra. Sea β el ángulo con *Tierra1* y α el ángulo con *Tierra2*.

Tenemos 2 lados y un ángulo y queremos otro ángulo - debemos aplicar Ley de Senos. Sin embargo, hay que tener cuidado, no podemos aplicarla directamente, pues el lado a_M no es opuesto al ángulo θ , α ni β . Para el triángulo con *Tierra2*, es opuesto a $180^\circ - (\alpha + \theta)$ y para el de *Tierra1* a $180^\circ - (\beta + \theta)$.

Antes de montar la Ley de Senos, observe que será exactamente igual para α y β (solo cambiando que uno será α y otro β , claro). ¿Significa que $\alpha = \beta$? ¡No! Significa que uno de ellos es la solución con $\sin^{-1}$ y el otro con $180^\circ - \sin^{-1}$, como [ya discutido](#). Entonces:

$$\frac{a_T}{\sin \theta} = \frac{a_M}{\sin(180^\circ - (\alpha + \theta))}$$

Recordando que $\text{sen}(180^\circ - (\alpha + \theta)) = \text{sen}(\alpha + \theta)$:

$$\frac{a_T}{\text{sen } \theta} = \frac{a_M}{\text{sen}(\alpha + \theta)} \Rightarrow \text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{a_M \text{sen } \theta}{a_T}$$

Tomando el cuidado mencionado anteriormente y ya restando θ de ambos lados:

$$\begin{cases} \alpha = \text{sen}^{-1} \left(\frac{a_M \text{sen } \theta}{a_T} \right) - \theta \\ \beta = 180^\circ - \text{sen}^{-1} \left(\frac{a_M \text{sen } \theta}{a_T} \right) - \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 20^\circ \text{ y } \beta = 100^\circ}$$

Ley de Cosenos

Como se pudo ver, la Ley de Senos se ocupa de situaciones en las que los lados y los ángulos están en pares. La Ley de Cosenos, en cambio, es útil cuando queremos conocer todos los lados de un triángulo, pero solo tenemos un ángulo. Como se dijo, el primer paso es tomar el triángulo y trazar su altura, como se muestra a continuación.

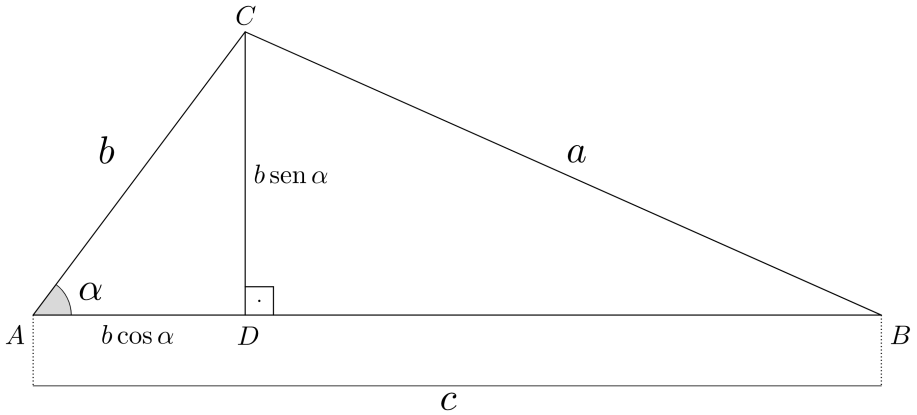


Figura 1.45: Construcción similar a la anterior, pero esta vez con todos los lados.

Note que formamos un triángulo rectángulo $\triangle BCD$ con catetos $b \text{sen } \alpha$ y $c - b \cos \alpha$, y hipotenusa a . Así, aplicando Pitágoras:

$$a^2 = (b \text{sen } \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 = b^2 \text{sen}^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$$

Usando la Relación Fundamental de la Trigonometría:

$$a^2 = b^2 - \cancel{b^2 \cos^2 \alpha} + c^2 - 2bc \cos \alpha + \cancel{b^2 \cos^2 \alpha}$$

Reorganizando los términos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Lo que es la *Ley de Cosenos*. Es decir, es un Teorema de Pitágoras con una corrección de dos veces los “catetos” multiplicados por el coseno del ángulo opuesto a la “hipotenusa”.

Resumiendo,

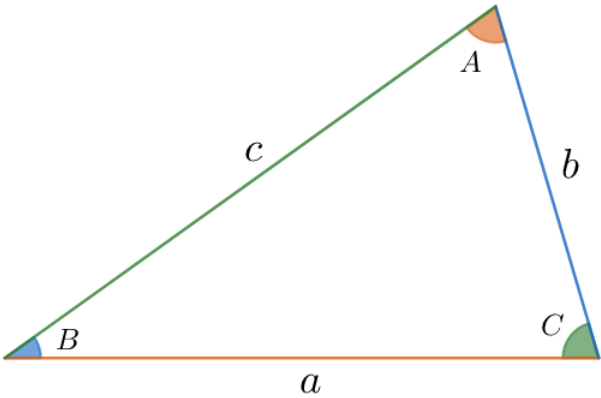


Figura 1.46: Triángulo

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

Ejemplo 39

(Adaptado de Vinhedo) Con los datos siguientes, calcule la distancia de Altair a Vega.

Estrella	Vega	Altair
Ascensión Recta	18h 36m 57s	19h 50m 48s
Declinación	38°47'9"	8°52'14"
Paralaje	130 mas	195 mas

OBS.: “mas” es un milésimo (10^{-3}) de segundo de arco.

Consejo 1: la separación angular D entre dos estrellas se da por:

$$\cos D = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \Delta \alpha$$

Donde δ son las declinaciones y $\Delta\alpha$ la diferencia entre las ascensiones rectas.
Consejo 2: la distancia d , en parsecs, de un cuerpo hasta nosotros dada su paralaje π en segundos de arco es:

$$d = \frac{1}{\pi}$$

Solución

Primero, encontremos la distancia de cada estrella a nosotros:

$$\begin{cases} d_V = \frac{1}{\pi_V} \Rightarrow d_V = 7,68 \text{ pc} \\ d_A = \frac{1}{\pi_A} \Rightarrow d_A = 5,13 \text{ pc} \end{cases}$$

Note que el subíndice V corresponde a Vega y A a Altair.

Ahora, calculando la separación angular entre ellas:

$$\cos D = \sin \delta_V \sin \delta_A + \cos \delta_V \cos \delta_A \cos(\alpha_V - \alpha_A)$$

$$\cos D = 0,827 \Rightarrow D = 34^\circ 11' 45''$$

Formando el triángulo Tierra-Altair-Vega:

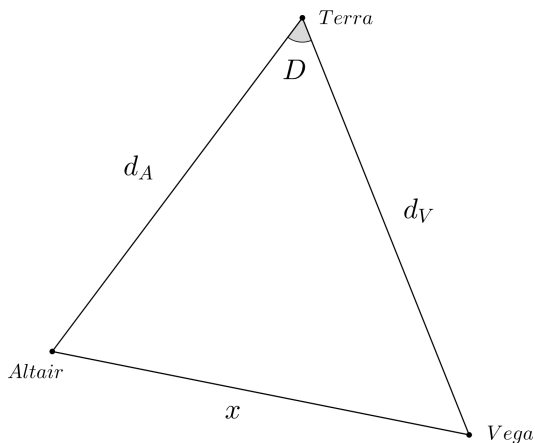


Figura 1.47: Observe que el ángulo Altair-Tierra-Vega es igual a la separación angular de los astros.

Así, podemos encontrar la distancia solicitada con la Ley de Cosenos:

$$x^2 = d_V^2 + d_A^2 - 2d_A d_V \cos D$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4,49 \text{ pc}}$$

1.9 Problemas

1.1. (Principiante) Resuelva los sistemas de ecuaciones:

a)

$$\begin{cases} 4(x+2) - 7(x-y) = 7 \\ 7(x+y) + 10(x-2) = 79 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{y+2}{6} - \frac{y-4}{2} = \frac{x}{3} \\ \frac{4(y-1)}{3} - 2x = -2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} (x-1)(y+2) - (x-2)(y+5) = 0 \\ (x+4)(y-3) - (x+7)(y-4) = 0 \end{cases}$$

1.2. (Principiante) Un asteroide realiza una órbita elíptica alrededor de una estrella de masa M . Sabiendo que la órbita posee semieje mayor a y excentricidad e , podemos encontrar la velocidad v del satélite cuando se encuentra a una distancia r de la estrella mediante la ecuación vis-viva:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Así, calcule el valor de v cuando $r = a(1 - e^2)$.

Datos:

- $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- $a = 1,00 \text{ UA}$
- $e = 0,05$
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

1.3. (Principiante) Un científico decide utilizar 1 g de uranio como combustible para su carro. Sabiendo que se necesitan $5,0\mu\text{g}$ de uranio para hacer girar la rueda del carro 1 rad, calcule cuántos segundos de arco girará la rueda después de que todo el uranio sea consumido.

1.4. (Principiante) En un planeta, dos astronautas realizan mediciones de la gravedad. El primero está sobre su superficie y mide g_0 , mientras que el segundo mide $g' = \frac{g_0}{3}$. Determine la distancia h del segundo astronauta hasta la superficie del planeta.

Consejo: la gravedad $g(r)$ en un punto a una distancia r de un planeta de masa M y radio R ($r > R$) es:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

1.5. (Intermedio) Un estudiante estaba observando una estrella cuando una nube pasó frente a ella, disminuyendo el brillo del astro. Sabiendo que $F' = F_0 e^{-\tau}$, donde F_0 y F' son, respectivamente, los flujos de la estrella antes y después de la nube, demuestre que la diferencia $m' - m_0$ entre las magnitudes observadas de la estrella es proporcional a τ . La imagen a continuación ilustra la situación.



Figura 1.48: Nube pasando frente a una estrella

Consejo: La ecuación de Pogson relaciona los flujos F_1 y F_2 de astros con magnitudes m_1 y m_2 mediante:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

1.6. (Intermedio) (Adaptado de Vinhedo) Un satélite colector de luz está en una órbita circular de radio r y período P alrededor de la Tierra, la cual posee radio R . Considerando que la órbita de la Tierra alrededor del Sol está alineada con la órbita del satélite, calcule el tiempo que el satélite recibe luz del Sol durante un período.

1.7. (Intermedio) (David Morin) Considere una estrella vibrante cuya frecuencia de oscilación ν puede depender únicamente de su radio R , su densidad ρ y la constante gravitacional G . Escriba la dependencia de la frecuencia en estos parámetros.

1.8. (Intermedio) Una vela solar de área transversal A entra en una nube de polvo. Sabiendo que la densidad numérica (partículas/volumen) de partículas de polvo de masa m en la nube es n y que la nube mantiene su velocidad v constante, calcule la tasa de incremento de masa en la vela. Considere que las partículas están quietas y se adhieren perfectamente a la vela al contacto.

1.9. (Avanzado) Un pequeño asteroide realiza una órbita elíptica de semieje mayor a con período P alrededor del Sol. Tras un evento misterioso, su semieje mayor cambia a $a' = a + \Delta a$, donde $\Delta a \ll a$. Determine la variación ΔP del período del asteroide.

Consejo: El período P se relaciona con el semieje mayor a de cualquier órbita mediante la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = k$$

donde k es una constante que depende de la masa del cuerpo central.

1.10. (Avanzado) (Adaptado de IOAA) Un estudiante está observando Venus con su telescopio de alta calidad, obteniendo datos muy precisos. Realiza observaciones en fechas donde la distancia Tierra-Sol a es conocida y mide la fase (porcentaje del área iluminada) y la elongación (ángulo entre el Sol y Venus visto desde la Tierra) α de Venus. Sabiendo que la fase $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$, donde θ es el ángulo entre la Tierra y el Sol visto desde Venus, calcule la distancia Sol-Venus r para:

- $a = 0,9904$ UA, $\alpha = 36,16^\circ$ y $\varphi = 20,9\%$

1.10 Solución

1.1. Vamos a simplificar las ecuaciones y luego resolverlas.

a) Reescribiendo la primera expresión:

$$\begin{cases} 4x + 8 - 7x + 7y = 7 \\ 7x + 7y + 10x - 20 = 79 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} -3x + 7y = -1 \\ 17x + 7y = 99 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones:

$$-20x = -100 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

Ahora, como $7y = 3x - 1$:

$$y = \frac{3x - 1}{7} = \frac{14}{7} = \boxed{2}$$

b) Multiplicando la ecuación de arriba por 6 y la de abajo por 3:

$$\begin{cases} y + 2 - 3(y - 4) = 2x \\ 4(y - 1) - 6x = -6 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} -2y + 14 = 2x \\ 4y - 6x = -2 \end{cases}$$

Multiplicando ambos lados de la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} -4y + 28 = 4x \\ 4y - 6x = -2 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$-10x = -30 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Así, podemos encontrar y :

$$y = \frac{6x - 2}{4} = \frac{16}{4} = \boxed{4}$$

c) Realizando los productos de los paréntesis:

$$\begin{cases} xy + 2x - y - 2 - (xy + 5x - 2y - 10) = 0 \\ xy - 3x + 4y - 12 - (xy - 4x + 7y - 28) = 0 \end{cases}$$

Reescribiendo:

$$\begin{cases} -3x + y + 8 = 0 \\ x - 3y + 16 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación de abajo por 3:

$$\begin{cases} -3x + y + 8 = 0 \\ 3x - 9y + 48 = 0 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$-8y = -56 \Rightarrow \boxed{y = 7}$$

Así:

$$x = 3y - 16 = 21 - 16 = \boxed{5}$$

1.2. Sustituyendo r por $a(1 - e^2)$:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 - e^2)} - \frac{1}{a} \right)$$

Multiplicando el numerador y denominador de la segunda fracción por $1 - e^2$:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 - e^2)} - \frac{1 - e^2}{a(1 - e^2)} \right)$$

Es decir:

$$v^2 = GM \left(\frac{2 - (1 - e^2)}{a(1 - e^2)} \right)$$

Finalmente:

$$v^2 = \frac{GM}{a} \left(\frac{1 + e^2}{1 - e^2} \right)$$

Así, solo necesitamos realizar la cuenta. Calculamos cada término por separado:

$$\frac{1 + e^2}{1 - e^2} \approx 1,005$$

y

$$\frac{GM}{a} = \frac{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{1,496 \cdot 10^{11}} \approx 8,8725 \cdot 10^8$$

Con una calculadora científica, podemos usar los valores exactos que acabamos de calcular. Así, obtenemos:

$$v = 29,9 km/s$$

1.3. Tenemos:

- $5,0 \cdot 10^{-6}$ g equivalen a 1 rad;
- π rad equivalen a 180° ;
- 1° equivale a $3600''$.

De este modo:

$$1 \text{ g} = 1 \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ rad}}{5,0 \cdot 10^{-6} \text{ g}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \cdot \frac{3600''}{1^\circ}$$

Realizando la cuenta, la rueda del carro girará $4,1 \cdot 10^{10}$ segundos de arco.

1.4. Vamos a calcular la distancia r del segundo astronauta al **centro** del planeta. Tenemos:

$$g' = \frac{GM}{r^2}$$

Como el primer astronauta está en la superficie:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

Sabemos que $\frac{g'}{g_0} = \frac{1}{3}$, por lo tanto:

$$\frac{g'}{g_0} = \frac{\frac{GM}{r^2}}{\frac{GM}{R^2}} = \frac{1}{3}$$

Reescribiendo:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}R$$

La distancia h desde la superficie del planeta hasta el segundo astronauta es:

$$h = r - R = R(\sqrt{3} - 1)$$

1.5. Tenemos, por Pogson:

$$m' - m_0 = -2,5 \log \left(\frac{F'}{F_0} \right)$$

Como $F' = F_0 e^{-\tau}$, tenemos:

$$m' - m_0 = -2,5 \log (e^{-\tau})$$

Como $\log a^b = b \log a$, tenemos:

$$m' - m_0 = 2,5\tau \log e$$

Cabe recordar que la base del log es 10 en este caso. Como se esperaba, $m' - m_0$ es proporcional a τ .

1.6. Para este ítem, necesitamos hacer la aproximación razonable de que los rayos de luz provenientes del Sol son paralelos entre sí, gracias a la gran distancia entre el Sol y la Tierra. Así, el satélite no recibirá luz cuando esté en la sombra de la Tierra, de acuerdo con la figura:

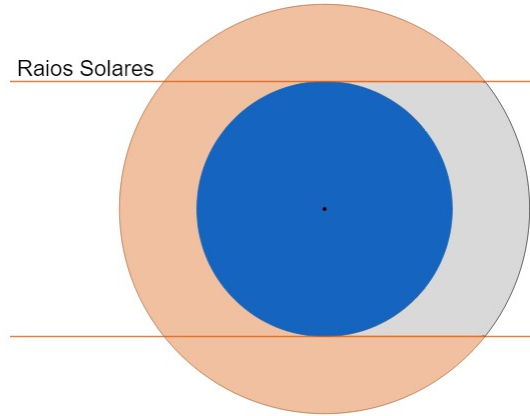


Figura 1.49: Región iluminada y oscura

Ahora que entendemos la idea del problema, podemos pasar a la parte numérica. La siguiente imagen ilustra algunos valores relevantes:

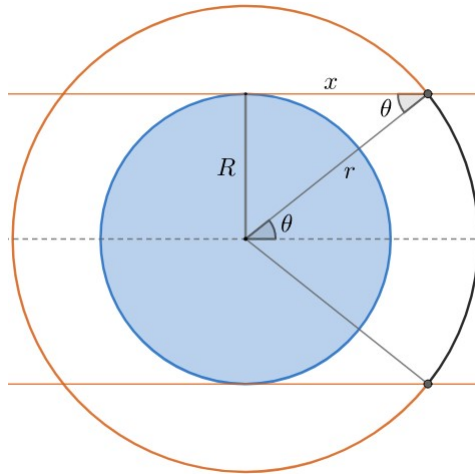


Figura 1.50: Representación de la situación

Nótese que el tiempo Δt que el satélite permanece en la región iluminada es:

$$\frac{\Delta t}{P} = \frac{2\pi - 2\theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta t = P \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right)$$

Por lo tanto, solo necesitamos encontrar θ . En el triángulo rectángulo de cateto R e hipotenusa r , tenemos:

$$\text{sen } \theta = \frac{R}{r}$$

Así:

$$\Delta t = P \left(1 - \frac{\text{sen}^{-1} \left(\frac{R}{r} \right)}{\pi} \right)$$

- 1.7.** Vamos a realizar un procedimiento análogo al que hicimos al inicio del capítulo para encontrar el período del péndulo. Asignando un exponente para cada posible dependencia de ν :

$$\nu \propto R^a G^b \rho^c$$

Ahora, vamos a analizar las dimensiones de ν , R , G y ρ . Siendo T la dimensión de tiempo, M la dimensión de masa y L la dimensión de espacio:

$$[R] = L$$

Como $g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow G = \frac{g \cdot R^2}{M}$, podemos encontrar la dimensión de G (g es la aceleración de la gravedad, que posee dimensión de aceleración (L/T^2)):

$$[G] = \frac{\frac{L}{T^2} \cdot L^2}{M} = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

Como la densidad es la masa dividida por el volumen (dimensión L^3):

$$[\rho] = M L^{-3}$$

Por último, sabemos que la dimensión de frecuencia es el inverso del tiempo, luego:

$$[\nu] = T^{-1}$$

Combinando estas ecuaciones:

$$T^{-1} = L^a \cdot L^{3b} T^{-2b} M^{-b} \cdot M^c L^{-3c}$$

De este modo, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} -1 = -2b \\ 0 = a + 3b - 3c \\ 0 = -b + c \end{cases}$$

Directamente, obtenemos $b = c = \frac{1}{2}$ y $a = 0$. Así:

$$\nu \propto \sqrt{\rho G}$$

Cabe destacar que, de acuerdo con el modelo del enunciado, la frecuencia de oscilación no depende del radio de la estrella.

1.8. Vamos a analizar la situación después de un tiempo Δt :

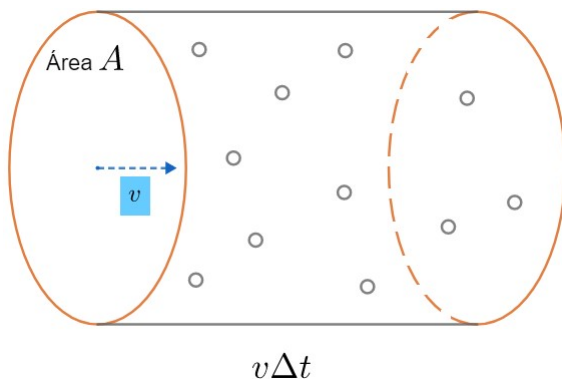


Figura 1.51: Vela pasando por una nube de polvo

Todas las partículas que estén dentro del cilindro barrido por la vela durante el Δt serán adheridas a ella. Note que el volumen ΔV de este cilindro es:

$$\Delta V = Av\Delta t$$

Como la densidad numérica de partículas es n , la cantidad ΔN de partículas que se adhieren a la vela en el intervalo Δt es:

$$\Delta N = n\Delta V = nAv\Delta t$$

Como cada partícula posee masa m , estas ΔN partículas poseen una masa:

$$\Delta M = m\Delta N = mnAv\Delta t$$

Es decir, la tasa de ganancia de masa $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ es:

$$\boxed{\frac{\Delta M}{\Delta t} = mnAv}$$

1.9. Siendo $P' = P + \Delta P$ el período tras la variación del semieje mayor, tenemos, por la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{P'^2}{a'^3} = k$$

Como $P' = P + \Delta P$ y $a' = a + \Delta a$, tenemos:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{(P + \Delta P)^2}{(a + \Delta a)^3}$$

Este es un problema clásico en el que necesitamos usar la aproximación binomial: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$. De este modo, reescribimos la ecuación anterior para aplicar esta aproximación:

$$\left(\frac{P + \Delta P}{P}\right)^2 = \left(\frac{a + \Delta a}{a}\right)^3$$

Que equivale a:

$$\left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)^3$$

Como $\Delta P \ll P$ y $\Delta a \ll a$, podemos usar las siguientes aproximaciones:

$$\left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right)^2 \approx 1 + \frac{2\Delta P}{P}$$

y

$$\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)^3 \approx 1 + \frac{3\Delta a}{a}$$

Así, obtenemos:

$$1 + \frac{2\Delta P}{P} = 1 + \frac{3\Delta a}{a}$$

Reescribiendo, llegamos a la respuesta final:

$$\boxed{\Delta P = \frac{3\Delta a}{2a}P}$$

1.10. Vamos a ilustrar la situación del enunciado:

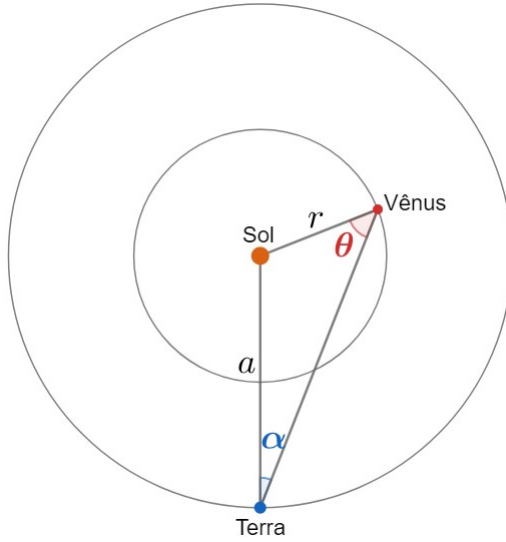


Figura 1.52: Situación

Directamente, podemos usar una Ley de Senos en el triángulo:

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

Queremos encontrar r . Como tenemos a y α , basta encontrar θ a partir de ϕ . Por la ecuación del enunciado:

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

Tenemos que $\phi = 0,209$, por lo tanto $\cos \theta = -0,582$. Así, tenemos dos opciones para θ : $125,6^\circ$ o $234,4^\circ$. Sin embargo, note por la Ley de Senos que $\sin \theta$ debe ser positivo. Esta condición solo se satisface para la primera opción de θ , luego:

$$\theta = 125,6^\circ$$

Podemos finalizar usando la Ley de Senos:

$$r = a \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \boxed{0,7186 \text{ UA}}$$

Capítulo 2

Mecánica Celeste

La curiosidad por las leyes del movimiento que rigen todos los cuerpos ha perseguido a la humanidad desde sus inicios. La filósofa Hipatia (300 a.C.) se preguntaba por qué las frutas caen de los árboles, pero las estrellas no caen del cielo. Aristóteles, por su parte, propuso la teoría de la caída libre y una explicación de por qué la sombra de la Tierra sobre la Luna durante un eclipse lunar es aproximadamente circular. Dando un paso más allá, Anaximandro de Mileto¹ investigaba el principio de todo, el *ápeiron*. Por lo tanto, se percibe la importancia del simple acto de mirar el cielo con ojos curiosos.

La mecánica celeste utiliza principios físicos y propiedades matemáticas para explicar el movimiento de todo cuerpo sujeto a la acción de la gravedad. A lo largo de este capítulo, desarrollaremos estas ideas en un contexto relacionado con la astronomía.

2.1 Leyes de Newton

Durante la Gran Peste de Londres (1665-1666), los estudiantes de la Universidad de Cambridge tuvieron que regresar a sus hogares para protegerse de la ola de muertes que azotaba Europa. Uno de esos estudiantes fue Isaac Newton (1643-1727), quien, a los 23 años, tuvo la cuarentena más productiva de todos los tiempos: desarrolló ideas en distintos campos de la física y las matemáticas², como la dinámica, la gravitación, la óptica, el cálculo diferencial e integral y sus

¹Anaximandro de Mileto (500 a.C.) fue el primer cosmólogo reconocido de la historia. Para él, todo había sido originado a partir de una materia primordial y eterna, el *ápeiron*; proposición muy similar a la Teoría del Big Bang actual, según la cual, momentos antes de que el Universo iniciara su expansión descontrolada, todo estaba unido en un único átomo primordial.

²Curiosamente, Newton inició sus estudios en el área de humanidades, obteniendo incluso una licenciatura y un máster en artes. Sin embargo, tras leer un libro de astrología en una feria, despertó su interés por las matemáticas y la física. Este libro posiblemente pertenecía al astrólogo inglés Sir Christopher Heydon (1561-1623).

binomios; que más tarde se convirtieron en libros famosos, como el *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* y *Optiks*.

De hecho, sus leyes de la dinámica sirvieron de base para la mayor parte de la física conocida en la actualidad. Estas son³:

- **1.^a Ley:** En ausencia de fuerza resultante⁴ sobre una partícula, ésta permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme;
- **2.^a Ley:** La fuerza resultante aplicada sobre un cuerpo es igual a la variación temporal de su momento lineal. Si la masa del cuerpo es constante, esta variación del momento de la partícula se manifiesta como una aceleración⁵ que apunta en la misma dirección de la fuerza resultante y es proporcional a su módulo:

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}_{res}$$

En este sentido, la fuerza es una entidad física responsable de alterar el movimiento de un cuerpo y deformarlo;

- **3.^a Ley:** A toda fuerza de acción corresponde una fuerza de reacción, de modo que estas fuerzas siempre tienen la misma intensidad, misma dirección y sentidos opuestos, aplicándose sobre cuerpos diferentes.

Una aplicación práctica de esto es una persona empujando un objeto: si este está experimentando una fuerza F , la propia persona sentirá que el objeto ejerce una fuerza F sobre ella. Veremos otro ejemplo, relacionado con la astronomía, en la siguiente sección.

Ley de la Gravitación Universal

Muchos dicen que mientras Newton meditaba bajo un manzano, una manzana cayó sobre su cabeza y, a partir de eso, mágicamente desarrolló todas sus teorías relacionadas con la gravitación. Aunque no existe ninguna prueba que confirme la veracidad de esta historia, nunca se sabe si esa manzana realmente ayudó a Newton a explicar la causa de los movimientos de los cuerpos terrestres y celestes.

³Las Leyes de Newton no suelen ser evaluadas directamente en astronomía, por lo que no se dará una explicación extremadamente detallada de ellas. Sin embargo, si el lector desea profundizar, el libro “Tópicos de Física” ofrece un enfoque más completo.

⁴La fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Por ejemplo, si un bloque está sometido a una fuerza de $10N$ hacia la izquierda y otra también de $10N$ hacia la derecha, la fuerza resultante sobre él es nula.

⁵Así como la velocidad mide la variación de la posición de un objeto, la aceleración mide la variación de la velocidad de un cuerpo.

Newton concluyó que la caída de los cuerpos en la Tierra estaba generada por una fuerza de atracción gravitatoria⁶, la cual también estaría presente en la interacción entre cuerpos celestes. De este modo, si existen masas en un sistema, estas interactuarán entre sí a través de la fuerza gravitatoria.

En este sentido, buscaremos una interpretación matemática de esta concepción. Considere, en primera instancia, dos cuerpos de masa M_1 y M_2 cuyos centros están separados por una distancia d , tal como se representa en la figura a continuación:

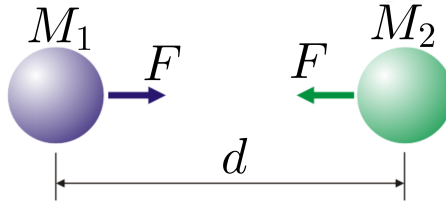


Figura 2.1: Ley de la Gravitación Universal

Newton mostró que la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$ que actúa sobre cada cuerpo posee tres características fundamentales:

- $\vec{F}_g$ apunta en la misma dirección de la línea que une los centros de los cuerpos;
- La fuerza que actúa sobre cada cuerpo posee el mismo módulo y dirección que la fuerza que actúa sobre el otro, pero con sentido opuesto⁷, por ejemplo, la fuerza sobre el cuerpo morado apunta hacia la derecha, mientras que la fuerza sobre el cuerpo verde apunta hacia la izquierda.
- El módulo de la fuerza gravitatoria, F_g , depende de la masa de los dos cuerpos y de la distancia entre sus **centros** mediante la expresión:

$$F_g = \frac{GM_1M_2}{d^2}$$

Donde G es una constante llamada **constante de gravitación universal**, cuyo valor es aproximadamente $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

⁶El término *gravidad* se origina del término latino *gravitas*, que literalmente significa “pesado”, es decir, es una designación coherente con su sentido original.

⁷Esto es una consecuencia directa de la Tercera Ley de Newton.

Ejemplo 1

Encuentre una relación para la aceleración de una masa m causada por la interacción gravitatoria con otra masa M , cuyo centro está a una distancia d del centro de m . Esta aceleración se conoce como gravedad. Además, encuentre el valor de la gravedad en la superficie de la Tierra.

Solución

Sea F_g la fuerza gravitatoria entre los cuerpos y g la aceleración gravitatoria, tenemos, según la Segunda Ley de Newton:

$$F_{res} = F_g \Leftrightarrow mg = \frac{GMm}{d^2}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por m , obtenemos:

$$g = \frac{GM}{d^2}$$

Observe que g **no depende** de la masa de prueba m . Por esta razón, la aceleración gravitatoria en la superficie de la Tierra es la misma para todos los cuerpos, independientemente de sus masas.

En el caso de la superficie de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ y $d = R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, que es el radio de la Tierra. Así:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11})(5,97 \cdot 10^{24})}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

¡Esto es cercano al valor observado empíricamente! Cabe destacar que este cálculo debe realizarse con una calculadora científica, tal como se enseñó en el primer capítulo.

Ejemplo 2

El filósofo natural Handré Majone subió a la Torre de Pisa (57 metros de altura), en Italia, y midió el valor de la aceleración gravitatoria en la cima como $g = 9,86 \text{ m/s}^2$. Considerando que el interior de la Tierra posee simetría esférica, calcule su masa.

Datos:

- Constante de la Gravitation Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- Radio de la Tierra $R_T = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$

Solución

Según la Segunda Ley de Newton:

$$F_{res} = F_g \Leftrightarrow mg = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}$$

Por lo tanto, podemos encontrar M_T :

$$M_T = \frac{g(R_T + h)^2}{G} = 5,99 \cdot 10^{24} kg$$

2.2 Órbitas circulares

La órbita circular es un tipo particular de órbita en la que la masa de prueba recorre una circunferencia alrededor de la masa central, la cual ocupa su centro. Se recomienda haber leído la discusión sobre círculos y circunferencias en el capítulo 1 antes de continuar.

2.2.1 Movimiento Circular Uniforme

Sea A un cuerpo en una órbita circular con centro O , tal como se ilustra en la figura a continuación.

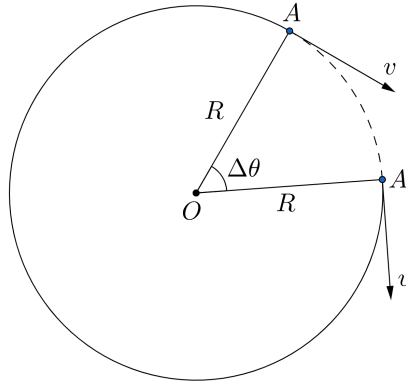


Figura 2.2: Movimiento Circular Uniforme

Los principales parámetros de una órbita circular son:

- **Radio:** R
- **Velocidad tangencial:** v_t
- **Período:** T
- **Velocidad angular:** ω

El **período** es el tiempo que tarda el cuerpo en regresar al mismo punto de la órbita. La **velocidad tangencial** es la componente de la velocidad tangente a la circunferencia. Por otro lado, la **velocidad angular** es la tasa de variación temporal del ángulo θ .

Dado que la distancia recorrida por el cuerpo en un período T es el propio perímetro $2\pi R$ de la circunferencia, tenemos que la velocidad tangencial puede escribirse como:

$$v_t = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$$

De manera análoga, el ángulo θ varía 2π radianes a lo largo de un período, por lo que:

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Finalmente, podemos combinar estas expresiones para encontrar una relación **extremadamente** importante entre v_t y ω . Dividiendo las expresiones obtenidas:

$$\frac{v_t}{\omega} = \frac{\frac{2\pi R}{T}}{\frac{2\pi}{T}} = R$$

Por lo tanto:

$$v_t = \omega R$$

Otra manera de llegar a esta expresión es utilizando la ecuación $\Delta L = R\Delta\theta$. Dividiendo ambos lados por Δt se obtiene:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = R \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow v_t = \omega R$$

2.2.2 Aceleración centrípeta

La aceleración $\vec{a}$ de un cuerpo cualquiera no es más que la tasa de variación de su velocidad $\vec{v}$. Note que esta variación no necesita ser necesariamente en módulo - si la dirección de la velocidad está cambiando, habrá una aceleración, llamada **aceleración centrípeta**. De manera similar, la aceleración asociada a la variación del módulo de $\vec{v}$ se llama aceleración tangencial.

Ya hemos visto que el módulo de la velocidad en una órbita circular uniforme es **constante**, es decir, la aceleración tangencial es nula. Sin embargo, la dirección de la velocidad varía continuamente, por lo que la componente centrípeta de la aceleración no es nula y, por lo tanto, es relevante para nosotros.

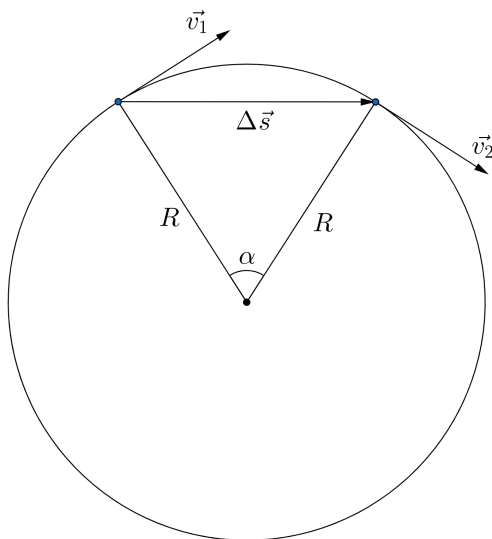


Figura 2.3: Vector velocidad en una órbita circular. Note que su dirección cambia, pero el módulo no

En este contexto, la aceleración centrípeta en una órbita **circular** de radio R y velocidad tangencial v_t apunta hacia el **centro** de la órbita y tiene módulo:

$$a_{cp} = \frac{v_t^2}{R}$$

Cabe destacar que esta expresión es válida **únicamente** para órbitas circulares. En el caso de otras órbitas, el término que aparece en el denominador de la aceleración centrípeta no es solamente la distancia desde la masa central hasta la masa de prueba⁸.

Esta expresión puede utilizarse en la Segunda Ley de Newton, $F_{res}^{\vec{}} = m\vec{a}$, para obtener diversas propiedades relevantes sobre órbitas circulares, como veremos a continuación:

⁸En esos casos, encontramos la velocidad a través de la energía, como veremos en las próximas secciones.

2.2.3 La Órbita Circular

La órbita circular caracteriza el movimiento circular uniforme de una masa de prueba m alrededor de una masa central M , es decir, es un problema de dos cuerpos⁹.

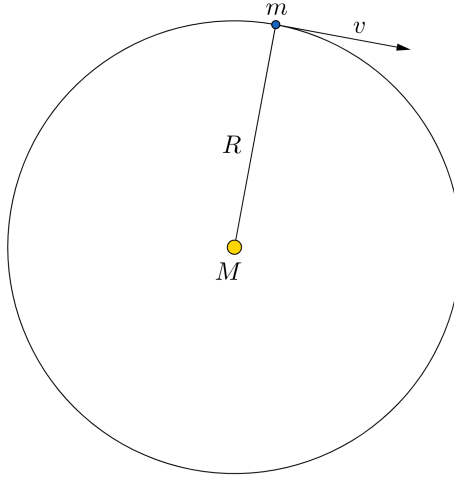


Figura 2.4: Órbita circular

Vamos a encontrar la velocidad tangencial v_t de m como función de G , M y R . Note que, según la Segunda Ley de Newton, la fuerza resultante sobre m es:

$$F_{res} = F_g = \frac{GMm}{R^2}$$

Como la aceleración tangencial es nula, la única componente de la aceleración del cuerpo será centrípeta, por lo tanto:

$$F_{res} = ma_{cp} = m \frac{v_t^2}{R}$$

Combinando estas expresiones:

$$m \frac{v_t^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

⁹Todo el estudio de *Isaac Newton* sobre gravitación consideró una interacción entre solo dos cuerpos (al igual que *Johannes Kepler*), por ejemplo, la Tierra y el Sol o la Tierra y la Luna. Sin embargo, se sabe que la realidad no es exactamente así, ya que hay innumerables cuerpos celestes en la vastedad del Universo interactuando entre sí. A lo largo de los años, muchos otros matemáticos formularon modelos y ecuaciones que tratan la interacción gravitacional entre más de dos cuerpos, como Euler, Laplace, Poincaré y el propio Einstein.

Podemos dar un paso más y encontrar una relación entre el período T y el radio R de la órbita. Como $v_t = \frac{2\pi R}{T}$, tenemos:

$$v_t^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R}$$

Es decir:

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Ambas expresiones poseen una enorme relevancia en mecánica celeste. La segunda, incluso, es la Tercera Ley de Kepler, que será vista con más detalle en las próximas secciones.

Ejemplo 3

Los satélites geoestacionarios son aquellos que siempre se encuentran sobre un mismo punto en la superficie terrestre, es decir, permanecen fijos en el cielo para un observador en la Tierra. Por ello, estos satélites son muy útiles para la transmisión de señales entre países, por ejemplo. Calcule la altura y la velocidad de un satélite geoestacionario cuya órbita circular pasa sobre el ecuador en función del período de rotación, el radio y la masa de la Tierra.

Solución

Según la descripción del enunciado, se puede concluir que el período orbital del satélite es idéntico al período de rotación de la Tierra ($T = P$). Por lo tanto, podemos utilizar la Tercera Ley de Kepler para encontrar el radio R de la órbita del satélite:

$$\frac{P^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow R = \left(\frac{P^2 GM_T}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Así, la altura h del satélite con respecto a la superficie terrestre es:

$$h = R - R_T = \left(\frac{P^2 GM_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T$$

Aunque el enunciado no pidió el valor numérico, vamos a calcular h por curiosidad. Realizando los cálculos correspondientes, obtenemos $h = 3,59 \cdot 10^4 \text{ km}$.

Ahora, podemos encontrar la velocidad:

$$v_t = \frac{2\pi R}{P}$$

Cuyo valor numérico es $v_t = 3,07 \text{ km/s}$. Cabe destacar que la expresión $v_t^2 = \frac{GM_T}{R}$ daría el mismo resultado.

2.3 Elipses

La elipse es una de las figuras más relevantes en astronomía, tanto como el propio círculo, principalmente porque, según la primera ley de Kepler, las órbitas cerradas tienen esta forma. Por ello, es de extrema importancia comprender la geometría detrás de esta figura, que será el foco de esta sección.

2.3.1 Definiciones

Existen 3 maneras principales de definir una elipse. La primera, y la más relevante para nosotros, dice que la elipse es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es **constante**. Si ya has visto la clásica construcción de una elipse con un hilo y dos tachuelas¹⁰, funciona justamente por esta propiedad, ya que la longitud del hilo, que es la suma de las distancias de cualquier punto a las tachuelas, es constante. La segunda define la elipse como un corte de un cono, como puede observarse en la figura 2.5. A primera vista, esta propiedad puede parecer algo abstracta o irrelevante, pero tiene varias aplicaciones curiosas. Una de ellas es que cuando iluminas una pared con una linterna (preferiblemente puntual) de manera oblicua, la figura geométrica obtenida es una elipse¹¹, y por esta misma razón, la curva que delimita las regiones claras y oscuras de la Luna es una elipse. La última definición, que concuerda con el sentido común, es que una elipse puede verse como un círculo aplanado, aunque es raro ver aplicaciones prácticas de esta definición en olimpiadas.

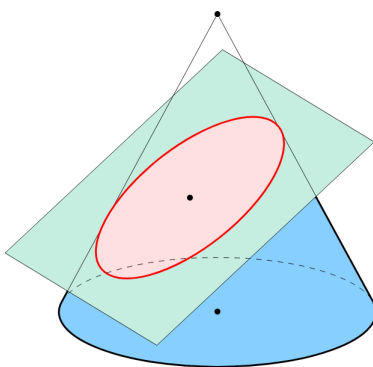


Figura 2.5: Segunda definición

¹⁰Puede visualizarse en [este](#) video.

¹¹Observe que el cono de luz de la linterna es cortado por la pared, por eso obtenemos una elipse. También note que si la oblicuidad de la linterna es muy alta, la elipse se “abre” convirtiéndose en una hipérbola, que también es un tipo de órbita y se estudiará en las próximas secciones.

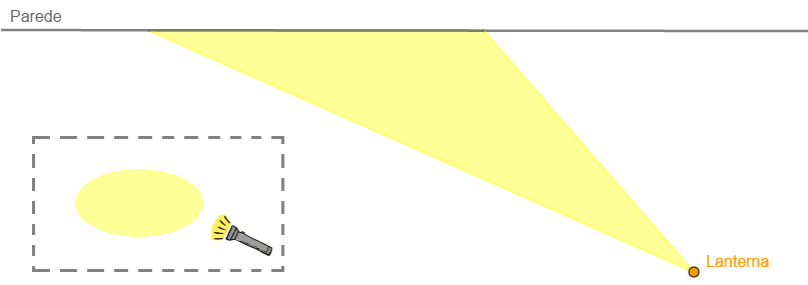


Figura 2.6: Iluminando una pared con una linterna

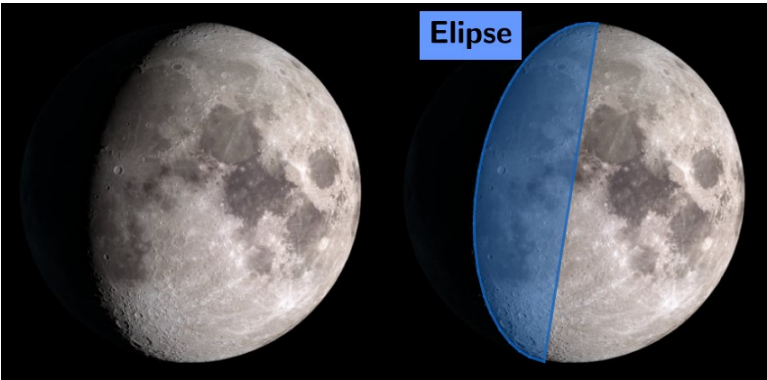


Figura 2.7: Elipse en las fases de la luna

2.3.2 Propiedades

Ahora que sabemos describir cualitativamente una elipse, podemos estudiar sus propiedades cuantitativas. Sabemos que podemos dibujar un círculo a partir de uno de sus parámetros, ya sea radio, perímetro o área. Para la elipse, necesitamos al menos dos informaciones, cuyas “opciones” estudiaremos a continuación:

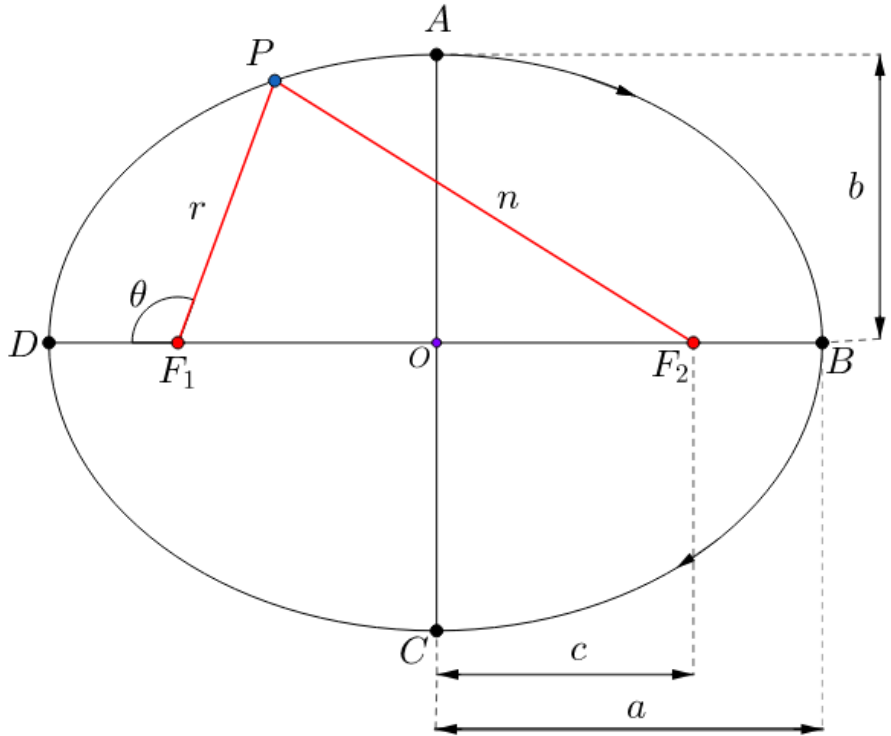


Figura 2.8: Elipse

- Focos: F_1 y F_2
- Origen: O
- Semieje mayor: a
- Semieje menor: b
- Distancia focal: $2c$
- Anomalía verdadera¹²: θ

Al ver la figura, puede parecer que necesitamos más de dos parámetros de una elipse para caracterizarla, pero veremos que solo con 2 de ellos es posible encontrar los demás.

En primer lugar, en órbitas elípticas, el cuerpo más masivo ocupa uno de los focos, llamado foco primario, mientras que el otro se denomina foco secundario. Por conveniencia, asumiremos que F_1 es el foco primario. Así, sea P un punto cualquiera de la elipse que dista r del foco primario, n del foco secundario y posee una anomalía verdadera θ , también podemos encontrar relaciones entre estos parámetros, que no se aplican a la elipse completa sino a un punto en particular.

¹²Cuidado de no confundir este ángulo con su complemento ($180^\circ - \theta$). La anomalía verdadera de un punto P se mide a partir del segmento que une el foco primario y D (extremo más cercano).

La primera relación importante está directamente relacionada con la primera definición de la elipse, que dice que la suma de las distancias de cualquier punto P de la elipse a los focos es constante, es decir, $r + n = \text{cte}$. Para encontrar el valor de esta constante, analizamos la situación cuando P está en B : note que $r = F_1D$ y $n = 2c + F_1D$ por la geometría de la situación, así $r + n = 2(F_1D + c)$. Finalmente, note que $a = F_1D + c$, por lo tanto:

$$r + n = 2a$$

Esta suma $r + n$ se calculó para un caso específico (P en D), pero como es constante, es la misma para toda la elipse.

Siguiendo esa lógica de analizar posiciones específicas en la elipse, veamos lo que ocurre cuando P está en el punto A , tal como se representa en la figura 2.9:

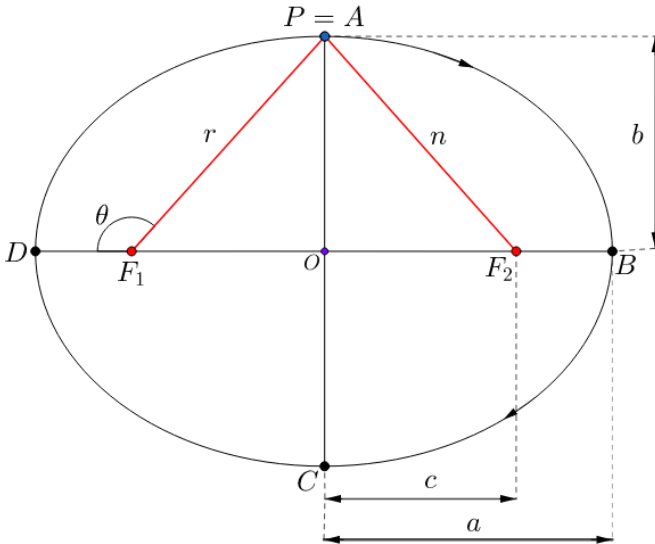


Figura 2.9: P en A

Primero, note que $r = n$, dado que la situación es simétrica, y podemos usar la relación deducida anteriormente para escribir $r + n = 2a \Rightarrow 2r = 2a \Rightarrow r = n = a$, es decir, la distancia entre cada foco y el punto más alto de la elipse es a . Con esto, el triángulo ΔF_1AO es rectángulo en O , es decir, $\hat{O} = 90^\circ$, y por el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Esta relación puede observarse en la figura:

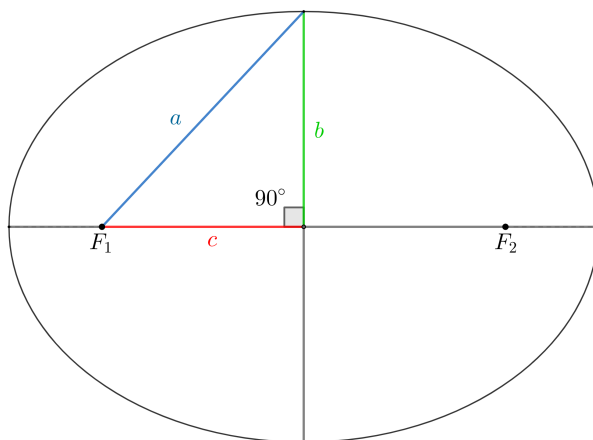


Figura 2.10: Relación pitagórica de la elipse

Acabamos de encontrar una relación entre a , b y c , por lo que si se nos dan dos de ellos, podemos hallar el tercero, tal como queríamos demostrar inicialmente.

De acuerdo con la tercera definición de la elipse, que la ve como un círculo aplanado, se define la **excentricidad** e de una elipse como una medida de su “aplanamiento”. Cuantitativamente, se da por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Note que una elipse cuyos focos están muy cercanos, es decir, c es pequeño, tiene una excentricidad cercana a 0, siendo parecida a un círculo¹³. Por otro lado, excentricidades cercanas a 1 se relacionan con elipses cuyos focos están muy próximos a los extremos (F_1 cerca de D , por ejemplo), es decir, la elipse está muy estirada. Finalmente, observe que una excentricidad mayor que 1 implicaría que los focos aparecen fuera del contorno de la figura, lo que no tiene sentido para una elipse¹⁴, por lo tanto:

$$\begin{cases} e_{elipse} < 1 \\ \text{Si } e = 0 \Rightarrow \text{círculo} \end{cases}$$

¹³La órbita de la Tierra alrededor del Sol es un ejemplo, con una excentricidad de aproximadamente 0,02.

¹⁴En este caso, la figura sería una hipérbola.

Ejemplo 4

En una elipse de semieje mayor a y excentricidad e , halla el valor del semieje menor b .

Solución

Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

Observa que tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas (c y b), por lo tanto, basta con resolver el sistema. Así, podemos encontrar c mediante la primera ecuación y sustituirlo en la ecuación inferior:

$$c = ea \Rightarrow a^2 = b^2 + (ea)^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow \boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}}$$

Ejemplo 5

En la figura a continuación, se representa el segmento llamado semi-latus rectum, obtenido por la intersección de una línea vertical que pasa por uno de los focos con la elipse. Encuentre su valor p en función del semieje mayor y de la excentricidad.

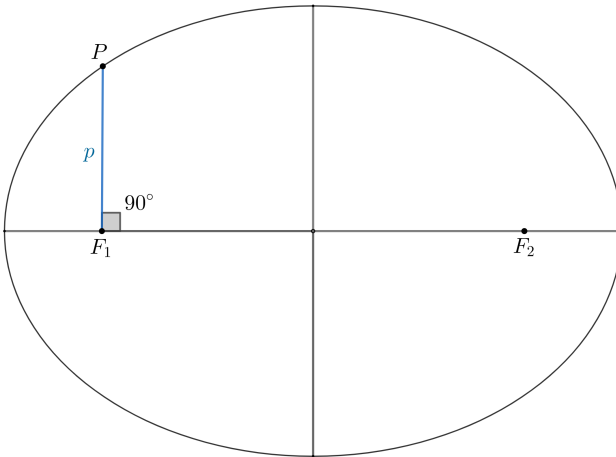


Figura 2.11: Ejemplo 5

Solución

Observe que podemos unir el punto P con el foco secundario F_2 , formando el triángulo representado en la figura 2.12. Como la suma de las distancias de P a los focos es $2a$ y sabemos que la distancia de F_1 a P es p , la distancia de F_2 a P es $2a - p$. Ahora, note que tenemos un triángulo rectángulo con catetos $2c$ y p y hipotenusa $2a - p$, por lo tanto, por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(2a - p)^2 &= p^2 + (2c)^2 \\ 4a^2 - 4ap + \cancel{p^2} &= \cancel{p^2} + 4c^2 \\ a^2 - ap &= c^2\end{aligned}$$

Pero como $c = ea$, tenemos:

$$a^2 - ap = e^2 a^2 \Rightarrow \boxed{p = a(1 - e^2)}$$

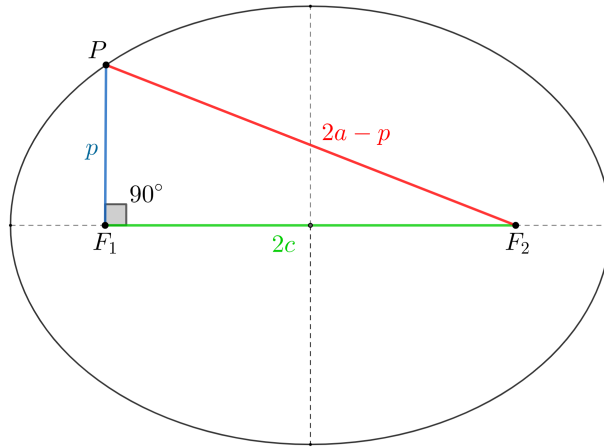


Figura 2.12: Semi-latus rectum

Observe que, en el ejemplo 5, calculamos el valor de r para una anomalía verdadera particular: $\theta = 90^\circ$. Sin embargo, es posible dar un paso más y calcular una expresión general para $r(\theta)$, que se llama **forma polar de la elipse**. En su deducción, la única diferencia con respecto al ejemplo 5 es el uso de la ley de cosenos¹⁵ en lugar del teorema de Pitágoras. Véase la figura 2.13.

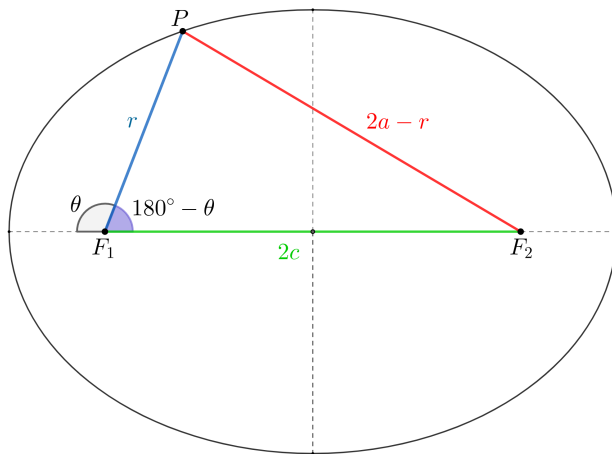


Figura 2.13: Forma polar de la elipse

Por la ley de cosenos en $\triangle F_1PF_2$:

$$(2a - r)^2 = r^2 + (2c)^2 - 2 \cdot r \cdot (2c) \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

Como $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$ ¹⁶:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (2a - r)^2 &= r^2 + (2c)^2 + 2 \cdot r \cdot (2c) \cdot \cos \theta \\ 4a^2 - 4ar + \cancel{r^2} &= \cancel{r^2} + 4c^2 + 4rc \cos \theta \end{aligned}$$

¹⁵Si no la conoce, se recomienda estudiarla antes de continuar, como en el capítulo 1, por ejemplo

¹⁶Si no conoce esta relación, revise el círculo trigonométrico.

Dividiendo todos los términos por 4 y usando $c = ea$, podemos hacer:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a^2 - ar &= e^2 a^2 + rea \cos \theta \\ a - r &= e^2 a + re \cos \theta\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación final es:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

Recuerde que esta ecuación nos proporciona la distancia r para cualquier anomalía verdadera. Probemos algunos valores de θ y compárelos con lo esperado:

- $\theta = 90^\circ \rightarrow$ semi-latus rectum

Como $\cos 90^\circ = 0$:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 90^\circ} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + 0} = a(1 - e^2)$$

Tal como se esperaba.

En astronomía, es común usar los términos *periastro* y *apoastro* para referirse a los puntos más cercano y más lejano que una masa orbitante se encuentra respecto a la masa central¹⁷, respectivamente. Sea r_p la distancia al periastro y r_a la distancia al apoastro:

- $\theta = 0^\circ \rightarrow$ periastro

Como $\cos 0^\circ = 1$:

$$r_p = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 0^\circ} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = \frac{a(1 - e)(\cancel{1 + e})}{\cancel{1 + e}} = a(1 - e)$$

Donde se utilizó el producto notable de la diferencia de cuadrados: $1 - e^2 = 1^2 - e^2 = (1 - e)(1 + e)$

Observe que, según la figura 2.8, la distancia esperada era $DF_1 = a - c = a(1 - e)$, por lo que nuestro resultado está comprobado.

¹⁷En el caso del Sol, se pueden llamar estos puntos perihelio y afelio, respectivamente.

- $\theta = 180^\circ \rightarrow$ apoastro

Como $\cos 180^\circ = -1$:

$$r_a = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 180^\circ} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = \frac{a(1 + e)(\cancel{1 - e})}{\cancel{1 - e}} = a(1 + e)$$

Observe que, según la figura 2.8, esperábamos $F_1B = c + a = a(1 + e)$, por lo que nuestro resultado está comprobado.

Cabe notar algunas propiedades más sobre el periastro y el apoastro. Primero, observe que $r_p + r_a = a(1 - e) + a(1 + e) = 2a$, lo que coincide con lo esperado, ya que esta suma representa la distancia desde el foco hasta la extremidad izquierda más la distancia desde el foco hasta la extremidad derecha. Además, note que $r_a - r_p = a(1 + e) - a(1 - e) = (2a) \cdot e$, es decir:

$$e = \frac{r_a - r_p}{2a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

La última propiedad que veremos sobre la elipse trata de su área. Cabe resaltar que esta expresión es de extrema importancia para la segunda ley de Kepler, la ley de las Áreas, que será estudiada en las próximas secciones. Analizaremos una deducción correcta, aunque poco rigurosa (no todo se probará, aunque todos los resultados son correctos) de dicha expresión:

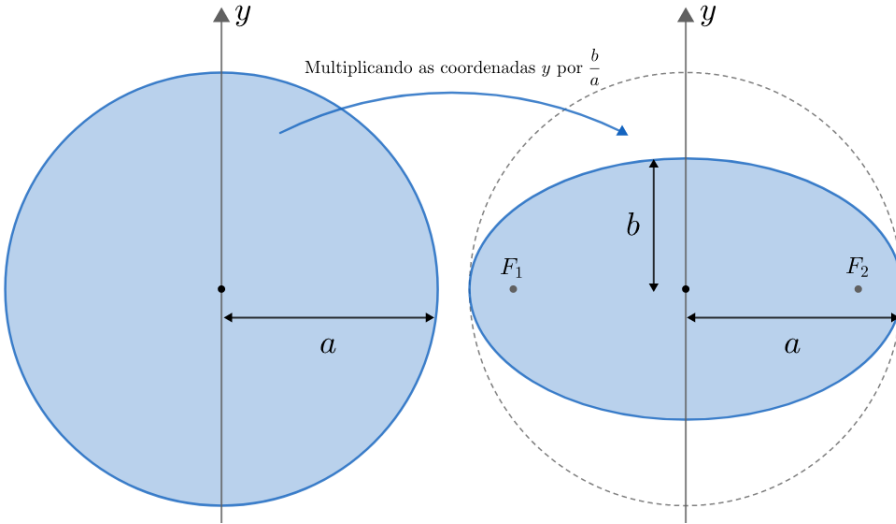


Figura 2.14: Área de la elipse

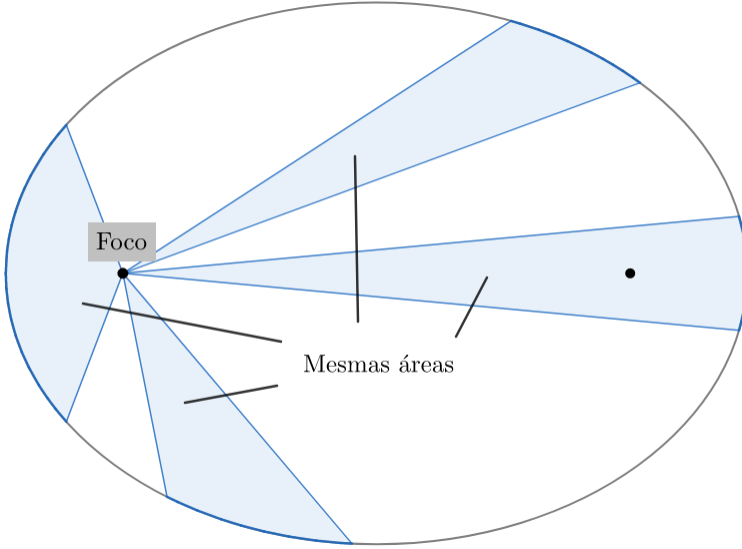
Vimos en la tercera definición de la elipse que puede verse como un círculo achatado, pero ¿cuál es el significado matemático de esto? Comencemos con un círculo de radio a , como el representado en la figura 2.14. Si multiplicamos la coordenada y de todos los puntos de este círculo por un mismo valor k , se puede demostrar que la figura final obtenida será una elipse. Para adaptarnos a la notación actual, elegiremos un valor específico de k : $\frac{b}{a}$. Así, observa que el punto más alto del círculo (que tenía coordenada $y = a$) tendrá una nueva coordenada $y' = y \cdot k = a \cdot \frac{b}{a} = b$, es decir, la figura final es una elipse de semieje mayor a y semieje menor b . La gran idea es que, al igual que las coordenadas y de cada punto de la elipse, su área **también** se multiplica por la constante $\frac{b}{a}$. Así, como el área del círculo es $A_{\text{círculo}} = \pi a^2$, tenemos que el área de la elipse, A_{elipse} , es:

$$A_{\text{elipse}} = A_{\text{círculo}} \cdot \frac{b}{a} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \boxed{\pi ab}$$

2.4 Leyes de Kepler

Durante los siglos 16 y 17, el astrónomo Tycho Brahe, con grandes inversiones del gobierno danés, realizó diversas observaciones de las posiciones de los astros, con la mayor precisión hasta entonces. Para analizar todos estos datos, Tycho contrató al matemático Johannes Kepler. Después de la muerte de Tycho, Kepler, en posesión de todos los datos, estaba libre para crear modelos a partir de las observaciones. Así, formuló tres leyes para los movimientos planetarios:

- **1ª Ley:** Las órbitas de los planetas son elípticas, con el Sol en uno de los focos. Veremos en las próximas secciones que una órbita también puede ser hiperbólica o parabólica;
- **2ª Ley:** Imagine un segmento que conecte el foco primario de la elipse con el cuerpo orbitante. En intervalos de tiempo iguales, el área barrida por este segmento debe ser la misma. La figura de abajo muestra el área barrida por el cuerpo orbitante en dos intervalos de tiempo idénticos - que es igual en ambos casos.



Cabe resaltar que una consecuencia de la Segunda Ley de Kepler es que la velocidad de los cuerpos cercanos al periastro es mayor que aquella en las proximidades del apoastro. Además, es común definir la **velocidad areal** de un cuerpo como la tasa temporal del área barrida, que es constante. Para una órbita elíptica de semiejes mayor y menor a y b y período P , tenemos:

$$v_{areal} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{P} = \text{cte.}$$

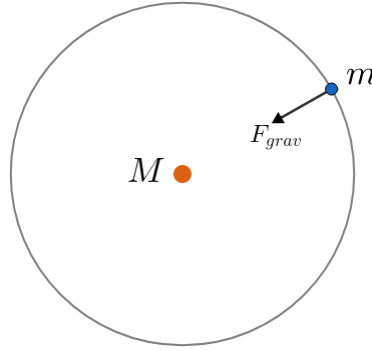
- **3ª Ley:** Para un mismo sistema, debe obedecerse la siguiente relación

$$\frac{P^2}{a^3} = K$$

Donde K es una constante que depende de las características del sistema, P es el período orbital y a es el semieje mayor de la órbita. Más tarde, Isaac Newton utilizó la ley de la Gravitación Universal para encontrar el valor de la constante K en términos de las masas de los cuerpos del sistema M y m , y de otras constantes, como la constante de la gravitación universal G :

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

Demostraremos la relación anterior para el caso de órbita circular, y en que $M \gg m$. Observe la imagen de abajo.



Para esta órbita circular, tenemos que la resultante centrípeta es la propia fuerza gravitacional, luego:

$$R_{cp} = F_{grav} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Es decir:

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

Además, sabemos que la velocidad en órbitas circulares es constante y tiene módulo $v = \frac{2\pi r}{P}$. Así:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{2\pi r}{P} \right)^2 = \frac{GM}{r} \\ \Leftrightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{P^2} &= \frac{GM}{r} \end{aligned}$$

Ahora, puede observarse que la distancia constante r de m hasta M sería el propio semieje mayor a de la órbita circular, luego:

$$\boxed{\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

2.5 Energías

Muchas veces es conveniente tratar un problema a partir de otras magnitudes, además de las fuerzas. Para ello, existen relaciones entre una determinada fuerza y otras magnitudes, que llamamos trabajo y energía. Estas relaciones se mostrarán solo con fines de ilustración (no es necesario que las entiendas):

- Trabajo: $W = \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- Energía potencial: $U = -W$

- Energía cinética: $K = \int_{p_0}^p v dp$

A pesar de que estas expresiones parecen cálculos complicados, bajo ciertas circunstancias, exhiben resultados simples, “iguales” y, principalmente, escalares (no poseen dirección ni sentido, solo magnitud). Así, resulta muy conveniente utilizar estos resultados directamente. Esos son:

- Energía cinética: $K = \frac{mv^2}{2}$
- Energía potencial gravitacional¹⁸: $U_g = -\frac{GMm}{r}$

Es importante notar que la energía es solo un concepto abstracto, no siendo tan visualizable como una fuerza, por ejemplo. Como se dijo anteriormente, bajo ciertas circunstancias, las energías exhiben ciertas propiedades. La más importante de ellas para nuestros propósitos es la **conservación de la energía mecánica** E_m , donde:

$$E_m \equiv K + U$$

Es decir, la energía mecánica es la propia energía total de nuestro sistema, que posee un término asociado al movimiento (cinético) y otro relacionado con las condiciones a las que el sistema está sujeto (potencial), las cuales pueden ser solamente gravitacionales o no¹⁹. Podemos reescribir esta relación para dos instantes distintos 1 y 2:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

A partir de la definición de energía mecánica, podemos llegar a la siguiente relación de la energía mecánica para una **elipse**:

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

Con esto, podemos juntar todos los resultados anteriores para obtener una expresión general que nos da la velocidad de un cuerpo en una órbita elíptica como función de la distancia r entre él y el cuerpo central. Esa ecuación se llama **VIS-VIVA** y dice que:

$$E_m = K + U_g \Leftrightarrow -\frac{GMm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

¹⁸Si ya hubieras visto la expresión $U_g = mgh$, esta es solo una aproximación de la expresión mostrada para alturas mucho menores que el radio de la Tierra. Además, no te preocupes por el signo negativo - recuerda que la energía es un concepto abstracto, así que no hay ningún problema con eso, al menos para la energía potencial.

¹⁹En mecánica celeste, solo nos interesa la energía potencial gravitacional, asociada a la fuerza gravitacional. Sin embargo, este resultado es útil en numerosos otros campos de la física, habiendo energías potenciales relacionadas con otras fuerzas, como la eléctrica, elástica y centrífuga.

Reescribiendo esta expresión, podemos obtener el resultado final:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Ahora, veamos un ejemplo de aplicación de esta ecuación.

Ejemplo 6

Un pequeño cuerpo de masa m orbita una estrella de masa $M \gg m$ en una órbita elíptica de semieje mayor a y excentricidad e . Calcule:

- La velocidad de este cuerpo en el perihelio de la órbita;
- La velocidad de este cuerpo en el afelio de la órbita;
- La razón $\frac{v_p}{v_a}$ de esas velocidades.

Solución

a) Basta con encontrar la distancia de M hasta m cuando este está en el perihelio, r_p . Ya vimos en la sección de elipses que $r_p = a(1 - e)$, luego:

$$v_p^2 = GM \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right) = GM \left(\frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right)$$

Reescribiendo, tenemos:

$$v_p^2 = \frac{GM}{a} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

b) De manera análoga al ítem a), tenemos que $r_a = a(1 + e)$, luego:

$$v_a^2 = GM \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right) = GM \left(\frac{2}{a(1 + e)} - \frac{1}{a} \right)$$

Reescribiendo, tenemos:

$$v_a^2 = \frac{GM}{a} \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)$$

c) Tenemos v_p y v_a , luego basta con calcular la razón:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}}{\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

Cabe recordar que, como veremos en la sección de momento angular, ¡existe una manera mucho más rápida de llegar a este resultado!

2.6 Tipos de Órbitas

Definimos, primeramente, dos “clases” de órbitas: las órbitas cerradas y las órbitas abiertas. Las órbitas cerradas incluyen las órbitas circulares y elípticas y son órbitas “ligadas”, es decir, el cuerpo en órbita no escapa del sistema. Por otro lado, las órbitas abiertas incluyen las órbitas parabólicas e hiperbólicas, y son órbitas que no están ligadas, es decir, el cuerpo se acerca al cuerpo de mayor masa una sola vez y luego se aleja para siempre. Algunos cometas poseen órbitas abiertas. Dicho esto, definimos:

- Si $E_m < 0$, la órbita es cerrada (elíptica o circular);

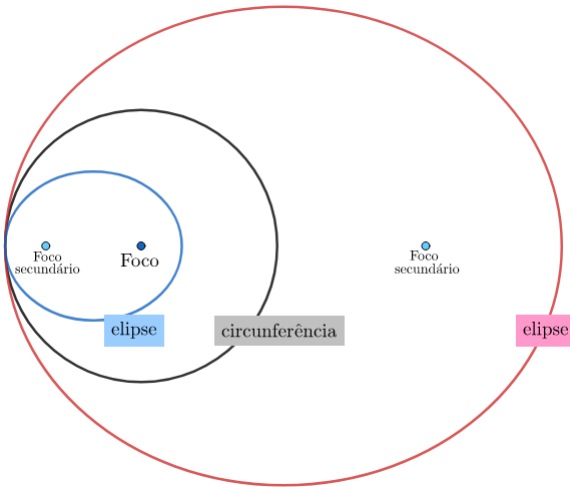


Figura 2.15: Órbitas elípticas y circulares

- Si $E_m > 0$, la órbita es hiperbólica;

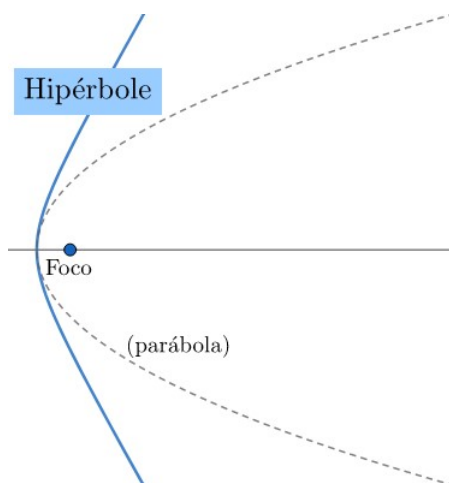


Figura 2.16: Órbita hiperbólica

- Si $E_m = 0$, la órbita es parabólica;

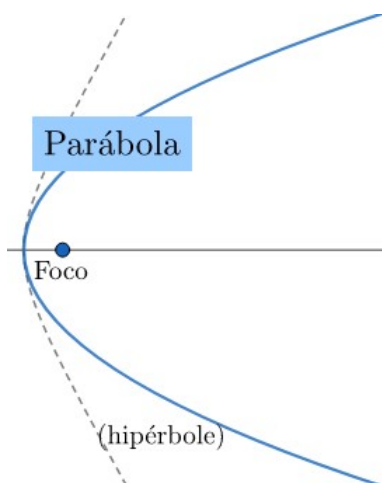


Figura 2.17: Órbita parabólica

Esta relación directa entre el signo de la energía mecánica de una órbita y su forma implica que podemos determinar la forma de una órbita a partir de su energía mecánica en **cualquier** punto, como se representa en el ejemplo a continuación:

Ejemplo 7

Considere una pequeña región del espacio en la cual una pequeña masa m

interactúa gravitacionalmente con una estrella de masa M . A continuación se listan 4 posibles situaciones iniciales para m en esta configuración. Así, determine la forma de la órbita de m en cada caso.

- a) m con velocidad nula a una distancia muy grande de M ;
- b) m con velocidad no nula a una distancia muy grande de M ;
- c) m con velocidad nula a una distancia considerable de M ;
- d) m con velocidad $\sqrt{\frac{2GM}{d}}$ a una distancia d de M .

Solución

De manera general para todos los ítems, calcularemos la energía mecánica inicial (que es la misma durante toda la órbita) en función de las distancias y velocidades iniciales r_0 y v_0 :

$$E_m = K + U_g = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r_0}$$

Como ya hemos visto, el signo de E_m determina la forma de la órbita.

- a) Tenemos que $v_0 = 0$ y r_0 es muy grande, es decir, $\frac{1}{r_0} \approx 0$ (esto significa que la energía potencial gravitatoria inicial es despreciable por ser tan pequeña). Así:

$$E_m = \frac{m(0)^2}{2} - GMm \left(\frac{1}{r_0} \right) \overset{0}{\rightarrow} = 0$$

Es decir, la órbita es parabólica.

- b) Tenemos:

$$E_m = \frac{m(v_0)^2}{2} - GMm \left(\frac{1}{r_0} \right) \overset{0}{\rightarrow} = \frac{m(v_0)^2}{2}$$

Como m es positivo, así como v_0^2 (todo ²⁰ número al cuadrado es positivo), tenemos que $E_m > 0$, es decir, la órbita es hiperbólica.

- c) Tenemos que $v_0 = 0$ y que r_0 es un valor considerable, es decir, no podemos decir que su inverso es nulo. Así:

$$E_m = \frac{m}{2}(0)^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{r_0}$$

²⁰Excepto números complejos, que afortunadamente no es el caso de la velocidad.

Como M , m y r_0 son positivos, $E_m < 0$, es decir, la órbita es elíptica²¹.

d) Tenemos que $r_0 = d$ y $v_0^2 = \frac{2GM}{r_0} = \frac{2GM}{d}$, así:

$$E_m = \frac{m(v_0)^2}{2} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{2GMm}{2d} - \frac{GMm}{d} = 0$$

Es decir, la órbita es parabólica, al igual que en el ítem a).

Ya hemos estudiado las principales relaciones matemáticas y físicas en órbitas elípticas y circulares. Ahora, vamos a ver un resumen de las órbitas hiperbólicas y parabólicas.

2.6.1 Hipérbola

La hipérbola es, en diversos sentidos, la cara opuesta de la elipse, ya que muchas relaciones de la elipse pueden aplicarse en la hipérbola con pequeñas modificaciones. Antes que nada, definamos los elementos que componen la geometría de la hipérbola:

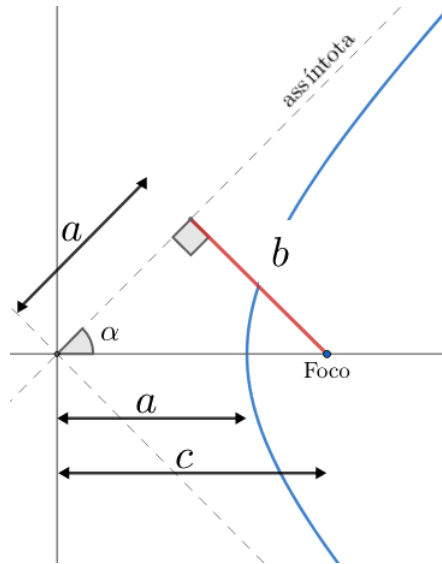


Figura 2.18: Órbita hiperbólica

²¹La órbita circular es un caso particular de una órbita elíptica tal que la dirección de la velocidad inicial debe ser muy específica, así como su módulo. Así, como solo conocemos el signo negativo de la energía, lo máximo que podemos afirmar es que la órbita es elíptica.

Observe que las dos rectas asintóticas se encuentran con la hipérbola en el infinito. En este sentido, el "semieje menor" b puede interpretarse como el **parámetro de impacto** de la órbita, que es la menor distancia entre la recta definida por la dirección de la velocidad de la masa en el infinito (i.e. la propia asíntota) y el foco de la hipérbola.

Por el triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c , tenemos, por Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Además, la excentricidad e de la órbita hiperbólica es:

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

También podemos encontrar el ángulo α relacionado con las rectas asintóticas por:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

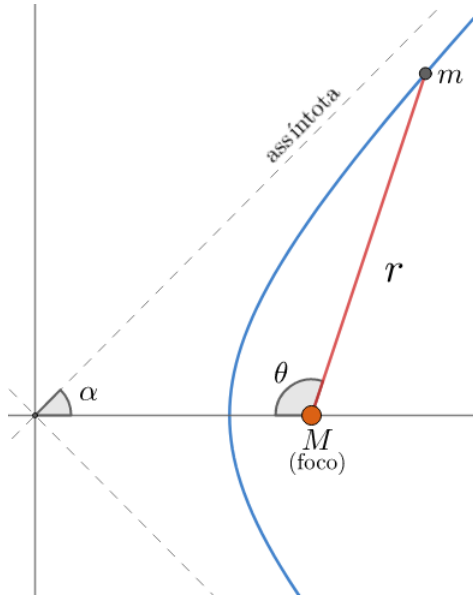


Figura 2.19: Órbita hiperbólica

La última propiedad geométrica relevante es acerca de la ecuación polar de la hipérbola. Tenemos:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}$$

Volviendo a la física, podemos relacionar la energía mecánica E_m de una órbita hiperbólica de manera análoga a la relación de la órbita elíptica. Observe:

$$E_m = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = +\frac{GMm}{2a} > 0$$

Reescribiendo esta expresión:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$$

Como vimos en el ejemplo 7, si la masa de prueba m tiene velocidad inicial v_0 a una distancia muy grande de M , la energía mecánica es:

$$E_m = \frac{mv_0^2}{2}$$

Sin embargo, como la órbita es hiperbólica, podemos encontrar el semieje mayor a a partir de v_0 mediante:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{GMm}{2a} \Rightarrow a = \frac{GM}{v_0^2}$$

Las expresiones para el momento angular en una órbita hiperbólica también son esenciales en astronomía, pero el momento angular solo se estudiará en la sección 2.8. En este sentido, colocaremos los resultados más relevantes aquí, aunque solo serán probados en el ejemplo 12.

Sea v_0 la velocidad de m a una distancia infinitamente grande de M , tenemos:

$$L = mv_0 b$$

Sea v_p la velocidad de m en la posición más cercana a M posible, donde la distancia entre ellos es $c - a = a(e - 1)$, tenemos:

$$L = mv_p a(e - 1)$$

Como el momento angular se conserva, también podemos llegar a la siguiente relación:

$$v_0 b = a(e - 1)$$

Pero $b^2 = c^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow b = a\sqrt{e^2 - 1}$. Así:

$$\frac{v_0}{v_p} = \frac{a(e-1)}{a\sqrt{e^2-1}} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

Cabe destacar que esta ecuación no debe memorizarse, ya que en un examen solo se obtendrían puntos si también se sabe deducirla.

2.6.2 Parábola

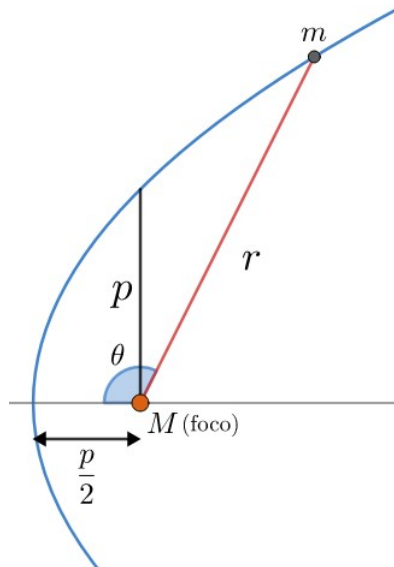


Figura 2.20: Órbita parabólica

A diferencia de lo que observamos en la elipse y la hipérbola, la única dimensión geométrica relevante en la parábola es el semilatus rectum p , como se ilustra en la imagen anterior. En este sentido, la menor distancia entre m y M en una órbita parabólica es $\frac{p}{2}$.

A partir de p y θ , podemos encontrar el valor de r mediante:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

Observe que $r(90^\circ) = p$, ya que $\cos 90^\circ = 0$, y $r(0) = \frac{p}{2}$, dado que $\cos 0 = 1$. También cabe destacar que la excentricidad de una parábola es $e = 1$.

Por último, la energía mecánica en una órbita hiperbólica es nula. Así, la velocidad v de m cuando su distancia hasta M es r vale:

$$E_m = 0 = \frac{mv_{parab}^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_{parab} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

	Elíptica	Parabólica	Hiperbólica
Excentricidad	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Forma Polar	$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$	$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$	$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}$
Energía	$E_m = \frac{-GMm}{2a}$	$E_m = 0$	$E_m = \frac{GMm}{2a}$
Velocidad	$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$	$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$	$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$

Tabela 2.1: Resumen de los tipos de órbitas

2.6.3 Velocidad de Escape

Imaginemos una situación en la que hay dos cuerpos m y M ($\gg m$) separados por una distancia d en el espacio. Si m adquiere una velocidad inicial v_0 en cualquier dirección, dos factores “competirán” entre sí para determinar el movimiento subsiguiente de m : la inercia (tendencia al movimiento, velocidad) y la atracción gravitacional. Si la gravedad es mucho mayor que la inercia, la órbita será cerrada (elíptica o circular) y m nunca se alejará demasiado de M . Sin embargo, conforme aumentamos v_0 , el semieje mayor de la órbita elíptica de m también crece. Eventualmente, llega un momento en que la velocidad inicial es suficientemente grande para que la órbita deje de ser cerrada. En esta situación, m nunca regresará a las proximidades de M , ya que su órbita será parabólica. La velocidad inicial necesaria para esto se llama **velocidad de escape** v_{esc} . Ahora, vamos a encontrar su valor algebraico como función de M y d .

Tenemos la siguiente situación: inicialmente, m estaba a una distancia d de M y recibió una velocidad inicial v_0 . En el caso en que $v_0 = v_{esc}$, m realizará una órbita abierta (parabólica) hasta llegar a una distancia infinitamente grande con velocidad tendiendo a 0. Así, podemos conservar la energía entre estos puntos:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{d} = \frac{mv_{final}^2}{2} - \frac{GMm}{d_{final}}$$

Pero $v_{final} = 0$ y $d_{final} \rightarrow \infty$, es decir, $\frac{1}{d_{final}} = 0$. Así:

$$\frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{GMm}{d} = 0$$

Es decir:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$$

Cabe destacar que la órbita recorrida por m en esta situación de “escape” es parabólica, ya que la energía mecánica es nula.

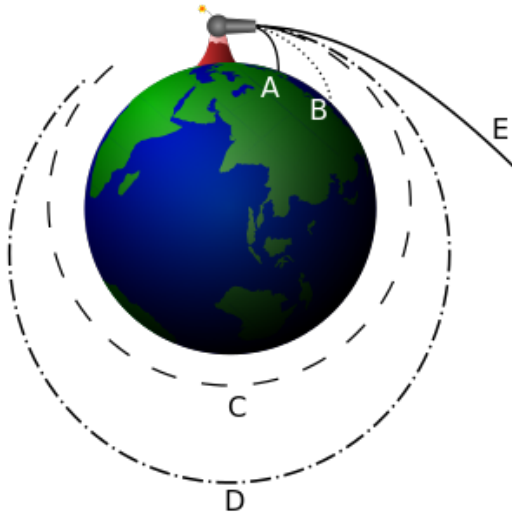


Figura 2.21: Visualización de la velocidad de escape

Ejemplo 8

Mónica desea lanzar su conejo de peluche a un punto infinitamente lejano. Despreciando fuerzas disipativas y la atracción gravitacional de otros cuerpos además de la Tierra, ¿cuál sería la velocidad con la que necesitaría lanzar su conejito?

Datos:

- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$
- Masa de la Tierra: $5,97 \cdot 10^{24} kg$
- Radio de la Tierra: $6,37 \cdot 10^3 km$

Solución

Basta utilizar la expresión para la velocidad de escape:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$$

Realizando el cálculo, obtenemos $v_{esc} = \boxed{11,2 km/s}$.

2.6.4 Radio de Schwarzschild

Analicemos la ecuación de la velocidad de escape:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$$

A primera vista, puede parecer que, independientemente de cuán grande sea M o cuán pequeña sea d , siempre hay una velocidad v_{esc} suficientemente grande para que el cuerpo pueda escapar de la atracción gravitacional de M . Sin embargo, sabemos que la mayor velocidad posible para un cuerpo en nuestro universo es la velocidad de la luz c . Por lo tanto, si M y d son tales que $v_{esc} > c$, nada, ni siquiera la luz, podrá escapar de la atracción gravitacional de M . Esta definición se asemeja mucho a la descripción de un **agujero negro**, y por lo tanto podemos encontrar una expresión para el radio de su horizonte de eventos en función de su masa, llamado radio de Schwarzschild.

Consideremos un cuerpo que se encuentra a R_{sch} del centro de un agujero negro de masa M . Si $v_{esc} = c$, esta posición está en el límite del horizonte de eventos de un agujero negro. Así:

$$v_{esc} = c = \sqrt{\frac{2GM}{R_{sch}}}$$

Es decir:

$$\boxed{R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}}$$

Cabe destacar que estamos utilizando conceptos de mecánica clásica para trabajar con agujeros negros, por lo que la deducción realizada no posee un

rigor físico estricto. Sin embargo, utilizando conceptos de relatividad general, el valor de R_{sch} es idéntico al encontrado con la física newtoniana. Esto no es más que una coincidencia, aunque bastante interesante.



Figura 2.22: Representación artística de un agujero negro y del radio del horizonte de eventos

Ejemplo 9

¿Hasta qué radio sería necesario comprimir los siguientes objetos para que se convirtieran en agujeros negros? Considere que ninguna masa se pierde en este proceso.

- Sol
- Tierra

Datos:

- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$
- Masa de la Tierra: $5,97 \cdot 10^{24} kg$
- Masa del Sol: $1,99 \cdot 10^{30} kg$
- $c = 3 \cdot 10^8 m/s$

Solución

Basta encontrar los valores del radio de Schwarzschild para $M_{\odot}$ y $M_{\oplus}$:

$$a) R_{sch_{\odot}} = \frac{2G \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx \boxed{2,95 \text{ km}}$$

$$\text{b) } R_{sch_{\oplus}} = \frac{2G \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx \boxed{8,85 \text{ mm}}$$

2.7 Momento Lineal

Como hicimos con la energía, definamos ahora una nueva magnitud: el **momento lineal**.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

También es conocido como **Cantidad de Movimiento**. Nótese que es una magnitud vectorial, a diferencia de la energía, es decir, posee módulo, dirección y sentido. En la secundaria, conocemos la 2ª Ley de Newton como:

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}$$

Sin embargo, el caso general, que también fue el descrito por Newton, es:

$$\vec{F}_{res} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

La relación $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ surge en la situación específica en la que la masa del cuerpo es constante, donde:

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

Al igual que la energía, bajo ciertas circunstancias, **el momento lineal se conserva**. Para el alcance de este libro, podemos decir que esta condición se cumple si no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema analizado. Por ejemplo, el momento lineal de un sistema de dos cuerpos que interactúan entre sí únicamente por la fuerza gravitacional, sin ninguna interferencia externa, se conserva. Un ejemplo clásico de ello son las asistencias gravitacionales, en las que los cuerpos (generalmente sondas) aprovechan la enorme masa de los planetas para ganar más velocidad sin gastar combustible. Esta situación es análoga a la colisión de una bolita con una enorme pared en movimiento en la dirección contraria (bolita moviéndose hacia la derecha y la pared hacia la izquierda, por ejemplo), como se muestra en la figura siguiente.

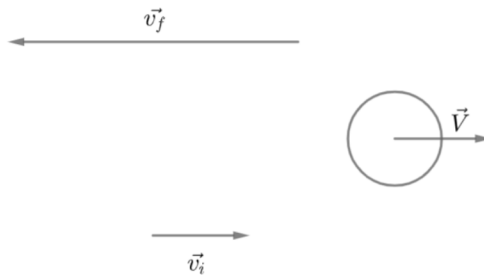


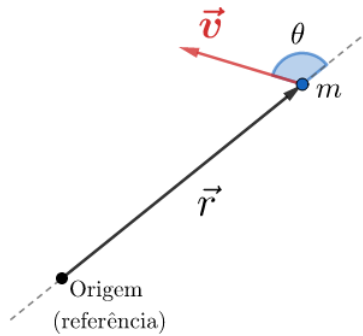
Figura 2.23: Asistencia gravitacional. $v_f > v_i$

2.8 Momento Angular

Otra magnitud (vectorial, al igual que el momento lineal) muy importante es el **momento angular**. Al igual que la energía y el momento lineal, se conserva bajo ciertas circunstancias específicas, sin embargo, basta saber que esto es válido en sistemas con dos cuerpos orbitando entre sí. Para los propósitos de este libro, el momento angular de un cuerpo **puntual** de masa m es:

$$L = mvr \sin(\theta)$$

Donde θ es el ángulo entre el vector velocidad y el vector radio, como se ilustra en la imagen de abajo.



Un hecho interesante es que la 2ª Ley de Kepler proviene directamente de la Conservación del Momento angular, donde se puede demostrar que:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}$$

Como L es constante, la velocidad areolar también lo es, es decir, la Segunda Ley de Kepler queda demostrada. Este resultado numérico se muestra solo por curiosidad, no siendo tan relevante por ahora.

Vimos en el ejemplo 6 un método - un poco pesado - de encontrar la razón entre las velocidades en el perihelio y en el afelio mediante la conservación de la energía. Sin embargo, existe un método más conveniente para resolver este problema utilizando la conservación del momento angular:

Ejemplo 10

Una masa m está en una órbita elíptica de excentricidad e alrededor de una masa $M \gg m$. Calcule la razón $\frac{v_p}{v_a}$ de las velocidades en el periastro y en el apoastro.

Solución

Calculemos el momento angular L en el periastro y en el apoastro en función de v_p y v_a , y luego usemos la conservación del momento angular para encontrar la razón deseada.

En el periastro, el ángulo θ entre el vector posición y el vector radio es $\theta = 90^\circ$, la velocidad es v_p y la distancia r de m hasta M es $r_p = a(1 - e)$, luego:

$$L = mv_p r_p = mv_p a(1 - e)$$

En el apoastro, $r_a = a(1 + e)$, luego:

$$L = mv_a r_a = mv_a a(1 + e)$$

Igualando estas expresiones, tenemos:

$$mv_p a(1 - e) = mv_a a(1 + e) \Rightarrow \boxed{\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + e}{1 - e}}$$

¡Tal como se encontró en el ejemplo de la sección de energía! Observa que el cálculo fue bastante reducido, mostrando la conveniencia de usar el momento angular en ciertas situaciones.

Ahora, calcularemos una expresión generalizada para el momento angular de una órbita elíptica a partir de los parámetros a , e , M y m . Es conveniente para encontrar el ángulo θ en cualquier punto de la órbita, siempre que la distancia r hasta ese punto sea conocida (ya que podemos hallar la velocidad a partir de ella mediante la ecuación VIS-VIVA).

Sabemos que el momento angular es el mismo en todos los puntos de la órbita, es decir, podemos tomar cualquier punto - incluso los más convenientes - para calcular L_{elipse} . Analicemos lo que ocurre en el **perihelio** (el cálculo para el afelio sería análogo). En esa posición, el ángulo θ entre el vector posición y el vector radio es $\theta_p = 90^\circ$, la distancia a M es $r = r_p = a(1 - e)$ y, como vimos en el ejemplo de la sección de energía, la velocidad v es:

$$v = v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 + e}{1 - e}}$$

De este modo, podemos juntar todo en una sola expresión:

$$L_{\text{elipse}} = mv_p r_p \sin(\theta_p) = m \left(\sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 + e}{1 - e}} \right) (a(1 - e)) \sin(90^\circ)$$

Como $\sin(90^\circ) = 1$, podemos reorganizar esta expresión para obtener el resultado final:

$$L_{\text{ellipse}} = m\sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

Ejemplo 11

En una órbita de excentricidad e , encuentre el ángulo entre los vectores velocidad y posición cuando un astro está en el:

- a) Semieje menor
- b) Latus rectum

Solución

a) En este caso, basta recordar que el vector velocidad es paralelo al semieje mayor, es decir:

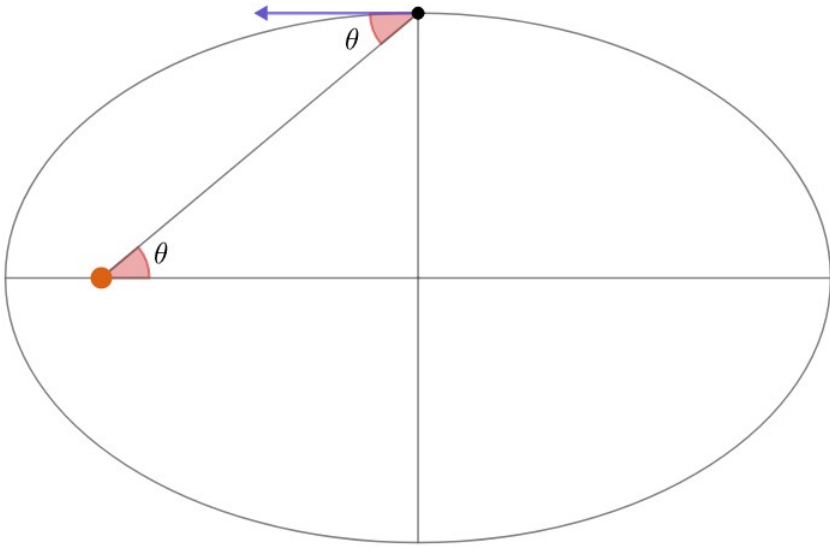


Figura 2.24: Inciso a)

Observa que el ángulo entre los vectores posición y velocidad es $180^\circ - \theta$. Ahora podemos hallar θ mediante la geometría de la elipse:

$$\cos \theta = \frac{c}{a} = e$$

Así, el ángulo buscado es $\boxed{180^\circ - \cos^{-1}(e)}$.

b) El ángulo θ entre los vectores posición y velocidad es:

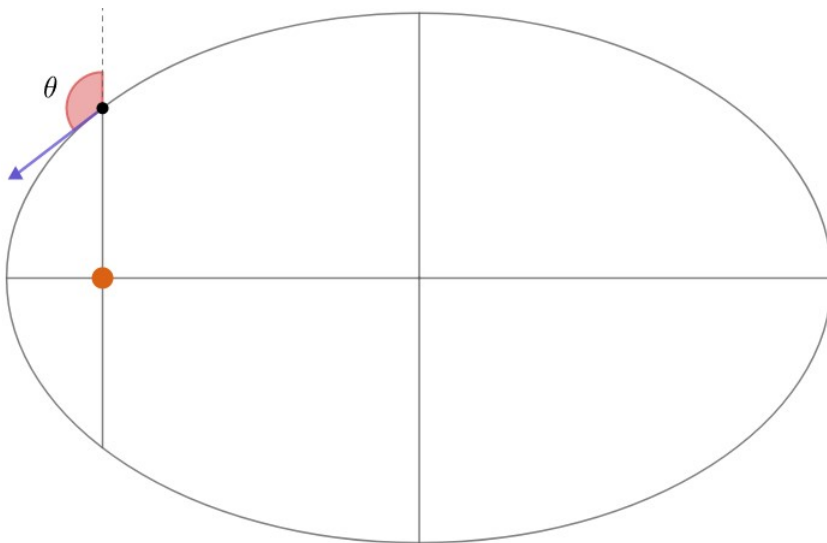


Figura 2.25: Inciso b)

En ese punto, el momento angular L es:

$$L = mvp \sin \theta$$

Donde v es la velocidad del cuerpo en el semi-latus rectum y p es la distancia del foco hasta ese punto. Además, sabemos que el momento angular de la órbita es constante y vale:

$$L = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$$

Por lo tanto, basta con encontrar v y p . Ya vimos en la sección de elipses que $p = a(1 - e^2)$. Así, podemos hallar v mediante VIS-VIVA:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{a} \right)$$

Sustituyendo p , obtenemos:

$$v^2 = \frac{GM}{a} \frac{1+e^2}{1-e^2}$$

Juntando todas estas expresiones:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{pv} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{a(1-e^2)\sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+e^2}{1-e^2}}}$$

Reescribiendo:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{\sqrt{GMa(1-e^2)(1+e^2)}}$$

Es decir:

$$\boxed{\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \right)}$$

Cabe destacar que también sería correcto proporcionar el suplementario de este ángulo ($180^\circ - \theta$), ya que no conocemos la dirección de la velocidad.

Por otro lado, podemos encontrar una expresión generalizada para el momento angular de una órbita hiperbólica. Sea v_p la velocidad de m cuando su distancia a M es mínima ($= c - a = a(e - 1)$), tenemos:

$$L_{hip} = mv_p a(e - 1)$$

Sin embargo, podemos hallar v_p mediante la energía mecánica de una órbita hiperbólica:

$$E_m = \frac{GMm}{2a} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{a(e-1)}$$

Reescribiendo:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{e+1}{e-1}}$$

Así, el momento angular L de la órbita hiperbólica es:

$$L_{hip} = ma(e-1)\sqrt{\frac{GM}{a} \frac{e+1}{e-1}}$$

Es decir:

$$\boxed{L_{hip} = m\sqrt{GMa(e^2 - 1)}}$$

Ejemplo 12

En una órbita hiperbólica, muestre que la razón $\frac{v_0}{v_p} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, en la cual v_p es la velocidad de la masa de prueba en el periastro y v_0 es la velocidad de la masa de prueba infinitamente distante de M , mediante:

- a) Conservación de la energía mecánica
- b) Conservación del momento angular

Solución

a) Cuando m está infinitamente distante de M , la energía mecánica es:

$$E_m = \frac{GMm}{2a} = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Por otro lado, cuando la anomalía verdadera de m es nula (distancia mínima entre M y m):

$$E_m = \frac{GMm}{2a} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p}$$

Observe que $r_p = c - a = a(e - 1)$. Así:

$$v_p = \sqrt{GM \left(\frac{2}{a(e-1)} + \frac{1}{a} \right)}$$

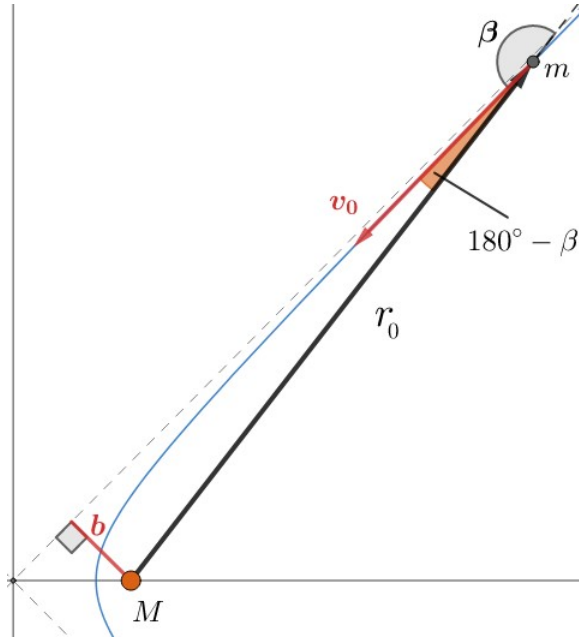
Reescribiendo:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{e+1}{e-1}}$$

Tomando la razón de tales expresiones:

$$\frac{v_0}{v_p} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

b) Ya vimos que el momento angular cuando m posee velocidad v_p es $L = mv_p a(e-1)$. Sin embargo, para encontrar la expresión de L cuando m está muy distante y posee velocidad v_0 , primero debemos analizar la siguiente imagen:



Observe que esta imagen no es ideal, ya que la distancia entre m y M debería ser infinitamente grande. Sin embargo, podemos obtener una intuición de lo que realmente está ocurriendo. Por definición del momento angular, tenemos:

$$L = mv_0 r_0 \sin \beta$$

Sin embargo, note que tenemos un triángulo rectángulo con cateto b e hipotenusa r . Así:

$$\sin(180^\circ - \beta) = \frac{b}{r}$$

Como $\sin(180^\circ - x) = \sin x$:

$$r_0 \sin \beta = b$$

Es decir:

$$\boxed{L = mv_0 b}$$

Ahora, como $b^2 = c^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1)$, podemos encontrar la razón entre las velocidades mediante la conservación del momento angular:

$$L = mv_p a(e - 1) = mv_0 a \sqrt{e^2 - 1}$$

Reescribiendo, obtenemos el resultado buscado:

$$\frac{v_0}{v_p} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

Por último, podemos encontrar una ecuación para e como función de L y E que funciona tanto para órbitas elípticas como hiperbólicas. Primero, encontremos esta ecuación para la órbita elíptica. Tenemos:

$$L_{elipse} = m\sqrt{GMa(1-e^2)} \Rightarrow \frac{L_{elipse}^2}{m^2} = GMa(1-e^2)$$

y

$$E_{elipse} = \frac{-GMm}{2a} \Rightarrow a = \frac{-GMm}{2E_{elipse}}$$

Sustituyendo la expresión de a como función de la energía en la ecuación del momento angular:

$$\frac{L_{elipse}^2}{m^2} = GM \left(\frac{-GMm}{2E_{elipse}} \right) (1-e^2)$$

Reescribiendo:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_{elipse}L_{elipse}^2}{G^2M^2m^3}}$$

Realizando el procedimiento análogo para la órbita hiperbólica, obtenemos el **mismo resultado**. De este modo, podemos llegar a la siguiente expresión general:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

2.9 Problemas

2.1. (Principiante) Un estudiante analiza la órbita de un pequeño cuerpo en el Sistema Solar y nota que sus mayores y menores distancias al Sol son 10 UA y 3 UA, respectivamente. Así, encuentre la excentricidad de esa órbita.

2.2. (Principiante) Un estudiante está utilizando un teléfono celular que intercambia información con un satélite geoestacionario directamente sobre su cabeza. Considerando que el tiempo entre que el satélite recibe y devuelve señales es nulo, ¿cuántos segundos transcurren entre el envío y la recepción de una señal por parte del alumno?

2.3. (Principiante) Apasionado por la Astronomía, Raulzito decide estudiar a fondo el cometa TVEOQSAM. En sus observaciones, nota que el objeto está a 3,4 UA de distancia del Sol y posee una velocidad de 20 km/s. ¿Qué tipo de órbita ejecuta el cometa alrededor del Sol?

2.4. (Principiante) Investigadores están analizando un cometa que orbita el Sol en una órbita elíptica con un período de 8 años. En cierto instante, calcularon que este cometa posee una velocidad de 16500 m/s con respecto al Sol. Así, ¿cuál es la distancia del Sol al cometa en ese instante?

2.5. (Principiante) En cierto cúmulo globular de radio $10^3 R_{\odot}$, la velocidad de escape en la superficie es 220 km/s. Suponiendo que las estrellas de ese grupo son parecidas al Sol, ¿cuántas estrellas existen en ese cúmulo?

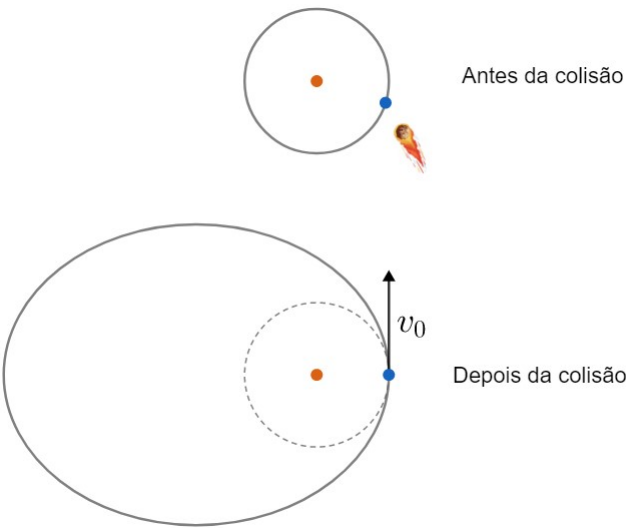
2.6. (Principiante) El cinturón de asteroides es una región del Sistema Solar con múltiples cuerpos de formas irregulares, situados entre 2,06 y 3,65 UA. Considerando un asteroide con período orbital $P = 4,00$ años, calcule las excentricidades mínima y máxima para que el objeto permanezca siempre dentro de esa región.

2.7. (Intermedio) Despreciando efectos relativistas, ¿es posible que un cuerpo orbite un agujero negro con una masa un millón de veces mayor que la masa del Sol en un período de 10 segundos?

2.8. (Intermedio) (P1 Barra/2019) Un astronauta se encuentra sobre un pequeño cuerpo del Sistema Solar, con una densidad igual a la densidad media de la Tierra. Al saltar en dirección vertical, logra escapar de la atracción gravitacional del cuerpo. En la Tierra, con el mismo impulso, no podría saltar más de 30 cm. Determine un límite superior para el radio de este cuerpo, suponiéndolo

esférico. Considere la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre como $9,8\text{ m/s}^2$.

2.9. (Intermedio) (Thiago Paulin) Considere un escenario ficticio en el que un enorme meteorito colisiona con la Tierra, como se ilustra en la figura siguiente. Sabiendo que la velocidad de la Tierra después de la colisión es tangente a la órbita original de la Tierra, que era circular, y tiene módulo v_0 , encuentre el afelio de la nueva órbita terrestre.



2.10. (Intermedio) (IOAA/2008 adap.) Considere un objeto en órbita alrededor de la Tierra bajo la influencia exclusiva de la fuerza gravitacional terrestre. Sea u el inverso de la distancia entre el objeto y el centro de la Tierra, y p la magnitud de su momento lineal. Al moverse entre los puntos A y B, los valores correspondientes de u y p están presentados en la tabla a continuación:

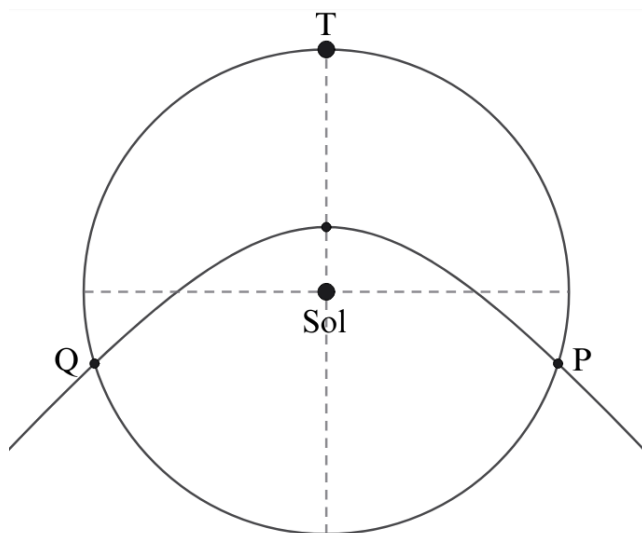
	p (10^9 kg m/s)	u (10^{-8} m^{-1})
A	0,052	5,15
B	1,94	194,17

En estas condiciones, determine:

- a) la masa del objeto.
- b) su energía total.

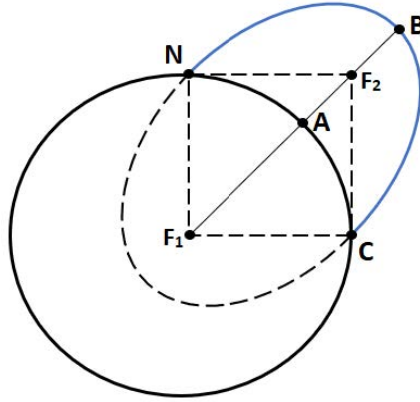
2.11. (Intermedio) Considere un asteroide en órbita heliocéntrica, de forma esférica, con diámetro $D = 10\text{ km}$. La trayectoria del asteroide es hiperbólica,

con excentricidad $e = \sqrt{2}$, y velocidad asintótica (es decir, en un punto infinitamente distante) igual a $v_{\infty} = 54,4 \text{ km/s}$. A continuación, se representa un esquema de la trayectoria descrita:



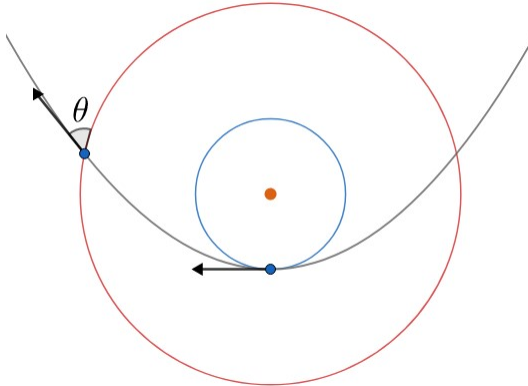
Suponga que, en el momento en que la Tierra se encuentra en el punto T, el asteroide está en el punto P, y que alcanza el punto Q exactamente 60 días después. Determine el diámetro angular del asteroide en el cielo de la Tierra cuando esté en el punto Q.

2.12. (Intermedio) (OLAA/2019) Un cohete es lanzado desde el polo Norte de la Tierra, indicado con la letra N en la figura siguiente, con velocidad $v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$ de modo que caiga en el Ecuador, indicado con la letra C. Ignore la resistencia del aire y la rotación de la Tierra. Adopte: F_1 y F_2 son los focos de la elipse de la órbita del cohete.



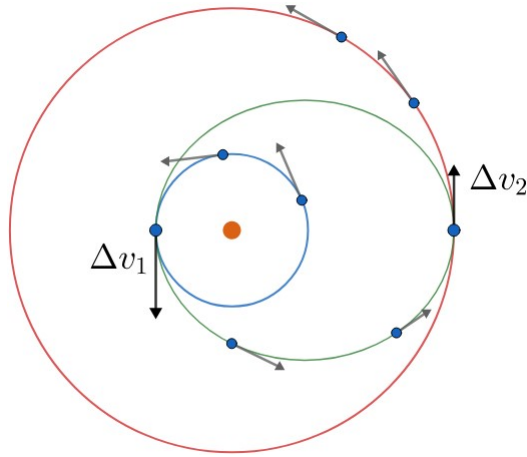
- Encuentre la longitud del semieje mayor de la órbita del cohete.
- ¿Cuál es la altura máxima h que alcanza el cohete en relación con la superficie de la Tierra?
- ¿Cuál es el tiempo de vuelo del cohete? Considere $g_{\oplus} = 9,8 \text{ m/s}^2$.

2.13. (Avanzado) (IOAA adap.) Mónica recibe un aviso de su padre Mauricio de que la Tierra y todos los planetas del Sistema Solar desaparecerán en instantes. Con el objetivo de salvar a su conejito, lo lanza en una órbita parabólica alrededor del Sol inmediatamente antes de la catástrofe. Considerando las órbitas de la Tierra y Marte como circulares y coplanares, de radios $1,0 \text{ UA}$ y $1,5 \text{ UA}$ respectivamente, calcule el ángulo θ que el conejo formará con la órbita de Marte.



2.14. (Avanzado) Una maniobra muy utilizada para trasladar un cuerpo de una órbita a otra es la **transferencia de Hohmann**, en la que el cuerpo realiza impulsos para pasar de su órbita original a una órbita de transferencia

y de esta a la órbita final. La imagen siguiente muestra un cuerpo realizando dicha maniobra.



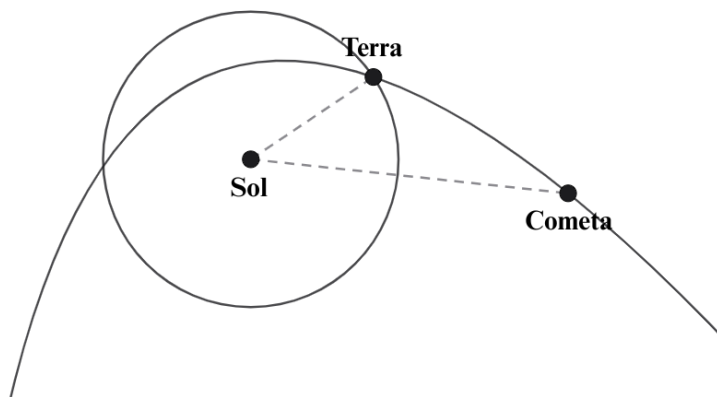
Siendo así:

- Determine los valores de los impulsos de velocidad Δv_1 y Δv_2 necesarios para realizar la transferencia. Considere que las órbitas azul y roja son circulares de radios r_1 y r_2 , respectivamente, y coplanares.
- Calcule la duración de la transferencia.

2.15. (Avanzado) Un cuerpo es abandonado a una distancia $R_\oplus$ de la superficie terrestre. Calcule el tiempo de caída.

Pista: Las ecuaciones clásicas de cinemática ($S = S_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$, por ejemplo) no funcionan en este caso, ya que la gravedad varía continuamente. Intente tratar la línea que representa la órbita como una elipse extremadamente alargada (elipse degenerada).

2.16. (Avanzado) Suponga que, en un determinado instante, un cometa de excentricidad $e = 0,995$ es observado con una paralaje geocéntrica $p = 2,2''$ y con una separación angular respecto al Sol de $\lambda = 100^\circ$. La geometría de la situación está esquematizada en la imagen siguiente:



Sabiendo que, en el momento en cuestión, la Tierra se encuentra en una de las intersecciones de su órbita con la del cometa, calcule el perihelio de la trayectoria del objeto.

2.17. (Avanzado) En un futuro próximo, surge una nueva tecnología: ¡el cañón espacial de satélites! Esta tecnología consiste en colocar objetos en órbitas elípticas desde una estación espacial en órbita circular. Un astrónomo, con el objetivo de probar esta innovación, decide lanzar un satélite desde una base espacial de radio orbital $r = \frac{3}{2}R_{\oplus}$ en una dirección perpendicular al movimiento de la estación y con velocidad $v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{3R_{\oplus}}}$. Ahora, ayude al científico a calcular algunos parámetros relacionados con la órbita:

- Calcule el semieje mayor de la órbita generada.
- Usando la conservación del momento angular, calcule la excentricidad orbital del satélite.

Después de reflexionar sobre la trayectoria del satélite, el astrónomo se dio cuenta de que cometió un grave error: el perigeo del objeto es menor que $R_{\oplus}$, ¡haciendo que colisione con la Tierra!

- Calcule el menor ángulo que el vector velocidad del satélite forma con la superficie de la Tierra (ϕ).
- Considerando la velocidad relativa del satélite con respecto a la superficie terrestre y que el objeto se movía en el mismo sentido de rotación de la Tierra, calcule la energía cinética liberada durante la colisión.

Datos: la masa del satélite es $m = 500$ kg.

2.18. (Avanzado) (ROSAOC) Cierta asteroide se mueve alrededor del Sol en el plano de la eclíptica, sin entrar nunca en la órbita de la Tierra. Las condiciones

de su observación se repiten exactamente cada 2 años, y su magnitud aparente varía en 8 mag con el mismo período. Determine el valor mínimo posible de la excentricidad de la órbita del objeto. El asteroide es una esfera lisa y uniforme, con albedo superficial constante. La órbita de la Tierra puede considerarse circular.

2.19. (Avanzado) (OWAO/2023) Una nave espacial está en una órbita circular de radio $r = 1,3$ UA en el plano de la eclíptica. Se le da instantáneamente una velocidad adicional de 5 km/s en la dirección del movimiento, de modo que su órbita pasa a interceptar la órbita de Ceres. ¿Cuál será la velocidad relativa entre la nave espacial y Ceres cuando la nave cruce la órbita del astro por primera vez? La distancia entre Ceres y la nave en ese momento es 10^6 km. Suponga que la órbita del planeta enano es circular con radio $r_C = 2,8$ UA. Las direcciones del movimiento orbital de los objetos son las mismas.

2.20. (Avanzado) La determinación de la masa de una estrella es, sin duda, uno de los puntos centrales de la astrofísica, ya que este parámetro es determinante en la evolución estelar. Sin embargo, no siempre es posible determinar fácilmente dicha característica, especialmente si el astro está aislado.

En sistemas binarios, afortunadamente, es posible utilizar los conocimientos de mecánica celeste para determinar la masa de una estrella a partir del comportamiento de la otra. Esto se expresa en la llamada **función de masa**, que se escribe en función de las masas de las dos estrellas (M_1 y M_2) y de la inclinación del sistema con respecto a la línea de visión (i):

$$f(M_1, M_2, i) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

- a) Demuestre que, considerando un sistema binario de excentricidad despreciable, la función de masa puede escribirse en términos de la velocidad radial máxima observada de la estrella 1 (K) y del período orbital del sistema (P):

$$f(M_1, M_2, i) = \frac{K^3 P}{2\pi G}$$

Pista: Debido a la inclinación de la órbita del sistema con respecto a nuestra línea de visión, la relación entre la velocidad radial observada y la real está dada por la siguiente expresión:

$$v_{r,real} = \frac{v_{r,obs}}{\sin i}$$

- b) En cierto sistema binario con período $P = 6,26$ años, $K = 36,7$ km/s y $M_1 = 3,57 M_\odot$, ¿cuál será el valor mínimo que podrá asumir la masa de la segunda estrella?

2.10 Solución

- 2.1.** Las situaciones de distancia mínima y máxima corresponden, respectivamente, al perihelio y afelio. Así, podemos encontrar la excentricidad a partir de la expresión vista en la sección 2.3:

$$e = \frac{r_{apoastro} - r_{periastro}}{r_{apoastro} + r_{periastro}}$$

Sustituyendo los valores:

$$e = \frac{10 - 3}{10 + 3} = 0,538$$

- 2.2.** El período de un satélite geoestacionario es igual al período de la Tierra, por lo que, según la Tercera Ley de Kepler:

$$P^2 = a^3 \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow a_{sat} = \sqrt[3]{\frac{P_{\oplus}^2 GM_{\oplus}}{4\pi^2}}$$

Realizando el cálculo, encontramos $a_{sat} \approx 42227$ km, que es la distancia del centro de la Tierra al satélite. Con esto, podemos encontrar su altura respecto a la superficie terrestre:

$$H = a_{sat} - R_{\oplus} = 35850 \text{ km}$$

Como la señal tiene que ir y volver, la distancia total recorrida por la señal es de $2H = 71700$ km. Para hallar el tiempo, basta dividir este valor por la velocidad de la luz.

$$\frac{71700 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}} = 0,239 \text{ s}$$

- 2.3.** Para determinar el tipo de órbita, basta encontrar el signo de su energía mecánica E . Tenemos:

$$E = m \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \right)$$

El enunciado dio v y r , luego:

$$E = m \left(\frac{(2,0 \cdot 10^4)^2}{2} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{3,4 \cdot 1,496 \cdot 10^{11}} \right) = m \cdot (-6,1 \cdot 10^7) \frac{J}{kg}$$

Como $m > 0$ (masa del cometa), tenemos que $E < 0$. Así, la órbita es **elíptica**.

- 2.4.** Como el cometa orbita el Sistema Solar, podemos utilizar la Tercera Ley de Kepler para encontrar su semieje mayor a . Como la Tierra también orbita el Sol:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1 \text{ año}^2}{1 \text{ UA}^3}$$

Realizando el cálculo, obtenemos $a = 4 \text{ UA}$. Ahora, utilizamos la ecuación VIS-VIVA:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \frac{v^2}{GM_{\odot}} + \frac{1}{a} = \frac{2}{r}$$

Sustituyendo los valores del enunciado:

$$\frac{16500^2}{1,33 \cdot 10^{20}} + \frac{1}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}} = \frac{2}{r}$$

Así:

$$r = \boxed{5,38 \cdot 10^{11} \text{ m}}$$

- 2.5.** Reescribiendo la ecuación de la velocidad de escape:

$$M = \frac{v_{esc}^2 \cdot R}{2G}$$

Sustituyendo los valores del enunciado:

$$M = \frac{(2,2 \cdot 10^5)^2 \cdot 10^3 \cdot 6,96 \cdot 10^8}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,52 \cdot 10^{32} \text{ kg}$$

Esta es la masa combinada de todas las N estrellas parecidas al Sol. Así, podemos hallar N mediante:

$$N = \frac{M}{M_{\odot}} \approx \boxed{130}$$

- 2.6.** Podemos obtener el semieje mayor de la órbita del asteroide mediante la tercera ley de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}} \Rightarrow a = \left(\frac{GM_{\odot} P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$a \approx 2,52 \text{ UA}$$

La excentricidad mínima corresponderá a un perihelio ubicado en 2,06 UA:

$$a_{min} = a(1 - e_{min}) \implies e_{min} = 1 - \frac{2,06 \text{ UA}}{a} \implies \boxed{e_{min} \approx 0,183}$$

La excentricidad máxima, a su vez, corresponderá a un afelio ubicado en 3,65 UA:

$$a_{max} = a(1 + e_{max}) \implies e_{max} = \frac{3,65 \text{ UA}}{a} - 1 \implies \boxed{e_{max} \approx 0,449}$$

- 2.7.** Podemos calcular la distancia del centro del agujero al cuerpo que realiza la órbita de período 10 s a partir de la Tercera Ley de Kepler:

$$a = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{10^2 \cdot G \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 10^6}{4\pi^2}}$$

$$a = 6,95 \cdot 10^8 \text{ metros}$$

Ahora, podemos calcular el radio de Schwarzschild del agujero negro:

$$R_{sch} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{36}}{9 \cdot 10^{16}}$$

$$r_{sch} = 2,95 \cdot 10^9 \text{ metros}$$

Note que $a < R_{sch}$, entonces la distancia que el cuerpo debería tener del centro del agujero negro es menor que el propio radio de Schwarzschild, del agujero negro, i.e. la situación es **imposible**.

- 2.8.** En la Tierra, la velocidad inicial proporciona energía cinética suficiente para que el astronauta suba 30 cm. Así, conservando la energía mecánica en los instantes inicial y final (altura máxima):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh$$

En el pequeño cuerpo, esta velocidad es suficiente para que el astronauta escape de su atracción gravitacional, por lo que v es la velocidad de escape. Tenemos:

$$v = v_{esc} \Leftrightarrow \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2GM_c}{R_c}}$$

Ahora, necesitamos utilizar el hecho de que la densidad del cuerpo es igual a la densidad de la Tierra. Como ambos son esféricos:

$$\rho_c = \rho_{\oplus} = \frac{3M_{\oplus}}{4\pi R_{\oplus}^3}$$

Combinando estas expresiones:

$$2gh = \frac{2G}{R_c} \cdot \frac{4\pi\rho_{\oplus}}{3} R_c^3$$

Reescribiendo:

$$R_c = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi G\rho_{\oplus}}}$$

Podemos calcular la densidad de la Tierra por:

$$\rho_{\oplus} = \frac{M_{\oplus}}{\frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3} \cong 5,50 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Realizando el cálculo, obtenemos $R_c = 1,38 \text{ km}$.

2.9. Note que el perihelio de la nueva órbita es el propio radio de la órbita original:

$$r_p = a_{\oplus}$$

Sabemos que $r_p + r_a = 2a$, es decir, basta encontrar el semieje mayor de la nueva órbita para resolver el problema. La energía total de esta órbita es $-\frac{GM_{\odot}m}{2a}$, por lo que:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GM_{\odot}m}{a_{\oplus}} = -\frac{GM_{\odot}m}{2a}$$

Aislado a :

$$a = \frac{1}{\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{v_0^2}{GM_{\odot}}}$$

Como $r_a = 2a - a_{\oplus}$:

$$r_a = \frac{2}{\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{v_0^2}{GM_{\odot}}} - a_{\oplus}$$

Reescribiendo:

$$r_a = \frac{a_{\oplus}^2 v_0^2}{2GM_{\odot} - a_{\oplus} v_0^2}$$

También es posible resolver este problema conservando el momento angular y la energía entre el perihelio y el afelio, pero el cálculo sería mucho mayor.

2.10. a) La energía total del objeto está dada por la siguiente expresión:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r}$$

Por la definición de momento lineal ($p = mv$), podemos escribir E en función de las variables del problema:

$$E = \frac{p^2}{2m} - GM_{\oplus}mu$$

Utilizando el hecho de que, en este sistema, la energía se conserva, podemos igualar las expresiones de energía en los puntos A y B:

$$\frac{p_A^2}{2m} - GM_{\oplus}mu_A = \frac{p_B^2}{2m} - GM_{\oplus}mu_B$$

Multiplicando ambos lados por m y aislando la masa:

$$\frac{p_A^2}{2} - GM_{\oplus}m^2u_A = \frac{p_B^2}{2} - GM_{\oplus}m^2u_B$$

$$\Rightarrow \frac{p_A^2 - p_B^2}{2} = GM_{\oplus}m^2(u_A - u_B)$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{p_A^2 - p_B^2}{2GM_{\oplus}(u_A - u_B)}}$$

$$m \approx 5,0 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

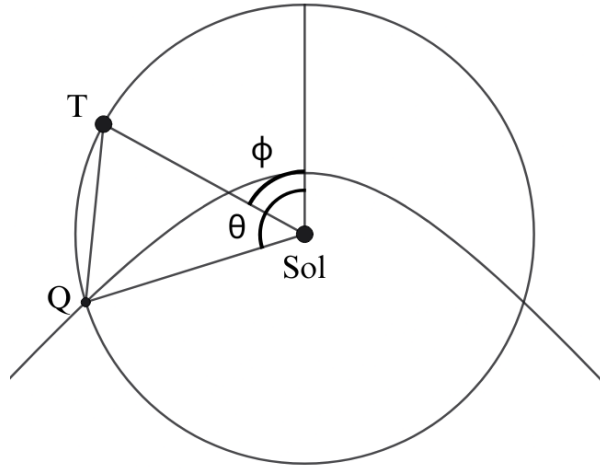
b) Sabiendo la masa, podemos calcular la energía total con base en la expresión encontrada en el ítem (a):

$$E = \frac{p^2}{2m} - GM_{\oplus}mu$$

Usando los datos del punto A, tenemos:

$$E \approx -1,0 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

2.11. Para la resolución de esta pregunta, considere la siguiente imagen:



Podemos obtener el ángulo θ a partir de la fórmula polar de la hipérbola:

$$a_{\oplus} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\theta)} \implies \cos(\theta) = \frac{1}{e} \left(\frac{a(e^2 - 1)}{a_{\oplus}} - 1 \right)$$

Podemos obtener el semieje mayor considerando la energía mecánica del asteroide en el punto de velocidad v_{∞} , el cual posee energía potencial gravitatoria tendiendo a cero:

$$\frac{GM_{\odot}m}{2a} = \frac{mv_{\infty}^2}{2} \implies a = \frac{GM_{\odot}}{v_{\infty}^2}$$

Calculando:

$$a \approx 0,300 \text{ UA}$$

$$\theta \approx 103,5^{\circ}$$

En 60 días la Tierra se habrá desplazado un ángulo ϕ , que puede obtenerse mediante regla de tres:

$$\frac{\phi}{360^{\circ}} = \frac{60 \text{ días}}{1 \text{ año}} \implies \phi \approx 59,2^{\circ}$$

Podemos obtener la longitud $\overline{QT}$ por la ley de cosenos:

$$(\overline{QT})^2 = a_{\oplus}^2 + a_{\oplus}^2 - 2a_{\oplus}^2 \cos(\theta - \phi) \implies \overline{QT} = a_{\oplus} \sqrt{2 - 2 \cos(\theta - \phi)}$$

$$\overline{QT} \approx 0,754 \text{ UA}$$

Por último, el diámetro angular será simplemente:

$$\delta = \frac{D}{QT}$$

$$\delta \approx 18,3 \text{ mas}$$

2.12. a) Podemos utilizar la conservación de energía en el punto N:

$$E = K + U$$

$$\begin{aligned} -\frac{GM_{\oplus}m}{2a} &= \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{GM_{\oplus}m}{2R_{\oplus}} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \\ -\frac{GM_{\oplus}m}{2a} &= -\frac{GM_{\oplus}m}{2R_{\oplus}} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos:

$$a = R_{\oplus}$$

$$a = 6380 \text{ km}$$

Con este resultado, podemos concluir que el polígono formado por los puntos N , C , F_1 y F_2 es un cuadrado, hecho que será útil en los siguientes ítems.

b) Sabiendo que el semieje mayor es igual al radio de la Tierra, podemos afirmar que el punto N está sobre el semieje menor de la órbita. Por simetría, los segmentos $\overline{F_1N}$ y $\overline{F_2N}$ son iguales. Con base en esto, podemos obtener la excentricidad orbital a partir de la diagonal del cuadrado formado:

$$\overline{F_1F_2} = 2ae = R_{\oplus}\sqrt{2} \implies e = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La altura máxima puede obtenerse considerando que se da en el apogeo:

$$h = a(1 + e) - R_{\oplus}$$

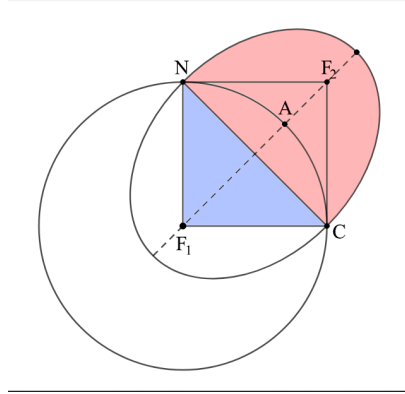
$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}R_{\oplus}$$

$$h \approx 4510 \text{ km}$$

c) Siendo ΔA el área del sector elíptico recorrido por el cohete, tenemos, según la segunda ley de Kepler:

$$\frac{\Delta A}{\pi ab} = \frac{t}{T}$$

Para obtener el área del sector elíptico, considere la siguiente imagen:



ΔA entonces puede obtenerse sumando la mitad del área de la elipse de la órbita y el área de dos triángulos isósceles con lado $\frac{R_{\oplus}\sqrt{2}}{2}$:

$$\Delta A = \frac{\pi ab}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R_{\oplus}\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow \Delta A = \pi ab \left(\frac{1}{2} + \frac{R_{\oplus}^2}{2\pi ab} \right)$$

De esta manera:

$$t = \left(\frac{1}{2} + \frac{R_{\oplus}^2}{2\pi ab} \right) T$$

Como $a = R_{\oplus}$ y $b = \frac{R_{\oplus}\sqrt{2}}{2}$, tenemos:

$$t = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right) T$$

Según la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}$$

Con esto:

$$t = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{4\pi^2 R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}$$

$t \approx 1,02 \text{ h}$

- 2.13.** Como la energía total de una órbita parabólica es 0, podemos encontrar la velocidad inicial del conejo (v_0) y su velocidad cuando cruza la órbita de Marte (v_M). Tenemos:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GM_{\odot}m}{a_{\oplus}} = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{2GM_{\odot}}{a_{\oplus}}$$

De manera análoga:

$$\frac{mv_M^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{a_M} = 0 \Rightarrow v_M^2 = \frac{2GM_\odot}{a_M}$$

Donde $a_\oplus = 1$ UA y $a_M = 1,5$ UA. Ahora, podemos conservar el momento angular entre estos dos puntos. Inicialmente, el ángulo entre los vectores posición y radio era 90° , por lo que:

$$L_1 = mv_0 a_\oplus \sin 90^\circ = mv_0 a_\oplus$$

Por otro lado, el ángulo entre estos vectores es $90^\circ - \theta$ cuando el conejo cruza la órbita de Marte. Así:

$$L_2 = mv_M a_M \sin(90^\circ - \theta)$$

Como $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ y el momento angular se conserva, tenemos:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow mv_0 a_\oplus = mv_M a_M \cos \theta$$

Así, sustituyendo v_0 y v_M :

$$\cos \theta = \frac{a_\oplus \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a_\oplus}}}{a_M \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a_M}}}$$

Reescribiendo:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{a_\oplus}{a_M}} \right)$$

Realizando la cuenta, obtenemos $\theta = 35,3^\circ$.

- 2.14.** a) Por la geometría de la situación, observe que la órbita de transferencia (en verde) posee semieje mayor a tal que $2a = r_1 + r_2$. Así, para que el cuerpo vaya de la órbita original a la de transferencia, debe poseer una velocidad que satisfaga la ecuación VIS-VIVA de la órbita de transferencia, es decir:

$$v_1^2 = GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right) = GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right) = \frac{2GM r_2}{r_1(r_1 + r_2)}$$

Observe que antes de realizar el primer impulso, el objeto poseía la velocidad de la órbita circular de radio r_1 , por lo que su velocidad inicial era:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

El impulso Δv_1 debe hacer que la velocidad del cuerpo pase de v_0 a v_1 , así $v_1 = v_0 + \Delta v_1$. Entonces:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

Podemos reescribir esta expresión como:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$$

Para encontrar Δv_2 , podemos realizar un procedimiento similar. Observe que, después del primer impulso, el cuerpo estaba en el periastro de la órbita de transferencia. Por otro lado, inmediatamente antes del segundo, estará en el apoastro. Siendo v_2 la velocidad antes del segundo impulso (en el apoastro), tenemos, por VIS-VIVA:

$$v_2^2 = GM \left(\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right) \Rightarrow v_a^2 = \sqrt{\frac{2GM r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

Por otro lado, el cuerpo queda en una órbita circular de radio r_2 después del segundo impulso. Podemos hallar la velocidad v_f en esta situación por:

$$v_f = \frac{GM}{r_2}$$

Tenemos que $v_f = v_2 + \Delta v_2$, así:

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

- b) Podemos encontrar el período asociado a la órbita de transferencia mediante la Tercera Ley de Kepler:

$$P^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^3 \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow P = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3 \pi^2}{2GM}}$$

Según la Segunda Ley de Kepler, el cuerpo barre áreas iguales en tiempos iguales. Durante la maniobra, va del periastro al apoastro, por

lo que el tiempo Δt necesario para esto es la mitad del período P encontrado por la Tercera Ley de Kepler. Así:

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3 \pi^2}{2GM}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (r_1 + r_2)^3}{8GM}}$$

2.15. Es necesario²² conocer el concepto de elipse degenerada para resolver esta pregunta. Es una elipse con excentricidad tendiendo a 1, es decir, casi un segmento de línea. Así, podemos considerar la órbita del cuerpo (que es un segmento de línea) como una elipse degenerada. La imagen a continuación ilustra este análisis.

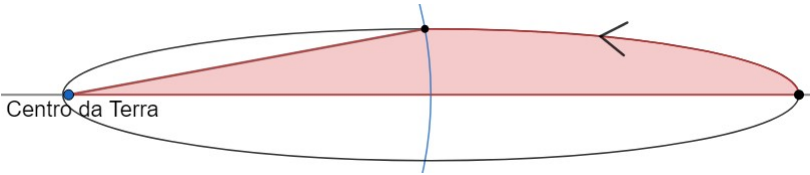


Figura 2.26: Elipse degenerada ($e \rightarrow 1$)

Para encontrar el tiempo de caída, necesitamos encontrar el área barrida por el cuerpo (en rojo en la imagen) y usar la Segunda Ley de Kepler. Observe en la imagen que el eje mayor de la elipse es la distancia entre el punto inicial y el centro de la Tierra, es decir:

$$2a = 2R_{\oplus} \Rightarrow a = R_{\oplus}$$

Vale la pena destacar que $c \rightarrow a$ en elipses degeneradas. Ahora, el área roja ΔA puede dividirse en un cuarto de una elipse y un triángulo de base a y altura b . Así:

$$\Delta A = \frac{\pi ab}{4} + \frac{ab}{2}$$

Según la Segunda Ley de Kepler:

$$\frac{\Delta t}{P} = \frac{\Delta A}{A} = \frac{ab \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)}{ab \cdot \pi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

Donde P es el período de la órbita y A es el área total de la elipse (πab). Tenemos, según la Tercera Ley de Kepler:

²²También es posible resolverlo mediante cálculo diferencial e integral, pero el cálculo excede el alcance de cualquier olimpiada de astronomía.

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}$$

Combinando estas expresiones:

$$\Delta t = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\oplus}}}$$

Reescribiendo y usando $a = R_{\oplus}$:

$$\Delta t = \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}$$

Realizando la cuenta, obtenemos $\boxed{\Delta t = 2080 \text{ s}}$.

- 2.16.** En posesión de la paralaje geocéntrica del cometa, podemos calcular la distancia entre la Tierra y el objeto:

$$d_{TC} = \frac{R_{\oplus}}{p} \implies d_{TC} \approx 4,0 \text{ UA}$$

Ahora, mediante la ley de los cosenos, podemos descubrir la distancia del cometa al Sol en el instante analizado:

$$d_{SC}^2 = d_{TS}^2 + d_{TC}^2 - 2d_{TS}d_{TC} \cos(\lambda) \implies d_{SC} \approx 4,3 \text{ UA}$$

Siendo α el ángulo Tierra-Sol-Cometa y β el ángulo Perihelio-Sol-Tierra, podemos relacionar tales ángulos a través de la ecuación polar de la elipse:

$$d_{TS} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\beta)}$$

$$d_{SC} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\beta+\alpha)}$$

Dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{d_{SC}}{d_{TS}} = \frac{1+e \cos(\beta)}{1+e \cos(\beta+\alpha)}$$

Podemos calcular α por medio de la ley de los senos:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{d_{TC}} = \frac{\text{sen}(\lambda)}{d_{SC}} \implies \alpha \approx 66,7^\circ$$

Podemos aislar el $\cos(\beta)$ y descubrir el valor de β por iteración:

$$\cos(\beta) = \frac{1}{e} \left(\frac{d_{SC}}{d_{TS}} (1 + e \cos(\alpha + \beta)) - 1 \right) \\ \implies \beta \approx 65,7^\circ$$

Ahora, podemos utilizar el ángulo calculado para descubrir el valor del semieje mayor de la órbita del cometa:

$$a = \frac{d_{TS}(1 + e \cos(\beta))}{1 - e^2} \implies a \approx 141 \text{ UA}$$

De este modo, el perihelio será simplemente:

$$q = a(1 - e) \implies \boxed{q \approx 0,71 \text{ UA}}$$

2.17. a) Calculando la velocidad orbital de la estación espacial:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{3R_\oplus}} \\ v_0 \approx 6,45 \text{ km/s}$$

Como v es perpendicular a v_0 , podemos calcular la velocidad del satélite con respecto al referencial de la Tierra (u) por el teorema de Pitágoras:

$$u^2 = v^2 + v_0^2 \implies u = \sqrt{v^2 + v_0^2} \\ u \approx 7,90 \text{ km/s}$$

Ahora, por conservación de energía:

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{GM_\oplus m}{r} = -\frac{GM_\oplus m}{2a} \implies a = \frac{GM_\oplus r}{2GM_\oplus - ru^2}$$

$$\boxed{a \approx 1,91 \cdot 10^4 \text{ km}}$$

b) Siendo θ el ángulo entre el vector velocidad y el vector radio posición, podemos escribir el momento angular de la siguiente forma:

$$L = mur \sin(\theta)$$

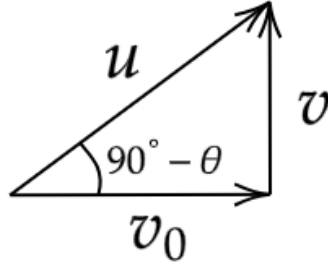
Tal magnitud puede escribirse también en función de la excentricidad:

$$L = m\sqrt{GM_\oplus a(1 - e^2)}$$

Igualando las dos expresiones:

$$mur \sin(\theta) = m\sqrt{GM_\oplus a(1 - e^2)} \implies e = \sqrt{1 - \frac{u^2 r^2 \sin^2(\theta)}{GM_\oplus a}}$$

Para obtener θ , podemos considerar la siguiente geometría:



De esta forma:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{v_0}{u} \implies \sin(\theta) = \frac{v_0}{u}$$

Con esto:

$$e = \sqrt{1 - \frac{v_0^2 r^2}{GM_\oplus a}}$$

$$\boxed{e \approx 0,707}$$

- c) Por Vis-Viva, podemos obtener la velocidad orbital del satélite en el punto de colisión:

$$u = \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{R_\oplus} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$u \approx 10,2 \text{ km/s}$$

Ahora, podemos obtener ϕ por el mismo razonamiento del ítem (b):

$$R_\oplus u \sin(90^\circ + \phi) = \sqrt{GM_\oplus a(1 - e^2)}$$

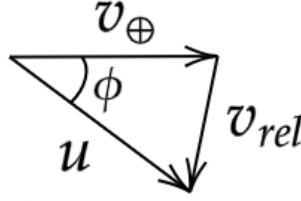
$$\implies \cos(\phi) = \frac{\sqrt{GM_\oplus a(1 - e^2)}}{R_\oplus u}$$

$$\boxed{\phi \approx 18,44^\circ}$$

- d) Calculando, inicialmente, la velocidad de rotación de la Tierra en la línea del ecuador:

$$v_\oplus = \frac{2\pi R_\oplus}{23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s}} \implies v_\oplus \approx 465 \text{ m/s}$$

Ahora, podemos calcular la velocidad del satélite con respecto a la superficie terrestre considerando la siguiente imagen:



Con esto, podemos obtener v_{rel} por la ley de los cosenos:

$$v_{rel}^2 = v_{\oplus}^2 + u^2 - 2v_{\oplus}u \cos(\phi)$$

De esta forma:

$$E_{liberada} = \frac{mv_{rel}^2}{2}$$

$$E_{liberada} = \frac{m}{2} \left(v_{\oplus}^2 + u^2 - \frac{2v_{\oplus}\sqrt{GM_{\oplus}a(1-e^2)}}{R_{\oplus}} \right)$$

$E_{liberada} \approx 2,38 \cdot 10^{10} \text{ J}$

- 2.18.** Por el enunciado, podemos concluir que el período del asteroide es de 2 años, ya que, pasado ese tiempo, tanto la Tierra como el objeto retornan a la misma posición relativa. Por la tercera ley de Kepler, podemos calcular el semieje mayor del asteroide:

$$\frac{a^3}{(2 \text{ años})^2} = 1 M_{\odot} \implies a \approx 1,59 \text{ UA}$$

Ahora, es importante entender que la variación de magnitud del asteroide se dará por la alteración del flujo recibido, que cambia conforme varía la distancia. Como el flujo se “dispersa” tanto en la propagación de la luz del Sol hasta el asteroide como del asteroide hasta la Tierra, el flujo dependerá de ambas distancias:

$$F \propto d_{A\oplus}^{-2} d_{A\odot}^{-2}$$

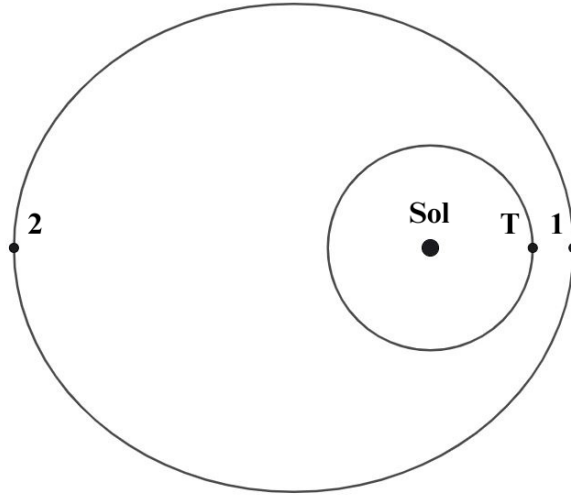
Considerando dos instantes arbitrarios 1 y 2, tenemos:

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{d_{A\oplus,2} d_{A\odot,2}}{d_{A\oplus,1} d_{A\odot,1}} \right)^2$$

Por la ecuación de Pogson:

$$m_2 - m_1 = \Delta m = 5 \log \left(\frac{d_{A\oplus,2} d_{A\odot,2}}{d_{A\oplus,1} d_{A\odot,1}} \right)$$

Una vez en posesión de esta ecuación, necesitamos relacionarla con la excentricidad orbital mediante el análisis de la configuración que la minimiza. Considerando que, según lo dicho en el enunciado, la órbita del cometa es siempre exterior a la de la Tierra, podemos representar la situación con la siguiente geometría:



Imaginando que la Tierra se encuentre en el punto T en ambos instantes, las distancias de T a los puntos 1 y 2 se configuran como las mínimas y máximas distancias que el asteroide puede asumir tanto de la Tierra como del Sol, respectivamente. Es intuitivo pensar que, cuanto mayor sea la excentricidad de la órbita del asteroide, mayor será la diferencia entre las distancias mencionadas y, consecuentemente, mayor será el Δm . Una vez fijado el valor de Δm en 8 mag, maximizar la razón $\frac{d_{A\oplus,2}d_{A\odot,2}}{d_{A\oplus,1}d_{A\odot,1}}$ implicará minimizar el valor de la excentricidad.

Con base en todo esto, podemos escribir:

$$d_{A\oplus,2} = a(1 + e) + a_{\oplus}$$

$$d_{A\odot,2} = a(1 + e)$$

$$d_{A\oplus,1} = a(1 - e) - a_{\oplus}$$

$$d_{A\odot,1} = a(1 - e)$$

De modo que:

$$10^{\frac{8}{5}} = \frac{(a(1 + e) + a_{\oplus})(a(1 + e))}{(a(1 - e) - a_{\oplus})(a(1 - e))} \approx 39,8$$

Podemos manipular tal ecuación para escribir e en función de sí misma y resolver por iteración:

$$e = \frac{1}{a} \left[10^{\frac{8}{5}} \left(\frac{(a(1-e) - a_{\oplus})(a(1-e))}{a(1+e)} \right) - a_{\oplus} \right] - 1$$

$$\boxed{e_{\min} \approx 0,284}$$

Tal solución cumple la condición de que $a(1 - e_{\min}) > a_{\oplus}$.

2.19. Velocidad de la nave justo después del impulso:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r}} + \Delta v \implies v \approx 3,12 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Semieje mayor de la nueva órbita de la nave espacial:

$$\begin{aligned} v^2 &= GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) \implies a = \frac{GM_{\odot} r}{2GM_{\odot} - v^2 r} \\ &\implies a \approx 3,34 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{aligned}$$

Velocidad de la nave espacial al cruzar la órbita de Ceres:

$$v_1^2 = GM_{\odot} \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{a} \right) \implies v_1 \approx 1,55 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Usando conservación del momento angular, obtenemos el ángulo α que el vector velocidad forma con la dirección radial:

$$\begin{aligned} L &= L_1 \implies mvr = mv_1 r_C \sin(\alpha) \implies \sin(\alpha) = \frac{vr}{v_1 r_C} \\ &\alpha \approx 70^\circ \end{aligned}$$

Ahora, por la ley de los cosenos, podemos convertir la velocidad de la nave espacial del referencial heliocéntrico al de Ceres (que se mueve con velocidad $v_C = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_C}}$):

$$\begin{aligned} v_{rel}^2 &= v_1^2 + v_C^2 - 2v_1 v_C \cos(90^\circ - \alpha) \\ &\implies \boxed{v_{rel} \approx 6,25 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

2.20. a) Siendo v_1 y a_1 la velocidad orbital de la estrella 1 y su semieje mayor, respectivamente, tenemos:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$$

Considerando la inclinación del sistema, podemos relacionar v_1 y K mediante la siguiente expresión:

$$v_1 = \frac{K}{\sin i}$$

Por la tercera ley de Kepler, tenemos:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Además, por la ecuación del centro de masas, podemos escribir:

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$v_1 = \frac{2\pi M_2 a}{(M_1 + M_2)P} \Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{2\pi M_2 \sin i}{(M_1 + M_2)K}$$

Reescribiendo la tercera ley de Kepler en términos de $\frac{P}{a}$ y sustituyendo la expresión anterior:

$$\left(\frac{P}{a}\right)^3 \frac{1}{P} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} \Rightarrow \left(\frac{2\pi M_2 \sin i}{(M_1 + M_2)K}\right)^3 = \frac{4\pi^2 P}{G(M_1 + M_2)}$$

Manipulando la expresión y simplificando:

$$\frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{K^3 P}{2\pi G}$$

De modo que:

$$f(M_1, M_2, i) = \frac{K^3 P}{2\pi G}$$

b) Calculando el valor de la función de masa:

$$f \approx 11,7 M_\odot$$

De este modo, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$M_2^3 \sin^3 i = 11,7(3,57 + M_2)^2$$

Como podemos notar, la inclinación es una incógnita. Sin embargo, al analizar posibles valores, observamos que, con $i = 90^\circ$, el valor de M_2 será mínimo, ya que, al aumentar el valor del lado izquierdo de la ecuación, M_2 deberá disminuir para mantener la igualdad. Considerando esto, podemos simplificar la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{M_{2,\min}^3}{(3,57 + M_{2,\min})^2} - 11,7 = 0$$

Resolviendo esa ecuación por iteración:

$$M_{2,\min} \approx 17,5 M_\odot$$

Capítulo 3

Fotometría

La fotometría es la rama de la astronomía que estudia la luz procedente de objetos astronómicos, sean estos visibles para nuestros ojos o no. A lo largo de este capítulo, estudiaremos la diversa información que nos puede proporcionar una simple muestra de radiación—esencial para comprender mejor nuestro universo—.

3.1 Espectroscopía

3.1.1 Radiación Electromagnética

La radiación electromagnética forma parte de numerosos aspectos de nuestra cotidianidad: interviene en la visión humana, en el funcionamiento de los microondas, en las tecnologías de comunicación, entre otros. En la astronomía, no solo constituye el principal medio para obtener información sobre los objetos celestes, sino que durante mucho tiempo fue el único medio disponible (actualmente, también existen otras técnicas, como la detección de ondas gravitacionales). Es así que casi toda la información que tenemos de nuestro universo fue obtenida a través de la detección de radiación electromagnética, ya fuese en luz visible o en otras bandas del espectro electromagnético, que será presentado más adelante.

Por el momento, estudiaremos la naturaleza ondulatoria de la radiación electromagnética.

- **Ondas Electromagnéticas:**

Una carga eléctrica oscilante genera campos eléctricos y magnéticos variables que se sostienen mutuamente. Este fenómeno de la origen a la propagación de ondas electromagnéticas, como la luz.

Las oscilaciones de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y pueden entenderse como la propagación de una onda transversal. En otras palabras, la oscilación se produce perpendicular a la dirección de propagación, como se puede observar a continuación:

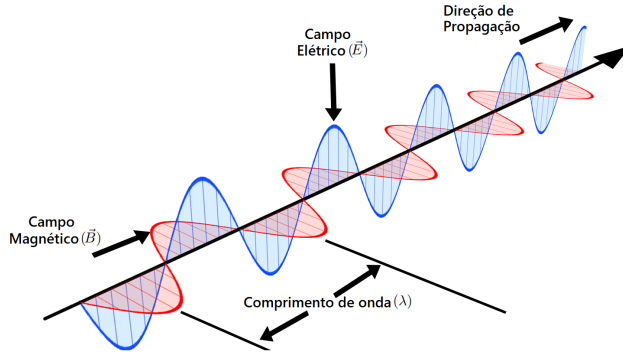


Figura 3.1: Onda eletromagnética

Algunos elementos de las ondas electromagnéticas son extremadamente importantes para su estudio. Observe la siguiente figura:

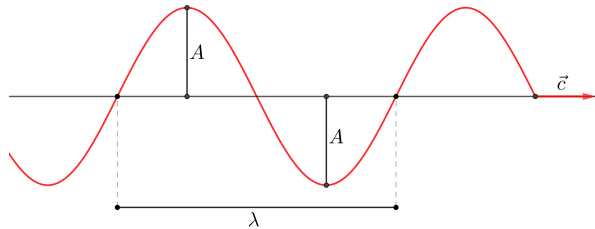


Figura 3.2: Parámetros de una onda

Tenemos:

- Velocidad de la luz (c): velocidad de propagación de una onda electromagnética cualquiera en el vacío ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s)
- Longitud de onda (λ): menor distancia entre dos puntos de onda en concordancia de fase. Por ejemplo, la distancia entre dos crestas (puntos más altos de una onda) consecutivas
- Frecuencia (f): Cantidad de oscilaciones de onda por unidad de tiempo
- Periodo (T): Intervalo de tiempo de una oscilación de onda completa

- Amplitud de onda (A): Distancia máxima entre un punto de onda y su posición de equilibrio.

Ahora, vamos a encontrar algunas relaciones entre estas magnitudes. Si una onda realiza n oscilaciones en un intervalo de tiempo Δt , su frecuencia es:

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

Por otro lado, el intervalo de tiempo Δt asociado a n oscilaciones se relaciona con el periodo T por:

$$\Delta t = nT$$

Dividiendo estas ecuaciones:

$$f = \frac{1}{T}$$

Además, podemos relacionar la longitud de onda λ con la frecuencia f de una onda. Después de un intervalo de tiempo T , recorrió una distancia λ con una velocidad c . Así, por cinemática:

$$\lambda = cT \Rightarrow c = \frac{\lambda}{T}$$

Como $\frac{1}{T} = f$, podemos llegar a la ecuación fundamental de la ondulación:

$$c = \lambda f$$

A partir de esta ecuación, podemos percatarnos de que la longitud de onda λ y la frecuencia f de una onda electromagnética son inversamente proporcionales, o en otras palabras, que cuando una aumenta, la otra disminuye.

• Fotones:

Debido al principio de dualidad onda-partícula, La luz puede entenderse tanto como una onda electromagnética como un haz de diversos paquetes de pequeñas partículas energéticas, los fotones. La energía de un fotón de frecuencia f puede calcularse a través de la ecuación de Planck-Einstein:

$$E = hf$$

Donde h es la Constante de Planck, cuyo valor es $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Note que, cuanto mayor sea la frecuencia de una onda electromagnética, mayor será su energía. A su vez, como $f = c/\lambda \Rightarrow E = hc/\lambda$, cuanto mayor sea la longitud de onda, menor será la energía de una onda electromagnética.

A partir de la idea de cuantizar la energía en pequeños paquetes, el físico danés Niels Bohr desarrolló su modelo atómico, proponiendo que el átomo estaba formado por un núcleo positivamente cargado, rodeado de electrones acomodados en órbitas circulares de diferentes niveles de energía, como se puede ver a continuación:

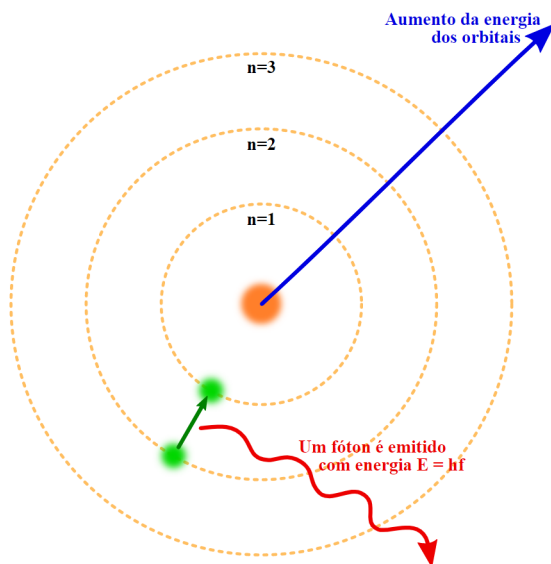


Figura 3.3: Estructura del modelo atómico de Bohr

Si un electrón salta de un nivel orbital de mayor energía a uno de menor energía, como en la figura 3.3 (del nivel 2 al 1), un fotón es emitido con energía exactamente igual a la diferencia de energía entre los 2 orbitales involucrados. Análogamente, cuando un electrón absorbe un fotón suficientemente energético, este salta de un nivel orbital de menor energía a un nivel orbital de mayor energía. Este mecanismo es la causa de la emisión de luz por parte de las estrellas.

3.1.2 Espectro Electromagnético

El espectro electromagnético es el intervalo completo de todas las posibles frecuencias de radiación electromagnética, abarcando no solamente el espectro visible (por medio del ojo humano) sino también frecuencias mucho menores o mayores. La imagen de abajo ilustra todas las bandas del espectro electromagnético:

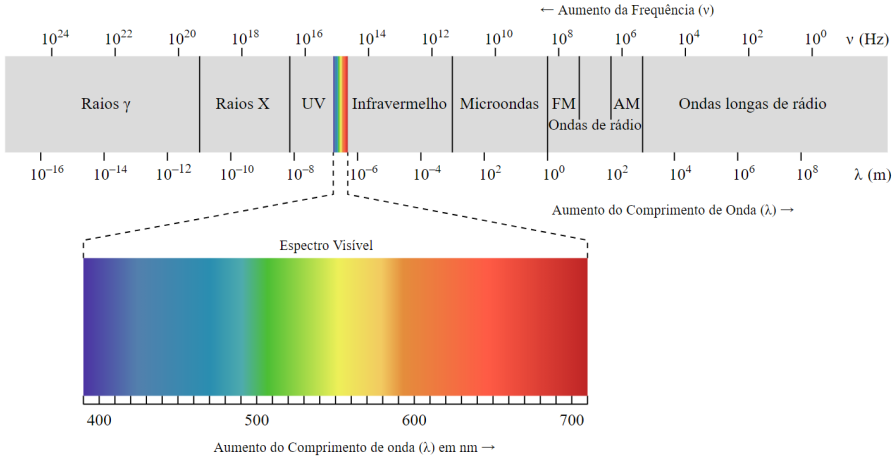


Figura 3.4: Espectro electromagnético

Note que los rayos gamma tienen longitudes de onda del tamaño de fracciones de un átomo, mientras que las ondas de radio poseen longitudes del orden de miles de kilómetros.

Es interesante notar que el rango visible corresponde apenas a un estrecho intervalo de frecuencias, lo que muestra que la visión humana es bastante limitada. Es por esta razón que utilizamos detectores especializados que realizan observaciones en otras longitudes de onda.

De todos estos tipos de ondas electromagnéticas, la mayor parte no es capaz de penetrar en la atmósfera terrestre, haciendo difícil la observación de esas ondas desde la superficie de la tierra. Este punto demuestra la importancia de telescopios espaciales, ya que se encuentran por encima de la atmósfera.

3.1.3 Leyes de Kirchhoff

A partir de la experimentación, el alemán Gustav Kirchhoff formuló tres importantes leyes de la espectroscopía, que serían conocidas posteriormente como Leyes de Kirchhoff. Estas son:

- Un cuerpo opaco caliente, independientemente de su estado físico, emite un espectro continuo.
- Un gas enrarecido (contrario de denso) frío produce un espectro de líneas de emisión (líneas brillantes).
- Si la luz de un objeto con espectro continuo pasa por un gas enrarecido frío, líneas de absorción (líneas oscuras en el espectro continuo) surgirán.

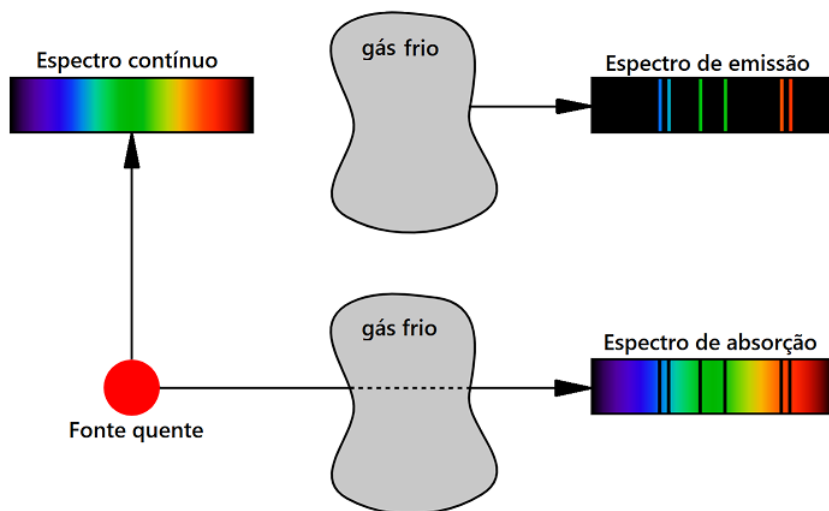


Figura 3.5: Leyes de Kirchhoff

3.1.4 Espectro de las Estrellas

El espectro de una estrella permite a los astrónomos determinar algunas de sus características como temperatura, composición química, masa, edad e incluso la posible presencia de un exoplaneta.

De acuerdo con las leyes de Kirchhoff, las estrellas presentan un espectro continuo con líneas de absorción. Esto ocurre porque se genera un espectro continuo en la superficie visible (fotosfera), pero parte de esa luz es absorbida por la capa fina y más fría de atmósfera que está justo encima de la fotosfera, generando líneas de absorción. Estas líneas dependen de los elementos químicos y de la temperatura de la estrella.

Además, tal y como propone el modelo de Bohr, cada elemento solo puede emitir fotones con energías determinadas por sus niveles de energía, es decir, la frecuencia de la luz emitida por un elemento específico no es arbitraria. De manera similar, los átomos solo pueden absorber fotones de esas mismas energías para el proceso inverso. De este modo, la detección de una línea espectral, ya sea de emisión o de absorción, es una prueba directa de la presencia de ciertos elementos en una estrella.

Para obtener el espectro de una estrella, es necesario utilizar una red de difracción que separe la luz procedente de las diferentes longitudes de onda presentes, lo que daría como resultado un gráfico como el que se muestra a continuación:

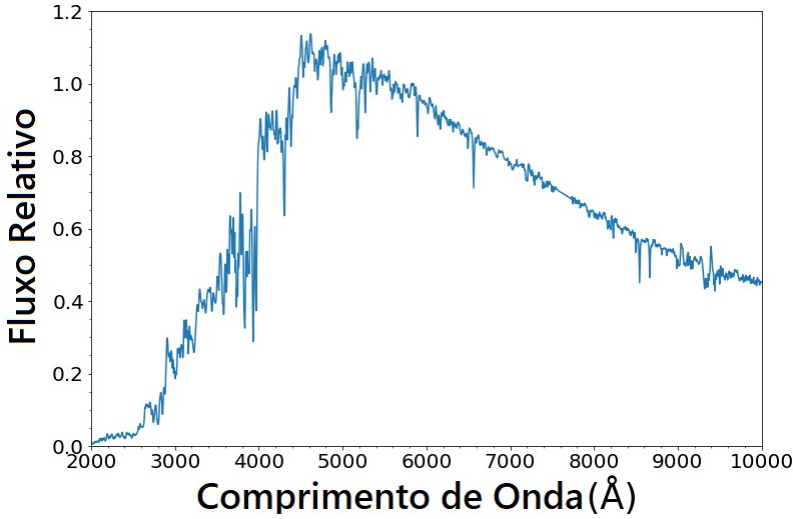


Figura 3.6: Espectro de una estrella

Las líneas de absorción son fácilmente identificables en la figura 3.6 mediante la observación de las diversas caídas abruptas en el flujo relativo.

3.2 Efecto Doppler y Redshift

3.2.1 Efecto Doppler

El Efecto Doppler es un fenómeno físico relacionado con el cambio en la frecuencia de ondas emitidas o reflejadas por un objeto que está en movimiento con respecto a un observador. En la astronomía, nos interesamos mucho más por la relación de este efecto en ondas electromagnéticas (como la luz) que en ondas mecánicas (como el sonido), ya que estas no se propagan por el vacío del espacio.

Imaginemos una fuente con una velocidad radial (en la dirección de la fuente-observador) no nula con respecto a un observador. Esa fuente emitirá pulsos de luz cada Δt_0 , así como se puede ver en la siguiente imagen:

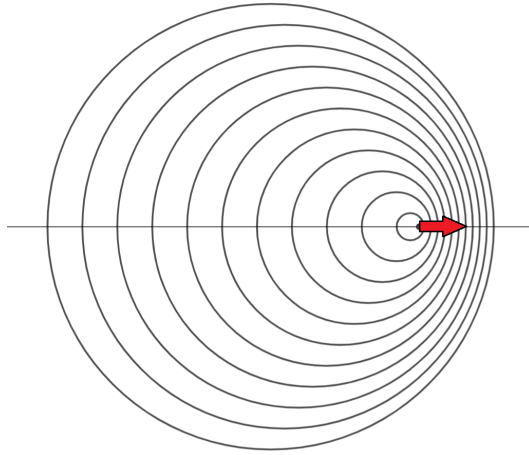


Figura 3.7: Efeito Doppler

Un observador situado a la izquierda de la fuente recibirá dos pulsos consecutivos en un intervalo de tiempo Δt_1 **mayor** que Δt_0 debido a la velocidad radial positiva de la fuente. Por otro lado, un observador a la derecha recibirá señales consecutivas separadas por un $\Delta t_2 < \Delta t_0$. Ahora, comparando estos pulsos con la emisión de ondas, podemos relacionar las frecuencias de la luz con los intervalos de tiempo mediante:

$$f_0 = \frac{1}{\Delta t_0} \quad f_1 = \frac{1}{\Delta t_1} \quad f_2 = \frac{1}{\Delta t_2}$$

Es decir, $f_1 < f_0$ y $f_2 > f_0$, o $\lambda_1 > \lambda_0$ y $\lambda_2 < \lambda_0$. A esta variación en la frecuencia (o longitud de onda) causada por el movimiento relativo entre una fuente y un observador se le conoce como Efecto Doppler.

3.2.2 Redshift no relativista

Como hemos visto anteriormente, cuando los astrónomos observan un cuerpo celeste alejándose o acercándose a la Tierra, la longitud de onda de la luz que reciben se desplaza hacia arriba o hacia abajo de lo que se esperaría si la fuente estuviere detenida. Si la fuente de luz se está **alejando** del observador ($v_r > 0$), entonces $\lambda > \lambda_0$, donde λ es la longitud de onda observada y λ_0 es la longitud de onda emitida. Este desplazamiento hacia una longitud de onda mayor se denomina **corrimiento al rojo** (redshift). Del mismo modo, si la fuente se está **acercando** al observador ($v_r < 0$), entonces $\lambda < \lambda_0$, es decir, hay un desplazamiento hacia una longitud de onda menor, un **corrimiento al azul** (blueshift).

La mayoría de los objetos del universo más allá de la Vía Láctea se están

alejando de nosotros¹, por lo que los redshift son más comunes que los blueshift. Utilizamos el parámetro z , conocido como redshift², para cuantificar el efecto Doppler de la luz. Este parámetro se define como:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

El redshift también puede ser escrito como función de la frecuencia, ya que $c = \lambda f$. Tenemos:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{f} - \frac{c}{f_0}}{\frac{c}{f_0}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}}{\frac{1}{f_0}} = \frac{\frac{f_0 - f}{f \cdot f_0}}{\frac{1}{f_0}} = \frac{f_0 - f}{f \cdot f_0} \cdot f_0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{f_0 - f}{f}}$$

Ahora, despreciando efectos relativistas, vamos a encontrar una relación entre el redshift z y la velocidad radial v_r de una fuente. Para un tiempo $t = 0$, la fuente emite su primer rayo de luz. Después de un intervalo de tiempo Δt , esta emite su segunda señal. La imagen de abajo concibe esta situación:

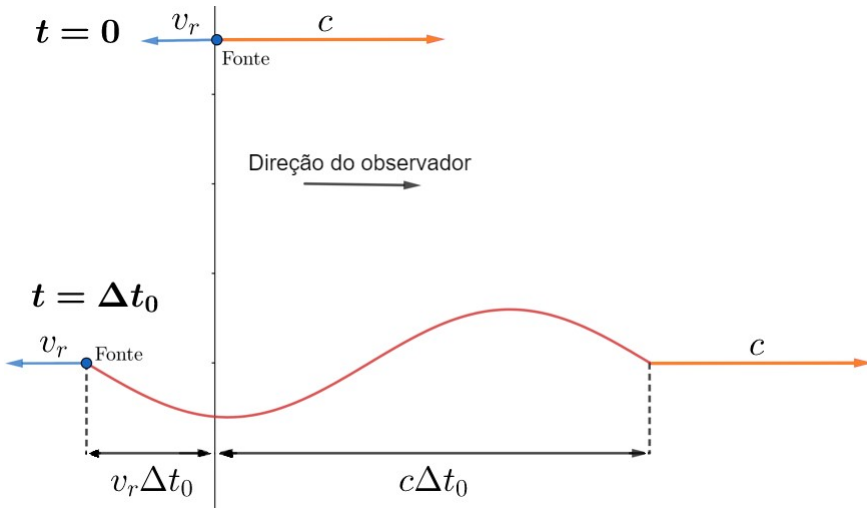


Figura 3.8: Redshift / Corrimiento al rojo

La distancia entre dos señales es $(c + v_r)\Delta t$. Como estas se mueven a la velocidad de la luz, el intervalo de tiempo Δt entre la recepción de estas por parte del observador puede ser descrito como:

¹Esto es una consecuencia directa de la ley de Hubble, que se estudiará en el apéndice de cosmología.

²Es un nombre muy desafortunado, ya que z puede representar tanto un corrimiento al rojo como un corrimiento al azul de la luz, pero es la notación estándar.

$$\Delta t = \frac{(c + v_r)\Delta t_0}{c}$$

Comparando esta situación con una onda, la frecuencia f de la luz recibida se relaciona con la frecuencia f_0 de la luz emitida por:

$$f = \frac{1}{\Delta t} \quad f_0 = \frac{1}{\Delta t_0}$$

Así:

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v_r}{c}}$$

Como $\lambda \cdot f = c$ e $\lambda_0 \cdot f_0 = c$, tenemos:

$$\lambda = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{v_r}{c}$$

Por definición, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$, entonces podemos llegar a la relación final:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

Esta relación es muy útil, ya que nos permite calcular la velocidad de alejamiento o acercamiento de los objetos astronómicos con solo observar su espectro. Esto se hace identificando el desplazamiento de líneas de absorción conocidas (por un $\Delta\lambda$). De este modo, conociendo la longitud de onda en reposo (λ_0) de estas líneas (magnitud medible en laboratorio), es posible calcular el redshift z y, por ende, la velocidad radial v_r .

Por ejemplo, en la imagen siguiente, el espectro superior corresponde a algunas líneas de absorción medidas en el laboratorio (la posición de una línea sería λ_0) y el espectro inferior se obtuvo a partir de observaciones de una estrella (la posición de la línea nos proporciona λ). Se puede observar que las líneas de absorción se han desplazado hacia la derecha con respecto al espectro del laboratorio, lo que indica un desplazamiento al rojo, por lo que esta estrella se está alejando del observador.

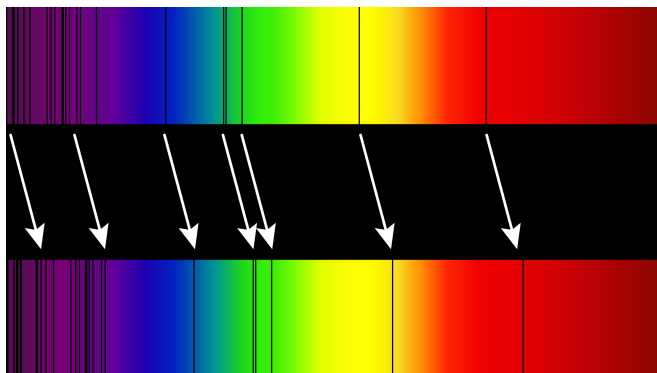


Figura 3.9: Líneas de absorción desplazadas

En términos prácticos, analizar el espectro de esta manera no es tan eficiente, ya que no presenta datos cuantitativos sobre la frecuencia ni sobre la intensidad de las líneas espectrales, siendo más provechoso un gráfico convencional, como el de la figura 3.6.

3.2.3 Redshift Relativista

La deducción que encontramos en la última subsección solo es válida para velocidades muy inferiores a la de la luz ($v_r \ll c$), en las que podemos despreciar los efectos relativistas. En este caso, vamos a deducir la expresión general utilizando algunos efectos de la relatividad restringida³. Tenemos la siguiente situación:

³Si aún no has estudiado esto, puedes saltarte esta deducción. Solo las fases finales de las pruebas de selección de astronomía suelen exigir conocimientos básicos de relatividad.

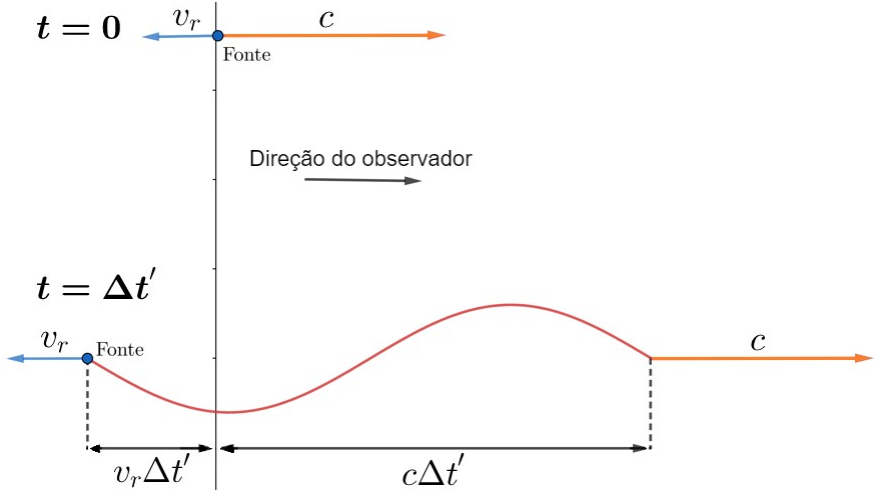


Figura 3.10: Redshift relativista - referencia del observador

Ahora bien, la gran diferencia es que el intervalo de tiempo entre la emisión de dos señales consecutivas depende del sistema de referencia analizado. En el sistema de referencia de la fuente, es $\Delta t_0 = \frac{1}{f_0}$, donde f_0 es la frecuencia de la luz emitida. Sin embargo, en el marco de referencia del observador, este intervalo es $\Delta t' > \Delta t_0$. Por la dilatación del tiempo:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ahora, queremos encontrar el intervalo de tiempo Δt entre las recepciones de señal por parte del observador. Como la distancia entre señales es $(c + v_r)\Delta t'$ y tienen la velocidad de la luz, nos queda que:

$$\Delta t = \frac{(c + v_r)\Delta t'}{c} = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \Delta t'$$

La frecuencia de la luz observada es $f = \frac{1}{\Delta t}$. Ya solo queda unificar las expresiones. Reescribiendo la ecuación de Δt en términos de la frecuencia:

$$f = f_0 \cdot \frac{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c + v_r}$$

Manipulando esta expresión, obtenemos:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c - v_r}{c + v_r}}$$

Como $\lambda = \frac{c}{f}$ y $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$, podemos escribir esta relación en términos de la longitud de onda:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}}$$

Dado que $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$:

$$z = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1$$

Note que el cálculo del redshift considerando efectos relativistas siempre tendrá un resultado exacto, mientras que la ecuación no relativista ofrece un valor aproximado. En olimpiadas de astronomía, la convención general es que, para $z < 0,1$, es aceptable despreciar efectos relativistas y, consecuentemente, utilizar la fórmula aproximada del redshift.

Entonces, por practicidad, se recomienda utilizar $z = \frac{v_r}{c}$ cuando $z < 0,1$ y $z = \sqrt{\frac{c+v_r}{c-v_r}} - 1$ cuando $z > 0,1$, a menos que el enunciado sea más específico.

Por último, hay que tener en cuenta que es fácil hallar la velocidad o el desplazamiento al rojo a partir del otro en el caso no relativista, ya que $z = \frac{v_r}{c}$ es una expresión muy reducida. Sin embargo, la ecuación relativista que mostramos arriba es conveniente para encontrar z a partir de v_r , pero no está del todo claro cómo sería el proceso inverso. Por lo tanto, vamos a deducir una ecuación que nos dé v_r para un z conocido en el caso relativista:

$$z = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = x = \frac{c + v_r}{c - v_r}$$

Donde definimos, por conveniencia, la variable $x = (z + 1)^2$. Assim:

$$c + v_r = x(c - v_r) \Rightarrow v_r = c \frac{x - 1}{x + 1}$$

Por tanto:

$$v_r = c \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1}$$

3.3 Luminosidad y Flujo

Cuando una estrella brilla, está emitiendo energía en forma de luz, la cual llega a nosotros. Podemos realizar mediciones para cuantificar la energía que estamos recibiendo de esta estrella y así conocer diversas variables como su distancia, temperatura, radio, composición química, etc.

Para comprender mejor cómo podemos determinar estas incógnitas a partir de la luz, debemos estudiar algunos procesos asociados a la radiación emitida por un cuerpo (bajo nuestro enfoque, principalmente las estrellas).

3.3.1 Luminosidad

Definimos como **Luminosidad** L a la energía total que una estrella emite por segundo, es decir, su *potencia*. Esta se mide en Watts [W] (o, equivalentemente, J/s) en el Sistema Internacional de Unidades. Note que esta es una magnitud **intrínseca** de la estrella, es decir, no depende de las condiciones de la observación (como la distancia hasta el astro).



Figura 3.11: Ilustración de una estrella emitiendo energía en forma de luz en todas las direcciones. La cantidad de energía emitida por segundo es la luminosidad.

3.3.2 Flujo

Mientras que la luminosidad es una magnitud intrínseca de una estrella, el flujo es una relacionada con el **brillo** de un astro, es decir, depende de las condiciones de observación, como la distancia del observador al cuerpo emisor. Así, definimos al **flujo** de un astro como la energía que estamos recibiendo de este por unidad de tiempo y área. Por ejemplo, considere un farol emitiendo

luz en una playa. Si un detector circular de 30cm de diámetro mostrase una potencia de 4W debido al farol, podríamos concluir que el flujo del farol en la posición del detector es:

$$F = \frac{\text{energía}}{\text{área}} = \frac{4}{\pi \cdot 0,15^2} \approx 56,6 \text{ W/m}^2$$

En este caso, los 4W de potencia no deben confundirse con la potencia "total"⁴ del farol-solamente una fracción de esta llega al detector, por ende, es intuitivo pensar que cuanto más lejos estemos de una fuente de luz, menor será su brillo y, consecuentemente, el flujo observado. Ahora, vamos a analizar cualitativamente esta dependencia del flujo con la distancia.

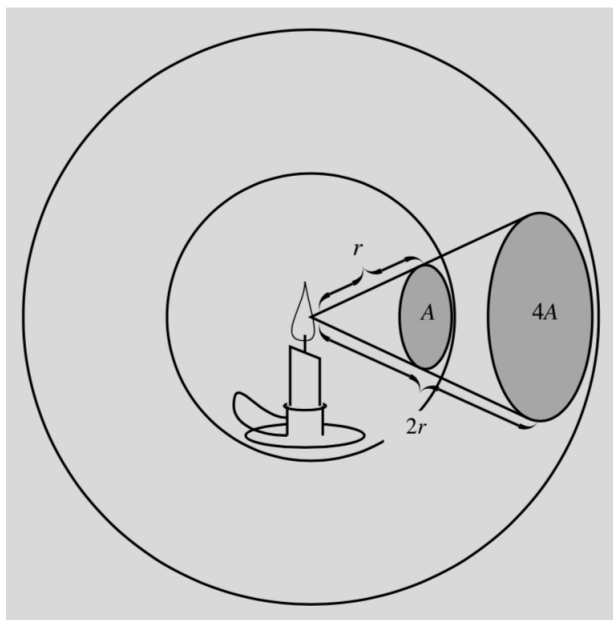


Figura 3.12: Vela emitiendo radiación en todas las direcciones

La imagen arriba ilustra una vela emitiendo radiación en todas las direcciones. Dado que su luminosidad es constante, podemos analizar una porción de luz que ocupa un área A a una distancia r del centro. La energía contenida en esta porción es constante, es decir, *independientemente* de la distancia a la que coloques un detector que cubra toda su área, la energía recibida será la misma. Así, analicemos lo que ocurre cuando esa misma porción se encuentra a una distancia $2r$ del centro: como la nueva área ocupada por la porción depende del

⁴Para una estrella, esta potencia total es la misma luminosidad

cuadrado de la distancia al centro⁵, que se ha duplicado, vale $4A$. Así, compararemos los flujos F , a una distancia r , y F' , a una distancia $2r$, teniendo en cuenta que la energía E que pasa por cada porción es la misma:

$$F = \frac{E}{A}$$

Por otro lado:

$$F' = \frac{E}{4A}$$

Es decir, el acto de **doblar** la distancia provoca que el flujo sea **una cuarta parte** de su valor original. Lo que acabamos de demostrar aquí es la ley del **cuadrado de la distancia**, que dice que $F \propto \frac{1}{d^2}$.

Podemos entonces llegar a la ecuación fundamental de flujo:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Donde F es el flujo medido, L la luminosidad de la estrella y d es la distancia hasta la estrella. El factor de 4π surgió porque el área de una esfera que contiene toda la energía emitida por una estrella a una distancia d es $4\pi d^2$, es decir, lo que estamos haciendo es dividir la potencia total por el área en que la energía de la estrella se esparció.

Por ejemplo, el Sol tiene luminosidad $L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26} W$ y está a una distancia $d = 1,496 \times 10^{11} m$ de la Tierra, entonces su flujo medido aquí es:

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} = \frac{3,83 \times 10^{26} W}{4\pi \cdot (1,496 \times 10^{11} m)^2} \approx 1362 W/m^2$$

Como las otras estrellas son supremamente más distantes, es de esperarse que el flujo sea mucho más pequeño para ellas, lo que efectivamente ocurre.

⁵Recordemos que la dimensión del área es L^2 , i.e. longitud al cuadrado, tal y como se vio en el capítulo 1.

3.4 Cuerpo Negro

Al incidir luz sobre algún objeto, como un vaso de vidrio, parte de la luz será absorbida, calentando el vaso; otra parte de la luz será refractada, siguiendo su rumbo en alguna dirección; una última parte será reflejada, también siguiendo su camino en otra dirección alternativa.

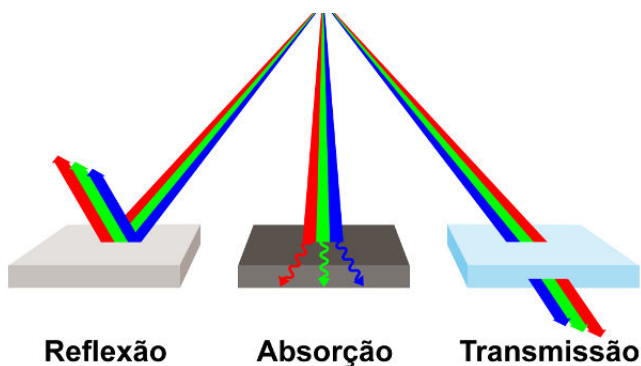


Figura 3.13: Diferentes comportamientos de la luz al incidir en un cuerpo.

Cada tipo de objeto refleja, absorbe y refracta de forma diferente (basta notar, por ejemplo, que una camisa negra absorbe luz muy bien, mientras que un espejo refleja la mayoría de la luz incidente).

En este sentido, **Cuerpo Negro** es aquel que absorbe toda la radiación incidente sobre él (quiere decir que no refleja ni refracta la luz). Como es de esperarse, estos cuerpos son ideales, es decir, no existen en el mundo real. Aún así, poseen dos características extremadamente importantes, dignas de análisis:

- Los cuerpos negros también emiten radiación, conocida como *radiación de cuerpo negro*.
- La manera en que un cuerpo negro emite radiación puede ser descrita *completamente* a partir de su temperatura y área.

La figura abajo muestra la distribución de radiación de un cuerpo negro como función de su temperatura y de la longitud de onda de la luz observada.

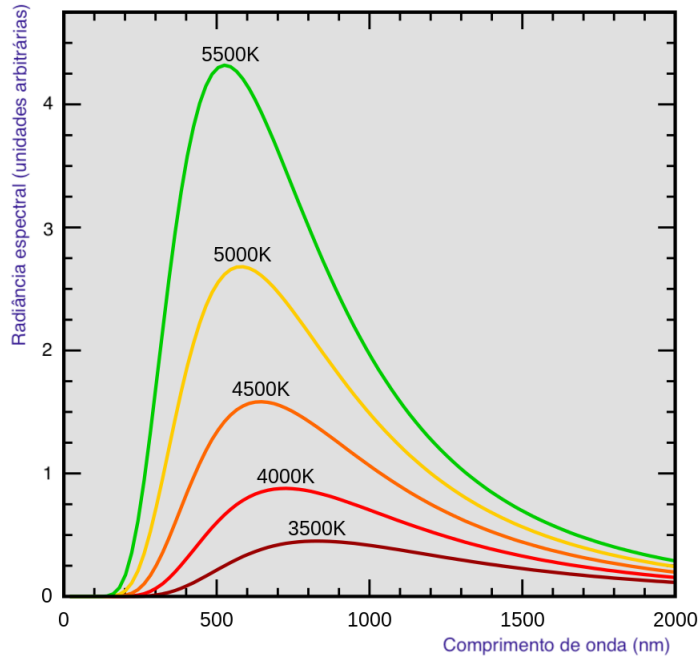


Figura 3.14: Radiancia espectral (o intensidad específica) en función de la longitud de onda para cuerpos negros con temperaturas diferentes.

Note que la cantidad de radiación emitida por un cuerpo negro para intervalos de longitud de onda idénticos⁶ depende de dónde se ubique la longitud de onda central. Por ejemplo, vemos que la radiancia espectral es mayor cerca de $\lambda = 600$ nm en comparación con los alrededores de $\lambda = 2000$ nm. Aún así, independientemente de donde esté el λ céntrico, los cuerpos negros con mayor temperatura siempre tendrán una mayor radiancia espectral.

3.4.1 Radiancia Espectral

Hasta ahora, estábamos utilizando el término "radiación" de manera un poco arbitraria para representar el eje y del gráfico de la figura 3.14. Más precisamente, el término correcto sería "radiancia espectral", que puede ser tanto una radiancia espectral de frecuencia (B_ν) como una radiancia espectral de longitud de onda (B_λ), la cual fue representada en el gráfico. Así como el flujo representa la energía emitida por unidad de tiempo y área, la radiancia espectral (de longitud de onda) es la energía emitida por unidad de tiempo, área, ángulo sólido y longitud de onda (o frecuencia, en el caso de la radiancia espectral de

⁶Por supuesto, no es posible que un detector absorba fotones de una única longitud de onda específica, siempre existe un intervalo.

frecuencia). Así, sus unidades son:

$$\begin{cases} [B_\lambda] = Wm^{-2}m^{-1}sterad^{-1} \\ [B_\nu] = Wm^{-2}Hz^{-1}sterad^{-1} \end{cases}$$

Al principio, esta magnitud puede parecer bastante arbitraria, sin embargo es sumamente relevante por aparecer en la ley de Planck, aquella que describe todas las curvas representadas en el gráfico de la figura 3.14. La expresión completa de esta ley no es relevante para los fines de este libro, sin embargo, una de sus características más relevantes es que **esta solamente depende de la temperatura**. Esto implica que basta conocer la temperatura de un cuerpo para determinar cómo es su curva de radiancia espectral.

3.4.2 Importancia de los Cuerpos Negros

Como es de esperarse, no existen cuerpos negros en el mundo real. Sin embargo, las estrellas se asemejan mucho al comportamiento de estos y, por lo tanto, podemos aplicar las propiedades de los cuerpos negros en ellas!

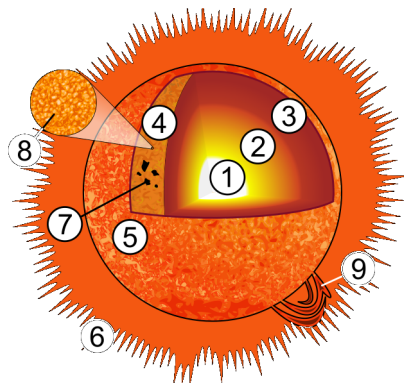


Figura 3.15: Estructura del Sol: 1 - Núcleo; 2 - Zona Radiativa; 3 - Zona Convectiva; 4 - Fotosfera (de donde es irradiada la mayor parte de la luz); 5 - Cromosfera; 6 - Corona; 7 - Manchas Solares; 8 - Gránulo; 9 - Protuberancia.



Figura 3.16: Fotosfera Solar (y algunas manchas solares).

3.4.3 Ley de Wien

Observe en el gráfico ?? los picos de radiancia espectral para cada temperatura. Se puede ver que **la longitud de onda λ_{max} asociada a la máxima radiancia espectral disminuye conforme la temperatura del cuerpo negro aumenta**, así como puede ser observado en la figura 3.17. Posterior a este análisis tenemos que, dada una cierta temperatura T de un cuerpo negro, es posible encontrar el λ_{max} (y viceversa) a partir de la ley de Wien:

$$\lambda_{max}T = b$$

Donde b es conocida como la Constante de Wien, cuyo valor está en torno a $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$. Note que λ_{max} y T son magnitudes inversamente proporcionales: si una aumenta, la otra disminuye.

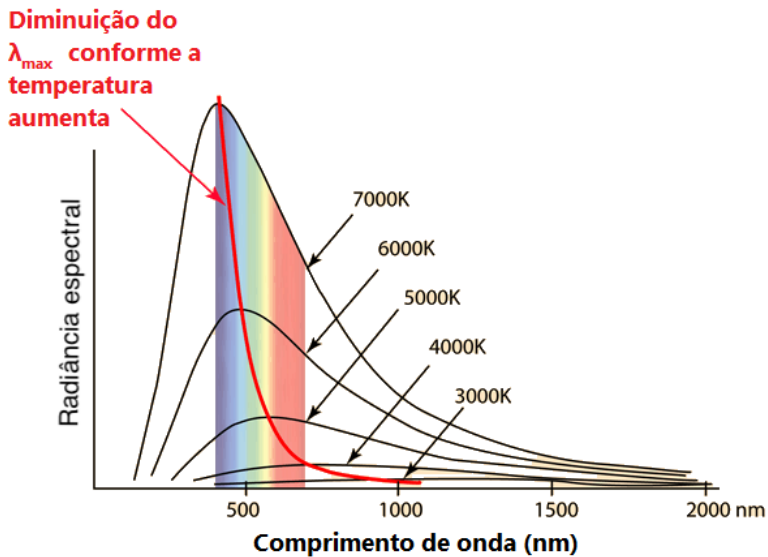


Figura 3.17: Diminución de λ_{max} conforme T aumenta

Temperatura Efectiva

La temperatura efectiva de un cuerpo cualquiera, como una estrella o un planeta, es aquella temperatura que un cuerpo negro debería tener para emitir la misma cantidad de radiación que ese cuerpo. Por ejemplo, la temperatura efectiva de una estrella como el Sol (radio $1R_{\odot}$ y luminosidad $1L_{\odot}$) es aquella que tendría un cuerpo negro ideal con el mismo radio y luminosidad que el Sol. De este modo, podemos aplicar la ley de Wien, que "solo vale" para cuerpos negros, y así encontrar la temperatura efectiva de una estrella cualquiera. Vamos a analizar el caso del Sol:

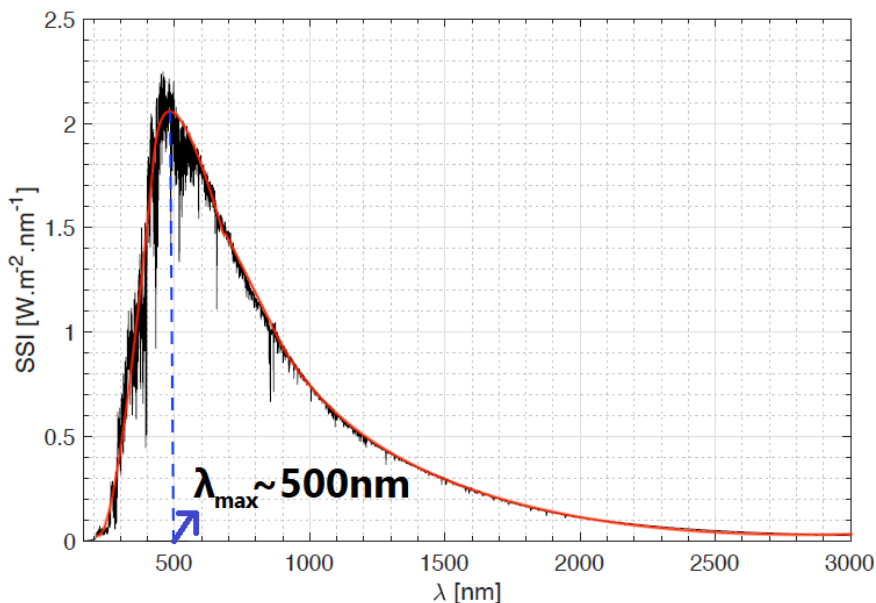


Figura 3.18: Espectro del Sol, curva de cuerpo negro y λ_{max}

Primeramente, note que el gráfico no representa aquella curva continua y armónica que vimos en los espectros de cuerpos negros. Esto tiene que ver con la presencia de líneas de absorción del Sol. Sin embargo, es posible observar que la forma de la curva es muy similar a aquella de un cuerpo negro ideal, representada por la línea roja en la imagen.

Además, se hace evidente que el pico de intensidad ocurre para $\lambda_{max} \approx 500$ nm. Así entonces, podemos utilizar la ley de Wien para encontrar la temperatura efectiva del Sol:

$$T_{ef} = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}} \approx \boxed{5800 \text{ K}}$$

3.4.4 Ley de Stefan-Boltzmann

Visto que es posible determinar diversas propiedades importantes de los cuerpos negros a partir de la ley de Planck (como la temperatura a partir de la ley de Wien), se espera que también sea posible encontrar su **luminosidad** L —y esto es exactamente lo que hace la ley de Stefan-Boltzmann—:

$$L = A\sigma T^4$$

Donde L es la luminosidad, que mide la potencia total de un cuerpo negro, entonces $[L] = \text{J/s} = \text{W}$. Por su parte, la letra griega $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ representa la constante de Stefan-Boltzmann⁷. Finalmente, A es el área superficial del cuerpo negro. Note que, para un cuerpo negro esférico de radio R , tenemos que $A = 4\pi R^2$, es decir que para estos cuerpos:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Cabe destacar que, de acuerdo con la definición de temperatura efectiva, la temperatura utilizada en la ley de Stefan-Boltzmann para cuerpos cualesquiera (p. ej. estrellas, planetas, etc) es la misma temperatura efectiva.

Ejemplo 1

Calcule la luminosidad del Sol, sabiendo que su radio es $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ y que posee un pico de emisión en 500 nm.

Solución

Antes que nada, note que podemos utilizar la ley de Wien para encontrar la temperatura efectiva del Sol:

$$T_{\odot} = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}} \text{ K} = 5796 \text{ K}$$

Ahora, podemos utilizar la ley de Stefan-Boltzmann para calcular la luminosidad $L_{\odot}$:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 = 3,90 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Cabe resaltar que el valor tabulado de la luminosidad del Sol es $3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$, por lo que nuestro resultado se considera suficientemente cercano (y no es exacto, puesto que el Sol no es un cuerpo negro ideal).

⁷Sea cuidadoso para no confundirla con la constante de Boltzmann, que se suele representar con la letra k_B .

3.5 Albedo

Vamos ahora a unir aquello que vimos en las últimas secciones para estudiar el comportamiento de la reflexión de la luz para cuerpos "no-negros", también conocidos como cuerpos grises. De manera general, existen 3 posibles destinos para cualquier radiación incidente en un cuerpo: absorbida, reflejada o transmitida. Hemos visto ya que los cuerpos negros absorben toda esta radiación, sin reflejar o transmitir ninguna porción de esta. Por otro lado, los cuerpos grises son aquellos que absorben **y** reflejan radiación, sin transmitirla. El albedo α es una medida de cuantificación de la "reflectividad" de estos cuerpos en la forma:

$$\alpha = \frac{P_r}{P_i}$$

Donde P_i ($[P_i] = W$) es la potencia incidente, P_r ($[P_r] = W$) es la potencia reflejada y α es una magnitud adimensional llamada albedo. Note que un cuerpo negro no refleja radiación, por tanto para estos $\alpha = 0$. Por otro lado, un cuerpo perfectamente reflector (que refleja toda la radiación incidente) posee $\alpha = 1$. Veamos entonces un ejemplo clásico que aborda tales conceptos:

Ejemplo 2

Considere la Tierra como un cuerpo gris de albedo α . Siendo P_i la potencia incidente en su superficie debido al Sol, calcule:

- La potencia P_{abs} absorbida por la Tierra;
- P_i en función del radio R de la Tierra, la luminosidad L del Sol y la distancia d del Sol a la Tierra.

Solución

a) Como vimos anteriormente, la potencia P_i será dividida en dos partes: una reflejada y otra absorbida. Como la potencia reflejada es, por definición, $P_r = \alpha P_i$, podemos escribir:

$$P_i = P_r + P_{abs} \Rightarrow P_{abs} = P_i - (\alpha P_i) = (1 - \alpha)P_i$$

b) Ya aprendimos que el flujo del Sol a una distancia d de su centro es:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Sabemos también que el flujo es potencia por área, por lo que la potencia P_i incidente en la Tierra es:

$$P_i = F \cdot A_t$$

Donde A_t es el área transversal de la Tierra. Necesitamos tomar en cuenta solamente el área transversal, pues la componente longitudinal no absorbe ninguna radiación—Claro, si la Tierra fuera plana y alineada con la luz solar, ninguna radiación sería absorbida (A_t despreciable)—. En el caso de nuestra Tierra esférica, la proyección transversal de su semiesfera es un disco de área $A_t = \pi R^2$, por ende:

$$P_i = \frac{\pi R^2}{4\pi d^2} L$$

La imagen 3.19 puede ayudar a entender esta idea. Cabe resaltar que el término $\frac{\pi R^2}{4\pi d^2}$ es el mismo ángulo sólido de la tierra cuando es vista desde el Sol ⁸.

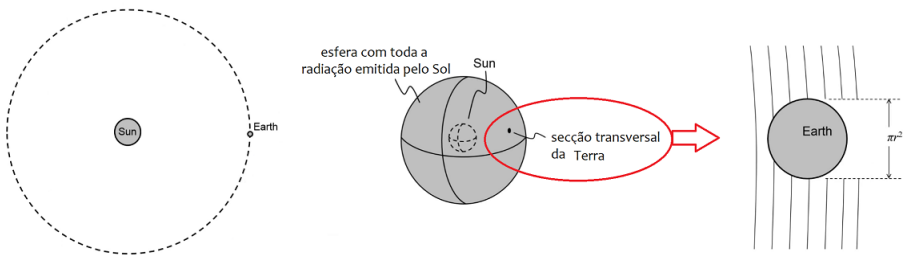


Figura 3.19: Área transversal

Ahora, estudiaremos dos tipos de problemas muy recurrentes en cuestiones de astronomía que envuelven los conceptos de flujo, luminosidad y albedo.

3.5.1 Temperatura de um Planeta

Siguiendo con el contexto dado por el ejemplo 2, podemos analizar lo que ocurre con la radiación absorbida por la tierra, partiendo de que una porción de esta se manifestará en un aumento de la temperatura terrestre. Por otro lado, la radiación restante será irradiada de manera semejante a la radiación de cuerpo negro. Cuando se trata de cuerpos grises, usualmente escribimos la ley de Stefan-Boltzmann como:

$$L = \epsilon A \sigma T^4$$

⁸Ver el apéndice de ángulo sólido.

Donde ϵ representa la **emisividad** (antes llamada emitancia) del cuerpo, variable que va de 0 hasta 1. Un punto importante que había sido ignorado hasta ahora es que el albedo y la emisividad de un cuerpo dependen de la longitud de onda de la luz implicada. Sin embargo, lo más común es no tomar en cuenta tales dependencias. Además de eso, también es habitual considerar $\epsilon = 1$, a menos que este sea dado⁹.

Ahora bien, tenga en cuenta que estamos buscando la temperatura de equilibrio (constante) del planeta. Esto significa que la parte de la energía que se destinaría a calentar el planeta es nula: toda la radiación absorbida se irradia según la ley de Stefan-Boltzmann. Así, para un planeta en equilibrio térmico:

$$P_{abs} = P_{rad}$$

Podemos clasificar la situación de calcular la temperatura de un planeta de albedo α en dos casos: cuando está girando rápidamente y cuando está girando lentamente. Vamos a analizar cada una de estas.

Planeta en rotación rápida:

En este caso, consideramos que **toda** la superficie del planeta está expuesta a la luz de la estrella y, por lo tanto, emite radiación en la forma de la ley de Stefan-Boltzmann. Eso equivale a decir que $P_{rad} = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Encontramos en el ejemplo 2 la expresión de P_{abs} , por lo que inmediatamente hacemos:

$$P_{abs} = P_{rad} \Leftrightarrow (1 - \alpha) \frac{\pi R^2}{4\pi d^2} L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Reescribiendo:

$$T = \left(\frac{(1 - \alpha)L}{16\pi\sigma d^2} \right)^{1/4}$$

Planeta en rotación lenta:

En esta situación, notamos que solamente uno de los hemisferios del planeta—aquel expuesto a la luz—irradiará energía en la forma de la ley de Stefan-Boltzmann, mientras que el otro será esencialmente bastante frío. De este modo, $P_{rad} = 2\pi R^2 \sigma T^4$, y así:

$$P_{abs} = P_{rad} \Leftrightarrow (1 - \alpha) \frac{\pi R^2}{4\pi d^2} L = 2\pi R^2 \sigma T^4$$

Es decir:

⁹Algunos autores llegan a utilizar que $\epsilon = 1 - \alpha$ a causa de las leyes de Kirchhoff, sin embargo los libros más conocidos de astronomía suelen considerar $\epsilon = 1$.

$$T = \left(\frac{(1 - \alpha)L}{8\pi\sigma d^2} \right)^{1/4}$$

3.5.2 Brillo de la Luna

Como ya sabemos, la Luna es una fuente de luz **secundaria**, es decir, no produce luz propia. Su brillo es consecuencia de la luz solar que incide en su superficie y es reflejada (aquí entra el concepto de albedo), eventualmente llegando a la Tierra. Entonces, surge la pregunta: ¿cuál el flujo de la Luna en la Tierra? Para un modelo más simple, analizaremos la situación de Luna Llena.

En primer lugar, analicemos el camino recorrido por la luz: después de ser emitida, se distribuye isotrópicamente alrededor del Sol, eventualmente impactando en la Luna. En el caso de la temperatura del planeta, estábamos interesados en la radiación que era absorbida. En este caso, el foco es la radiación reflejada en la superficie de la Luna. Así, los rayos de luz incidentes en la superficie lunar serán reflejados, distribuyéndose de manera aproximadamente isotrópica alrededor de la Luna hasta impactar en la Tierra. Las figuras 3.20 y 3.21 ilustran ese proceso.

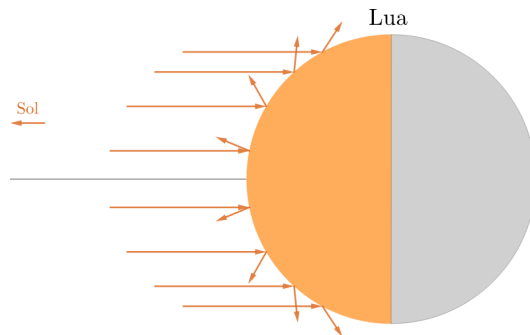


Figura 3.20: Rayos de luz siendo reflejados en la superficie de la Luna

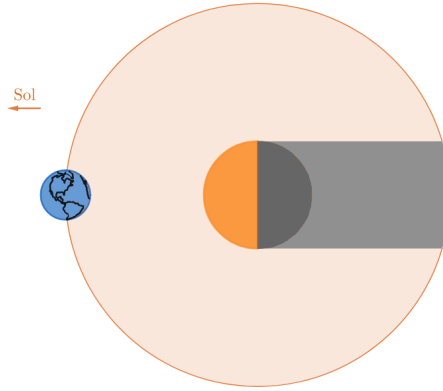


Figura 3.21: Radiación reflejada en la Luna llegando a la Tierra (fuera de escala)

Cabe destacar que, en la figura 3.21, existe una región en la cual ningún rayo de luz reflejado llega, que posee una área próxima al área transversal de la Luna (πR_L^2). Sin embargo, como la distancia Tierra-Luna d_{T-L} es mucho mayor que el radio de la Luna, tal porción puede ser despreciada. Aún así, recuerde que, por practicidad, estamos asumiendo que la radiación reflejada se distribuye isotrópicamente alrededor de la Luna.

Ahora, analizaremos esto cuantitativamente. La potencia P_i de los rayos solares en la superficie de la Luna es, como vimos en el ejemplo 2:

$$P_i = \frac{\pi R_L^2}{4\pi d_{\odot-L}^2} L_{\odot}$$

Recuerde que la distancia $d_{\odot-L}$ entre el Sol y la Luna en la situación de Luna Llena es aproximadamente $d_{\odot-L} = d_{\odot-T} + d_{T-L}$, ya que la Tierra queda entre el Sol y la Luna en esta configuración. A su vez, es pertinente aclarar que es común despreciar la distancia Tierra-Luna en comparación a la Sol-Tierra, sobre todo si la primera no es dada, sin embargo realizaremos el análisis completo.

Debido al albedo α de la Luna, la potencia reflejada P_r es:

$$P_r = \alpha P_i = \alpha \left(\frac{R_L}{2d_{\odot-L}} \right)^2 L_{\odot}$$

Esta potencia reflejada se distribuye de manera aproximadamente isotrópica cuando ya ha llegado a la tierra, de modo que el flujo observado por nosotros, F_{obs} , será:

$$F_{obs} = \frac{P_r}{4\pi d_{T-L}^2}$$

Uniendo todo:

$$F_{obs} = \alpha \frac{R_L^2}{16\pi d_{T-L}^2 d_{\odot-L}^2} L_{\odot}$$

3.6 Magnitudes

Mirando el cielo nocturno, podemos observar que las estrellas y los planetas poseen brillos muy variados. Con el objetivo de distinguir el brillo de las estrellas de manera menos subjetiva, Hiparco de Nicea decidió clasificar esas estrellas en 6 diferentes grupos, donde las más brillantes eran llamadas "estrellas de primera magnitud" y las menos brillantes "estrellas de sexta magnitud".

En la modernidad, se descubrió que la sensibilidad del ojo (y en general, los sentidos humanos) funciona de forma logarítmica¹⁰. Un ejemplo de esto: en una alcoba con, inicialmente, una lámpara prendida, encender una lámpara más resultaría en un cambio bastante significativo para el brillo de la habitación. Sin embargo, si la sala tuviera 20 lámparas al inicio, encender solamente una lámpara no resultaría en la misma variación de antes—sería necesario encender 20.

Como Hiparco clasificó el brillo de las estrellas al ojo desnudo, tratamos la escala de magnitudes como una escala logarítmica. Así:

$$m = k \log F + c$$

Donde F es el flujo del astro y k y c son constantes relacionadas al ajuste (referencia) utilizado. El astrónomo Norman Pogson notó que la clasificación de Hiparco era tal que estrellas de primera magnitud ($m_1 = 1$) eran 100 veces más brillantes (flujo 100 veces mayor) que las estrellas de sexta magnitud ($m_2 = 6$). De este modo, fue posible determinar el ajuste de la escala de Hiparco:

Para una estrella de magnitud $m_1 = 1$ y flujo F_1 :

$$m_1 = 1 = k \log F_1 + c$$

Por otro lado, para $m_2 = 6$ y $F_2 = 0,01F_1$ (100 veces menos brillante):

$$m_2 = 6 = k \log 0,01F_1 + c$$

Restando estas ecuaciones, tenemos:

$$m_2 - m_1 = k \log 0,01F_1 - k \log F_1 \Rightarrow 5 = k \log \left(\frac{1}{100} \right)$$

Como el logaritmo vale -2 , tenemos que $k = -2,5$. De este modo:

$$m = -2,5 \log F + c$$

¹⁰La presencia de patrones exponenciales y logarítmicos está bastante presente en la naturaleza. De hecho, si se le pide al lector completar el 3° término de la secuencia 1, 3, ... , probablemente la respuesta obtenida sería "5". Sin embargo, algunas pruebas hechas en niños sugieren que estos piensan primero en el "9" como próximo término de la secuencia, i.e., pensando de forma logarítmica/exponencial, y no lineal!

El signo negativo de k indica que cuanto **mayor** el flujo, **menor** la magnitud!

Mientras la constante k es intrínseca al concepto de magnitud originalmente propuesto por Hiparco (que es utilizado hasta hoy), la constante c **depende del ajuste del problema!** Eso quiere decir que esta no posee un valor fijo¹¹, lo que puede parecer un obstáculo, sin embargo, nosotros solamente nos interesamos por la **diferencia** de la magnitudes de dos astros, ya que una de estas generalmente es dada por el enunciado (como la magnitud del Sol). De este modo, tenemos:

$$m_1 - m_2 = (-2,5 \log F_1 + c) - (-2,5 \log F_2 + c)$$

Es entonces que podemos encontrar la **Ley de Pogson**, utilizada para comparar las magnitudes y los flujos de dos astros:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

Valga resaltar que, así como el flujo, la magnitud que estamos trabajando hasta ahora varía con la distancia hasta el astro (cuanto mayor sea la distancia, mayor también la magnitud) y, por tanto, recibe el nombre de **magnitud aparente**.

Ejemplo 3

¿Cuántas veces es más brillante la estrella Vega en relación a una estrella de magnitud aparente +4? Considere que todas las observaciones fueron realizadas desde la tierra.

Solução

Como ya vimos, Vega es una estrella particularmente especial por poseer una magnitud de aproximadamente 0. Considerando que el índice 1 representa Vega y que el índice 2 representa la estrella de magnitud +4, tenemos, por Pogson:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2} \Rightarrow (0) - (4) = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

Reformulando:

$$\log \frac{F_1}{F_2} = \frac{4}{2,5} = 1,6 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 10^{1,6} = 39,8$$

¹¹Es relativamente común la convención de que la magnitud de Vega es 0, lo que resultaría en $c \approx -18,85$. Sin embargo, el enunciado indicará si es necesario hacer uso de esto (p.ej., dando el flujo de Vega).

Es decir, Vega es unas 39,8 veces más brillante que una estrella de magnitud aparente +4. Note que esperábamos un resultado mayor que 1, dado que la magnitud de Vega era más pequeña que la magnitud del otro astro.

Exemplo 4

Determine el flujo de Sirio en la Tierra, sabiendo que su magnitud aparente es $m = -1,46$ y su distancia hasta el sistema solar es de 2,64 pc. Se conoce que el flujo del Sol en la Tierra es cercano a 1372 W/m^2 y que la magnitud del Sol es $-26,7$.

Solução

Por la ecuación de Pogson:

$$m_{\text{sirius}} - m_{\odot} = -1,46 - (-26,7) = -2,5 \log \left(\frac{F_{\text{sirius}}}{F_{\odot}} \right)$$

$$\Rightarrow F_{\text{sirius}} = 8,02 \cdot 10^{-11} F_{\odot}$$

A pesar de que Sirio es la estrella más brillante del cielo nocturno, su flujo es muy pequeño en comparación con el del Sol. Esto ocurre pues su distancia hasta nosotros es muchísimo mayor que la distancia Tierra-Sol.

3.6.1 Magnitud Absoluta

La magnitud absoluta se **define** como la magnitud aparente de un astro cuando es observado a una distancia de $d = 10 \text{ pc}$. A diferencia de la magnitud aparente, que depende de la posición del observador, la magnitud absoluta es una magnitud intrínseca al astro.

Ahora, adaptemos la ley de Pogson para relacionar magnitudes absolutas en vez de aparentes. Note primero que, como se vio anteriormente, el flujo se relaciona con la luminosidad y la distancia al astro a través de la ecuación $F = \frac{L}{4\pi d^2}$. En este caso, estamos comparando las magnitudes aparentes de dos astros en el caso en que ambos distan 10 pc del observador, es decir, $d_1 = d_2 = 10 \text{ pc}$. Así, por ley de Pogson:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2} = -2,5 \log \frac{L_1}{4\pi d_1^2} \cdot \frac{4\pi d_2^2}{L_2}$$

Como $d_1 = d_2 = 10 \text{ pc}$ para la magnitud absoluta, tenemos:

$$\boxed{M_1 - M_2 = -2,5 \log \frac{L_1}{L_2}}$$

Donde M_1 y M_2 son las magnitudes absolutas de los astros, mientras que L_1 y L_2 son sus luminosidades.

Existen dos ideas importantes relacionadas con las magnitudes aparente y absoluta que se deben tener presentes al resolver problemas que impliquen estos conceptos:

- Si se conoce la magnitud aparente de un astro, es posible hallar su flujo
- Si se conoce la magnitud absoluta de un astro, es posible hallar su luminosidad

A la hora de utilizar estas equivalencias, es esencial determinar cuál es la otra magnitud con la que comparará en la ley de Pogson (p.ej., la magnitud del Sol).

Ejemplo 5

Sabiendo que la magnitud absoluta de una estrella A es 5 mag mayor que la magnitud absoluta de una estrella B , calcule la razón entre las luminosidades de B y de A .

Solución

Por la ley de Pogson para magnitudes absolutas:

$$M_A - M_B = -2,5 \log \frac{L_A}{L_B} = 5$$

Luego, reordenando:

$$\log \frac{L_A}{L_B} = -\frac{5}{2,5} = -2 \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = 10^{-2}$$

Por ende, $\frac{L_B}{L_A} = 100$.

3.6.2 Medindo Distâncias

Reflexione acerca de lo siguiente: "Dadas las magnitudes aparentes y absolutas de un astro, es posible encontrar su distancia hasta el observador?". La respuesta es sí! Recuerde que la magnitud aparente nos da el flujo y la absoluta nos da la luminosidad. Así, como $F = \frac{L}{4\pi d^2}$, es posible hallar d .

Vamos a utilizar la ley de Pogson para comparar las magnitudes aparente (astro de luminosidad L que dista d del observador) y absoluta (astro de luminosidad L que dista 10 pc del observador):

$$m - M = -2,5 \log \left(\frac{F_{\text{aparente}}}{F_{\text{absoluta}}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi[d(\text{pc})]^2} \cdot \frac{4\pi(10 \text{ pc})^2}{L} \right)$$

Que puede ser reescrita como:

$$m - M = -2,5 \log \left(\frac{10}{d(\text{pc})} \right)^2 = -5(\log 10 - \log d(\text{pc}))$$

Como $\log 10 = 1$, podemos llegar al resultado final:

$$\boxed{m - M = 5 \log d(\text{pc}) - 5}$$

Vale resaltar que la diferencia $m - M$ es conocida como **módulo de distancia**. Por cierto, no olvide que la unidad de la distancia en esa fórmula debe ser el **parsec**!

Ejemplo 6

Sabiendo que una estrella posee magnitud absoluta $M = 4,83$ y magnitud aparente $-26,74$, calcule su distancia hasta nosotros, en UA , e identifique cuál es esa estrella.

Solución

Por módulo de distancia:

$$m - M = 5 \log d(\text{pc}) - 5 = (-26,74) - (4,83)$$

Reescribiendo:

$$\log d(\text{pc}) = \frac{-26,74 - 4,83 + 5}{5} = -5,308 \Rightarrow d(\text{pc}) = 10^{-5,308} = 4,92 \cdot 10^{-6} \text{ pc}$$

A su vez, sabemos que $1 \text{ pc} \approx 206265 UA$, entonces:

$$d = 4,92 \cdot 10^{-6} \text{ pc} \cdot \left(\frac{206265 UA}{1 \text{ pc}} \right) = 1,01 UA$$

Ahora, existe solamente una estrella que dista cerca de una unidad astronómica de la Tierra: el Sol! Note que su magnitud aparente de $-26,74$ está asociada a un brillo astronómicamente enorme. En comparación, la magnitud aparente de una Luna Llena es ≈ -13 y la estrella más brillante del cielo, Sirio, posee una magnitud aparente de $-1,46$. Sin embargo, la magnitud absoluta del Sol ($4,83$) es relativamente alta (la de Sirio es $1,42$), indicando que este no es especialmente brillante por poseer una alta luminosidad, mas sí lo es por estar muy próximo a la Tierra.

3.6.3 Bandas

Cuando medimos la energía que proviene de una estrella en el mundo real, casi nunca tenemos en cuenta intervalos de longitud de onda que cubren gran parte del espectro electromagnético, por el contrario, tomamos algunos pedazos bien definidos que son llamados **bandas**. Las bandas más comunes son las del conjunto UBV:

- Ultravioleta (U) - 370 ± 33 nm
- Azul (B) - 435 ± 45 nm
- Visible (V) - 550 ± 45 nm

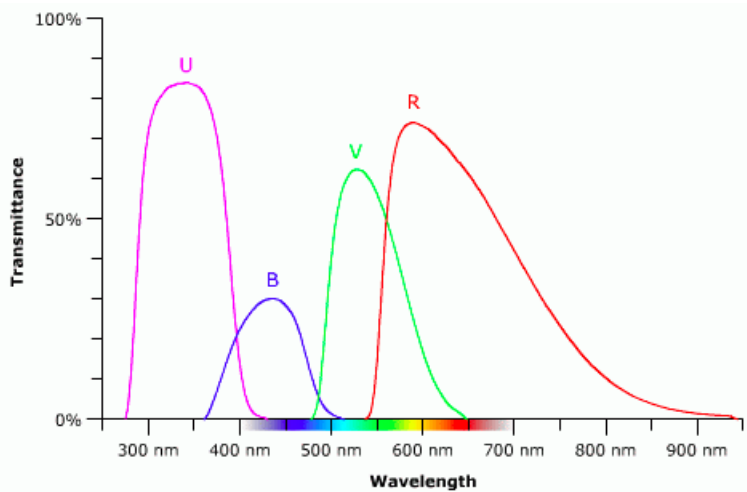


Figura 3.22: Transmitancia (fotones absorbidos/total de fotones) de la luz para cada una de las principales bandas (R es la banda del rojo).

Visto eso, cuando estemos hablando de la magnitud de una estrella, a rigor, la banda debería ser citada. Sin embargo, la omisión de esta información no suele influir en la resolución del problema¹². Además de eso, es común tratar la magnitud aparente simplemente de magnitud, entonces tenga cuidado para no confundirse.

Entendiendo que la magnitud de un cuerpo depende de cuál banda (intervalo de longitud de onda) se está analizando, podemos introducir el concepto de **magnitud bolométrica**, que se define como la magnitud de un cuerpo tomando en cuenta todo el espectro electromagnético. Note que eso implica que

¹²En la mayoría de los casos, la magnitud tratada es la bolométrica, dado que la ley de Stefan-Boltzmann integra todas las longitudes de onda.

la magnitud bolométrica siempre será **menor** (más negativa) que la magnitud en cualquier otra banda.

Otro concepto relevante relacionado con la magnitud bolométrica es la **corrección bolométrica** CB , definida como:

$$|CB| = m_v - m_{bol}$$

Donde m_v es la magnitud en la banda del visible y m_{bol} la magnitud bolométrica. El módulo fue colocado pues la notación utilizada para la corrección bolométrica no es muy consistente alrededor del mundo, siendo positiva o negativa dependiendo del científico.

3.7 Clasificación Estelar

La clasificación estelar es una clasificación de incontables estrellas basada en sus características espectrales. Esta permite describir diversas características físicas de una estrella utilizando menos que 5 letras y números. Por ejemplo, al afirmar que una estrella es del tipo K5III, se puede concluir que es relativamente fría y anaranjada, sin embargo, bastante grande y luminosa.

3.7.1 Clasificación Espectral de Harvard

Desarrollada en el Observatorio de Harvard en 1910, por Annie J. Cannon y sus colaboradores, fue la primera clasificación espectral de estrellas. Los científicos obtuvieron el espectro de cada estrella analizando la intensidad relativa de las líneas de absorción de una estrella, así como se estudió en la sección 3.1. Esta intensidad está fuertemente asociada a la temperatura de la estrella¹³, por lo que esta es una clasificación espectral de **temperatura**. Finalmente, como consecuencia de la ley de Wien, cada clase de temperatura tendrá un color típico asociado a la estrella.

En la tabla de abajo se encuentra la división de clases espectrales, sus intervalos de temperatura, color y algunos ejemplos de estrellas:

¹³Como vimos en la sección 3.4, la distribución de intensidad depende solamente de la temperatura de la estrella.

Clase	Temperatura	Color	Ejemplos
O	$\geq 33000\text{K}$	azul	Mintaka
B	10000 – 33000K	blanco azulado	Rigel y Spica
A	7500 – 10000K	blanco	Sirio y Deneb
F	6000 – 7500K	blanco amarillento	Procyon e Canopus
G	5200 – 6000K	amarillo	Sol e Capela
K	3700 – 5200K	naranja	Aldebarán y Arturo
M	2000 – 3700K	rojo	Betelgeuse e Antares

Tabela 3.1: Clasificación Espectral de Harvard

Una mnemotecnia para memorizar el orden OBAFGKM es la oración en inglés: “**O**h, **B**e **A** Fine **G**irl: **K**iss **M**e”.

Con el tiempo, surgió la necesidad de crear subclases de temperatura, dividiendo cada clase en 10, numerando después de la letra correspondiente con un número de 0 a 9, siendo 0 la más caliente dentro de la clase y 9 la más fría. Por ejemplo, en orden decreciente de temperatura: B0, B1, B2, ..., B9, A0, A1, A2, ... y así sucesivamente.

Posteriormente, se añadieron dos tipos espectrales: L y T (en orden decreciente de temperatura), que corresponden a clases de las “estrellas” enanas marrones. Estos son cuerpos celestes menos masivos que las estrellas pequeñas, pero más masivos que los planetas gigantes. Rigurosamente, estas no pueden ser clasificadas como estrellas (pues no cuentan con la masa suficiente para fundir hidrógeno) ni como planetas (pues funden deuterio). Las enanas marrones poseen temperatura del orden de 1000K – 2000K y, por lo tanto, su radiación es emitida principalmente en el infrarrojo.

3.7.2 Clasificación Espectral de Yerkes

Introducida en 1943 por William Wilson Morgan, Phillip Childs Keenan y Edith Kellman del Observatorio Yerkes, la clasificación espectral de Yerkes es una clasificación espectral de **luminosidad** (a diferencia de la de Harvard) bastante útil en el estudio de la evolución estelar.

En la tabla abajo está la división de las clases espectrales, sus descripciones y algunos ejemplos de estrellas:

Clase	Descripción	Ejemplos
0	hipergigantes	-
Ia	supergigantes luminosas	Rigel
Ib	supergigantes	Betelgeuse
II	gigantes luminosas	Antares
III	gigantes	Aldebarán
IV	subgigantes	Acrux
V	enanas (secuencia principal)	Sol
VI (prefijo sd)	sub-enanas	-
VII (prefijo D)	enanas blancas	Sirio B

Tabela 3.2: Clasificación espectral de Yerkes

El objetivo de esta sección no es profundizar en el área de evolución estelar, aunque es importante comprender que estas clases poseen una profunda relación con la fase evolutiva de la estrella. Por ejemplo, todas las estrellas pasan por la secuencia principal (clase V), que es la etapa evolutiva de mayor duración en la vida de una estrella, caracterizada por la fusión de hidrógeno en el núcleo de la misma. Una estrella sale de la secuencia principal después de consumir todo el hidrógeno en su núcleo y, por ende, la duración de la fase depende de la masa estelar, siendo que dura mucho menos tiempo para las estrellas masivas (millones de años) que para estrellas de poca masa (hasta billones de años).

Las clases 0, Iba, Ib, II, III o IV son estágios evolutivos después de la secuencia principal en los cuales las estrellas pasan antes de llegar en sus estágios finales, siendo que la masa de la estrella determina por cuáles desalas clases ella irá a pasar. De forma bien resumida, después de eso, se llega en el estágio final, en que estrellas muy massivas se transformarán en agujeros negros, estrellas de masa intermediaria se transformarán en estrellas de nêutrons y estrellas de baja masa, como el Sol, se transformarán en enanas blancas (clase VII o D).

Ahora que ya fueron presentadas las dos clasificaciones espectrales, es importante saber que unimos **ambas** a la hora de describir el tipo espectral de una estrella. A excepción de las clases de luminosidad VI y VII, el tipo espectral sigue el modelo: **XY**, donde X es la clasificación de temperatura y Y es la clasificación de luminosidad. Por ejemplo, la clasificación espectral del Sol es **G2V**, indicando que su clase de temperatura es G2 (temperatura en el rango de los 5800K) y que su clase de luminosidad es V, i.e. se encuentra en la SP (Secuencia Principal).

Un ejemplo de la excepción comentada es el tipo espectral de Sirio B, que es **DA2**. El prefijo D surge dado que su clase de luminosidad es VII, mientras que el A2 está relacionado con su clase de temperatura (misma A2). En ese caso, note que la clase de luminosidad vino antes de la clase de temperatura, sin embargo, eso es una excepción para las clases de luminosidad VI y VII,

así como fue mostrado en la tabla 3.2 (tales clases poseen prefijos sd y D, respectivamente).

3.7.3 El Diagrama HR

El Diagrama de Hertzsprung-Russell, conocido como diagrama HR, fue publicado independientemente por el danés Ejnar Hertzsprung (1873-1967) en 1911, y por el americano Henry Norris Russell (1877-1957) en 1913, como una relación existente entre la luminosidad de una estrella y su temperatura efectiva, como se visualiza en la imagen de abajo. Además, como la magnitud absoluta depende sólo de la luminosidad de la estrella y la clase espectral depende sólo de la temperatura efectiva, el diagrama también puede ser presentado como un gráfico de magnitud absoluta por clase espectral.

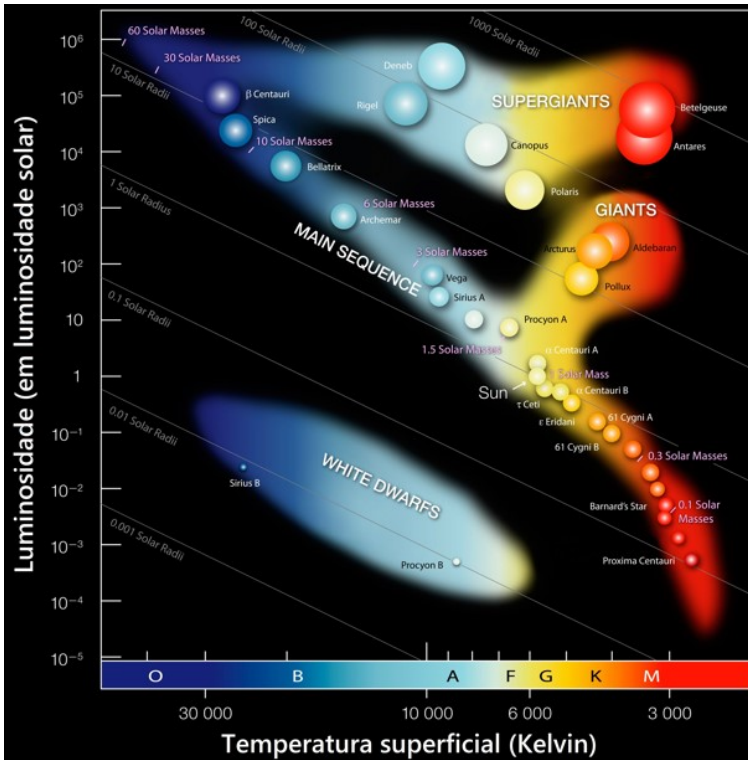


Figura 3.23: Diagrama HR

Dado que el Diagrama HR relaciona la luminosidad y la temperatura de las estrellas, una ley extremadamente importante para su interpretación es la ley de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4$$

En el diagrama, la luminosidad L y la temperatura T están convenientemente en escala logarítmica¹⁴. Así, extrayendo el logaritmo de ambos:

¹⁴En el caso de la luminosidad, cada división es 10 veces mayor que la anterior. Si la escala

$$\begin{aligned}\log L &= \log(4\pi\sigma R^2 T^4) = \log(4\pi\sigma) + \log(R^2) + \log(T^4) \\ \underbrace{\log L}_y &= \log(4\pi\sigma) + 2 \log R + 4 \underbrace{\log T}_x \\ y &= 4x + \log(4\pi\sigma) + 2 \log R\end{aligned}$$

Donde la sustitución $y = \log L$ y $x = \log T$ fue hecha para facilitar la visualización de la relación lineal existente entre $\log L$ y $\log T$ ¹⁵.

Cada valor del radio R está asociado a una recta en el diagrama HR con un coeficiente lineal diferente, i.e., todas las rectas serán paralelas pero levemente desplazadas. Eso puede observarse en la figura 3.23 para las rectas de $0,001R_\odot$, $0,01R_\odot$, $0,1R_\odot$, $1R_\odot$ y $10R_\odot$.

Además de esta peculiaridad, también es interesante notar cómo las diferentes clases de luminosidad están distribuidas y posicionadas a lo largo del diagrama HR, demostrando su importancia para el estudio de la evolución estelar. Observe la siguiente imagen:

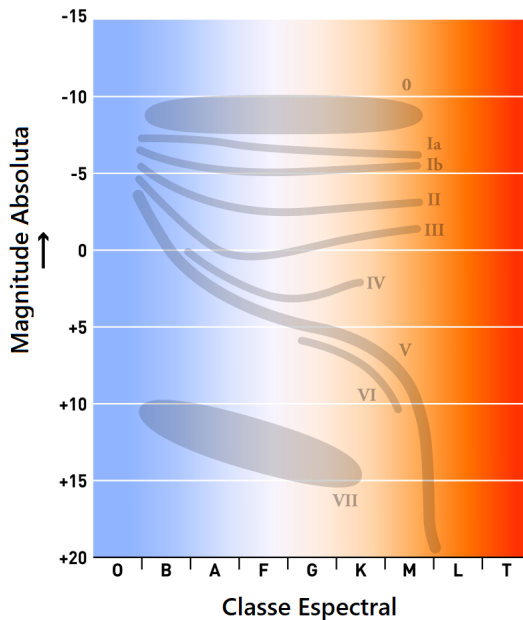


Figura 3.24: Diagrama HR

fuera lineal, las divisiones estarían separadas por un valor constante (p.ej. 1, 2, 3, 4).

¹⁵Recuerde que funciones del tipo $y = ax + b$, donde a (coeficiente angular o pendiente) y b (coeficiente lineal o término independiente) son constantes, son lineales, es decir, se expresan gráficamente mediante una recta.

En la figura, se puede notar que las estrellas de la Secuencia Principal (clase V de luminosidad) están distribuidas a lo largo de un rango que cubre todas clases espectrales de temperatura (excepto L y T) y una gran extensión del intervalo de luminosidad. La mayoría de las estrellas se localizan en la Secuencia Principal, al fin y al cabo, es la fase evolutiva de mayor duración.

Finalmente, una importante relación entre la masa y la luminosidad de las estrellas de la SP establece que, cuanto mayor sea su luminosidad, mayor será su masa. Una consecuencia de eso es que a lo largo del rango ocupado por la SP en el diagrama HR, las estrellas en la esquina inferior derecha serán poco masivas, mientras que las estrellas en la esquina superior izquierda serán muy masivas. Observe en la Figura 3.23 que hay una indicación de la masa de las estrellas en determinadas regiones de la secuencia principal, indicando masas mayores para las regiones de mayor luminosidad.

Empíricamente, se puede verificar la siguiente relación Masa-Luminosidad para estrellas de la Secuencia Principal¹⁶:

$$\begin{cases} L \propto M^{2,5}, & \text{se } M \leq 0,5M_{\odot} \\ L \propto M^4, & \text{se } 0,5M_{\odot} < M < 3M_{\odot} \\ L \propto M^3, & \text{se } M \geq 3M_{\odot} \end{cases}$$

Por medio de estas relaciones, es posible estimar el tiempo de vida de una estrella en la SP. Haciendo una generalización de las 3 relaciones anteriores, es posible escribir:

$$L \propto M^{\alpha}$$

donde α depende de la masa de la estrella.

Suponiendo que la luminosidad de la estrella permanece constante a lo largo de la SP:

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \text{cte.}$$

Podemos relacionar la energía emitida por la estrella con la variación de su masa a través de la equivalencia masa-energía $E = mc^2$ (la famosa ecuación de Einstein):

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

Por lo tanto, sustituyendo en la luminosidad:

$$L = \frac{\Delta m \cdot c^2}{\Delta t}$$

¹⁶No es necesario memorizarlas.

Hemos visto que una estrella sale de la SP después de consumir todo su hidrógeno (que está en el núcleo de la estrella) y este corresponde a una cierta fracción de su masa. En general, esta fracción es cercana al 10%, sin embargo, consideraremos una fracción f cualquiera, es decir, $\Delta m = fM$. Además de eso, siendo t_{sp} el tiempo de permanencia de la estrella en la SP, se obtiene:

$$t_{sp} = \frac{fMc^2}{L} \Rightarrow L \propto \frac{M}{t_{sp}}$$

Finalmente, utilizando la relación generalizada de masa-luminosidad $L \propto M^\alpha$, concluimos que:

$$\frac{M}{t_{sp}} \propto M^\alpha \Rightarrow t_{sp} \propto M^{1-\alpha}$$

Como $\alpha > 1$ en todos los casos, cuanto mayor sea la masa de la estrella, menor tiempo permanecerá en la Secuencia Principal!

3.8 Problemas

3.1. (Principiante) Una estrella se aproxima a nosotros con una velocidad de $v = 50,00 \text{ km/s}$. Una determinada línea espectral es observada con una longitud de onda de $\lambda = 537,00 \text{ nm}$. Considerando el efecto Doppler, cual es la longitud de onda original de esta línea?

- a) 536,82 nm
- b) 536,91 nm
- c) 537,09 nm
- d) 537,18 nm

3.2. (Principiante) Una estrella 2 posee la mitad del radio y el doble de la temperatura de una estrella 1. Encuentre la razón entre sus luminosidades.

3.3. (Principiante) La sonda espacial Voyager 1 está actualmente a una distancia de aproximadamente 160 Unidades Astronómicas (UA) del Sol. Calcule el flujo de energía solar (en W/m^2) que alcanza los paneles de la Voyager 1. (Acuérdese: $1\text{UA} \approx 1,5 \times 10^{11}\text{m}$).

3.4. (Principiante) En un sistema binario, una de las estrellas posee magnitud $m_1 = 7,0$ y la otra posee $m_2 = 8,0$. A partir de esto, encuentre la magnitud combinada del sistema, considerando que no es eclipsante.

3.5. (Principiante) Considere dos estrellas, la Estrella A y la Estrella B, que pueden ser aproximadas como cuerpos negros perfectos. Mediante observaciones astronómicas, se determina que la temperatura superficial de la Estrella A es significativamente mayor que la de la Estrella B. Conociendo esto, acerca de la radiancia espectral de ambas estrellas, se puede afirmar que:

- a) La Estrella A emitirá más energía total por unidad de área y su pico de emisión ocurrirá en una longitud de onda menor que la de la Estrella B.
- b) La Estrella B emitirá más energía en todas las longitudes de onda, pues su temperatura más baja favorece una emisión más uniforme.
- c) La forma de la curva espectral de ambas será idéntica, difiriendo sólo en la intensidad total, que depende del tamaño y de la temperatura de la estrella.
- d) Las dos estrellas emitirán la misma energía por unidad de área, pero el pico de emisión de la Estrella A se encontrará en una longitud de onda mayor.
- e) Para determinar la radiancia espectral de una estrella es necesario conocer, además de la temperatura, su composición química y distancia.

(Principiante) La estrella Sirio, de la constelación del Can Mayor, es la más brillante del cielo nocturno y emite una gran cantidad de luz con una longitud de onda próxima a 290 nm.

- a) Calcule la energía, en Joules, de un único fotón emitido por Sirio con esta longitud de onda.
- b) Si un detector recibe una potencia de $2 \cdot 10^{-10}$ Watts de esta luz, cuantos fotones están alcanzando al detector por segundo?

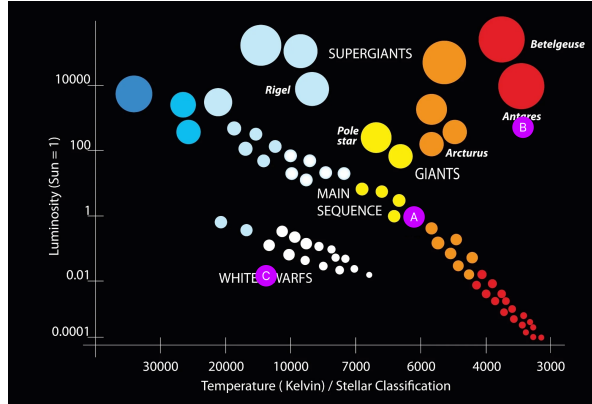
3.6. (Intermedio) Determine la distancia del Sistema Solar a la Galáxia de Andrómeda, en años-luz. (luminosidad y magnitud aparente de Andrómeda: $L_{and} = 2,6 \cdot 10^{10} L_{\odot}$, $m_{and} = 3,44$)

3.7. (Intermedio) Cuáles de los conjuntos de información nos permiten calcular la distancia hasta una estrella dada? Justifique cada ítem.

- a) Radio y diámetro angular.
- b) Luminosidad y magnitud aparente.
- c) Flujo y magnitud absoluta.
- d) Flujo y magnitud aparente
- e) Luminosidad y magnitud absoluta.
- f) Clase espectral (OBAFG...), radio, flujo.
- g) Porcentaje de hierro en el núcleo, magnitud absoluta y aparente.

3.8. (Intermedio) Estime el tiempo de vida t en la secuencia principal de una estrella de masa $M = 5 M_{\odot}$. Utilice $L \propto M^3$ y $t_{\odot} \approx 10^{10}$ años.

3.9. (Intermedio) El Diagrama HR puede ser usado como un mapa para trazar la evolución de una estrella:



Considere los tres puntos morados de arriba, que representan las etapas de la vida de una estrella como el Sol. Coloque los tres puntos (A, B y C) en el orden cronológico correcto de la evolución de una estrella como el Sol y justifique brevemente su respuesta.

3.10. (Intermedio) (Thiago Paulin) Considere que una estrella de magnitud m_0 se dividió en un cúmulo (aglomeración) de N estrellas más pequeñas. Encuentre la magnitud m' de este cúmulo, considerando que:

- La masa se conservó en el proceso de fragmentación
- La densidad media y la temperatura efectiva de la estrella original y de las estrellas más pequeñas son iguales
- Ninguna de las estrellas más pequeñas obstruye la luz de sus compañeras

3.11. (Intermedio) El brillo total de un sistema estelar no resuelto, como un cúmulo distante, es la suma de los flujos de todas sus estrellas constituyentes. La escala de magnitud, por ser logarítmica, requiere un tratamiento cuidadoso al combinar el brillo de múltiples fuentes. En esta cuestión, vamos a explorar cómo calcular la magnitud aparente total de un sistema estelar hipotético cuyas estrellas siguen un patrón de brillo bien definido. Considere el sistema de estrellas Ordisi Oluap, que posee las siguientes características:

El sistema está compuesto por un conjunto de estrellas cuyas magnitudes aparentes siguen un patrón ordenado. La primera y más brillante estrella posee magnitud 0. La magnitud de las estrellas siguientes sigue una progresión

aritmética de razón 1, hasta la última estrella del conjunto, que posee magnitud N .

Su tarea es determinar el brillo combinado del sistema. Encuentre una expresión para la magnitud total (m_T) del sistema en función de N .

3.12. (Intermediario) La magnitud aparente es una medida macroscópica del brillo de una estrella, pero la luz que recibimos es, en verdad, un flujo de partículas cuánticas: los fotones. En el siguiente problema, vamos a conectar estos dos mundos para descubrir cuántos fotones de una estrella débil puede detectar un telescopio moderno cada segundo.

Considere la siguiente situación: Un astrónomo apunta un telescopio con un espejo de 2 metros de diámetro a una estrella con magnitud aparente en la banda V (visual) de $m_V = 15$. La banda V tiene una longitud de onda central de $\lambda_V = 550$ nm. Suponga en este problema que el rayo de luz de la estrella es monocromático, con una longitud de onda igual a la central. El flujo de una estrella de magnitud 0 en la banda V es $F_0 = 3,6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$. El detector del telescopio tiene una eficiencia cuántica del 75%.

- Usando la ley de Pogson, calcule el flujo de energía ($F_\star$) en W/m^2 que llega de la estrella de magnitud 15.
- Calcule la potencia total (P_{tel}), en Watts, que es recolectada por el área del espejo del telescopio.
- Determine la energía ($E_{\text{fotón}}$), en Joules, de un único fotón con longitud de onda de la banda V.
- Calcule el número de fotones (N_{inc}) que alcanzan el detector del telescopio cada segundo.
- Finalmente, aplicando la eficiencia cuántica del detector, determine el número de fotones (N_{det}) que son efectivamente registrados por segundo.

3.13. (Intermedio) Un exoplaneta orbita la estrella enana naranja Rotieh, que posee una luminosidad de $L = 9,5 \times 10^{25} \text{ W}$. El planeta, de radio $R_p = 6.400$ km, se encuentra en una órbita estable a una distancia de $d = 0,5 \text{ UA}$ de la estrella y posee un albedo de $\alpha = 0,35$.

- Calcule la potencia total (en Watts) que es absorbida por el exoplaneta.
- Considerando que el planeta posee una rotación lenta (sincronizada), de modo que un hemisferio está siempre iluminado, y que este está en equilibrio termodinámico, calcule la temperatura de la superficie iluminada en Kelvin (K).

3.14. (Avanzado) (P1 Barra/2018) Suponga que lo que mata un vampiro no sea la luz del Sol, sino el valor del flujo de la luz (W/m^2) que lo alcanza. Así:

- a) Calcule el flujo de la Luna llena en la Tierra.
- b) Es un hecho conocido la distancia media Tierra-Luna está aumentando. Admita que la tasa de alejamiento sea de 4 cm/año y que un vampiro soporte, a lo sumo, sólo $500 \mu W/m^2$ de flujo. Así, calcule el tiempo (en años) que un vampiro tendría que esperar para poder salir sin problemas bajo la luz de la Luna Llena.

Datos:

Radio de la Luna (r_L) = $1,74 \cdot 10^6$ metros

Distancia media Tierra-Luna ($d_{\oplus \rightarrow L}$) = $3,84 \cdot 10^8$ metros

Albedo de la Luna (α_L) = 0,11

3.15. (Avanzado) (P1 Barra/2018) El movimiento de la Tierra es responsable de la llamada anisotropía de dipolo en relación con la Radiación de Fondo Cósmico de Microondas (RFC). Debido al efecto Doppler, la radiación de esta temperatura es ligeramente más caliente en la dirección del movimiento de la Tierra (llamado apex). Mediciones del satélite COBE, y posteriormente del satélite Planck, mostraron que la diferencia de temperaturas en la dirección del apex y anti-apex es de $\Delta T = 1,08 \cdot 10^{-2} K$.

Calcule la velocidad a la que la Tierra está moviéndose en relación a la RFC. Utilice $T_{RFC} = 2,7 K$.

3.16. (Avanzado) (Barra/2021) Uma anã branca é um remanescente estelar composto principalmente por matéria eletronicamente degenerada que não mais produz energia por fusão nuclear. À medida que perde energia por radiação, ela esfria com o tempo e, eventualmente, espera-se que atinja o equilíbrio de temperatura com o espaço, emitindo tão pouca energia que pode vir a ser chamada de anã negra. Nesse problema, analisaremos o resfriamento de la anã branca mais próxima do sistema solar: Sirio B.

Considere que Sirio B seja composta integralmente por carbono e que tenha uma massa de $1,02 M_{\odot}$, raio de $0,0080 R_{\odot}$ e luminosidade de $0,024 L_{\odot}$. Considere, também, que Sirio B tenha raio constante em todos os itens abaixo.

- a) Considerando que la estrella se encuentra a una distancia de 2,64 pc del sistema solar, encuentre su magnitud aparente bolométrica. Ignore cualquier fuente de extinción.
- b) Suponga que Sirio B se enfríe desde una temperatura efectiva T hasta una temperatura efectiva $T - \Delta T$. Encuentre la razón entre la variación de magnitud bolométrica y la variación de temperatura efectiva $\frac{\Delta m}{\Delta T}$. Considere $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$.

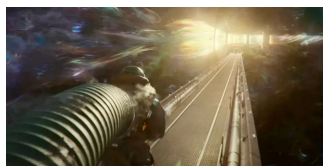
Si es pertinente, utilice: $\ln(1+x) \approx x$ para $x \ll 1$ Exprese su respuesta en función de T .

- c) Considere que Sirio B se enfría 10 K. Calcule la variación de su magnitud bolométrica Δm .
- d) La temperatura interna de una enana blanca es aproximadamente constante en todo su volumen. Sin embargo, en las proximidades de la superficie, su temperatura efectiva cae drásticamente debido a efectos de opacidad. Así, su temperatura efectiva T_{eff} se relaciona con su temperatura interna T_{int} de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$T_{eff} = \alpha \cdot (T_{int})^{\frac{7}{8}} \quad \text{donde } \alpha \approx 0,014 \text{ K}^{\frac{1}{8}}$$

A partir de lo anterior, calcule el tiempo (en años) para que la temperatura efectiva T_{eff} de Sirio disminuya 10 K. Para tal, considere que el calor específico molar a volumen constante del carbono es igual a $c_v = 3R$ donde R es la constante universal de los gases. La masa molar del carbono es de 12 g/mol . Para fines de simplificación, considere que la estrella sólo pierde energía por emisión de radiación. Recuerde que $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$, si es necesario.

3.17. (Avanzado) (OBOA/2024) Para resolver las cuestiones que surgen a lo largo de la serie *Loki*, los personajes necesitan alcanzar el Telar Temporal: un cilindro de longitud infinita y radio R que representa la fusión de todas las líneas temporales. Para evaluar el impacto de la energía irradiada por esas líneas en el ambiente alrededor, Loki utiliza un espectrofotómetro, con el cual captura la frecuencia f correspondiente al pico de emisión de la onda electromagnética. Sin embargo, Loki no posee el conocimiento suficiente en fotometría para calcular una distancia segura hasta el Telar Temporal, por lo cual necesitará de tu ayuda en las próximas etapas. Suponiendo que tanto el Telar Temporal como el traje de Loki se comportan como cuerpos negros, responda a la siguiente cuestión:



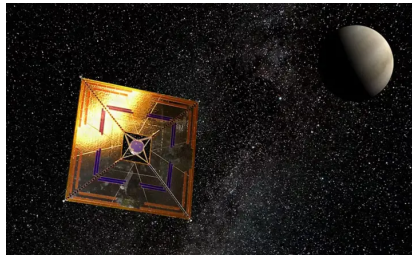
- (a) Determine la temperatura del Telar temporal.
- (b) Sabiendo que la temperatura máxima soportada por el traje de Loki es 150°C , determine la distancia mínima a la que se debe mantener del centro del Telar Temporal, considerando que su traje posee un formato esférico con radio R' .

3.18. (Avanzado) Considerando que las estrellas están distribuidas uniformemente en el universo, muestre que la cantidad de energía que recibe la Tierra

proveniente de una corona esférica (del universo) de radio r y espesor Δr es la misma que la proveniente de una corona esférica de radio R y espesor Δr , con $r \neq R$. Considere también que ambas coronas esféricas tienen a la Tierra como centro y que $\Delta r \ll r$.

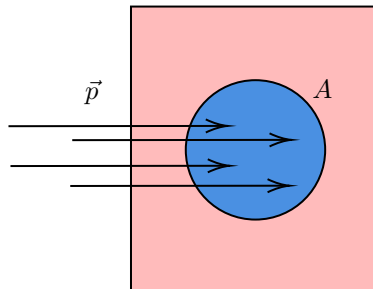
Curiosidad: Este fue uno de los cálculos que llevó a la Paradoja de Olbers, que básicamente cuestiona por qué el cielo es oscuro si existen tantas estrellas.

3.19. (Avanzado) Puede parecer una paradoja, pero la luz, compuesta por fotones sin masa (en reposo), ejerce una fuerza real sobre todo lo que ilumina. Este fenómeno, conocido como presión de radiación, ocurre porque la energía de cada fotón le confiere momento lineal. Al alcanzar una superficie, la transferencia continua de momento de incontables fotones genera una fuerza medible, capaz incluso de impulsar "velas solares" en el vacío del espacio.



Para entender cuantitativamente cómo funciona, vamos a analizar el caso ideal a continuación. Considere un haz de luz monocromático (todos los fotones tienen la misma longitud de onda λ) que incide perpendicularmente sobre una superficie perfectamente especular, de área A .

- (a) Un fotón, a pesar de no tener masa, posee momento lineal. Para un fotón con longitud de onda λ , el módulo de su momento es $p = \frac{h}{\lambda}$, donde h es la constante de Planck. A continuación se esquematiza la situación:



Cuando un fotón colisiona con una superficie perfectamente reflectora, invierte su dirección. El momento transferido para la superficie es la diferencia entre el momento del fotón antes y tras la colisión. A partir de lo

anterior, determine la variación de momento lineal (Δp) transferida para la superficie por un único fotón.

- (b) El flujo de energía (Φ) es la energía total que incide por unidad de área y por unidad de tiempo. Si definiéramos N como el número de fotones que inciden sobre un área A durante un intervalo de tiempo Δt , determine la ecuación para el flujo Φ en función de N , A , Δt , λ , h y c .
- (c) La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza es la tasa de variación del momento en el tiempo ($F = \frac{\Delta p_{\text{total}}}{\Delta t}$). La tasa de variación total del momento es el número total de fotones que alcanzan el área A en un intervalo de tiempo, multiplicado por el momento que cada uno transfiere. Usando los resultados de los ítems anteriores, encuentre una expresión para la fuerza F que el haz de luz ejerce sobre toda la superficie de área A .
- (d) La presión (P) es definida como la fuerza por unidad de área ($P = F/A$). Con base en los resultados anteriores, encuentre la presión de radiación sobre una superficie totalmente reflectora de área A .

3.9 Gabarito :) (Soluciones)

3.1. Si desarrollamos la fórmula del efecto Doppler:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} + 1 = \frac{v + c}{c} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda \frac{c}{c + v}$$

Dado que la fuente se está acercando a nosotros, utilizamos signo negativo para la velocidad, i.e. $v = -50\text{km/s}$. Sustituyendo los valores:

$$\lambda_0 = 537 \cdot \frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5 - 50}$$

De este modo, hallamos que $\lambda_0 \approx 537,09 \text{ nm}$ (opción c).

3.2. Por la ley de Stefan-Boltzmann, la luminosidad L_1 es:

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4$$

Por otro lado, la estrella 2 posee radio $R_2 = \frac{R_1}{2}$ y temperatura $T_2 = 2T_1$. Entonces, su luminosidad es:

$$L_2 = 4\pi \left(\frac{R_1}{2}\right)^2 \sigma (2T_1)^4 = 4\pi \cdot \frac{R_1^2}{4} \cdot \sigma 16T_1^4$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{4\pi \cdot \frac{R_1^2}{4} \cdot \sigma 16T_1^4}{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}$$

Así:

$$\Rightarrow \boxed{L_2 = 4L_1}$$

- 3.3.** Para resolver este problema, utilizamos la ecuación fundamental que relaciona el flujo de energía (F) de una estrella con su luminosidad (L) y su distancia (d) hasta un cuerpo:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Necesitamos la luminosidad del Sol, que, de acuerdo con la tabla de constantes, es $L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26} \text{ W}$. El siguiente paso es convertir la distancia hasta Voyager 1 de Unidades Astronómicas (UA) a metros:

$$d = 160 \text{ UA} \times \left(1,5 \times 10^{11} \frac{\text{m}}{\text{UA}}\right) = 240 \times 10^{11} \text{ m} = 2,4 \times 10^{13} \text{ m}$$

Ahora, reemplazamos los valores de L y d en la ecuación de flujo:

$$F = \frac{3,83 \times 10^{26} \text{ W}}{4\pi(2,4 \times 10^{13} \text{ m})^2}$$

Finalmente, calculamos:

$$F = \frac{3,83 \times 10^{26}}{7,24 \times 10^{27}} \rightarrow \boxed{F \approx 0,0529 \text{ W/m}^2}$$

Este flujo es aproximadamente 25.000 veces más débil que aquel que recibimos aquí en la Tierra ($\approx 1362 \text{ W/m}^2$)

- 3.4.** La magnitud combinada m_c está asociada a un flujo $F_c = F_1 + F_2$, ya que los flujos individuales de las estrellas se suman. Entendiendo esto, comparamos m_c con m_1 mediante la ley de Pogson:

$$m_c - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{F_c}{F_1} \right) = -2,5 \log \left(\frac{F_1 + F_2}{F_1} \right) = -2,5 \log \left(\frac{F_2}{F_1} + 1 \right)$$

Ahora, necesitamos encontrar la razón $\frac{F_2}{F_1}$ a partir de Pogson:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

Como $m_1 = 7,0$ y $m_2 = 8,0$, calculamos $\frac{F_2}{F_1} = 0,40$. Sustituyendo en la ecuación de la magnitud combinada, obtenemos que $m_c = 6,64$.

- 3.5.** La pregunta nos pide analizar la radiación de dos estrellas, A y B, tratadas como cuerpos negros perfectos, con la condición de que la temperatura de A es mayor que la de B ($T_A > T_B$). Para esta tarea, recurrimos a dos leyes físicas fundamentales.

En primer lugar, por la Ley del Desplazamiento de Wien, la longitud de onda del pico de emisión ($\lambda_{\max}$) es inversamente proporcional a la temperatura ($\lambda_{\max} \cdot T = \text{constante}$). Como la Estrella A es más caliente, su pico de emisión ocurrirá en una longitud de onda menor que para la Estrella B ($\lambda_{A,\max} < \lambda_{B,\max}$). Dicho esto, se admite descartar la alternativa (d).

En segunda estancia, por la Ley de Stefan-Boltzmann, la energía total irradiada por unidad de área (F) es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura ($F = \sigma T^4$). Siendo $T_A > T_B$, la Estrella A irradia mucha más energía por unidad de área que la Estrella B. Por esta razón, eliminamos la opción (b).

Finalmente, tanto (c) como (e) son incorrectas porque, en el modelo de cuerpo negro perfecto, la radiación depende exclusivamente de la temperatura. Alterar la temperatura modifica no sólo la intensidad total, sino también la posición del pico y la forma de la curva espectral. Además de eso, factores como la composición química o la distancia no influyen en la radiación de un cuerpo negro ideal.

De esta forma, la única opción que concuerda con ambas leyes es la (a): la Estrella A emitirá más energía total por unidad de área y su pico de emisión ocurrirá en una longitud de onda menor que la de la Estrella B.

Respuesta: (a)

- 3.6.** a) La energía de un único fotón es dada por la radiación de Planck-Einstein:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Donde $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s es la Constante de Planck, $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s es la velocidad de la luz y λ es la longitud de onda en metros. Primero, convertimos la longitud de onda: $\lambda = 290$ nm = $290 \cdot 10^{-9}$ m.

$$E = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34}) \cdot (3 \cdot 10^8)}{290 \cdot 10^{-9}} = \frac{19,89 \cdot 10^{-26}}{290 \cdot 10^{-9}} \rightarrow E \approx 6,86 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

- b) La potencia (energía por segundo) recibida por el detector es la energía de cada fotón multiplicada por el número de fotones que impactan por segundo (Φ).

$$P = E \cdot \Phi$$

Despejando el número de fotones por segundo:

$$\Phi = \frac{P}{E}$$

Usando la potencia dada y la energía calculada en el ítem anterior:

$$\Phi = \frac{2 \cdot 10^{-10} \text{ J/s}}{6,86 \cdot 10^{-19} \text{ J/fotón}} \rightarrow \boxed{\Phi \approx 2,92 \cdot 10^8 \text{ fotones/s}}$$

- 3.7.** Este es un problema clásico en el que parecen estar faltando datos. Sin embargo, podemos utilizar los datos del Sol (tabla de constantes) para compararlo con Andrómeda mediante la ley de Pogson:

$$M_{and} - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{and}}{L_{\odot}} \right)$$

Donde M_{and} es la magnitud absoluta de Andrómeda y $M_{\odot}$ es la magnitud absoluta del Sol. Realizando el cálculo:

$$\Rightarrow M_{and} = -2,5 \log (2,6 \cdot 10^{10}) + 4,80 = -21,24$$

Por la ecuación del módulo de distancia:

$$m_{and} - M_{and} = 5 \log d - 5$$

Es decir:

$$\Rightarrow \log d = \frac{3,44 + 21,2 + 5}{5} = 5,94 \Rightarrow d = 10^{5,94} = 862 \text{ kpc}$$

La pregunta pedía la distancia en años luz, entonces es suficiente recordar que $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ años luz}$ para obtener que $\boxed{d = 2,8 \text{ millones de años luz}}$.

- 3.8.** a) Radio y diámetro angular - VERDADERO

Tenemos la siguiente situación:

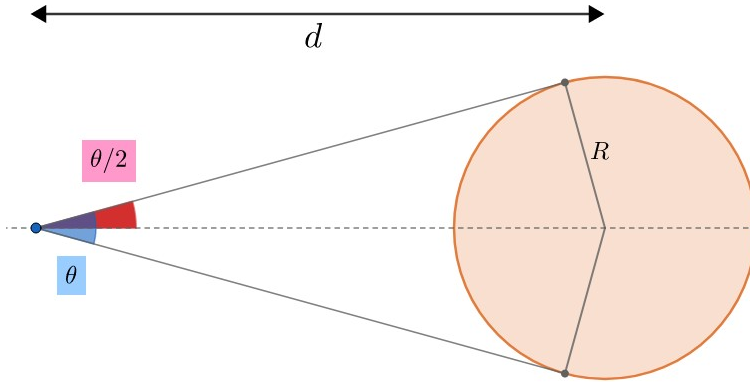


Figura 3.25: Diámetro angular

Así, note que:

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{d}$$

Reescribiendo:

$$d = \frac{R}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Note que, para $\theta \ll 1$:

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2}$$

Entonces:

$$d \approx \frac{2R}{\theta}$$

b) Luminosidad y magnitud aparente - VERDADERO

Sabemos que la luminosidad L de un astro está íntimamente relacionada con su magnitud absoluta M , por lo que es posible hallar L , y con este, aplicar módulo de distancia. Comparando esta estrella con el Sol por Pogson:

$$M - M_{\odot} = -2,5 \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)$$

Reordenando:

$$M = M_{\odot} - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

Una vez descubierta la magnitud absoluta M y teniendo el valor de la magnitud aparente m , basta usar el módulo de distancia para encontrar el valor de d .

$$m - M = 5 \log d - 5$$

c) Flujo y magnitud absoluta - VERDADERO

Este ítem se asemeja mucho al anterior. Podemos encontrar la magnitud aparente m comparando esta estrella con el Sol por Pogson:

$$m - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_{\odot}} \right)$$

Como ya tenemos M y m , podemos encontrar la distancia por el módulo de distancia:

$$\log d = \frac{m - M + 5}{5}$$

d) Flujo y magnitud aparente - FALSO

Dado caso tuviésemos solamente el flujo, bastaría con utilizar la ley de Pogson con el Sol para encontrar la magnitud aparente m . Análogamente, si sólo m fuera dada, la ecuación de Pogson nos permitiría hallar F . Así, esencialmente sólo tenemos una información (F o m), haciendo imposible determinar la distancia.

e) Como vimos en ítems anteriores, la luminosidad y la magnitud absoluta están directamente relacionadas por:

$$M - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

Confirmamos entonces que contamos solo con 1 dato fotométrico de la estrella, por lo tanto, no podemos determinar su distancia hasta nosotros.

f) Clase espectral (OBAFG...), radio y flujo - VERDADERO

Con la clase espectral, tenemos la temperatura T de la estrella. Como conocemos su radio R , podemos determinar la luminosidad L por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Como el flujo F también es conocido, podemos encontrar la distancia d por:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

g) Porcentaje de hierro en el núcleo, magnitud absoluta y magnitud aparente - VERDADERO

A priori, el porcentaje de hierro en el núcleo de la estrella no nos ayuda a calcular la distancia hasta esta. Sin embargo, contamos con m y M , con lo que podemos utilizar el módulo de distancia para encontrar d :

$$m - M = 5 \log d - 5$$

3.9. A partir de la relación dada:

$$L \propto M^3 \Rightarrow \frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3$$

Mas, como $L \propto \frac{M}{t}$:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{M}{t} \cdot \frac{t_{\odot}}{M_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3$$

Entonces, reformulando:

$$t = t_{\odot} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2$$

Finalmente sustituyendo los valores:

$$t \approx 10^{10} \left(\frac{1}{5} \right)^2 \Rightarrow t \approx 4,0 \cdot 10^8 \text{ años}$$

- 3.10.** El orden cronológica correcta es $A \rightarrow B \rightarrow C$. Una estrella como el Sol pasa la mayor parte de su vida en la Secuencia Principal (A). Posteriormente, al agotar el hidrógeno en su núcleo, se expande para hacerse una Gigante Roja (B). Finalmente, por el desprendimiento de sus capas externas, se encoge para hacerse una Enana Blanca (C).
- 3.11.** Como ninguna de las estrellas pequeñas obstruye a sus compañeras, la luminosidad combinada del aglomerado es $L' = NL_i$, donde L_i es la luminosidad de cada estrella individual. Siendo L_0 la luminosidad inicial, tenemos, por Pogson:

$$m' - m_0 = -2,5 \log \left(\frac{NL_i}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_0} \right)$$

Es decir:

$$m' - m_0 = -2,5 \log \left(\frac{NL_i}{L_0} \right)$$

Ahora, encontremos la relación entre L_i y L_0 . Por la Ley de Stefan-Boltzmann:

$$L_0 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

y

$$L_i = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

Luego, dividiendo esas expresiones:

$$\frac{L_i}{L_0} = \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Para encontrar la razón $\frac{r}{R}$ como función de N , necesitamos utilizar la conservación de la masa. Siendo ρ la densidad de las estrellas, tenemos:

$$M_0 = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

Como la masa combinada de las N estrellas es N veces la masa de una estrella individual:

$$M' = N \cdot \left(\rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \right)$$

Usando $M' = M_0$, obtenemos:

$$R^3 = Nr^3 \Rightarrow \frac{r}{R} = N^{-1/3}$$

Uniendo Pogson con la relación entre las luminosidades:

$$m' - m_0 = -2,5 \log \left(N \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

Como $\frac{r}{R} = N^{-1/3}$:

$$m' - m_0 = -2,5 \log \left(N \cdot N^{-2/3} \right)$$

Utilizando la propiedad $\log x^n = n \log x$, tenemos:

$$m' - m_0 = -2,5 \log N^{1/3} = \frac{-2,5}{3} \log N$$

De este modo, llegamos a la respuesta final:

$$m' = m_0 - \frac{2,5}{3} \log N$$

3.12. El principio fundamental para resolver este problema es que los flujos de energía son aditivos, mientras que las magnitudes no son. La magnitud total del sistema (m_T) está relacionada con el flujo total (F_T), que es la suma de los flujos de cada estrella individual (F_i).

A partir de la ecuación de Pogson, podemos expresar el flujo de cualquier estrella en función de su magnitud. Si tomáramos una estrella de referencia con $m_{\text{ref}} = 0$ y flujo F_{ref} , el flujo F_i de una estrella de magnitud m_i es:

$$F_i = F_{\text{ref}} \cdot 10^{-0,4m_i}$$

La magnitud total, m_T , es entonces relacionada a la suma de todos los flujos individuales:

$$m_T = -2,5 \log_{10} \left(\frac{\sum F_i}{F_{\text{ref}}} \right) = -2,5 \log_{10} \left(\sum \frac{F_i}{F_{\text{ref}}} \right)$$

Sustituyendo la expresión del flujo, tenemos:

$$m_T = -2,5 \log_{10} \left(\sum_{i=0}^N 10^{-0,4m_i} \right)$$

En nuestro sistema, las magnitudes son $m_i = 0, 1, 2, \dots, N$. Por lo tanto, la suma se hace:

$$\sum_{i=0}^N 10^{-0,4i} = 10^0 + 10^{-0,4} + 10^{-0,8} + \dots + 10^{-0,4N}$$

Esta es una Progresión Geométrica (PG) donde el primer término es $a_1 = 1$, la razón es $q = 10^{-0,4}$ y el número de términos es $k = N + 1$. Para seguir con el procedimiento, requerimos la fórmula de la suma de una PG.

Vamos a deducir la fórmula para la suma S de los k primeros términos de una PG con primer término a_1 y razón q . La suma puede ser descrita como:

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{k-1}$$

Multiplicando toda la ecuación por la razón q :

$$qS = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^k$$

Ahora, restamos la segunda ecuación de la primera ($S - qS$):

$$S - qS = (a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{k-1}) - (a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^k)$$

La mayoría de los términos se cancelan, quedando apenas el primer término de S y el último término de qS .

$$S(1 - q) = a_1 - a_1q^k$$

Factorizando a_1 :

$$S(1 - q) = a_1(1 - q^k)$$

Resolviendo para S , obtenemos la fórmula de la suma de la PG:

$$S = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Ahora, aplicamos la fórmula de la suma de la PG que acabamos de deducir en la expresión encontrada en la primera parte. Nuestros parámetros son:

- Primer término: $a_1 = 1$
- Razón: $q = 10^{-0,4}$
- Número de términos: $k = N + 1$

La suma de los términos de la PG es:

$$S = 1 \cdot \frac{1 - (10^{-0,4})^{N+1}}{1 - 10^{-0,4}} = \frac{1 - 10^{-0,4(N+1)}}{1 - 10^{-0,4}}$$

Finalmente, sustituimos esta suma en la ecuación de la magnitud total:

$$m_T = -2,5 \log_{10}(S)$$

$$m_T = -2,5 \log_{10} \left(\frac{1 - 10^{-0,4(N+1)}}{1 - 10^{-0,4}} \right)$$

- 3.13.** a) Utilizamos la ecuación de Pogson para comparar la estrella observada ($m_{\star} = 15$) con la estrella de referencia ($m_0 = 0$).

$$m_{\star} - m_0 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_{\star}}{F_0} \right)$$

$$15 - 0 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_{\star}}{3,6 \times 10^{-8}} \right)$$

Despejando el logaritmo:

$$\log_{10} \left(\frac{F_{\star}}{F_0} \right) = \frac{15}{-2,5} = -6$$

Para encontrar la razón de los flujos, aplicamos el antilogaritmo (potencia de 10):

$$\frac{F_{\star}}{F_0} = 10^{-6}$$

Finalmente, calculamos el flujo de la estrella:

$$F_{\star} = 10^{-6} \cdot (3,6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2)$$

$$\boxed{F_{\star} = 3,6 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2}$$

- b) La potencia es el flujo multiplicado por el área de recolección del telescopio. El diámetro del espejo es de 2 m, por lo que su radio es $R_{\text{tel}} = 1$ m.

$$A_{\text{tel}} = \pi R_{\text{tel}}^2 = \pi (1 \text{ m})^2 = \pi \text{ m}^2$$

$$P_{\text{tel}} = F_{\star} \cdot A_{\text{tel}} = (3,6 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2) \cdot (\pi \text{ m}^2)$$

$$\boxed{P_{\text{tel}} \approx 1,13 \times 10^{-13} \text{ W}}$$

- c) La energía de un fotón está dada por la relación de Planck-Einstein:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{hc}{\lambda}$$

Con los valores $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ y $\lambda = 550 \text{ nm} = 550 \times 10^{-9} \text{ m}$:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{(6,63 \times 10^{-34}) \cdot (3 \times 10^8)}{550 \times 10^{-9}}$$

$$\boxed{E_{\text{fotón}} \approx 3,61 \times 10^{-19} \text{ J}}$$

- d) La tasa de fotones por segundo (N_{inc}) es la potencia total (energía por segundo) dividida por la energía de cada fotón.

$$N_{\text{inc}} = \frac{P_{\text{tel}}}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1,13 \times 10^{-13} \text{ J/s}}{3,61 \times 10^{-19} \text{ J/fotón}}$$

$$N_{\text{inc}} \approx 313.000 \text{ fotones/s}$$

- e) Aplicamos la eficiencia cuántica de 75% ($\eta = 0,75$) a la tasa de fotones que inciden en el detector.

$$N_{\text{det}} = N_{\text{inc}} \cdot \eta = 313.000 \cdot 0,75$$

$$N_{\text{det}} \approx 234.750 \text{ fotones/s}$$

El detector del telescopio registra, por lo tanto, aproximadamente 235 mil fotones por segundo provenientes de esta estrella.

- 3.14.** a) Primero, calculamos el flujo de energía (F) de la estrella en la distancia en que el planeta orbita. La distancia en metros es $d = 0,5 \times (1,5 \times 10^{11}) = 7,5 \times 10^{10} \text{ m}$.

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{9,5 \times 10^{25}}{4\pi(7,5 \times 10^{10})^2} \approx 1344 \text{ W/m}^2$$

La potencia incidente (P_i) es el flujo multiplicado por el área de la sección transversal del planeta ($A = \pi R_p^2$). El radio del planeta en metros es $R_p = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$.

$$P_i = F \cdot \pi R_p^2 = 1344 \cdot \pi(6,4 \times 10^6)^2 \approx 1,73 \times 10^{17} \text{ W}$$

La potencia absorbida (P_{abs}) toma en cuenta el albedo:

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha)P_i = (1 - 0,35) \cdot (1,73 \times 10^{17})$$

$$P_{\text{abs}} \approx 1,12 \times 10^{17} \text{ W}$$

- b) En equilibrio termodinámico, la potencia absorbida es igual a la potencia irradiada (P_{rad}). Para un planeta de rotación lenta, la energía es irradiada por el hemisferio iluminado, cuyo área es $A_{\text{rad}} = 2\pi R_p^2$.

$$P_{\text{rad}} = \sigma A_{\text{rad}} T^4 = \sigma(2\pi R_p^2) T^4$$

Igualando $P_{\text{abs}} = P_{\text{rad}}$:

$$1,12 \times 10^{17} = (5,67 \times 10^{-8}) \cdot (2\pi(6,4 \times 10^6)^2) \cdot T^4$$

$$1,12 \times 10^{17} \approx (1,46 \times 10^7) \cdot T^4$$

Despejando T :

$$T^4 = \frac{1,12 \times 10^{17}}{1,46 \times 10^7} \approx 7,67 \times 10^9 \text{ K}^4$$

$$T = (7,67 \times 10^9)^{1/4} \rightarrow \boxed{T \approx 296 \text{ K}}$$

- 3.15.** a) La luna no posee luminosidad propia; esta solo refleja la luz del sol. Por este motivo, su luminosidad será el flujo del sol en la luna multiplicado por su área transversal y su albedo:

$$L_L = \left(\frac{L_\odot}{4\pi d_{\odot \rightarrow L}^2} \right) \cdot (\pi r_L^2) \cdot \alpha_L$$

Como la luna llena está del lado opuesto del Sol en relación a la Tierra¹⁷, su distancia al Sol $d_{\odot \rightarrow L}$ es:

$$d_{\odot \rightarrow L} = d_{\odot \rightarrow \oplus} + d_{\oplus \rightarrow L}$$

Así, podemos realizar las debidas cuentas para obtener $L_L = 1,42 \cdot 10^{15} \text{ W}$. Ya con la luminosidad de la Luna llena, podemos determinar su flujo incidente F_L en la Tierra:

$$F_L = \frac{L_L}{4\pi d_{\odot \rightarrow L}^2} = 7,65 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

- b) El flujo de la luna llena en el caso límite (máximo flujo soportado por el vampiro) será $500 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$, así:

$$500 \cdot 10^{-6} = \frac{L_L}{4\pi d_{\oplus \rightarrow L}^2}$$

La luminosidad de la luna puede ser descrita como:

$$L_L = \frac{L_\odot}{4\pi d_{\odot \rightarrow L}^2} \pi r_L^2 \alpha_L$$

Juntando ambas expresiones:

$$500 \cdot 10^{-6} = \frac{L_\odot}{16\pi d_{\oplus \rightarrow L}^2 d_{\odot \rightarrow L}^2} r_L^2 \alpha_L$$

Reformulando la ecuación y utilizando los valores del enunciado:

$$d_{\oplus \rightarrow L}^2 d_{\odot \rightarrow L}^2 = 5,07 \cdot 10^{39}$$

Quitando la raíz:

¹⁷Ver apéndice de eclipses.

$$d_{\oplus \rightarrow L} d_{\odot \rightarrow L} = 7,12 \cdot 10^{19}$$

Ahora, como $d_{\odot \rightarrow L} = d_{\odot \rightarrow \oplus} + d_{\oplus \rightarrow L}$, llegamos a una ecuación del segundo grado:

$$d_{\oplus \rightarrow L}^2 + d_{\oplus \rightarrow \odot} d_{\oplus \rightarrow L} - 7,12 \cdot 10^{19} = 0$$

Resolviendo por Bhaskara, encontramos:

$$d_{\oplus \rightarrow L} = -3 \cdot 10^{13} \text{ o } 4,75 \cdot 10^8$$

El valor negativo no tiene sentido, entonces la distancia Tierra-Luna en la situación límite donde el vampiro puede exponerse a la Luna Llena es cerca de $4,75 \cdot 10^8$ m. Como la distancia Tierra-Luna inicial era $3,84 \cdot 10^8$ m y la tasa de alejamiento es de 4 cm/año, el tiempo Δt que el vampiro debe esperar es:

$$\Delta t = \frac{(4,75 \cdot 10^8) - (3,84 \cdot 10^8)}{0,04} = 2 \cdot 10^8 \text{ años}$$

Cabe destacar que la respuesta final solo debe poseer una cifra significativa, por lo cual no se deben colocar dígitos después del 2.

3.16. Para resolver este ejercicio, vamos a necesitar solamente de la Ley de Wien y del efecto Doppler de la luz:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

La siguiente imagen ilustra la situación del enunciado:

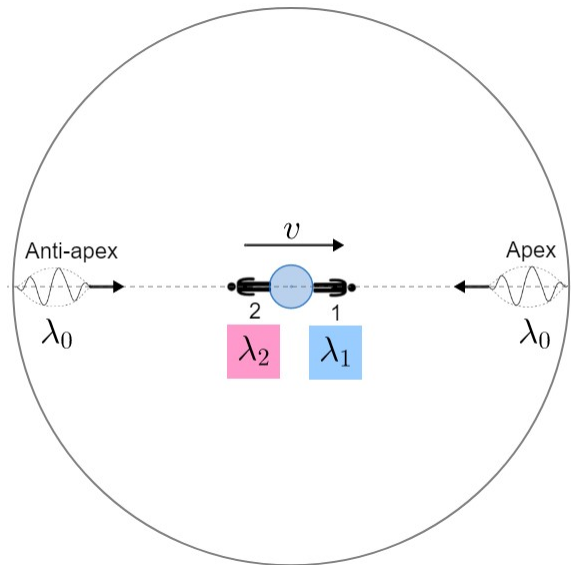


Figura 3.26: Redshift y blueshift de la luz de la RFC

Donde λ_0 es la longitud de onda de mayor emisión de la RFC, i.e. $b = \lambda_0 T_{RFC}$. Ahora, determinemos λ_1 y λ_2 como función de λ_0 y v . En el referencial (sistema de referencia) del observador 1, el "universo" se está aproximando con velocidad v , por lo que ocurrirá un blueshift. Entonces:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 - \frac{v}{c}$$

Por otro lado, en el referencial del 2, el "universo" está alejándose con v , inmediatamente:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = 1 + \frac{v}{c}$$

Para simplificar la lectura, consintamos que $\beta = \frac{v}{c}$. Además, por la ley de Wien, $T_1 = \frac{b}{\lambda_1}$ y $T_2 = \frac{b}{\lambda_2}$. Así:

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_0 (1 - \beta)} = \frac{T_{RFC}}{1 - \beta}$$

y

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_0 (1 + \beta)} = \frac{T_{RFC}}{1 + \beta}$$

Note que $T_1 > T_2$. Como $\Delta T = T_1 - T_2$, tenemos:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = T_{RFC} \left(\frac{1}{1 - \beta} - \frac{1}{1 + \beta} \right)$$

Denotemos $r = \frac{\Delta T}{T_{RFC}}$ (conocido, ya que tenemos tanto ΔT como T_{RFC}) y ahora solo queda resolver la ecuación de arriba. Tenemos:

$$r = \frac{1}{1 - \beta} - \frac{1}{1 + \beta} = \frac{2\beta}{1 - \beta^2}$$

Es decir:

$$\beta^2 + \frac{2}{r}\beta - 1 = 0$$

Por Bhaskara:

$$\beta = \frac{-\frac{2}{r} \pm \sqrt{\frac{4}{r^2} + 4}}{2} = -\frac{1}{r} \pm \sqrt{\frac{1}{r^2} + 1}$$

Note que el $\pm$ é $+$, ya que tendríamos un $\beta < 0$ en caso de que fuese $-$. A partir del enunciado, $r = \frac{1,08 \cdot 10^{-2}}{2,7} = 4 \cdot 10^{-3}$. Substituyendo en la ecuación, encontramos $\beta = 2,0 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{v = 600 \text{ km/s}}$.

- 3.17.** a) En primer lugar, tenemos la siguiente expresión para el flujo de la estrella:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Comparando con la magnitud absoluta del Sol:

$$M_{\odot} - m_{bol} = 2,5 \log \left(\frac{F_{bol}}{F_{\odot}} \right) = 2,5 \log \left(\frac{10^2}{2,64^2} \cdot 0,024 \right)$$

Sabiendo que $M_{\odot} = 4,83$, resolvemos que:

$$\boxed{m_{bol} \approx 5,96}$$

- b) Podemos escribir que:

$$m_f - m_i = -2,5 \log \left(\frac{L_f}{L_i} \right) = -2,5 \log \left(\frac{\alpha(T - \Delta T)^4}{\alpha T^4} \right)$$

En la ecuación de arriba, α es una constante que depende de la distancia, el radio y otras constantes físicas. Así, tendremos:

$$\Delta m = -2,5 \log \left(\frac{T - \Delta T}{T} \right)^4 \rightarrow \Delta m = -10 \log \left(1 - \frac{\Delta T}{T} \right)$$

Modificando el logaritmo para obtener una base neperiana:

$$\Delta m = -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 - \frac{\Delta T}{T} \right) \rightarrow \Delta m \approx \frac{10}{\ln(10)} \cdot \frac{\Delta T}{T}$$

Es entonces que llegamos a la respuesta:

$$\boxed{\frac{\Delta m}{\Delta T} = 4,34 \cdot \frac{1}{T}}$$

- c) En este ítem, primeramente necesitamos calcular la temperatura efectiva de Sirio B:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Reemplazando los valores presentados en el enunciado, encontramos:

$$T_{eff} \approx 25400 \text{ K}$$

Utilizando la fórmula anterior, llegamos a:

$$\Delta m = \frac{4,34}{25400} \cdot (10) \rightarrow \boxed{\Delta m = +1,71 \cdot 10^{-3}}$$

- d) Aquí nos topamos con la siguiente relación entre la variación de la temperatura y la energía emitida por la enana blanca:

$$Mc_v \Delta T = \Delta E$$

$$Mc_v \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Podemos escribir la siguiente ecuación:

$$Mc_v \frac{\Delta T_{int}}{\Delta t} = L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Necesitamos encontrar una relación entre ΔT_{int} y ΔT_{eff} . Utilizando la ecuación entregada en el enunciado, analizaremos lo que ocurre cuando hay un decrecimiento de temperatura ΔT_{eff} :

$$T_{eff} - \Delta T_{eff} = \alpha \cdot (T_{int} - \Delta T_{int})^{\frac{7}{8}} = \alpha \cdot T_{int}^{\frac{7}{8}} \cdot \left(1 - \frac{\Delta T_{int}}{T_{int}} \right)^{\frac{7}{8}}$$

Recurriendo a $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$:

$$T_{eff} - \Delta T_{eff} = \alpha \cdot T_{int}^{\frac{7}{8}} \cdot \left(1 - \frac{7\Delta T_{int}}{8T_{int}}\right)$$

Así, obtenemos la siguiente relación:

$$\Delta T_{eff} = \alpha \cdot \frac{7\Delta T_{int}}{8T_{int}^{\frac{1}{8}}}$$

$$\Delta T_{int} = \frac{8 \cdot T_{int}^{\frac{1}{8}} \Delta T_{eff}}{7\alpha}$$

Ahora, como conocemos la dependencia de T_{int} con T_{eff} basta que introduzcamos T_{eff} en la relación de arriba y, después, la utilicemos en la expresión que se asocia con la luminosidad:

$$\Delta T_{int} = \frac{8 \cdot \Delta T_{eff}}{7\alpha} \cdot \left(\frac{T_{eff}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$Mc_v \cdot \frac{8 \cdot \Delta T_{eff}}{7\alpha} \cdot \left(\frac{T_{eff}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}} = L\Delta t$$

Como la luminosidad es aproximadamente constante (ya que la temperatura efectiva cambia muy poco), podemos considerarla inalterable. Despejando Δt arriba:

$$\Delta t = Mc_v \cdot \frac{8 \cdot \Delta T_{eff}}{7\alpha \cdot L} \cdot \left(\frac{T_{eff}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Sabemos que la masa molar del carbono es de 12 g/mol . Entonces, tenemos que el calor específico del carbono puede ser escrito como:

$$c_v = 3 \cdot 8,314 \frac{J}{mol \cdot K} = \frac{3 \cdot 8,314 \cdot 10^3}{12} \frac{J}{kg \cdot K}$$

Podemos, entonces, calcular el Δt haciendo las debidas sustituciones:

$$\boxed{\Delta t \approx 93.000 \text{ años}}$$

3.18. (a) Por la ecuación fundamental de la ondulación aplicada a ondas electromagnéticas:

$$c = \lambda f$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Por la ley de Wien:

$$\lambda T = b$$

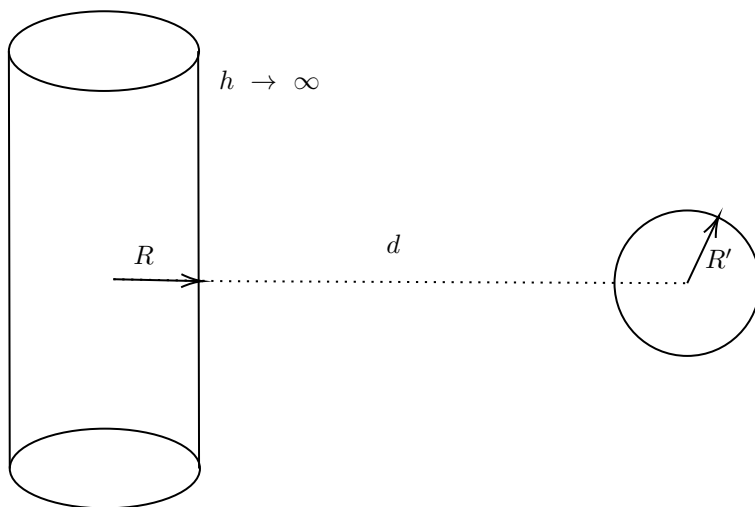
$$\frac{c}{f}T = b$$

$$T = \frac{bf}{c}$$

Reemplazando $b = 2,898 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$ e $c = 3 \times 10^8 \text{m}$:

$$T = 9.66 \times 10^{-12} f$$

(b) Aquí, la situación es un poco diferente de los ejercicios convencionales, ¿cierto? La distribución de energía asume un formato cilíndrico, acompañando la estructura de la línea temporal. Podemos representar esa configuración de la siguiente manera:



El primer punto importante es que la energía no puede simplemente desaparecer, inmediatamente es conservada. Dado que potencia representa energía por unidad de tiempo, la potencia irradiada por el cilindro P_C debe ser la misma que la potencia recibida P_L por puntos en el cilindro de radio d :

$$P_C = P_L$$

$$F_C \cdot 2\pi R h = F_L \cdot 2\pi d h$$

$$F_C \cdot R = F_L \cdot d$$

Sabiendo que el flujo F puede ser expresado en función de la temperatura T como $F = \sigma T^4$:

$$\sigma T_C^4 \cdot R = \sigma T_L^4 \cdot d$$

$$T_L = T_C \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^{1/4}$$

Como la temperatura máxima soportada por el traje de Loki es 150°C , o 423 K , y la temperatura T_C del Telar fue determinada anteriormente como $T_C = 9.66 \cdot 10^{-12}f$, tenemos:

$$423 = 9.66 \cdot 10^{-12}f \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^{1/4}$$

$$d = R \times (2.28 \cdot 10^{-14}f)^4$$

$$\boxed{d = 2.28 \cdot 10^{-55}Rf^4}$$

- 3.19.** Denominamos $\bar{L}$ a la luminosidad media de las estrellas en nuestro universo, y η a la densidad numérica de estrellas (número de estrellas por unidad de volumen del universo). El número de estrellas entre r y $r + \Delta r$ está dado por:

$$\Delta N = \eta \cdot 4\pi r^2 \Delta r$$

Por lo tanto, la luminosidad de las estrellas en ese intervalo es:

$$dL_r = \bar{L} \cdot \Delta N = \eta \bar{L} \cdot 4\pi r^2 \Delta r$$

Como $\Delta r \ll r$, el flujo (brillo) de esas estrellas en la Tierra es:

$$dF_r = \frac{dL_r}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{dF_r = 4\pi\eta\bar{L}\Delta r}$$

Como el resultado no depende de r , está demostrado lo que el enunciado pedía.

- 3.20. (a)** El momento es una magnitud vectorial. Si definiéramos la dirección de incidencia como positiva, el momento inicial del fotón es $p_{\text{inicial}} = +\frac{h}{\lambda}$. Como la colisión es perfectamente reflectora, el fotón invierte su dirección, y su momento final es $p_{\text{final}} = -\frac{h}{\lambda}$.

La variación de momento del *fotón* es: $\Delta p_{\text{fotón}} = p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}} = \left(-\frac{h}{\lambda}\right) - \left(+\frac{h}{\lambda}\right) = -\frac{2h}{\lambda}$

Por la ley de la conservación del momento, el momento transferido a la *superficie* debe ser igual en módulo y opuesto en señal a la variación de momento del fotón. Por lo tanto:

$$\boxed{\Delta p = -\Delta p_{\text{fotón}} = \frac{2h}{\lambda}}$$

El factor 2 surge porque la superficie no sólo absorbe el momento del fotón, sino que también suministra el momento necesario para "empujarlo" de vuelta.

- (b) El flujo de energía (Φ) es, por definición, la energía total (ΔE_{total}) que incide por unidad de área (A) y por unidad de tiempo (Δt).

$$\Phi = \frac{\Delta E_{\text{total}}}{A \cdot \Delta t}$$

La energía total es el número de fotones (N) multiplicado por la energía de un único fotón ($E_{\text{fotón}}$). La energía de un fotón es $E_{\text{fotón}} = \frac{hc}{\lambda}$.

$$\Delta E_{\text{total}} = N \cdot E_{\text{fotón}} = N \frac{hc}{\lambda}$$

Sustituyendo la energía total en la ecuación de flujo, obtenemos:

$$\Phi = \frac{N \frac{hc}{\lambda}}{A \cdot \Delta t} \rightarrow \boxed{\Phi = \frac{Nhc}{A \cdot \Delta t \cdot \lambda}}$$

- (c) La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza (F) es la tasa de variación del momento total en el tiempo.

$$F = \frac{\Delta p_{\text{total}}}{\Delta t}$$

El momento total transferido es el número de fotones (N) que colisionan en el intervalo Δt , multiplicado por el momento que cada uno transfiere (Δp del ítem a).

$$\Delta p_{\text{total}} = N \cdot \Delta p = N \frac{2h}{\lambda}$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza:

$$F = \frac{1}{\Delta t} \left(N \frac{2h}{\lambda} \right) = \frac{2Nh}{\Delta t \cdot \lambda}$$

Ahora, podemos usar la relación del ítem (b) para simplificar, a partir del cual, despejamos el término $\frac{Nh}{\Delta t \cdot \lambda}$:

$$\Phi = \frac{Nhc}{A\Delta t\lambda} \implies \frac{Nh}{A\Delta t\lambda} = \frac{\Phi}{c} \implies \frac{Nh}{\Delta t\lambda} = \frac{\Phi \cdot A}{c}$$

Sustituyendo esto en nuestra expresión para la fuerza:

$$F = 2 \left(\frac{Nh}{\Delta t \cdot \lambda} \right) \rightarrow \boxed{F = 2 \frac{\Phi \cdot A}{c}}$$

- (d) La presión (P) es la fuerza por unidad de área.

$$P = \frac{F}{A}$$

Utilizando el resultado del ítem (c):

$$P = \frac{1}{A} \left(\frac{2\Phi A}{c} \right)$$

Cancelando el área A , llegamos a la expresión final para la presión de radiación sobre la superficie perfectamente reflectora:

$$\boxed{P = \frac{2\Phi}{c}}$$

Capítulo 4

Telescopios y Detectores

Es común decir que el cielo es el laboratorio de la astronomía, ya que es a partir de él que realizamos todas las observaciones que fundamentan nuestro conocimiento del Universo. Durante mucho tiempo, el ojo humano limitaba cuánto podíamos estudiar el cielo; sin embargo, ese problema fue eventualmente resuelto con el surgimiento de los telescopios, que se convirtieron en una de las principales herramientas de ese estudio. En este capítulo, estudiaremos cómo funcionan los telescopios y, de forma general, los detectores.

4.1 Luz

Antes de analizar el funcionamiento de los telescopios, es importante que comprendamos el elemento que posibilita su propia existencia: la luz, la cual es el agente físico que, actuando sobre nuestros órganos visuales, produce la sensación de la visión. En la óptica geométrica nos interesamos por la trayectoria seguida por la luz, y no por su naturaleza en sí, la cual se estudia en la óptica física. Así, veremos los tres principios que rigen tal trayectoria:

1 - Principio de la propagación rectilínea

“En los medios transparentes y homogéneos, la luz se propaga en línea recta”

Un medio homogéneo posee las mismas características en todos los puntos, así que nada es más razonable que la luz se propague en línea recta en ellos. Por ese motivo decimos “rayos de luz”, pero no “espirales de luz”, por ejemplo.

2 - Principio de independencia de los rayos de luz

“Cuando dos rayos de luz se cruzan, la trayectoria de cada uno de ellos no es afectada por el otro”

Para verificar este principio, toma dos linternas y apúntalas de forma que la

luz producida por una se cruce con la luz producida por la otra. La relevancia práctica de este concepto es que podemos analizar un rayo de luz específico sin preocuparnos por la presencia de otros rayos.

3 - Principio de reversibilidad de los rayos de luz

“En condiciones idénticas, la trayectoria seguida por la luz es independiente del sentido de propagación.”

Este es otro principio que tiene sentido intuitivamente. Viendo una foto de un láser, es imposible determinar de qué lado surgió.

Aproximación de largas distancias

En astronomía, nos interesa observar objetos extremadamente distantes. Así, una aproximación razonable para los rayos de luz provenientes de esos objetos es que llegan paralelos entre sí, tal como puede observarse en la figura 4.1.

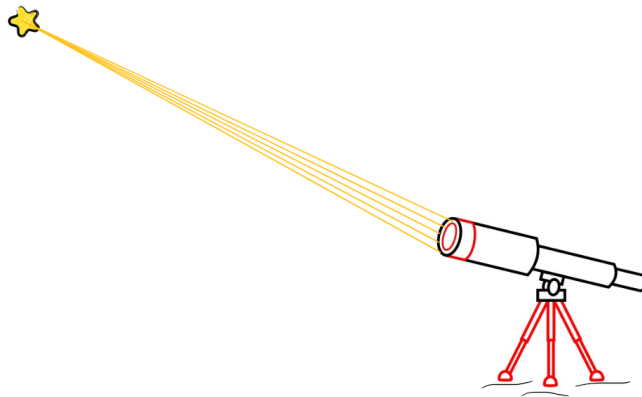


Figura 4.1: Rayos aproximadamente paralelos

4.1.1 Reflexión y Refracción

La reflexión y la refracción de la luz son los principales fenómenos ópticos que vemos en nuestro día a día. Son ellos los que posibilitan el uso de espejos (reflexión) y lentes (refracción) en telescopios, y por eso son extremadamente importantes para nuestros fines.

Reflexión de la luz

La reflexión de la luz es un fenómeno que consiste en el hecho de que la luz vuelve a propagarse en el medio de origen tras incidir en una superficie de se-

paración de ese medio con otro. La principal propiedad de la reflexión es que el ángulo de incidencia (i) es igual al ángulo de reflexión (r), tal como puede observarse en la figura 4.2.

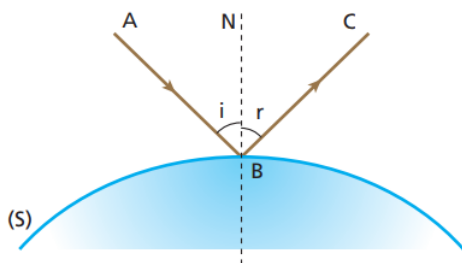


Figura 4.2: Reflexión de la luz

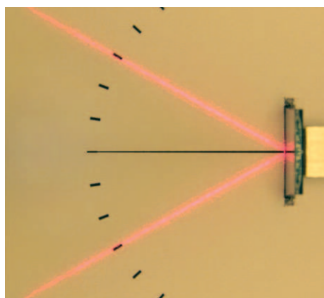


Figura 4.3: Ejemplo de la reflexión de la luz

Refracción de la luz

La refracción de la luz es un fenómeno que ocurre cuando la luz es transmitida entre dos medios diferentes. Para nuestros objetivos, basta saber que la luz tiende a aproximarse a la normal (N) cuando pasa de un medio menos refringente a otro más refringente, como es el caso de la figura 4.4, que representa la situación en que $n_2 > n_1$ ¹

¹ n se denomina índice de refracción, y mide la refringencia de un medio. Por ejemplo, el índice de refracción del vacío es 1, mientras que el índice de refracción del agua es cercano a 1,33.

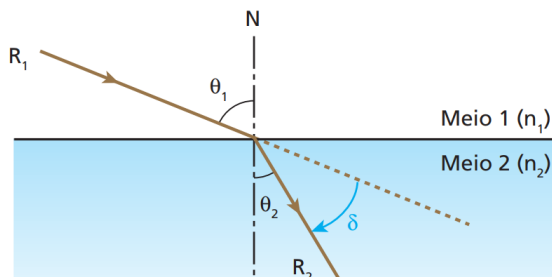
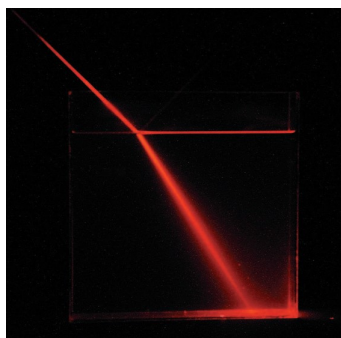
Figura 4.4: Refracción de la luz ($n_2 > n_1$)

Figura 4.5: Ejemplo de la refracción de la luz

4.2 Lentes y Espejos

En esta sección, haremos un breve estudio de los fundamentos de la óptica geométrica presentes en la formación de imágenes en telescopios.

4.2.1 Espejos Planos

Formación de imágenes

Usando la propiedad de la reflexión, podemos mostrar que la imagen formada por un espejo plano es idéntica al objeto, excepto que está invertida con relación al espejo. Véase la figura 4.6:

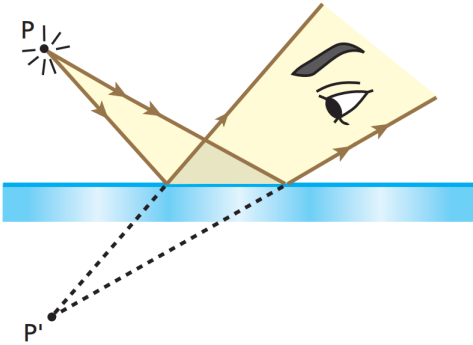


Figura 4.6: Espejo plano

Obsérvese que, para el observador, es como si todos los rayos de luz vinieran de un punto P' simétrico a P con relación al espejo. Como una fuente extensa no pasa de un conjunto de diversas fuentes puntuales, la imagen de cualquier cuerpo colocado frente a un espejo será invertida, como queríamos demostrar.

Aplicaciones

Como los espejos planos redirigen los rayos de luz sin deformar la imagen que sería formada sin su presencia, es muy conveniente utilizarlos en telescopios. La figura 4.7 muestra algunos ejemplos de ello.

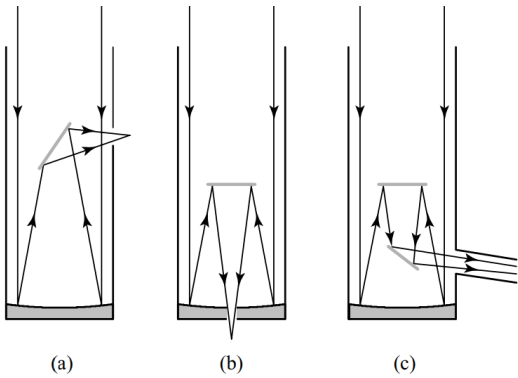


Figura 4.7: (a) Newtoniano, (b) Cassegrain, (c) Coudé

4.2.2 Lentes

Las lentes esféricas, que estamos llamando convenientemente solo “lentes”, están formadas por la asociación de dos dióptricos: uno necesariamente esférico y el

otro plano o esférico². Véase en la figura 4.8 cuáles son los tipos de lentes esféricas³.

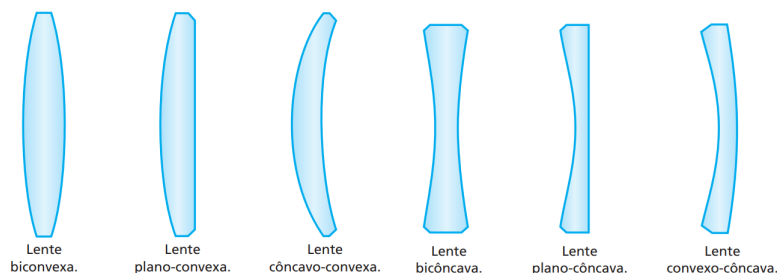


Figura 4.8: Tipos de lentes esféricas

Ahora, necesitamos distinguir entre lentes convergentes y divergentes. El primer tipo, tal como dice su nombre, tiende a converger los rayos de luz. Por otro lado, la tendencia de las lentes divergentes es divergirlos. En la práctica, una lente es convergente si sus bordes son delgados, como en los tres primeros ejemplos de la figura 4.8, y divergente si sus bordes son gruesos, como en las otras tres lentes de la misma imagen.

Formación de imágenes

Así como usamos la masa para distinguir cuán “pesado” es un objeto, definimos la distancia focal f de una lente para medir cuánto desvía los rayos de luz. Además, llamamos eje óptico, o eje principal, a la recta perpendicular a la lente que pasa por su centro, este que se llama centro óptico. Véase la imagen 4.9:

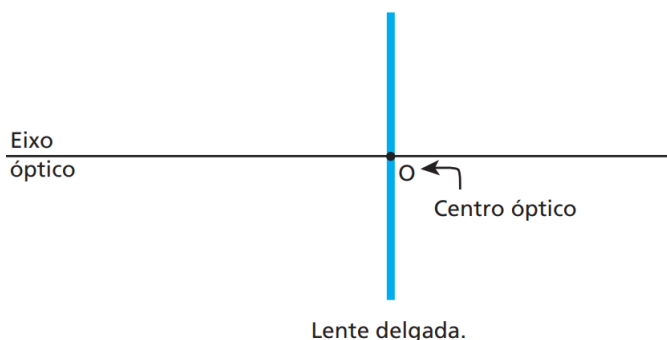


Figura 4.9: Elementos de una lente

²Un dióptrico es un sistema constituido por dos medios de diferentes índices de refracción. Si la frontera entre esos medios es plana, como en la figura 4.4, decimos que tenemos un dióptrico plano. Por otro lado, si la frontera es esférica, decimos que el sistema es un dióptrico esférico.

³No es necesario memorizarlos.

Ahora que sabemos cómo definir y distinguir una lente, podemos ver sus tres propiedades más relevantes para la astronomía:

Propiedad 1

En lentes convergentes, rayos de luz que entran paralelos al E.O. (eje óptico) van al foco⁴ y rayos de luz que vienen del foco salen paralelos al E.O.⁵. En lentes divergentes, rayos de luz que entran paralelos al E.O. salen con sus prolongaciones pasando por el foco y rayos de luz cuyos prolongamientos pasan por el foco salen paralelos al E.O.⁶

Propiedad 2

Rayos de luz que entran pasando por el centro óptico salen inalterados, tanto en lentes convergentes como divergentes

Propiedad 3

En lentes convergentes, rayos que entran paralelos entre sí (no necesariamente paralelos al E.O.) se encuentran en un punto en el plano focal⁷. Existen otros tres casos análogos a este, que pueden visualizarse en las imágenes.

Ahora, vamos a visualizar mejor cada una de esas propiedades:

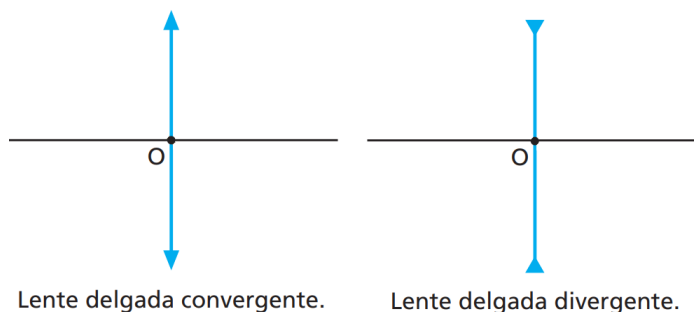


Figura 4.10: Representación de cada tipo de lente

⁴El foco, o punto focal, es el punto que dista f de la lente y está sobre el eje óptico. Obsérvese que, en realidad, existen dos puntos focales, uno delante y otro detrás de la lente.

⁵Obsérvese que, por el principio de reversibilidad de los rayos de luz, ambos casos dicen esencialmente lo mismo.

⁶Puedes querer ver las figuras 4.11 y 4.12 para visualizar estas propiedades.

⁷El plano focal es la recta perpendicular al eje óptico que pasa por el punto focal.

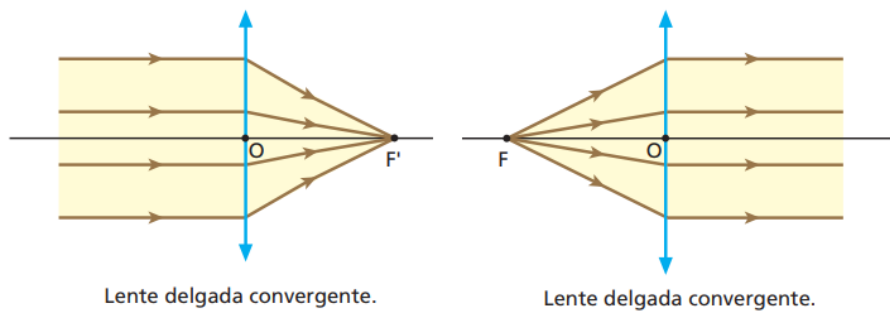


Figura 4.11: Propiedad 1 - Lentes convergentes

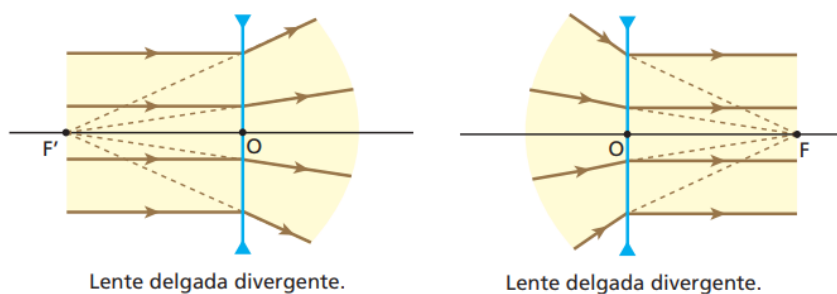


Figura 4.12: Propiedad 1 - Lentes divergentes

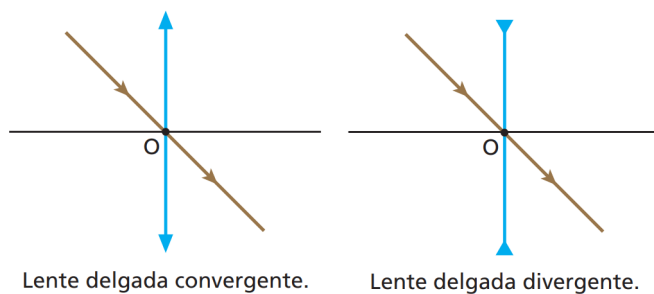


Figura 4.13: Propiedad 2

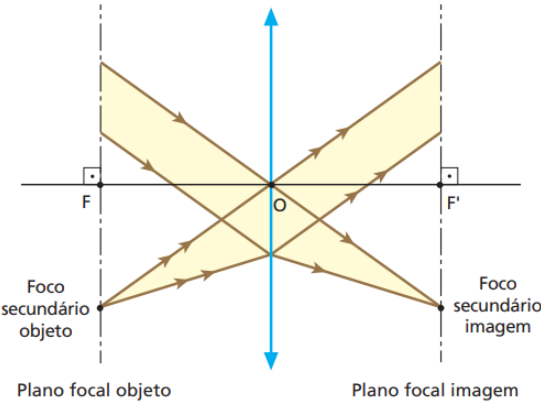


Figura 4.14: Propiedad 3 - Lentes convergentes

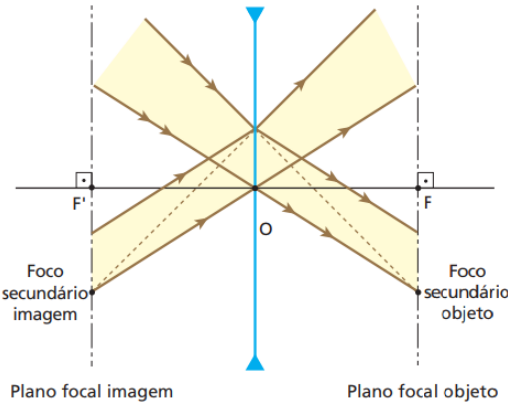


Figura 4.15: Propiedad 3 - Lentes divergentes

Aplicaciones

Como veremos en la sección 4.4, los telescopios refractores utilizan dos lentes en su construcción. Uno es el modelo Kepleriano, que utiliza dos lentes convergentes, y el otro es el Galileano, que utiliza una convergente y una divergente. Examinemos el modelo Kepleriano:

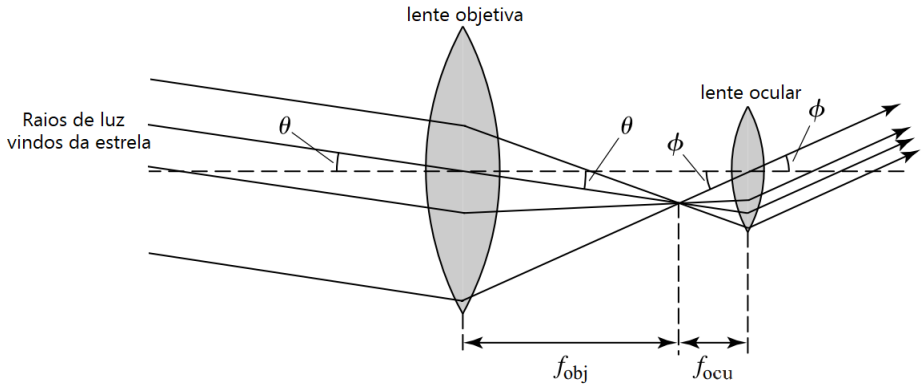


Figura 4.16: Telescopio refractor kepleriano

Obsérvese:

1. Rayos de luz paralelos entre sí provenientes de la estrella pasan por la lente objetiva y convergen en un único punto que dista f_{obj} de la lente. Eso ocurre debido a la propiedad 3;
2. Rayos de luz provenientes de un único punto que dista f_{ocu} de la lente ocular pasan por la lente ocular y salen paralelos entre sí. Esto también ocurre por la tercera propiedad de las lentes.

Analizaremos la formación de imágenes por telescopios con más calma en la próxima sección.

4.2.3 Espejos Esféricos

Los últimos elementos ópticos que estudiaremos son los espejos esféricos⁸. Funcionan de manera muy similar a las lentes, excepto que los rayos de luz son reflejados en lugar de refractados. Para producirlos, es necesario realizar un corte en una esfera reflectante, cuyo radio R se denomina radio de curvatura. Así como distinguimos lentes convergentes de divergentes, los espejos esféricos pueden ser cóncavos o convexos.

⁸En realidad, las propiedades que trataremos solo funcionan para espejos parabólicos, pero tienen un costo muy elevado; por ello es común usar espejos esféricos, que funcionan de manera parecida.

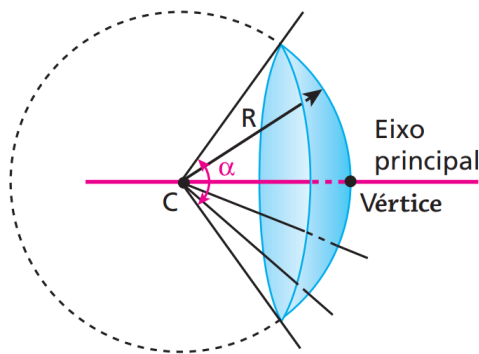
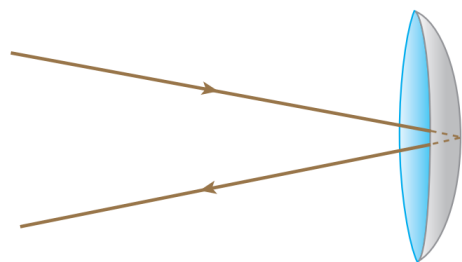
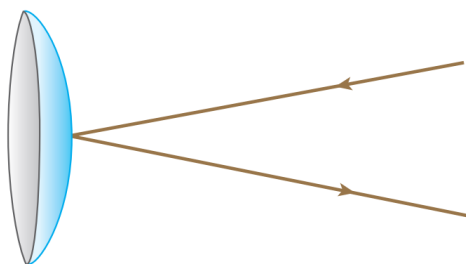


Figura 4.17: Corte de una esfera



Representação de um espelho esférico côncavo.

Figura 4.18: Espejo cóncavo



Representação de um espelho esférico convexo.

Figura 4.19: Espejo convexo

Formación de imágenes

Los espejos esféricos también poseen una distancia focal f asociada⁹. Nos interesan tres propiedades de estos objetos, análogas a las vistas para las lentes y representadas en las figuras 4.20, 4.21 y 4.22¹⁰.

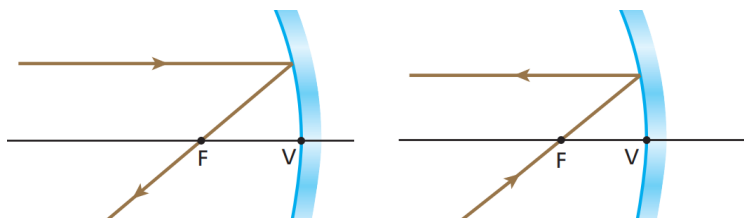


Figura 4.20: Propiedad 1 - espejo cóncavo

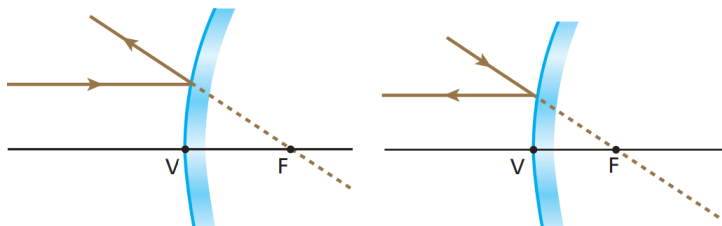


Figura 4.21: Propiedad 1 - espejo convexo

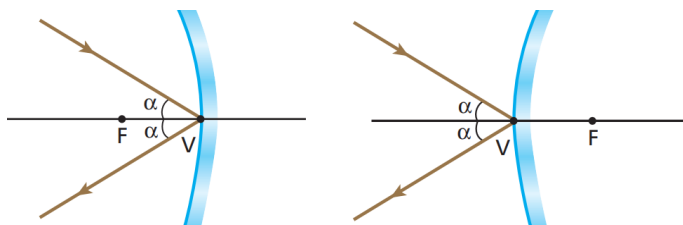


Figura 4.22: Propiedad 2

Aplicaciones

Una utilidad de los espejos esféricos en telescopios es disminuir el tamaño necesario del tubo, ya que hacen que una misma sección del telescopio pueda ser atravesada por un rayo de luz dos o más veces. En la figura 4.23, que es la misma que 4.7, puedes observar los espejos esféricos rayados en rojo.

⁹Siendo R el radio de curvatura del espejo utilizado, $f \approx \frac{R}{2}$

¹⁰El análogo de la propiedad 3 posee una geometría un poco confusa y, como no cae en cuestiones de astronomía, no fue representado.

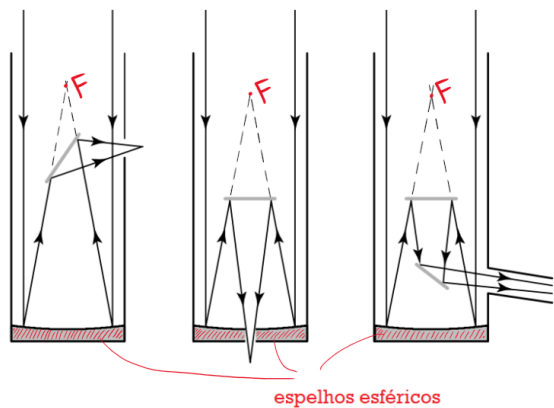


Figura 4.23: Espejos esféricos en telescopios

4.3 Formación de imágenes

Es posible que el proceso de formación de la imagen en telescopios aún no esté muy claro, por eso realizaremos una analogía con un objeto mucho más palpable: una lupa. Nuevamente, consideremos un telescopio refractor kepleriano, es decir, con dos lentes convergentes.

Sabemos que una lupa consiste en una lente convergente que hace que los objetos se vean más grandes cuando se miran a través de ella. Sin embargo, eso solo sucede si la distancia entre el objeto y la lupa es cercana a la distancia focal de esa lente; de lo contrario, la imagen queda borrosa. Si tienes una lupa, colócala muy próxima a tu ojo para visualizar este fenómeno.



Figura 4.24: Viendo a través de una lupa

Teniendo esto en mente, ¿qué sucedería si miráramos a la Luna a través de una lupa? Como su distancia focal es miles de millones de veces menor que la distancia Tierra-Luna, veríamos una mancha borrosa. Pero, ¿existe una ma-

nera de “acercar la Luna a nosotros”? La respuesta es sí: esa es la función de la lente objetiva. Analicemos paso a paso cómo es posible ver la Luna a través de un telescopio¹¹.

1 - Situación

Tenemos a un observador utilizando un telescopio refractor kepleriano (dos lentes convergentes) para observar la Luna. Por simplicidad, consideremos que la parte inferior de la Luna pasa por el eje óptico del telescopio¹². Ahora, dos rayos de luz provenientes de la parte superior de la Luna (que surgieron en el Sol y se reflejaron en la Luna) se dirigen hacia la Tierra:

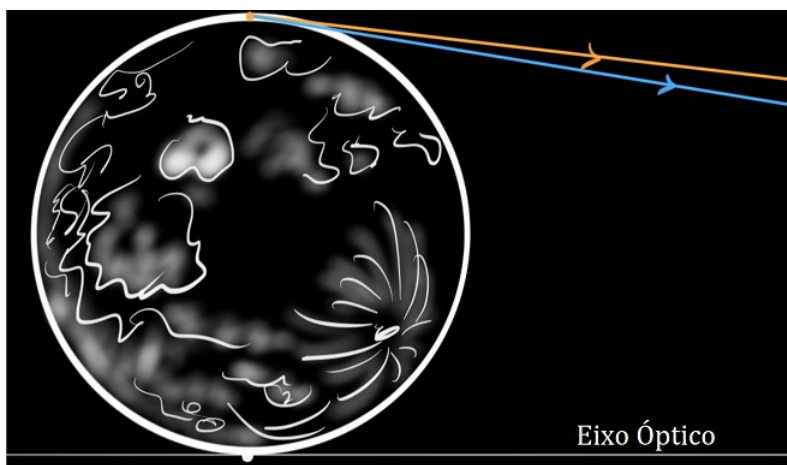


Figura 4.25: Rayos de luz provenientes de la Luna

2 - Rayos pasando por la lente objetiva

¿Qué sucede con esos rayos de luz? Como la Luna está muy distante de la Tierra, llegan esencialmente paralelos entre sí. De este modo, convergerán en un punto que dista f_{obj} de la lente objetiva (rayos paralelos entre sí convergen en el plano focal), formando la imagen de la región más alta de la Luna. Realizando el mismo proceso para el resto del cuerpo celeste, se forma la siguiente imagen:

¹¹Créditos: Khan Academy India.

¹²No es necesario, pero facilita la comprensión.

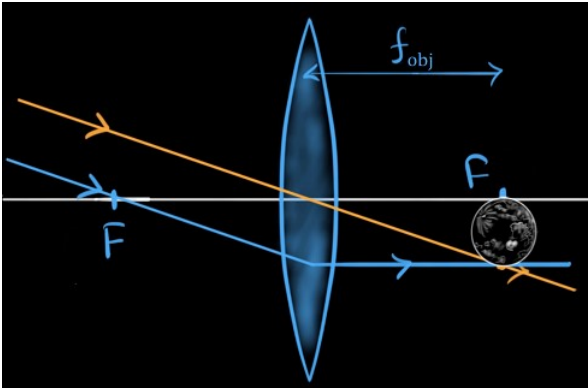


Figura 4.26: La objetiva formando una imagen de la Luna

3 - Insertando la lente ocular

Obsérvese que la lente objetiva efectivamente “trajo” la Luna cerca de nosotros. Ahora, basta con colocar la “lupa”, representada por la lente ocular, a una distancia f_{ocu} de la imagen de la Luna formada por la objetiva. Tenemos:

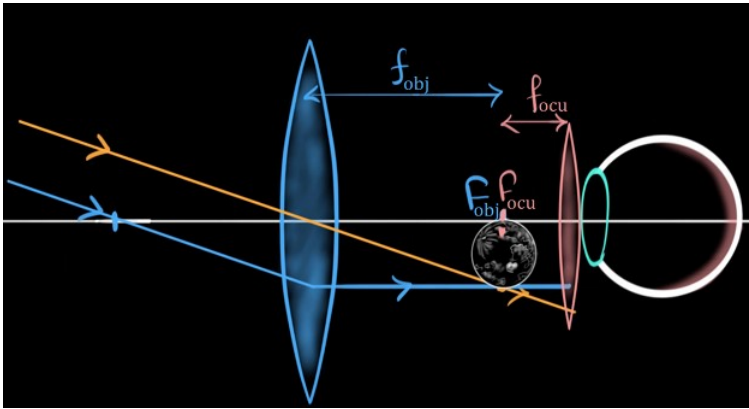


Figura 4.27: Ocular

4 - Imagen final

Si la distancia entre la imagen de la Luna y la ocular es **exactamente** f_{ocu} , los rayos que pasan por la ocular salen paralelos entre sí, no formándose una imagen. Sin embargo, en la práctica, es imposible disponer el telescopio en esa situación extremadamente específica, y la pequeña diferencia hace que la imagen final vista por el observador se forme:

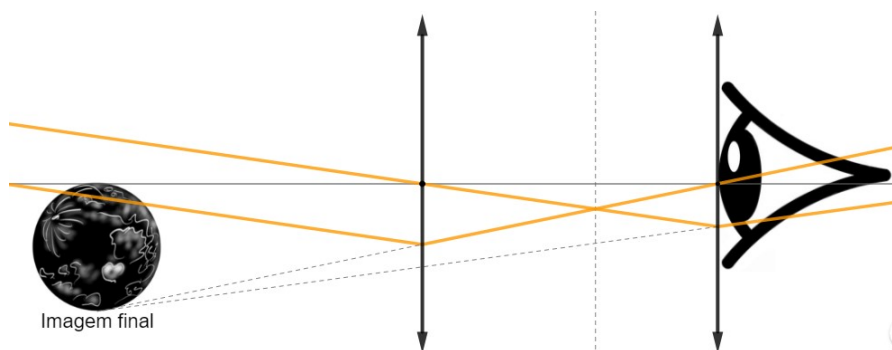


Figura 4.28: Imagen final

5 - Tamaño de la imagen

A priori, puede parecer que cuanto menor sea la distancia entre los planos focales de las lentes objetiva y ocular, más alineados estarán los rayos que pasan por la ocular y, en consecuencia, mayor será la imagen. Sin embargo, aquí entra un aspecto esencial en toda la óptica: lo que delimita el “tamaño observado” de una imagen es el **ángulo** que comprende cuando se ve desde el observador, y no su dimensión. Por ejemplo, sabemos que la Luna posee miles de km de diámetro, pero la distancia Tierra-Luna es tan grande que el ángulo que comprende cuando se ve a simple vista es relativamente pequeño ($\approx 0,5^\circ$). De manera análoga, cuanto menor sea la diferencia previamente citada, mayor será el tamaño físico de la imagen, pero su distancia hasta el observador también aumenta, haciendo que el ángulo comprendido por la imagen final de la Luna sea prácticamente constante. La imagen de abajo muestra el tamaño angular de la Luna vista a simple vista (θ_0) y a través del telescopio (θ_i):

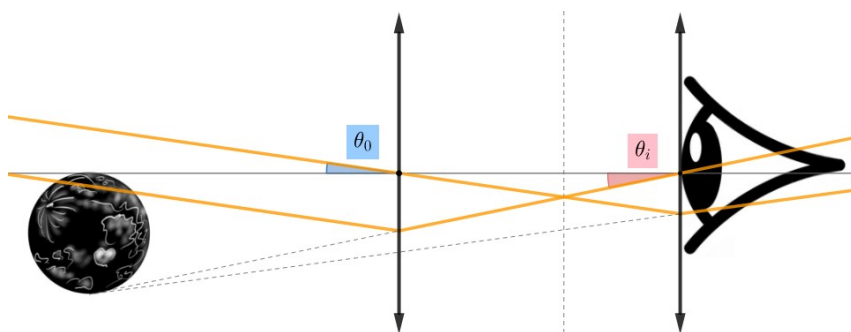


Figura 4.29: Tamaño angular de la imagen de la Luna

4.4 Tipos de telescopios

En esta sección, estudiaremos los diversos tipos de telescopios que se utilizan en astronomía, con énfasis en sus beneficios, problemas y mecanismos.

4.4.1 Telescopios Refractores

El primer telescopio patentado está registrado a nombre del holandés Hans Lippershey (1570-1619), pero su uso era exclusivamente militar. El primer estudioso que utilizó este equipo para observar el cielo fue Galileo Galilei, quien construyó su propio modelo, el **telescopio galileano**, con una lente objetiva convexa y una lente ocular cóncava. Con él, Galileo fue capaz de observar las fases de Venus, los anillos de Saturno, las manchas solares y los cuatro satélites mayores de Júpiter. La imagen de abajo ilustra el mecanismo de este telescopio¹³. Obsérvese que los rayos de luz 1, 2 y 3 están uno encima del otro antes y después de pasar por el telescopio, i.e., la imagen formada **no está invertida**.

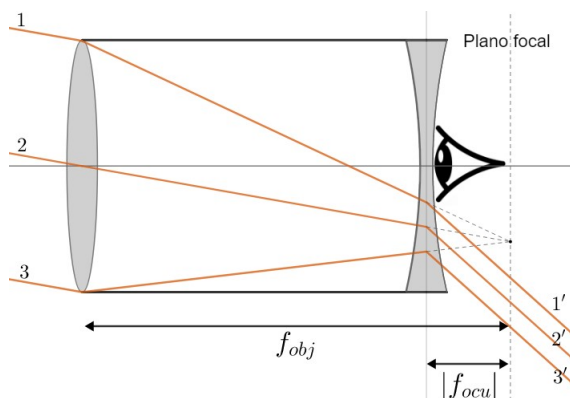


Figura 4.30: Telescopio galileano

Algunos años después, Johannes Kepler (1571-1630) propuso un telescopio que trajo algunas mejoras en comparación con el modelo de Galileo. Conocido como **telescopio kepleriano**, sus lentes objetiva y ocular son convergentes. Además de ser más fácil construir lentes de este tipo que lentes divergentes, este telescopio permitía un aumento mayor. Obsérvese en la figura de abajo que el orden de los rayos de luz se invierte tras pasar por el telescopio, lo que hace que la imagen formada quede **invertida**. Eso imposibilita el uso de estos telescopios para fines militares, por ejemplo.

¹³En la práctica, los rayos de luz van al ojo del observador.

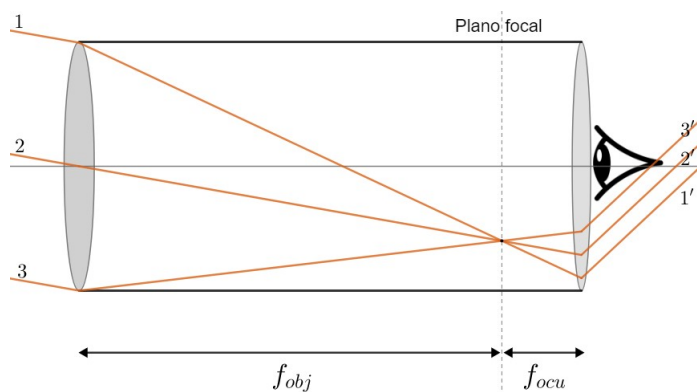


Figura 4.31: Telescopio kepleriano

Sin embargo, los telescopios refractores tienen algunos problemas. Uno de ellos es la presencia de aberraciones cromáticas¹⁴, que hace que la imagen tenga una fuerte distinción entre colores, especialmente el azul y el rojo. Además, la lente absorbe parte de la luz incidente en el telescopio. Para corregir esto, es necesario construir telescopios de aberturas mayores, pero esto eventualmente se vuelve un enorme obstáculo desde un punto de vista práctico. Como referencia, el telescopio refractor más grande jamás construido es el telescopio de Yerkes, que posee cerca de 1 m de apertura y pesa alrededor de 20 toneladas.

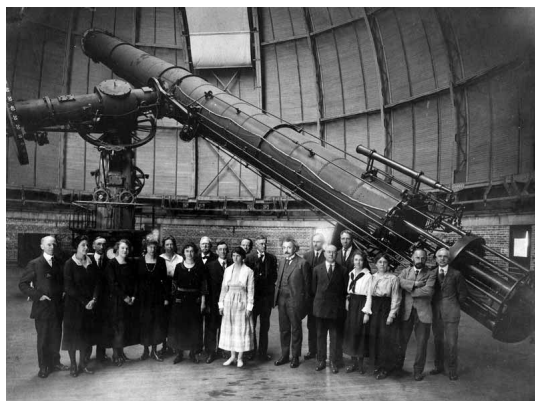


Figura 4.32: Telescopio de Yerkes

4.4.2 Telescopios Reflectores

El inglés Isaac Newton (1643-1727) también desarrolló su propio modelo, el **telescopio newtoniano**. En lugar de lentes, utilizó dos espejos para redirigir

¹⁴Se discutirán en la sección 4.10.

la luz, el primario (esférico) y el secundario (plano).

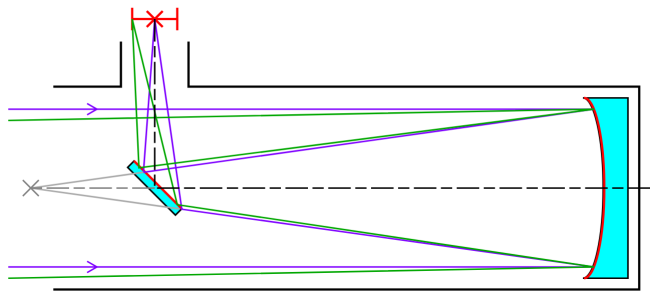


Figura 4.33: Telescopio newtoniano

Como la ocular queda en el lateral, el peso se desbalancea. En telescopios pequeños, esto no causa grandes problemas, pero los equipos grandes se ven muy afectados.

Con el fin de solucionar esa asimetría, surgió el **telescopio Cassegrain**. Su principal diferencia con relación al modelo newtoniano es la presencia de un espejo secundario convexo, y no plano. Además de que la imagen se forma detrás del equipo, la distribución de peso es simétrica.

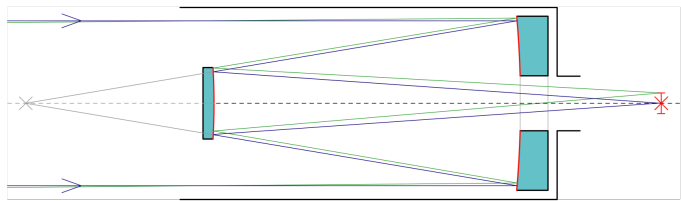


Figura 4.34: Telescopio Cassegrain

Otro modelo reflector es el **telescopio de foco Coudé**, que combina elementos de los telescopios newtoniano y Cassegrain. Utiliza un espejo primario y uno secundario del mismo modo que el Cassegrain, pero se coloca un espejo plano para dirigir la luz hacia el lateral del equipo, donde hay un ambiente separado (sala Coudé) en el que se realiza el análisis de la información. Actualmente, este es el principal modelo utilizado por telescopios de gran porte.

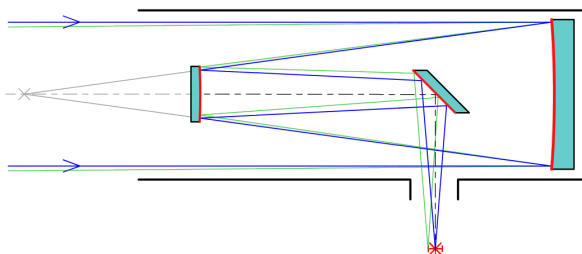


Figura 4.35: Telescopio de foco Coudé

El uso de espejos en lugar de lentes posee diversas ventajas, como eliminar las aberraciones cromáticas, tener un proceso de producción más barato, ser más simple de instalar y disminuir la pérdida de intensidad de luz por los componentes¹⁵. Sin embargo, existe la presencia de **aberraciones esféricas**. Para hacer que rayos paralelos se redirijan a un único punto, es necesario utilizar un espejo parabólico, pero su alto costo de producción hace que la mayoría de los telescopios reflectores utilicen espejos esféricos, que están sujetos a este tipo de aberración.

4.4.3 Telescopios Compuestos o Catadióptricos

Mientras que los telescopios refractores utilizan solo lentes y los reflectores solo espejos, los catadióptricos usan una combinación de ambos, generalmente para corregir aberraciones. El **telescopio Schmidt-Cassegrain** posee una placa correctora Schmidt ubicada en la entrada del equipo con el propósito de corregir la aberración esférica del espejo primario.

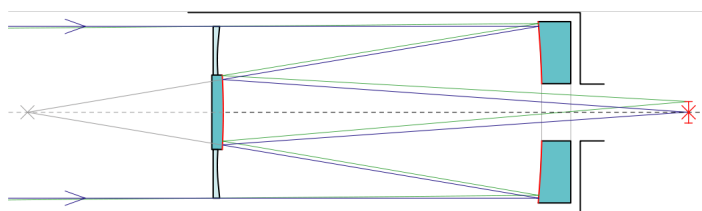


Figura 4.36: Telescopio Schmidt-Cassegrain

¹⁵En telescopios refractores, el material de la lente absorbe una fracción de la luz. En telescopios reflectores, los espejos no logran reflejar el 100% de la luz incidente.

Sin embargo, la placa correctora Schmidt es difícil de producir. Así, un modelo alternativo es el **telescopio Maksutov-Cassegrain**, que utiliza un corrector en forma de menisco para crear una aberración esférica inversa, anulando la aberración del espejo primario.

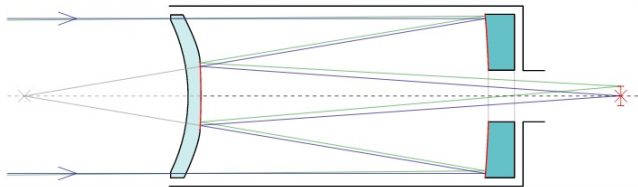


Figura 4.37: Telescopio Maksutov-Cassegrain

4.4.4 Radiotelescopios

Los modelos presentados hasta ahora se utilizan para observaciones en la franja del visible, pero mucha información solo puede obtenerse observando en otras longitudes de onda. Desafortunadamente, no podemos construir telescopios que abarquen todo el espectro electromagnético, pues la atmósfera absorbe gran parte de él¹⁶, pero, mirando el gráfico de abajo, percibimos una excepción:

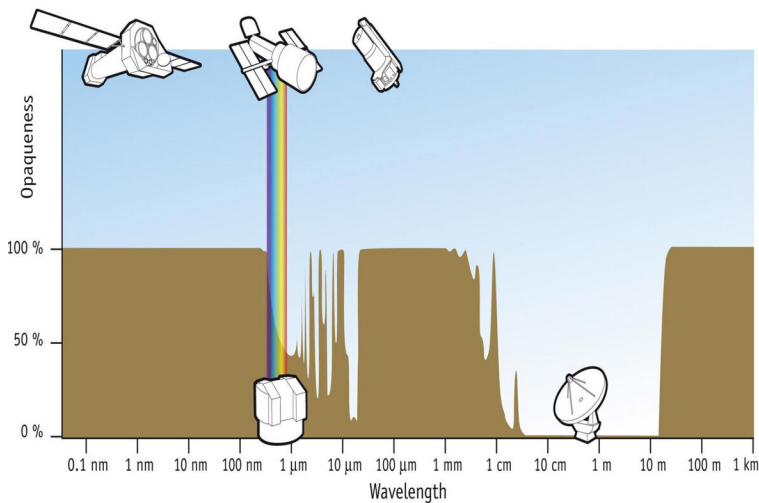


Figura 4.38: Porcentaje de radiación absorbida por la atmósfera terrestre a lo largo del espectro electromagnético

¹⁶Discutiremos esto en la sección 4.10.3.

La atmósfera es transparente en la banda de radio (10 MHz a 1 THz), lo que hace que esta región sea especialmente útil para los astrónomos. En el espectro visible, los fotones tienen $\lambda \approx 550 \text{ nm}$, mientras que las longitudes de onda en la banda de radio son del orden de metros. Longitudes de onda mayores son menos absorbidas por el polvo del medio interestelar, pero es necesario utilizar antenas con diámetros de algunos kilómetros para obtener resoluciones comparables a las de telescopios ópticos¹⁷, lo que es (claramente) inviable. La solución es utilizar una técnica conocida como **interferometría**, en la que una red de diversos radiotelescopios funciona como si fueran una sola gran antena.

Analicemos dos radiotelescopios separados por una distancia d comparable a la longitud de onda de la luz en cuestión detectando ondas de radio emitidas por una fuente muy distante, en una dirección θ . El frente de onda alcanza los detectores en tiempos diferentes, pues existe una diferencia de camino ΔS entre los rayos.

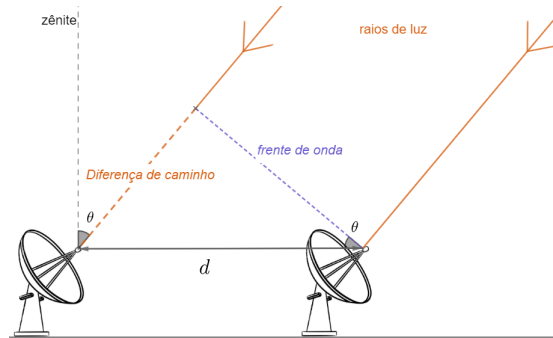


Figura 4.39: Geometría de la interferometría

Por la figura, notamos que $\sin \theta = \frac{\Delta S}{d}$, luego uno de los radiotelescopios tendrá un retraso de captación igual a:

$$\tau_g = \frac{\Delta S}{c} = \frac{d \sin \theta}{c}$$

Donde c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío (incluyendo la luz). Esta diferencia permite que las observaciones de un objeto distante realizadas simultáneamente por muchos radiotelescopios puedan combinarse, emulando un telescopio con un diámetro igual a la máxima separación entre los radiotelescopios¹⁸. En la imagen 4.40 observamos un ejemplo.

¹⁷Exploraremos esto en la sección 4.7

¹⁸El porqué de esto está relacionado con conceptos básicos de óptica física, que no serán abordados en este libro.

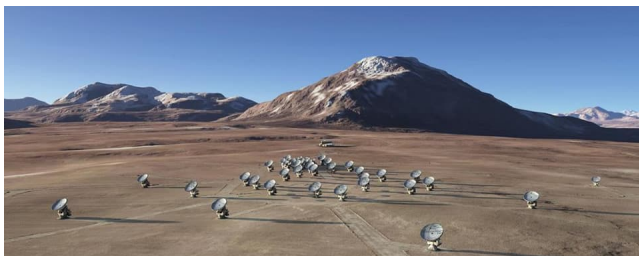


Figura 4.40: Atacama Large Millimeter Array, localizado en Chile

4.5 Monturas y Accesorios

En la sección anterior, estudiamos solo el tubo de los telescopios, pero es necesario utilizar algunos elementos adicionales para realizar efectivamente observaciones con ellos, que veremos a continuación.

Las monturas son equipos utilizados para soportar el peso y estabilizar el telescopio. Como analogía, la montura está para el telescopio así como un trípode está para una cámara. Es importante resaltar que una única montura puede utilizarse para varios modelos de telescopio (así como un trípode puede sostener varios tipos de cámara), y un modelo de telescopio puede utilizarse en diversos tipos de monturas. Aunque existan excepciones, es importante tratar monturas y telescopios como equipos separados.

4.5.1 Montura Altazimutal

La montura altazimutal posee dos movimientos: el ajuste de la altura (movimiento vertical) y el cambio del azimut (movimiento horizontal). Como son movimientos simples, esta montura posee una manipulación fácil y generalmente es utilizada por astrónomos principiantes. Sin embargo, la base impide que el telescopio quede completamente vertical, por lo que no es posible observar objetos próximos al cenit, i.e., la región directamente sobre el observador es un “punto ciego” de la montura.

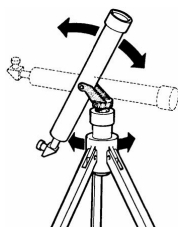


Figura 4.41: Movimientos de la montura altazimutal

La montura altazimutal más utilizada es la **montura dobsoniana**. Este equipo es de bajo costo, fácil uso, generalmente viene acoplado a un telescopio newtoniano y su base queda en el propio suelo.



Figura 4.42: Montura dobsoniana

4.5.2 Montura Ecuatorial

Mientras que las monturas altazimutales se mueven de acuerdo con la altura y el azimut, la montura ecuatorial está relacionada con variaciones de declinación y ascensión recta. Así, es común alinear el telescopio con el polo visible para posibilitar esta calibración.

Cuando observamos los astros a simple vista, parecen estar quietos, pero sabemos que poseen un movimiento aparente debido a la rotación de la Tierra¹⁹. Al utilizar equipos con grandes aumentos, ese movimiento aparente se vuelve muy perceptible, y así surge un problema: si un astro sale del campo de visión del aparato en algunos segundos o minutos, ¿cómo podemos analizarlo durante un largo periodo? La solución es hacer que el telescopio acompañe la rotación de la Tierra mediante motores acoplados. Estos modelos son característicos de las monturas ecuatoriales.

Montura de horquilla

En esta montura, el telescopio queda acoplado a uno o dos brazos y hay un motor para acompañar el movimiento de los astros. Por ser muy simple, es muy utilizada por astrónomos aficionados. Además, también es posible utilizarla como una montura altazimutal apagando el motor.

¹⁹Estudiaremos esto con más calma en el próximo capítulo.



Figura 4.43: Montura de horquilla

Montura alemana/germánica

También conocida como GEM, esta montura ecuatorial posee dos ejes perpendiculares entre sí en un formato de T, en el que la “cabeza” de la T está alineada con el eje de rotación de la Tierra. Hay un contrapeso para balancear el equipo.

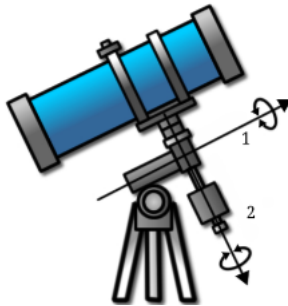


Figura 4.44: Eje polar (1) y eje de ajuste de la declinación (2)

Montura de chasis

En esta montura, dos barras paralelas sostienen el telescopio y hay motores en las puntas para girar la gran estructura con el fin de acompañar la rotación de la Tierra. Es una montura compleja y cara, utilizada casi exclusivamente por grandes observatorios.

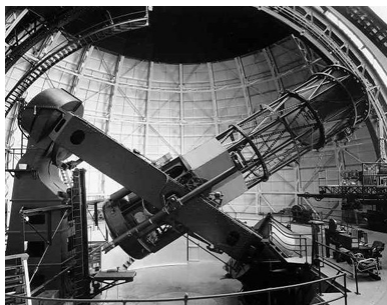


Figura 4.45: Montura de chasis

4.5.3 Accesorios

Además de las monturas, existen diversos accesorios utilizados para facilitar el uso de telescopios, que estudiaremos a continuación.

Buscadora

Cuando se utilizan equipos de gran aumento para observar objetos poco brillantes, encontrarlos se vuelve un gran desafío, ya que el campo de visión del telescopio es muy reducido. Como forma de resolver esto, la buscadora apunta a la misma dirección del tubo y posee un aumento menor, por lo que basta con encontrar el objeto a través de ella y luego realizar un pequeño ajuste para insertarlo en el campo de visión del telescopio.



Figura 4.46: Telescopio con buscadora

Lente Barlow

Las lentes Barlow se utilizan para aumentar el aumento de un telescopio. Son lentes divergentes insertadas cerca de la ocular y se clasifican por el aumento que proporcionan. Por ejemplo, una Barlow 3x triplica el aumento de un telescopio, aunque, claro, hay una pérdida de detalles.

Filtros

Colocados cerca de la lente ocular, los filtros impiden el paso de ciertas longitudes de onda de la luz. Existen diversos modelos de filtros, como los filtros de luna llena, que disminuyen su brillo para realzar los detalles, filtros para observación del Sol, filtros para planetas específicos, filtros de contaminación lumínica que disminuyen la interferencia de luces artificiales en la observación, entre otros.

4.5.4 CCD's

En astronomía, además de observar objetos astronómicos, necesitamos registrar lo obtenido de la manera más objetiva posible. Antiguamente, estos registros se realizaban por medio de dibujos y pinturas, pero no es muy eficiente depender de humanos para ello. Actualmente, el equipo más utilizado para registrar la información recolectada se llama *Charge Coupled Devices*, el CCD.

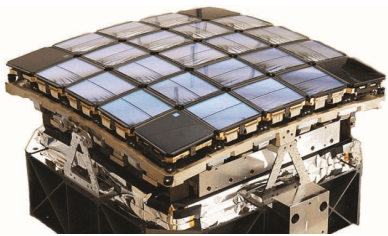


Figura 4.47: Conjunto de CCD's del satélite Kepler

Cuando un electrón absorbe un fotón, se excita a un nivel energético mayor, generando una señal. Así, es posible analizar la cantidad de señales en cada píxel de un CCD para recrear la imagen digitalmente.

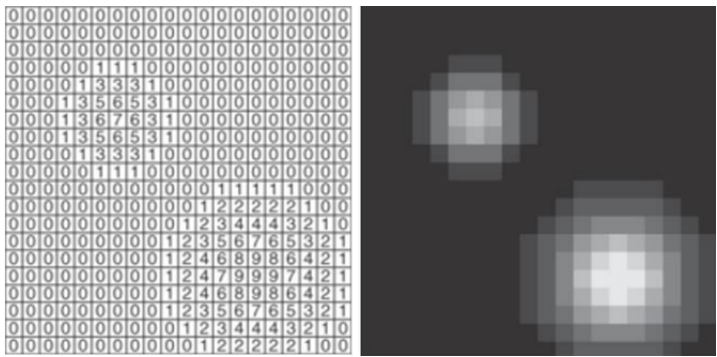


Figura 4.48: Formación de la imagen en un CCD

4.6 Ganancia y Magnitud Límite

Cuando observamos estrellas a simple vista, recibimos solo los fotones que entran por nuestras pupilas. Por otro lado, con un telescopio, el área de recolección es mucho mayor que el área de una pupila humana, y por eso es posible observar estrellas menos brillantes. En esta sección, estudiaremos este efecto.

4.6.1 Ganancia

Como el flujo de una estrella en la Tierra es esencialmente constante, la cantidad de fotones emitidos por ese astro que son recolectados por un telescopio es **proporcional a su área colectora**. De este modo, telescopios de grandes áreas colectoras posibilitan la observación de fuentes débiles, que muchas veces serían invisibles a simple vista. El concepto que compara el poder de captación de luz entre dos telescopios de aberturas D y d es la **ganancia** J , cuyo valor es:

$$J = \left(\frac{D}{d} \right)^2$$

Las aberturas se elevan al cuadrado porque nos interesa la razón de las áreas colectoras de los telescopios. Por ejemplo, el telescopio de apertura D posee área colectora $A = \frac{\pi D^2}{4}$, que es proporcional a D^2 .

Un concepto relacionado con la ganancia es el **tiempo de integración**, que es el tiempo que un telescopio debe permanecer expuesto a un astro para observarlo. Como ya discutimos, ese valor es inversamente proporcional al área de un telescopio, i.e., un telescopio de área N veces mayor que otro recibirá N veces más fotones y, por lo tanto, tendrá un tiempo de integración $1/N$ veces menor.

Ejemplo 1

(P1 Online 2021) Para detectar una estrella particular usando uno de los telescopios SMARTS de 1,0 metro en Cerro Tololo, en Chile, se necesita un tiempo de exposición de 16 minutos. Usando el mismo sensor, ¿cuál es el tiempo mínimo de exposición necesario para ser capaz de detectar la misma estrella usando el telescopio BLANCO de 4,0 metros, también en Cerro Tololo?

Solución

A partir de las aberturas individuales, podemos calcular la ganancia:

$$J = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = \left(\frac{4}{1} \right)^2 = 16$$

Así, el telescopio BLANCO recolecta 16 veces más fotones que el SMARTS, y por lo tanto su tiempo de exposición será 16 veces menor, i.e., 1 minuto.

4.6.2 Magnitud Límite

Como el área de un telescopio es mayor que el área de la pupila humana, es posible observar estrellas de magnitudes mayores a través de su uso. Vamos a encontrar el valor de la magnitud máxima m_{lim} que un astro puede tener para ser observado a través de un telescopio.

Sin ningún tipo de equipo adicional, consideremos que el flujo mínimo que una estrella puede tener para ser observada a simple vista es F_{0min} . La presencia de un telescopio hace que sea posible observar estrellas con un flujo mínimo F_{tmin} , pero eso **no altera** el hecho de que el ojo humano está limitado por el flujo F_{0min} . La clave es que el telescopio concentra la luz del astro en un área menor (pupila), haciendo que el flujo medido por el observador sea F_{0min} .

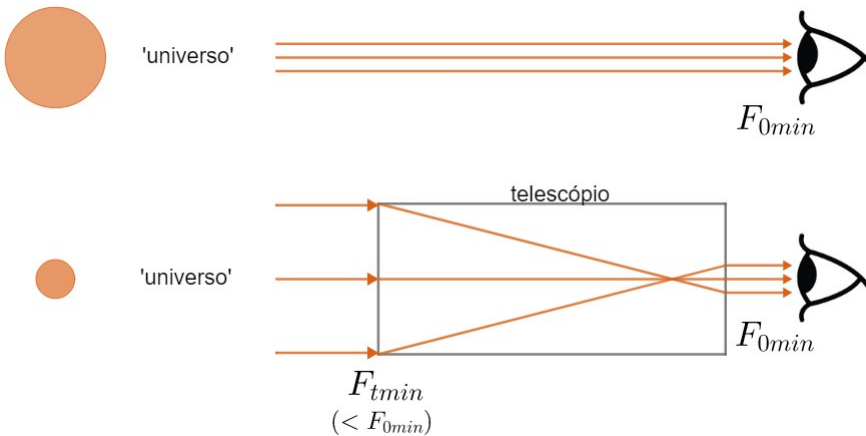


Figura 4.49: Magnitud límite

Reforzando:

- F_{0min} : flujo de la estrella menos brillante que puede verse a simple vista. Esta estrella posee magnitud m_{olho}
- F_{tmin} : flujo de la estrella menos brillante que puede verse con un telescopio. Esta estrella posee magnitud m_{lim}

Así, podemos relacionar estos valores mediante la ecuación de Pogson:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \frac{F_{tmin}}{F_{0min}}$$

Ahora, queremos encontrar la razón $\frac{F_{tmin}}{F_{0min}}$ como función de la abertura D del telescopio y del diámetro D_{pup} de la pupila. Obsérvese que **toda** la luz incidente en el telescopio es redirigida a la pupila, luego la potencia (unidad watt) P es la misma en el telescopio y en la pupila. Como $P = F \cdot A$, tenemos:

$$P = F_{tmin} \cdot A_t = F_{0min} \cdot A_{pup}$$

Como $A_t = \frac{\pi D^2}{4}$ y $A_{pup} = \frac{\pi D_{pup}^2}{4}$, tenemos:

$$\frac{F_{tmin}}{F_{0min}} = \frac{A_{pup}}{A_t} = \left(\frac{D_{pup}}{D} \right)^2$$

Así, podemos reescribir la ecuación de Pogson como:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left(\frac{D_{pup}}{D} \right)^2 = -5 \log \left(\frac{D_{pup}}{D} \right)$$

Donde utilizamos la propiedad $\log x^n = n \cdot \log x$.

Ahora, el último paso es sustituir los valores de m_{olho} y D_{pup} . Consideremos:

- $m_{olho} = 6$ mag
- $D_{pup} = 6$ mm

Ten **cuidado**, pues es común utilizar otros valores para estas magnitudes. En esos casos, es necesario realizar las debidas adaptaciones. Tenemos:

$$m_{lim} = 6 - 5 \log \left(\frac{6 \text{ mm}}{D(\text{mm})} \right)$$

Como $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$, podemos reescribir:

$$m_{lim} = 6 - 5 \log 6 + 5 \log D(\text{mm})$$

Usando $\log 6 \approx 0,778$, podemos llegar a la respuesta final:

$$\boxed{m_{lim} \approx 2,1 + 5 \log D(\text{mm})}$$

Vale resaltar que la unidad de D utilizada en esta expresión debe ser milímetros. Por ejemplo, la magnitud límite de un telescopio de $D = 15$ cm es $m_{lim} = 2,1 + 5 \log 150 = 13$.

Ejemplo 2

Dos estudiantes poseen magnitudes límite de 6 cuando observan el cielo a simple vista. Sabiendo que sus pupilas poseen diámetros 6 mm y 7 mm, calcule la diferencia entre las magnitudes límite que podrán ver a través de un telescopio.

Solución

Podemos calcular las magnitudes límite m_6 y m_7 mediante la ecuación:

$$m_{lim} - m_{olho} = -5 \log \left(\frac{D_{pup}}{D} \right)$$

Para el alumno de $D_{pup} = 6$ mm:

$$m_6 = (m_{olho} + 5 \log D(\text{mm})) - 5 \log 6$$

Ya para $D_{pup} = 7$ mm, tenemos:

$$m_7 = (m_{olho} + 5 \log D(\text{mm})) - 5 \log 7$$

Así, la diferencia será:

$$m_6 - m_7 = 5(\log 7 - \log 6) = 5 \log \frac{7}{6} = \boxed{0,33}$$

4.7 Resolución Angular

De acuerdo con la dualidad onda-partícula, la luz puede comportarse tanto como partícula (fotón) como como onda. Como veremos a continuación, el carácter ondulatorio de la luz puede limitar la observación con un telescopio.

4.7.1 Difracción de la Luz

La difracción se caracteriza por el “esparcimiento” de una onda al encontrar un obstáculo. Por ejemplo, al pasar por una rendija simple (lineal), la luz forma un patrón de intensidad muy específico en una pantalla, representado en la imagen de abajo.

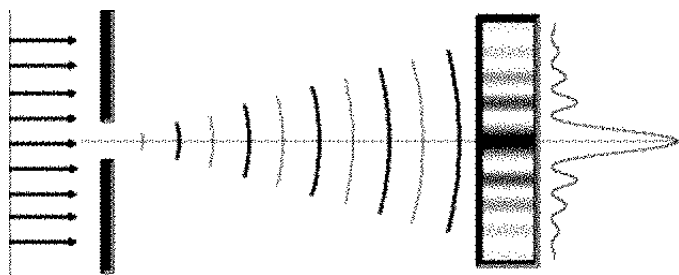


Figura 4.50: Difracción de la luz a través de una rendija simple

Por otro lado, cuando la rendija tiene formato circular, el patrón de intensidad en la pantalla se asemeja a diversos anillos de radios variables. El disco de mayor intensidad en el centro de la distribución se llama **disco de Airy**.

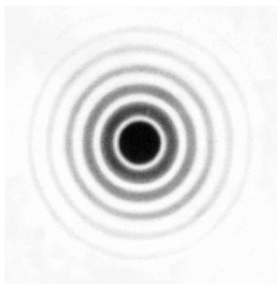


Figura 4.51: Difracción de la luz a través de una abertura circular

Cuando la luz de una estrella pasa por un telescopio, el fenómeno de la difracción influye en la formación de la imagen final. Específicamente, si dos fuentes con una baja distancia angular entre sí son observadas por un telescopio, es posible que la difracción haga que sea imposible distinguirlos en la imagen final. Esto también ocurre cuando observamos los dos faros de un coche distante, en los que parecen ser una única fuente de luz.

4.7.2 Criterio de Rayleigh

La situación límite en la que es imposible distinguir dos fuentes cercanas no está muy bien definida. Sin embargo, es usual considerar que esto ocurre cuando el centro del disco de Airy de una fuente está superpuesto al primer mínimo de la otra fuente, tal como puede observarse en la imagen de abajo. Esta condición se llama **criterio de Rayleigh**.

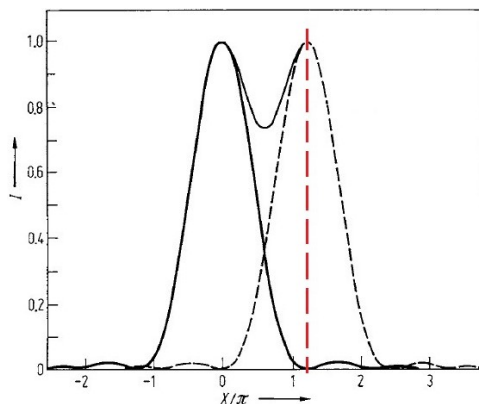


Figura 4.52: Criterio de Rayleigh

Matemáticamente, el criterio de Rayleigh dice que la menor separación angular θ_{min} entre dos fuentes para que sea posible distinguirlas es:

$$\boxed{\sin \theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}}$$

Donde λ es la longitud de onda de la luz involucrada y D es el diámetro del telescopio. Además, para $\theta_{min} \ll 1$, $\sin \theta_{min} \approx \theta_{min}$, es decir:

$$\theta_{min} [\text{rad}] \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Una consecuencia del criterio de Rayleigh es la gran abertura que los radiotelescopios deben poseer para que sus resoluciones angulares sean bajas. Esto ocurre porque las ondas de radio poseen longitudes de onda del orden de metros.

Ejemplo 3

Para un radiotelescopio que utiliza $\lambda = 5 \text{ mm}$, ¿cuántas veces su abertura necesita ser mayor que la de un telescopio óptico para que sus poderes de resolución sean iguales? Considere la longitud de onda del visible como 550 nm .

Solución

Igualando el criterio de Rayleigh para ambos equipos:

$$1,22 \frac{\lambda_r}{D_r} = 1,22 \frac{\lambda_o}{D_o}$$

Dividiendo ambos lados por 1,22:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_o} = \frac{D_r}{D_o}$$

Donde los índices ‘r’ y ‘o’ representan el radiotelescopio y el telescopio óptico, respectivamente. El enunciado informó que $\lambda_r = 5 \text{ mm}$ y que $\lambda_o = 550 \text{ nm}$. Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{D_r}{D_o} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$$

Realizando la cuenta:

$$\frac{D_r}{D_o} \approx \boxed{9000}$$

4.8 Características Físicas

Así como las piezas de un telescopio poseen magnitudes que las diferencian unas de otras, como el diámetro o la distancia focal de la objetiva, los telescopios también pueden distinguirse entre sí. Veamos algunas de las magnitudes asociadas a esto.

4.8.1 Distancia Focal

En general, los telescopios ópticos no son más que una asociación de lentes y/o espejos con el objetivo de redirigir la luz. Sabemos que cada uno de estos componentes posee una **distancia focal** que mide el grado de “redirigimiento” de la luz. Por ejemplo, en un telescopio refractor, la distancia focal de la lente primaria se llama distancia focal de la objetiva, f_{obj} . Análogamente, la distancia focal de la lente ocular es f_{ocu} . Sin embargo, también es común decir que un **telescopio** posee una determinada distancia focal f . El significado físico de esta magnitud varía entre cada modelo. No obstante, existen dos casos clásicos en los que f y la distancia focal del espejo o lente primaria son **idénticos**. Ellos son:

- Telescopios refractores galileano y kepleriano ($f = f_{obj}$)
- Telescopio reflector newtoniano ($f = \text{distancia focal del espejo primario}$)

4.8.2 Aumento

Otra característica importante de un telescopio es su aumento, también llamado aumento angular o magnificación. Compara el ángulo que comprende un objeto visto a simple vista y a través de un telescopio. En la notación de la figura 4.29, tenemos:

$$A = \frac{\theta_i}{\theta_0}$$

Obsérvese que la función de un telescopio es aumentar el tamaño aparente de un objeto, i.e., $\theta_i > \theta_0$. Así, $A > 1$ para telescopios bien contruidos. El aumento puede escribirse en términos de las distancias focales del telescopio y de la ocular mediante la siguiente relación²⁰:

$$A = \frac{f}{f_{ocu}}$$

Para los casos vistos en 4.8.1, $A = \frac{f_{obj}}{f_{ocu}}$. Ahora, deduzcamos esta expresión para un telescopio refractor kepleriano:

²⁰Válida solo para $\theta_0, \theta_i \ll 1$

Ejemplo 4

En un telescopio refractor kepleriano, halle una relación general entre θ_0 , θ_i , f_{obj} y f_{ocu} y muestre que $\frac{\theta_i}{\theta_0} = \frac{f_{obj}}{f_{ocu}}$ cuando los ángulos en cuestión son pequeños.

Solución

Como vimos en la sección 4.3, podemos representar la situación mediante el siguiente dibujo:

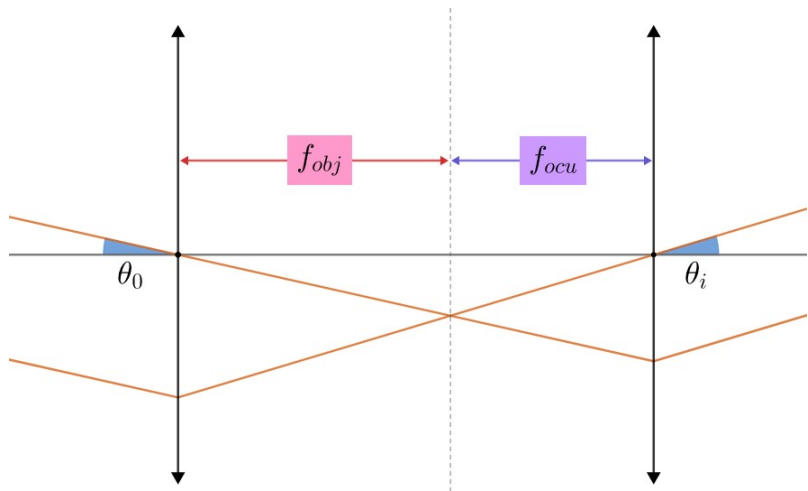


Figura 4.53: Diagrama de rayos

Obsérvese que elegimos dos rayos de luz muy especiales, puesto que ambos pasan por los centros ópticos de las lentes²¹. Esto hace que se forme el siguiente triángulo:

²¹Es muy común utilizar estos rayos en óptica.

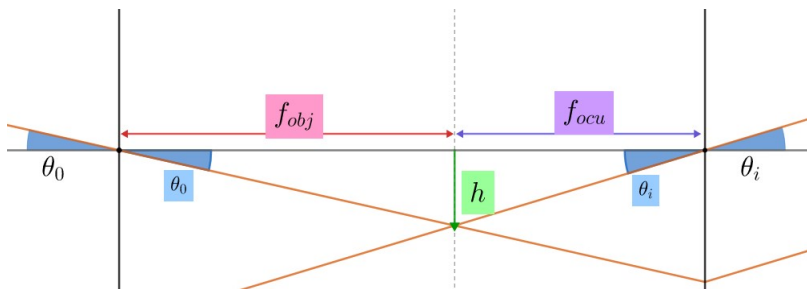


Figura 4.54: Triángulo

Así, tenemos las siguientes relaciones:

$$\tan \theta_0 = \frac{h}{f_{obj}}$$

y

$$\tan \theta_i = \frac{h}{f_{ocu}}$$

Dividiendo estas ecuaciones:

$$\frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_0} = \frac{f_{obj}}{f_{ocu}}$$

Que es la relación general solicitada. Ahora, sabemos que $\tan x \approx x$ [rad] para $x \ll 1$. Así, para θ_0 y θ_i pequeños:

$$\frac{\theta_i}{\theta_0} \approx \frac{f_{obj}}{f_{ocu}}$$

Nótese que θ_i y θ_0 no necesitan estar en radianes. Como solo nos importa la razón entre ellos, basta con que sus unidades sean idénticas (p. ej. grados, segundos de arco, etc.).

Un aumento mayor no necesariamente significa una imagen final mejor. Para entender por qué, considere dos telescopios de oculares idénticas cuyas lentes objetivas poseen diámetros iguales, es decir, reciben la misma cantidad de luz. En el telescopio de mayor aumento, la luz tendrá que distribuirse en un ángulo sólido mayor, haciendo que la imagen quede más oscura. La imagen de abajo ilustra este fenómeno.



Figura 4.55: Saturno observado con diferentes valores de magnificación

Otra relación importante relacionada con el aumento es la relación entre el campo de visión de un telescopio (C_t) y el de su ocular (C_{ocu}). Sabemos que el campo de visión es el ángulo que representa cuánto cielo puedes observar de una sola vez. Así, supongamos que los ángulos en la imagen 4.29 están en la situación “límite” de observación del telescopio, es decir:

$$\theta_i = \frac{C_{ocu}}{2}$$

y

$$\theta_0 = \frac{C_t}{2}$$

Dividiendo estas ecuaciones, obtenemos la relación deseada:

$$C_t = \frac{C_{ocu}}{A}$$



Figura 4.56: Las dos imágenes se tomaron con aumentos idénticos, pero con campos de visión de la lente ocular diferentes

4.8.3 Relación (Razón) Focal

Otra magnitud asociada a un telescopio es su **relación focal** R^{22} . Su valor es la razón entre la distancia focal del telescopio (f) y el diámetro de su objetiva (D), es decir:

$$R = \frac{f}{D}$$

La relación focal se representa como $[f/F]$. Por ejemplo, un telescopio $f/10$ posee una relación focal igual a 10.

Ahora, analicemos qué valores de relación focal son ideales para cada tipo de observación. En general, queremos una imagen grande y brillante, así que tenemos los siguientes factores:

- Imagen grande $\rightarrow$ aumento grande $\rightarrow$ disminución del brillo
- Imagen brillante $\rightarrow$ diámetro de la objetiva grande

Como un aumento grande está asociado a una distancia focal grande, utilizamos telescopios de altas relaciones focales (D pequeño y A grande) para observar objetos muy brillantes (como planetas y la Luna), ya que podemos utilizar un aumento grande sin una gran pérdida de brillo. Por otro lado, objetos poco brillantes (como DSO's) suelen observarse con telescopios de bajas relaciones focales (D grande y A pequeño) para garantizar la mayor cantidad de brillo posible.

4.8.4 Salida de Pupila

Para maximizar el brillo de un objeto, toda la luz incidente en un telescopio debe redirigirse a la pupila del observador. La salida de pupila cuantifica esta relación y dice que:

$$D_{pup} = \frac{D}{A}$$

Donde D_{pup} es el diámetro de la pupila del observador, que generalmente es de 6 o 7 milímetros, y D es el diámetro de la objetiva. Deducción para un telescopio refractor kepleriano:

²²También puede representarse por la letra F .

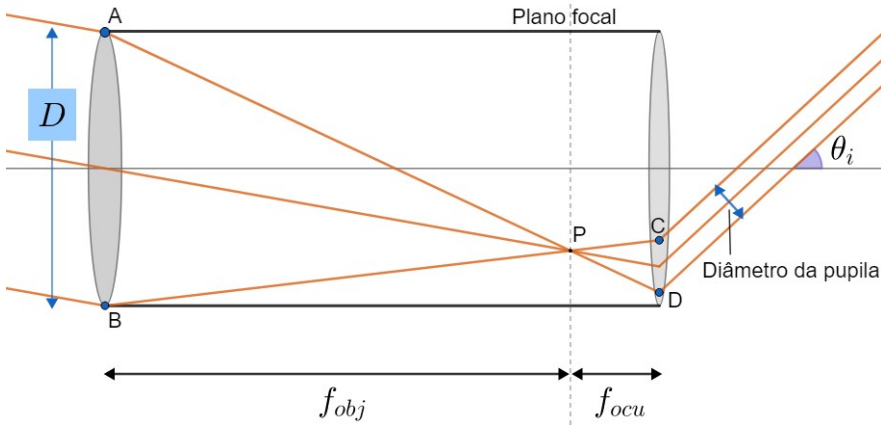
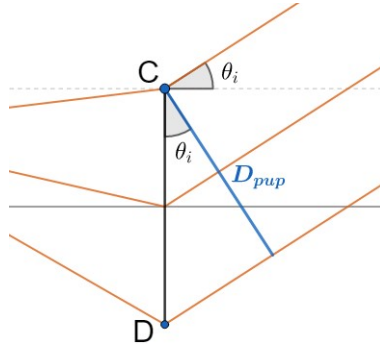


Figura 4.57: Salida de pupila

Obsérvese que los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle DCP$ son semejantes, es decir:

$$\frac{D}{f_{obj}} = \frac{CD}{f_{ocu}}$$

Ahora, podemos relacionar D_{pup} con CD mediante el siguiente triángulo:

Figura 4.58: Relacionando D_{pup} y CD

Obsérvese:

$$\cos \theta_i = \frac{D_{pup}}{CD}$$

Juntando estas expresiones:

$$\frac{D \cos \theta_i}{D_{pup}} = \frac{f_{obj}}{f_{ocu}} = A$$

Como $\theta_i \ll 1 \Rightarrow \cos \theta_i \approx 1$, llegamos a la relación deseada:

$$D_{pup} \approx \frac{D}{A}$$

4.8.5 Eficiencia Cuántica

En un CCD, cada fotón detectado se convierte en una señal (electrón). Sin embargo, no todos los fotones incidentes serán efectivamente detectados. Para cuantificar este proceso, utilizamos el concepto de **eficiencia cuántica**, que se da por:

$$Q_e = \frac{N_{detectados}}{N_{incidentes}}$$

Donde N es el número de fotones. Además, cabe resaltar que Q_e depende de la longitud de onda de la luz en cuestión.

4.8.6 Longitud

La longitud de los telescopios refractores L es la distancia entre la lente objetiva y la ocular. Así, hallemos expresiones de L para los modelos kepleriano y galileano.

Telescopio refractor kepleriano

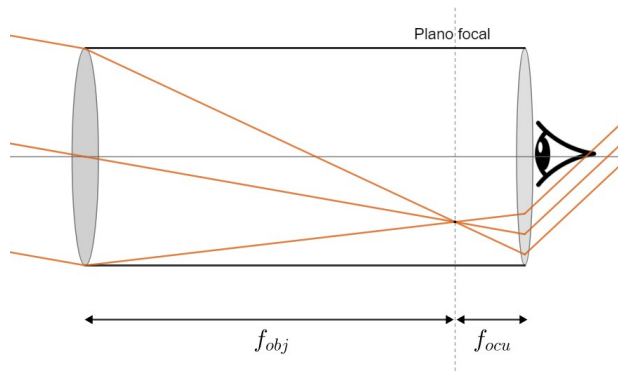


Figura 4.59: Longitud del telescopio kepleriano

Por la imagen, se percibe que:

$$L_K = f_{obj} + f_{ocu}$$

Telescopio refractor galileano

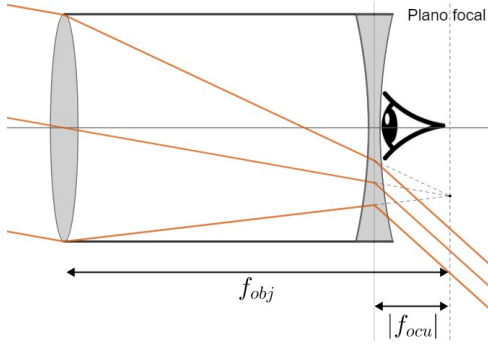


Figura 4.60: Longitud del telescopio galileano

Obsérvese que la distancia entre el plano focal y la ocular es $|f_{ocu}|$. Como la ocular en un telescopio galileano es una lente divergente, $f_{ocu} < 0 \Rightarrow |f_{ocu}| = -f_{ocu}$, ya que $|x| = -x$ para $x < 0$. Así, tenemos:

$$L_G = f_{obj} - |f_{ocu}| = f_{obj} + f_{ocu}$$

4.9 Escala de Placa

En la sección 4.2, estudiamos cualitativamente los mecanismos que posibilitan la formación de imágenes en telescopios. Ahora, dando continuidad al enfoque cualitativo visto en las últimas secciones, estudiaremos la **escala de placa** de un telescopio.

4.9.1 Definición

Cuando analizamos el cielo, es mucho más conveniente describir las posiciones de los objetos celestes a partir de ángulos²³ en lugar de distancias, ya que ellos, excepto los cuerpos del Sistema Solar, están tan distantes que las distancias absolutas difícilmente poseen un significado profundo. Por ejemplo, para localizar una estrella, es mucho más conveniente utilizar un sistema de coordenadas en el que puedas decir “a partir de este punto, sube 20° y gira 47° hacia el este” que un sistema cartesiano (los famosos ejes xyz) en el que necesites especificar la distancia del astro a cada eje. De este modo, es relevante poder relacionar separaciones angulares en el cielo con distancias físicas en el telescopio, y ese es el papel de la escala de placa. Un ejemplo muy común en cuestiones de astronomía es determinar cuántos píxeles son ocupados en un CCD²⁴ por un objeto celeste con diámetro angular conocido, es decir, queremos convertir un ángulo en una distancia que puede medirse con regla.

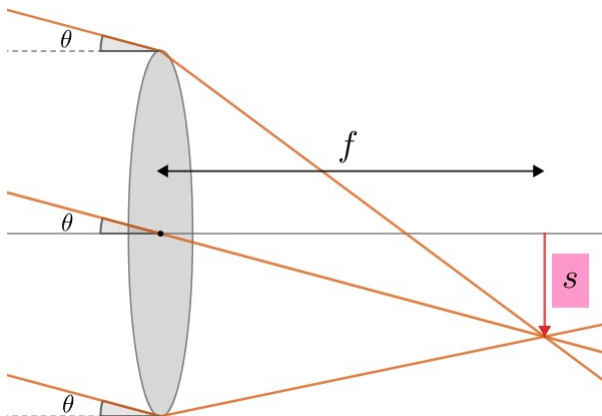


Figura 4.61: Escala de placa

En la figura anterior están representados algunos rayos de luz provenientes de un cuerpo celeste entrando en un telescopio refractor. Como estudiamos en

²³Esto está muy relacionado con el concepto de la esfera celeste, que se estudiará en el próximo capítulo.

²⁴Si necesitas refrescar la memoria sobre qué es un CCD, véase la subsección 4.5.4.

la sección 4.2, dado que los rayos están paralelos entre sí, se encontrarán en un único punto localizado en el plano focal, que dista f de la lente y es perpendicular al eje óptico. Además, vimos que el rayo de luz que pasa por el centro de la lente no sufre ningún tipo de desvío, por lo que la intersección de ese rayo con el plano focal es el punto donde todos los rayos de luz convergerán, como se observa en la imagen.

El significado físico asociado a la figura 4.61 puede analizarse al introducir otra fuente de luz arbitraria muy próxima a la dirección representada por el eje óptico, i.e., $\theta \approx 0$. Obsérvese que los rayos de luz de esa fuente se encuentran muy próximos al eje del telescopio, es decir, $s \approx 0$. De este modo, podemos tratar a θ como la **separación angular** entre las fuentes y a s como la **separación física** entre sus imágenes, que son los parámetros que queríamos relacionar inicialmente. Siendo f la distancia focal del telescopio, tenemos un triángulo rectángulo de catetos s y f y ángulo θ , luego:

$$\tan \theta = \frac{s}{f} \Leftrightarrow \boxed{s = f \tan \theta}$$

Que nos da la separación angular si f y θ son conocidos. Sin embargo, ¿dónde aparece la escala de placa? Veamos ahora el caso específico en que $\theta \ll 1$, es decir, la separación angular es pequeña:

$$\frac{s}{f} = \tan \theta \approx \theta \text{ [rad]}$$

Así, podemos definir la escala de placa p como la razón entre la separación angular y la separación física cuando θ es pequeño:

$$\boxed{p = \frac{1}{f} = \frac{\theta \text{ [rad]}}{s}}$$

Donde $[p] = \text{rad}/m$.

Ejemplo 5

Calcule el diámetro, en cm , ocupado por una galaxia de diámetro angular $3,000^\circ$ cuando se proyecta en un telescopio de distancia focal $1,000m$.

Solución

Con rigor, podemos hacer:

$$s = f \tan \theta = (1m) \cdot \tan(3^\circ) = 5,241cm$$

Sin embargo, podríamos haber calculado primero la escala de placa y luego usar su definición:

$$p = \frac{1}{f} = 1\text{rad}/m$$

Como $s = \frac{\theta [rad]}{f}$ y ya calculamos p , basta hallar θ en radianes. Sabemos que $180^\circ = \pi rad$, luego:

$$\theta = 3^\circ = \left(3 \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad$$

Por último, tenemos:

$$s = \frac{\theta [rad]}{f} = 3 \cdot \frac{\pi}{180} m = 5,236 cm$$

Obsérvese que el valor calculado mediante la escala de placa es un poco diferente del resultado exacto debido a la aproximación $\tan \theta \approx \theta [rad]$. Así, si el enunciado no menciona la escala de placa explícitamente, se recomienda utilizar la forma con la tangente.

4.9.2 En CCD's

Como ya se mencionó, la utilización de la escala de placa es especialmente relevante en problemas con CCD, tanto que existe una expresión adaptada para estos aparatos. Como los CCD están compuestos por píxeles, es común interesarnos por la cantidad de píxeles ocupados, no por la separación física directamente. De este modo, buscamos una escala de placa que nos dé la cantidad N de píxeles ocupados en una dirección (puede interpretarse como diámetro en píxeles) como función de la separación angular θ , es decir:

$$p_{CCD} = \frac{\theta}{N}$$

Ahora, siendo l el lado de un píxel del CCD, puede observarse que, dada una separación física s , la cantidad de píxeles ocupados en una dirección será: $N = \frac{s}{l}$. Además, como los CCD generalmente se utilizan para observar objetos cuyos valores de θ son pequeños, es más conveniente utilizar una expresión que nos devuelva valores en segundos de arco en lugar de $[rad]$. Como $1 rad \approx 206265''$, i.e., $\theta ['] = \theta [rad] \cdot 206265$, tenemos:

$$p_{CCD} = \frac{206265''}{f} \cdot l = \frac{\theta [']}{N}$$

Donde $[p_{CCD}] = ''/\text{pixel}$.

Ejemplo 6

Calcule el diámetro, en píxeles, ocupado por un cúmulo globular de diámetro angular $40,0''$ cuando se proyecta en un telescopio $f/2,5$ de diámetro $40,0\text{cm}$ con un CCD acoplado que posee píxeles de lado $5\mu\text{m}$.

Solución

Primero, calculemos la distancia focal f del telescopio mediante la relación focal de 2,5 y el diámetro de $40,0\text{cm}$:

$$R = \frac{f}{D} \Rightarrow f = Rd = 100\text{cm}$$

Como sabemos el valor del lado del píxel, podemos calcular la escala de placa:

$$p_{CCD} = \frac{206265''}{f} \cdot l = 1,03''/\text{pixel}$$

Obsérvese lo conveniente que es trabajar con este valor. Sabemos que el cúmulo posee diámetro angular de $40,0''$, luego:

$$N = \frac{\theta [']}{p_{CCD}} = \frac{40''}{1,03''/\text{pixel}} = 38,8 \text{ pixel}$$

Sin embargo, como 1 píxel es nuestro “fondo de escala”, no tiene sentido decir que algo ocupa 0,8 píxel, por lo que la respuesta final es 39 píxel ocupados.

A pesar de que la “deducción” de la expresión para la escala de placa se haya realizado con un telescopio refractor, todos los cálculos y definiciones presentados funcionan para cualquier tipo de telescopio, siempre que su distancia focal f se obtenga a partir de su diámetro y de la relación focal.

4.10 Fenómenos Ópticos

Hasta ahora, estudiamos los telescopios de manera idealizada, teniendo en cuenta solo los principios físicos más relevantes en la trayectoria de la luz. Sin embargo, existen otros fenómenos que deben considerarse en situaciones reales, los cuales aprenderemos en esta sección. Serán 4 en total, 1 relacionado con lentes/espejos y 3 causados por la atmósfera.

4.10.1 Aberración Cromática

Dos aspectos relevantes sobre la refracción de la luz que no se comentaron en la sección 4.1.1 por estar relacionados con la naturaleza de la luz en sí (óptica física, no geométrica) son²⁵:

- La longitud de onda de la luz cambia cuando su medio de propagación es alterado. Por otro lado, su frecuencia permanece constante;
- El índice de refracción de la luz en un medio depende de su frecuencia. Cuanto mayor es la frecuencia, mayor es el índice de refracción.

El primer aspecto puede observarse abajo:

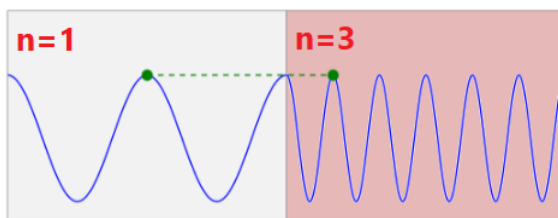


Figura 4.62: Cuanto mayor el índice de refracción, menor la longitud de onda

Para el segundo aspecto, la aplicación práctica es que el índice de refracción para el azul es mayor que el índice de refracción para el rojo, ya que $f_{\text{azul}} > f_{\text{rojo}}$ ²⁶ y vimos que n crece con la frecuencia. Esto puede observarse en la siguiente imagen:

²⁵Puedes querer leer la sección de espectroscopia del tercer capítulo antes de continuar.

²⁶Recuerda que los láseres azules son extremadamente más peligrosos que los rojos (más comunes), tanto que algunos modelos están prohibidos en Brasil; es decir, la energía de los fotones azules es mayor que la de los fotones rojos. Como la energía es proporcional a la frecuencia, esto solo es posible si $f_{\text{azul}} > f_{\text{rojo}}$.

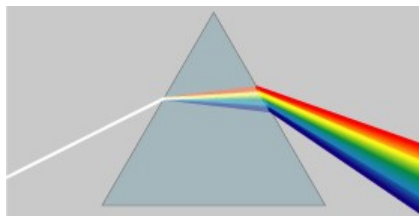


Figura 4.63: Cuanto mayor la frecuencia, mayor el índice de refracción y, por lo tanto, mayor el desvío. A esto se le llama dispersión

Juntando estos aspectos, ya debe ser posible imaginar el impacto de la dispersión de la luz en telescopios refractores. Tal fenómeno se conoce como **aberración cromática**. Imágenes obtenidas sin corregirlo se asemejan a la figura 4.64.

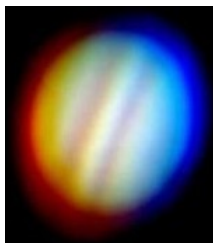


Figura 4.64: Una imagen de Júpiter sin corrección de la aberración cromática

Para corregir el efecto de la aberración cromática, se insertan lentes después de la lente objetiva llamadas **lentes apocromáticas**. En la figura 4.65, está representado el caso para solo una de esas lentes. Nótese que no es ideal colocar muchas lentes en un telescopio, ya que aumentan su peso y absorben parte de la radiación luminosa. Por este y diversos otros motivos, los telescopios refractores no son ideales para observar objetos más allá del Sistema Solar.

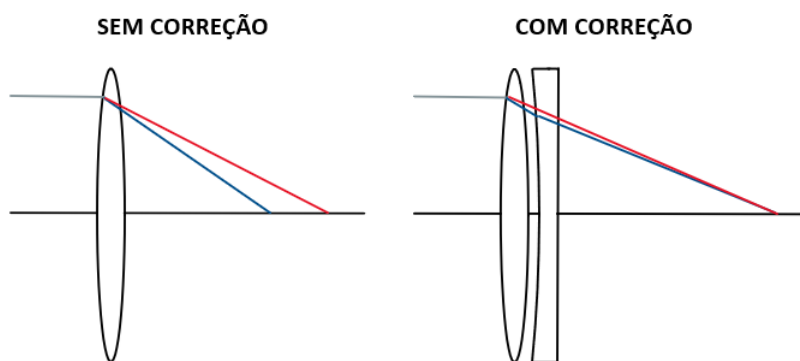


Figura 4.65: Lente apocromática

4.10.2 Refracción Atmosférica

Como vimos en la sección 4.1, la luz sufre un desvío cuando pasa entre dos medios con índices de refracción diferentes, tal como se ilustró en la figura 4.4. Así, como la atmósfera posee una densidad mayor que la densidad del vacío, la luz de las estrellas sufre un desvío cuando pasa por ella. Cabe resaltar que, por definición, $n = 1$ en el vacío.

Todos los medios poseen un índice de refracción, pero es mayor en medios más densos. La densidad de las capas de la atmósfera varía de acuerdo con su distancia a la superficie terrestre, siendo máxima en esta región y mínima ($= 1$) cuando se hace imposible distinguir el espacio exterior de la atmósfera. En este sentido, la luz de las estrellas sufre sucesivos desvíos hasta llegar al observador, como puede observarse en la siguiente imagen:

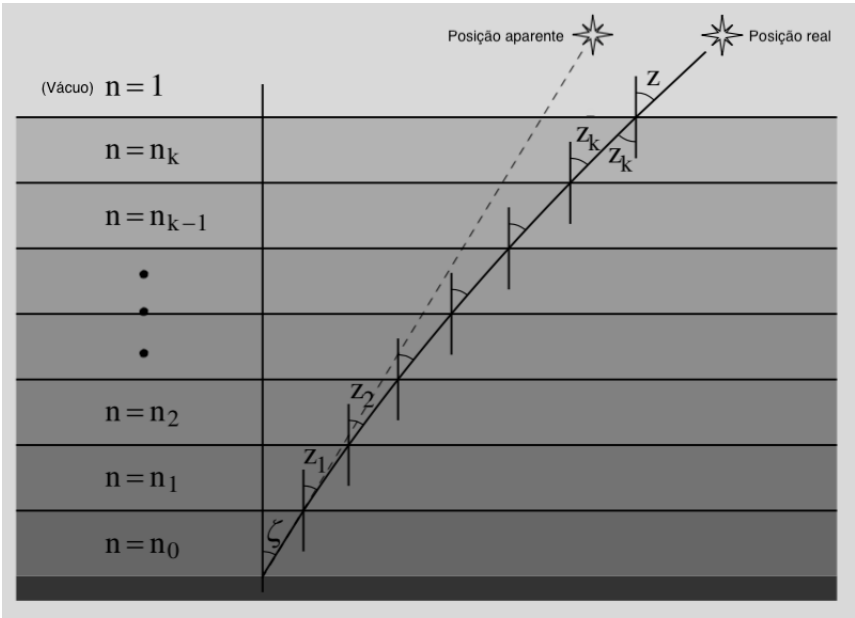


Figura 4.66: Refracción atmosférica

El efecto práctico de la atmósfera es disminuir el brillo observado de los astros (como veremos en la próxima subsección) y aumentar sus alturas con relación al horizonte (tal como ocurrió con el astro de la figura 4.66). Obsérvese que cuanto menor sea la altura h de un astro, más capas de la atmósfera recorrerá su luz. Por otro lado, la luz de un astro que está próximo al cenit (punto directamente sobre el observador) recorre menos capas. Así, cuanto más próximo del horizonte esté un astro, mayor será el efecto de la refracción atmosférica sobre él. Es decir, la variación de la altura es mayor para astros

más próximos del horizonte.

La refracción atmosférica cerca del horizonte suele darse como $\eta = 34'$, tal como se ilustra en la imagen de abajo. Una consecuencia de esto puede observarse en la salida del Sol: cuando comenzamos a ver su extremidad, en realidad está $34'$ por debajo del horizonte.

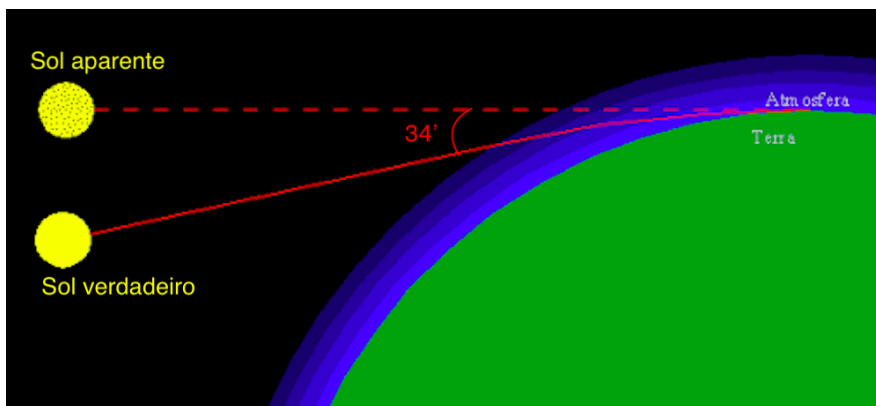


Figura 4.67: Refracción del Sol

4.10.3 Extinción Atmosférica

Bandas de absorción

La presencia de partículas en un medio hace que haya absorción y esparcimiento de la luz. En la atmósfera, los principales componentes del aire (N_2 , O_2 y O_3) nos protegen de ondas electromagnéticas extremadamente energéticas, i.e., de frecuencias altas (ultravioleta en adelante). Otra parte del espectro, el infrarrojo lejano, es absorbida por el vapor de agua de la atmósfera. Al final, sobran algunas regiones propicias para realizar observaciones, correspondientes a las bandas del **visible**, **infrarrojo cercano** y **microondas/radio**. Longitudes de onda mayores que eso son totalmente reflejadas de vuelta al espacio por la ionosfera.

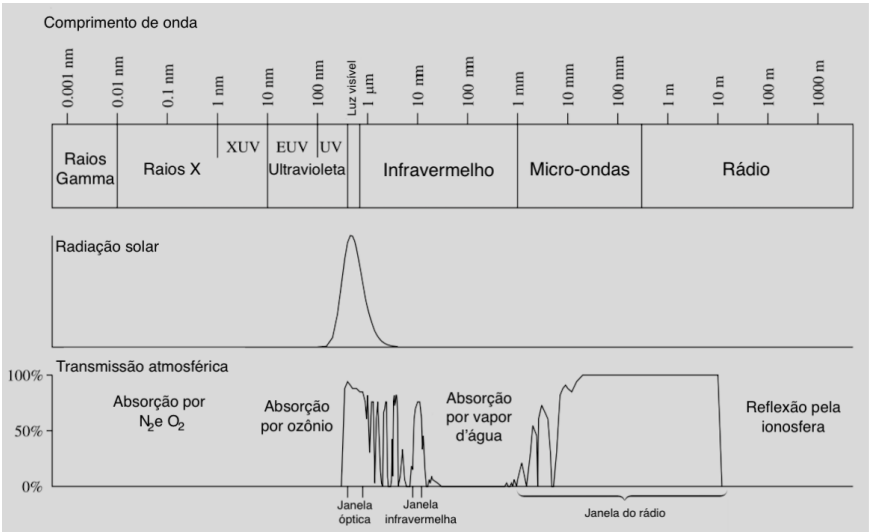


Figura 4.68: Transmisión de las bandas del espectro electromagnético en la atmósfera

Variación de la magnitud

Además de proporcionar la refracción atmosférica, la atmósfera hace que el brillo de los astros disminuya en comparación con lo que se vería sin ella. Llamamos a este fenómeno extinción atmosférica.

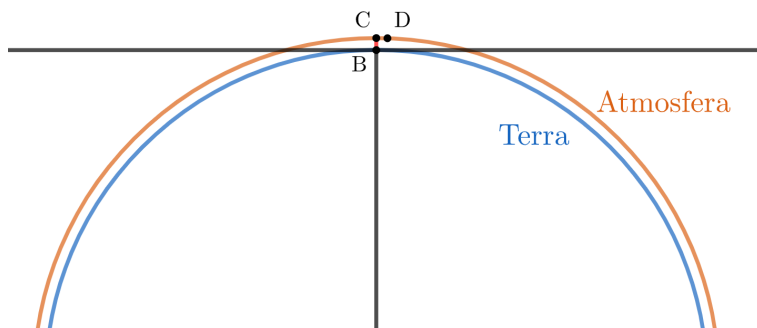
Por motivos que exceden el alcance de este libro, puede demostrarse que la magnitud de un astro visto a través de un medio de opacidad constante varía **linealmente** con la distancia recorrida por la luz en ese medio (x). Cuantitativamente:

$$m = m_0 + kx$$

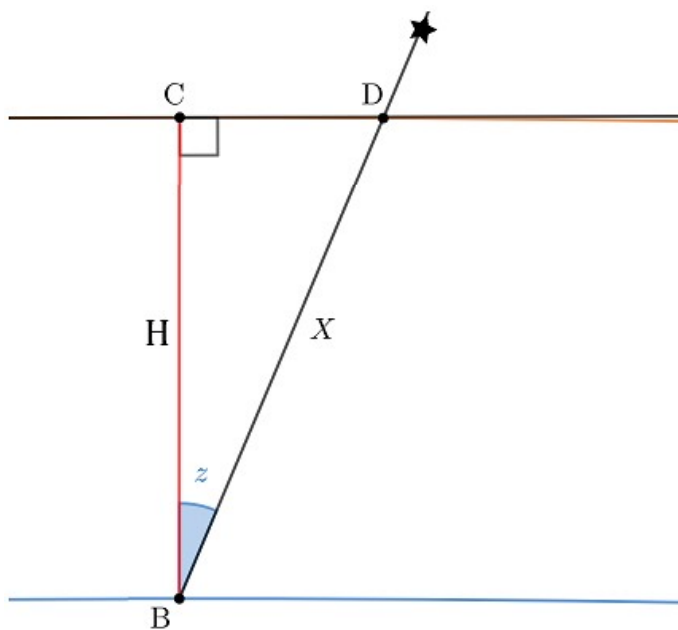
Donde m_0 es la magnitud vista fuera de la atmósfera y x es la distancia que la luz recorre en la atmósfera. Cabe resaltar que es común medir x en unidades de masas de aire, en las que una masa de aire corresponde al espesor de la atmósfera.

Ahora, expresemos la ecuación de la extinción atmosférica en función de la distancia cenital z de un astro (ángulo entre el cénit y un astro). Una característica importante de la atmósfera es que su espesor es mucho menor que el radio de la Tierra, como puede observarse en la imagen de abajo. Así, podemos aproximar la Tierra como plana para distancias cenitales pequeñas. Esto hace que la relación entre z y x sea mucho más simple.

Así, tenemos la siguiente situación:



Viendo la región próxima al observador:



Por el triángulo formado:

$$\cos z = \frac{H}{x} \Rightarrow x = H \sec z$$

Así, tenemos la ecuación de la extinción atmosférica en función de z :

$$m = m_0 + K \sec z$$

Donde K es el llamado **coeficiente de extinción** y depende de la temperatura, presión, precipitación, altitud, etc.

Obsérvese que esta fórmula solo es válida para distancias cenitales pequeñas, ya que la aproximación de Tierra plana deja de valer para z grande. Por ejemplo, la expresión encontrada dice que m tiende a infinito en el límite en que z se aproxima a 90° , lo cual no es el caso. Esta situación está mejor representada por la figura 4.67.

Ejemplo 7

Astronautas de la ISS calcularon que la magnitud de cierta estrella es 3. ¿Cuál sería su magnitud vista por un estudiante cuando el ángulo entre la estrella y el horizonte calculado por él es 80° ? Considere el coeficiente de extinción atmosférica como 0,15.

Solución

La distancia cenital en ese caso es $z = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$. Como z es pequeño, podemos utilizar la ecuación estándar de la extinción atmosférica:

$$m = m_0 + K \sec z$$

Según el enunciado, $m_0 = 3$ y $K = 0,15$. Así:

$$m = 3 + 0,15 \sec 10^\circ = \boxed{3,15}$$

4.10.4 Seeing/Cintilación

Contrario a lo que podría imaginarse, la atmósfera está en constante movimiento. El movimiento y la turbulencia de las masas de aire hacen que la luz llegue de forma irregular, tanto en **intensidad** como en **dirección**.

La variación de la intensidad hace que el brillo de las estrellas varíe con intervalos de tiempo pequeños. Esto hace que parezcan “parpadear”.

La irregularidad en la dirección de propagación causa borrones en la imagen (puede variar entre 1” hasta decenas de segundos de arco, dependiendo de las condiciones del lugar). Esto puede limitar la resolución máxima de los telescopios, especialmente si el tamaño del *seeing* es próximo a las dimensiones trabajadas.

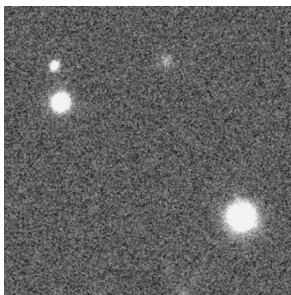
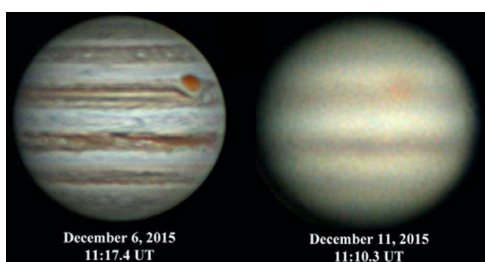
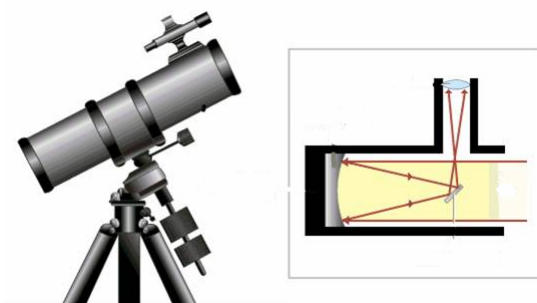


Figura 4.69: Seeing estelar

Figura 4.70: Júpiter visto con distintos *seeing* por el mismo telescopio

4.11 Problemas

4.1. (Iniciante) La imagen de abajo muestra la montura de un telescopio y su sistema óptico, que pueden clasificarse, respectivamente, como:



- a) Montura ecuatorial de horquilla y telescopio kepleriano
- b) Montura altazimutal dobsoniana y telescopio con foco Coudé
- c) Montura ecuatorial alemana (GEM) y telescopio newtoniano
- d) Montura ecuatorial de chasis y telescopio Schmidt-Cassegrain

4.2. (Iniciante) (P1 Online/2019) ¿Qué tipo de telescopio es más adecuado para estudiar el interior de las nubes de polvo interestelar?

- a) telescopio espacial ultravioleta
- b) telescopio óptico de gran abertura
- c) radiotelescopio
- d) telescopio espacial de rayos gamma

4.3. (Iniciante) Dos telescopios 1 y 2 son tales que $D_1 = 2D_2$ y $f_1 = 4f_2$. Sabiendo que el telescopio 2 llevó 20 minutos para observar una estrella, ¿cuánto tiempo llevaría el telescopio 1 para observar el mismo astro?

4.4. (Iniciante) (P1 Vinhedo/2021) Un extraño objeto parecido a una bola de béisbol está cayendo rápidamente en caída libre en ruta de colisión con la cabeza de nuestro cosmonauta favorito: Bismarck. Él admira distraído el paisaje del planeta sin atmósfera Jamn-19b sin notar el objeto no identificado. Su amigo Bruno Pizza, atento, mira hacia arriba y percibe el cuerpo extraño. Entonces, prontamente, alerta a Bismarck de la amenaza y ambos dan algunos pasos y se salvan. Considere que el diámetro de una bola de béisbol es 7,40 cm, que en el momento descrito la abertura de la pupila de Bruno era de 6 mm, que él ve solo en 550 nm y que su visión es saludable. ¿Cuál fue la distancia entre los ojos de Bruno y la pelota en el momento en que se volvió visible como un cuerpo extenso?

4.5. (Iniciante) (P1 online/2021 adap.) El gráfico a continuación trae la curva de la magnitud aparente del cometa C/2020 F3 (NEOWISE). Los puntos negros provienen de datos observacionales de astrónomos ligados a la Red de Astronomía Observacional (REA-Brasil). Las curvas en azul corresponden al mejor ajuste a los datos observacionales y la curva en rojo corresponde a la curva teórica hecha a través de los parámetros orbitales del cometa. Si consideramos que la pupila posee un diámetro de 6 milímetros, ¿a partir de qué mes se volvió posible observar el NEOWISE utilizando un telescopio con abertura de 60 mm?

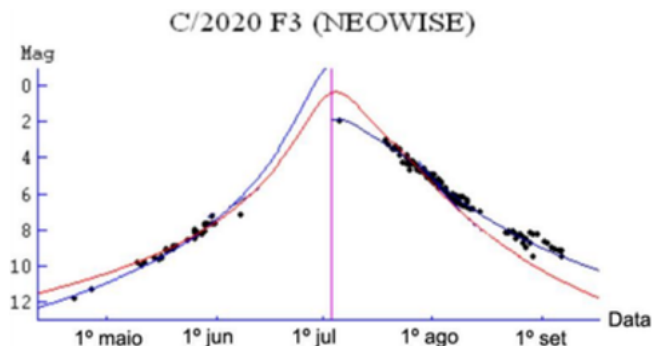


Figura 4.71: Magnitud del cometa NEOWISE por mes

4.6. (Intermedio) Cierta telescopio reflector posee un espejo primario que refleja solo el 60% de los fotones incidentes. Tras cambiar ese espejo por uno que refleja el 95%, ¿cuál fue la diferencia de magnitud límite del equipo? Considere que los otros espejos del telescopio son ideales.

4.7. (Intermedio) Mococó posee una lente ocular de distancia focal 25 mm y campo de visión 50° . Para observar Júpiter, tiene como opción dos telescopios que, con la lente ocular, poseen $f/2$ y $f/7$. Tras elegir el mejor modelo para observar su objetivo, Mococó percibió que el campo de visión del telescopio era igual a 1° . Así, calcule la magnitud límite del equipo elegido.

[Para resolver los próximos 3 problemas, se recomienda leer el capítulo de astronomía de posición antes]

4.8. (Intermedio) (IAO) Un pingüino ubicado exactamente en el Polo Sur observa que el borde inferior del Sol está tocando el horizonte. En ese mismo momento, ¿cómo vería el Sol un oso polar ubicado en el Polo Norte? Considere el diámetro aparente del Sol como $32'$ y la refracción atmosférica como $30'$.

4.9. (Intermedio) ¿Cuál es el intervalo de declinación de las estrellas que nunca pueden verse desde la ciudad de Lavras, MG? (Latitud $\phi = -21^\circ$, refracción atmosférica próxima al horizonte $32'$)

4.10. (Avanzado) En un lugar de latitud $+60^\circ$ se realizó el monitoreo de la magnitud aparente m de una estrella en función de su ángulo horario. Los resultados se graficaron así:

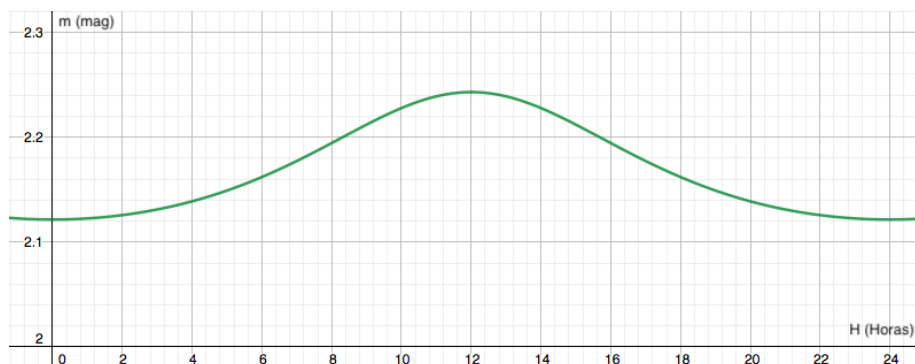


Figura 4.72: Gráfico magnitud *versus* ángulo horario

Sabiendo que la estrella tiene declinación $\delta = +60^\circ$:

- Determine el coeficiente de extinción de la atmósfera en el lugar analizado.
- Determine la magnitud de la estrella vista fuera de la atmósfera.

4.12 Gabarito

- La respuesta correcta es la alternativa “c”, montura ecuatorial alemana (GEM) y telescopio newtoniano.
- Como se abordó en la sección 4.4.4, las longitudes de onda mayores son menos absorbidas por el polvo, pues esas partículas absorben principalmente luz con longitud de onda de tamaño comparable a la suya. Así, el mejor equipo para realizar esa tarea es el **radiotelescopio**.
- Primeramente, obsérvese que la distancia focal de un telescopio no posee ninguna influencia en el tiempo de integración. Por ejemplo, dos telescopios de la misma abertura con distancias focales diferentes recibirán la misma cantidad de fotones, ya que solo el área expuesta a las estrellas influye en la captación de luz. Así, el tiempo de integración del telescopio 1 será $2^2 = 4$ veces menor que ese valor para el telescopio 2, i.e., $\frac{20}{4} = 5$ minutos.
- Para que Bruno observe el objeto como cuerpo extenso, el diámetro angular del objeto debe ser mayor que la resolución mínima de su ojo. Podemos calcular esa resolución mínima utilizando el criterio de Rayleigh, pues la cuestión informó que el diámetro de la pupila es 6 mm y la observación se hizo en $\lambda = 550\text{ nm}$.

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \implies \theta_{\min} = 1,22 \frac{550 \cdot 10^{-9} \text{ metros}}{0,006 \text{ metros}}$$

$$\theta_{min} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

El diámetro angular de un objeto esférico en radianes puede calcularse como $\theta_{obj} = \frac{D}{r}$, siendo D su diámetro y r la distancia al observador. En el instante en que el ojo de Bruno pudo resolver el objeto por primera vez, el diámetro angular del objeto era igual al valor del criterio de Rayleigh del ojo, así que podemos igualar ambos:

$$\theta_{min} = \theta_{obj} \implies \theta_{min} = \frac{D}{r}$$

El enunciado ya nos dio el valor de D , y como calculamos θ_{min} , podemos sustituir los valores y hallar r :

$$1,12 \cdot 10^{-4} = \frac{0,074 \text{ metros}}{r} \implies r = \frac{0,074}{1,12 \cdot 10^{-4}}$$

$$r \approx 660 \text{ metros}$$

- 4.5.** La cuestión considera que la pupila humana posee 6 mm de diámetro, por lo que podemos calcular la magnitud límite del telescopio con la ecuación:

$$m_{lim} = 2,1 + 5 \log D \text{ (mm)}$$

Sabemos que $D = 60 \text{ mm}$, así la magnitud límite es:

$$m_{lim} = 2,1 + 5 \log 60 \implies m_{lim} \approx 11$$

Así, para observar el NEOWISE con este telescopio, el cometa debe poseer una magnitud menor que 11. Observando el gráfico, percibimos que eso ocurre a partir del mes de mayo.

- 4.6.** Llamemos m_0 y m_n a las magnitudes límite antes y después del cambio del espejo, respectivamente. Hay dos maneras de resolver el ejercicio:

Opción 1

La primera consiste en deducir la magnitud límite de un telescopio considerando el factor k , análoga a lo que hicimos en la subsección de magnitud límite (4.6.2). Utilizando la misma notación que antes, tenemos:

$$k(F_{tmin} \cdot A_t) = F_{0min} \cdot A_{pup}$$

Esto porque solo una fracción k de la potencia total que entra en el telescopio ($F_{tmin} \cdot A_t$) llega a la pupila del observador. Como el área es proporcional al cuadrado del diámetro:

$$\frac{F_{tmin}}{F_{0min}} = \frac{D_{pup}^2}{kD^2}$$

Ahora, por Pogson:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left(\frac{F_{tmin}}{F_{0min}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{D_{pup}^2}{kD^2} \right) \quad (4.1)$$

Es decir:

$$m_0 = m_{olho} - 2,5 \log \left(\frac{D_{pup}^2}{0,6D^2} \right)$$

y

$$m_n = m_{olho} - 2,5 \log \left(\frac{D_{pup}^2}{0,95D^2} \right)$$

Restando las ecuaciones:

$$m_n - m_0 = 2,5 \log(0,95D^2) - 2,5 \log(0,6D^2) = 2,5 \log \frac{0,95}{0,6}$$

Realizando la cuenta, obtenemos $m_n - m_0 = \boxed{0,50}$.

Opción 2

La otra manera de resolver el problema es considerar el “área útil” del telescopio. Tenemos que solo una fracción k de los fotones incidentes efectivamente llegará a la pupila del observador. De este modo, esto es análogo a utilizar un telescopio ideal de área k veces menor para observar el mismo astro en la situación límite. Esencialmente, estamos diciendo que un telescopio de “reflectividad” k y área A_t posee la misma magnitud límite que un telescopio ideal (refleja todos los fotones incidentes) de área $A_{util} = kA_t$. Así, basta utilizar la ecuación estándar para la magnitud límite con el área útil:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left(\frac{A_{pup}}{A_{util}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{A_{pup}}{kA_t} \right)$$

Como el área es proporcional al cuadrado de la abertura:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left(\frac{D_{pup}^2}{kD^2} \right)$$

Que es idéntica a la ecuación 4.1, i.e., el resultado obtenido será el mismo.

- 4.7. Podemos comenzar la resolución relacionando el campo de visión del telescopio con el campo de visión de la ocular y el aumento. Como vimos en la subsección 4.8.2:

$$C_t = \frac{C_{ocu}}{A}$$

Es decir:

$$A = \frac{C_{ocu}}{C_t} = \frac{50^\circ}{1^\circ} = 50$$

Ahora, podemos relacionar el aumento con la distancia focal f del telescopio y f_{ocu} :

$$A = \frac{f}{f_{ocu}}$$

Es decir:

$$f = 50 \cdot 25 \text{ mm} = 1250 \text{ mm}$$

La cuestión también informa que Mococó eligió el telescopio de mejor relación focal para observar Júpiter. Como vimos en la subsección 4.8.3, el telescopio de mayor relación focal es ideal para eso. Es decir, utiliza el equipo de $R = 7$. Así:

$$R = \frac{f}{D}$$

Como tenemos R y f , podemos hallar D :

$$D = \frac{1250 \text{ mm}}{7} \approx 178,6 \text{ mm}$$

Utilizando la ecuación de la magnitud límite de un telescopio:

$$m_{lim} = 2,1 + 5 \log 178,6 = \boxed{13,36}$$

4.8. Si el borde del Sol toca el horizonte, la altura real del centro del Sol es:

$$h_{\odot} = -(\eta - R_{\odot}) = -(30' - 16') = -14'$$

Donde $R_{\odot} = 16'$ es el radio aparente del Sol. Como el pingüino está en el Polo Sur, la declinación del Sol el día de la observación es $\delta_{\odot} = +14'$.

En el Polo Norte, la altura del Sol será:

$$h'_{\odot} = 14' + 30' = \boxed{44'}$$

Es decir, tanto el pingüino como el oso polar observan el Sol **por encima del horizonte**.

4.9. Haciendo un dibujo del movimiento de las estrellas en Lavras, tenemos:

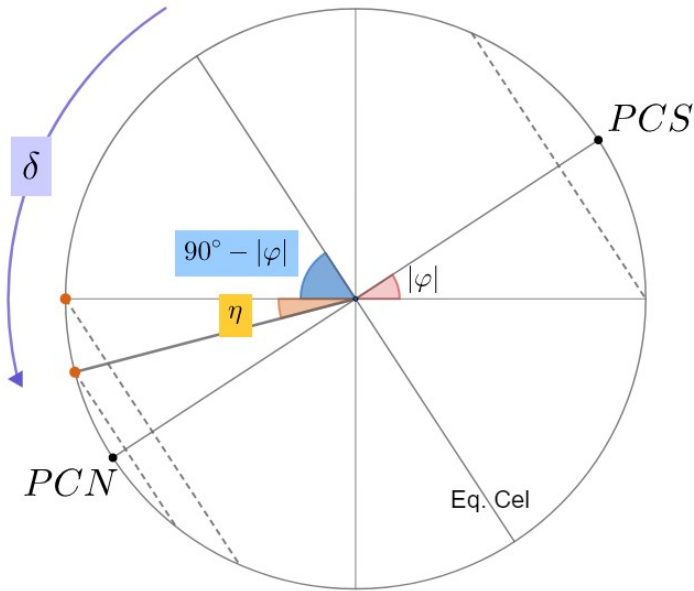


Figura 4.73: Planificación de la esfera celeste

Si no hubiera refracción, el límite sería simplemente:

$$\delta > 90^\circ - |\varphi| \Rightarrow \delta > 69^\circ$$

Sin embargo, la presencia de la refracción atmosférica hace que un astro de declinación un poco mayor eventualmente pueda verse en el horizonte, tal como ilustra la figura 4.73. Así tenemos:

$$\delta > 90^\circ - |\varphi| + \eta \Rightarrow \delta > 69^\circ 32'$$

Así, el intervalo de declinaciones de estrellas que nunca son visibles es:

$$69^\circ 32' \leq \delta \leq 90^\circ$$

- 4.10. a) Primeramente, obsérvese que las magnitudes mínima y máxima se alcanzarán en los momentos de culminación superior e inferior, respectivamente. Es decir:

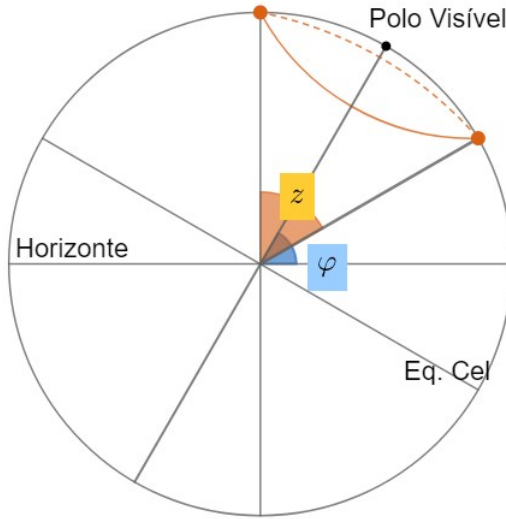


Figura 4.74: Planificación de la esfera celeste

Mirando la figura, tenemos que:

$$\delta + \frac{z}{2} = 90^\circ \Rightarrow z = 60^\circ$$

Además, podemos mostrar que la culminación superior ocurre exactamente en el cénit. De esa forma, podemos escribir las ecuaciones de extinción:

$$m_{max} = m_0 + K \sec z$$

y

$$m_{min} = m_0 + K \sec 0^\circ$$

Como $\sec 0^\circ = 1$, podemos restar estas ecuaciones para obtener:

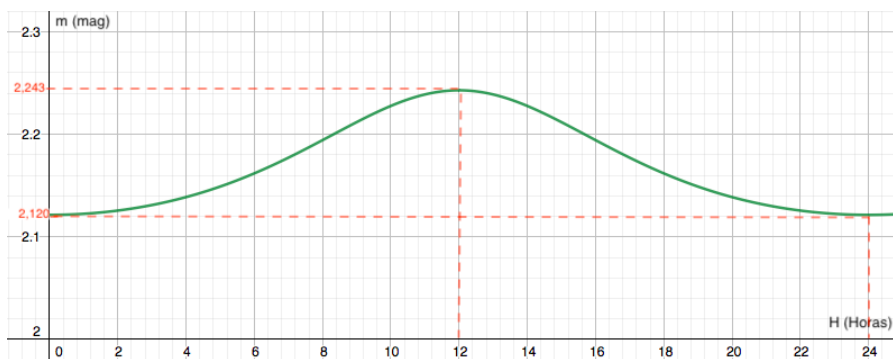


Figura 4.75: Magnitudes máxima y mínima obtenidas del gráfico.

$$m_{max} - m_{min} = K(\sec 60^\circ - 1)$$

Es decir:

$$K = \frac{m_{max} - m_{min}}{\sec 60^\circ - 1}$$

Del gráfico, obtenemos $m_{max} = 2,243$ y $m_{min} = 2,120$. Así:

$$K = \frac{2,243 - 2,12}{2 - 1} = \boxed{0,123}$$

- b) Como descubrimos K , basta sustituirlo en una de las dos ecuaciones de extinción para encontrar m_0 :

$$m_{min} = m_0 + K \Rightarrow m_0 = 2,12 - 0,123 = \boxed{2,0}$$

Capítulo 5

Astronomía de Posición

La **Astronomía de Posición** es una rama de la astronomía dedicada al estudio de la posición de los astros. Como quedará más claro después de la introducción del concepto de esfera celeste, los **ángulos** que determinan la dirección de un astro son más relevantes que su distancia al observador. Tales ángulos están estrictamente relacionados al **sistema de referencia** utilizado, que depende de cada situación específica. Sin embargo, hay una preocupación con el **movimiento** de los astros en el cielo, como el Sol, la Luna y las estrellas. Por fin, la herramienta matemática que nos permite relacionar todos estos conceptos entre sí es llamada **trigonometría esférica**.

Los estudios de Astronomía de Posición fueron ampliamente utilizados durante el período de las Grandes Navegaciones, en el que el conocimiento del cielo permitía guiar los viajes en el océano, al final, entender bien el cielo posibilita que usted se localice en la Tierra y reconozca las direcciones de los puntos cardinales. Actualmente, el uso del GPS convierte el estudio de la astronomía de posición prescindible para navegaciones, sin embargo, esta área de la Astronomía todavía ejerce una función especial en las observaciones astronómicas.

5.1 La Esfera Celeste

Al observar el cielo, tenemos la impresión de que los astros están fijos en una enorme esfera centrada en la Tierra. Debido a las grandes distancias que la mayoría de los astros¹ están de nosotros, ellos aparentan girar en torno de un único eje con una tasa constante - alzándose cerca al este y poniéndose cerca del oeste. A esa esfera, le damos el nombre de **esfera celeste**.

El movimiento de la esfera celeste es resultado de la rotación de la Tierra.

¹Las principales excepciones son los cuerpos del sistema solar, que, gracias a sus cortas distancias a la Tierra, andan “libremente” por el cielo.

Note que, en el referencial del “universo”, las estrellas están quietas y nosotros somos quienes estamos girando. Sin embargo, en nuestro referencial (el de la Tierra), son los astros los que se están moviendo. Vista desde arriba, la Tierra gira en el sentido anti-horario (oeste a este), o sea, la esfera celeste girará en el sentido contrario de nuestro sistema de referencia - de este a oeste ². Cabe resaltar también que el radio de la esfera celeste es infinitamente grande, ya que esta no sale de una proyección de los astros en un “plano de fondo”.

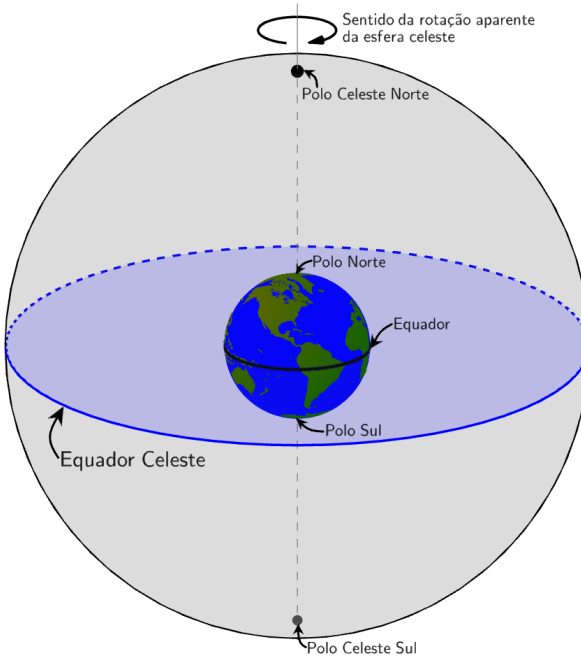


Figura 5.1: Esfera celeste y su rotación

5.1.1 Elementos de la Esfera Celeste

Para entender mejor el concepto de esfera celeste, necesitamos ver algunos de sus elementos:

- **Ecuador Celeste:** circunferencia máxima³ formada por la intersección del plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra (plano del Ecuador) con la esfera celeste.
- **Polo Norte Celeste (PNC):** punto de la esfera celeste en el que el eje de rotación de la Tierra la intercepta en el hemisferio Norte. O sea, puede

²Es por eso que los astros nacen en el este y se ponen en el oeste.

³La definición de circunferencia máxima será profundizada apenas en la sección 5.4.1. Mientras tanto, es suficiente la siguiente breve definición: una circunferencia máxima es la intersección de una esfera con un plano que contiene el centro de esa esfera.

ser entendido como la proyección del Polo Norte Geográfico en la Esfera Celeste.

- **Polo Sur Celeste (PSC):** punto de la esfera celeste en el que el eje de rotación de la Tierra la intercepta en el hemisferio Sur. O sea, puede ser entendido como la proyección del Polo Sur Geográfico en la Esfera Celeste. Es diametralmente opuesto al Polo Norte Celeste.
- **Paralelos:** círculos en la esfera celeste que son paralelos al Ecuador Celeste.
- **Meridianos:** semicírculos en la esfera celeste que contienen los dos polos celestes.

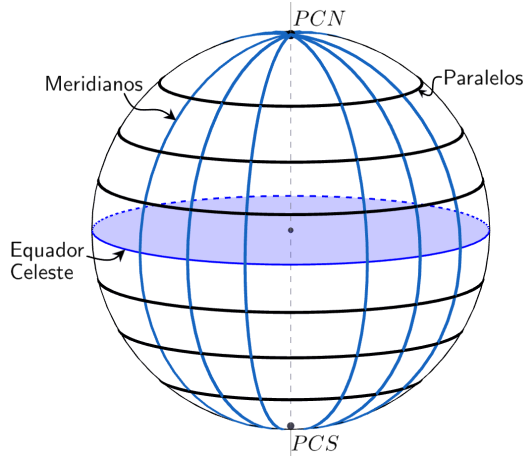


Figura 5.2: La esfera celeste y algunos de sus elementos

5.2 Sistemas de Coordenadas

Para que sea posible determinar la posición de un astro en el cielo, es necesario que establezcamos sistemas de coordenadas convenientes para nuestros objetivos. Un sistema de coordenadas se basa en un plano fundamental (con sus respectivos polos) y, a partir de eso, se definen dos coordenadas: una sobre el plano fundamental y otra perpendicular a ese plano. En la astronomía de posición, existen 5 sistemas principales de coordenadas:

- Coordenadas ecuatoriales
- Coordenadas horizontales
- Coordenadas horarias

- Coordenadas eclípticas
- Coordenadas galácticas

Sin embargo, antes de analizar cada una de ellas, vamos a recordar el sistema de coordenadas utilizado en la Tierra, las coordenadas geográficas.

5.2.1 Coordenadas Geográficas

Este sistema utiliza el Ecuador de la Tierra como plano fundamental y sus coordenadas son la longitud geográfica y la latitud geográfica. Este es utilizado para determinar la posición de un local en la superficie terrestre.

- **Longitud geográfica** (λ): arco medido sobre el Ecuador terrestre con origen en el meridiano de Greenwich y fin en el meridiano del lugar. El intervalo de valores para la longitud geográfica es:

$$-180^\circ \leq \lambda \leq +180^\circ$$

en el que el signo negativo significa que el local está al Oeste del meridiano de Greenwich y el signo positivo indica que el local está al Este de este meridiano.

- **Latitude geográfica** (ϕ): arco medido sobre el meridiano del local con origen en el ecuador terrestre y fin en el propio local. Su intervalo es:

$$-90^\circ \leq \phi \leq +90^\circ$$

en el que el signo negativo indica que el local está en el Hemisferio Sur y el signo positivo indica que este está en el Hemisferio Norte.

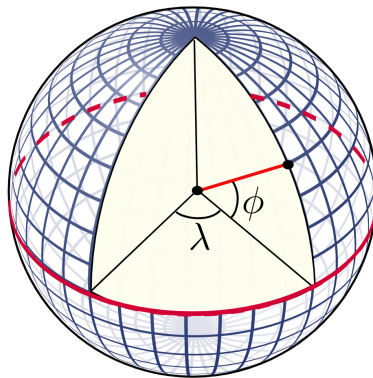


Figura 5.3: Coordenadas geográficas

5.2.2 Coordenadas Ecuatoriales

Este sistema utiliza el Ecuador Celeste como plano fundamental y sus coordenadas son la ascensión recta y la declinación. Es un sistema utilizado para determinar la posición de los astros en la esfera celeste.

- **Ascensión Recta** (α): arco medido sobre el ecuador celeste con origen en el Punto Vernal (γ)⁴ y fin en el meridiano del astro. Es contado en sentido horario si la esfera celeste es vista en el sentido Sur-Norte (esto equivale a decir que esta crece para el este). Su intervalo es:

$$0\text{h} \leq \alpha \leq 24\text{h}$$

- **Declinación** (δ): arco medido sobre el meridiano del astro con origen en el ecuador celeste y fin en el propio astro. Posee el siguiente intervalo de valores:

$$-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$$

en el que el signo negativo indica que el astro está en el Hemisferio Sur Celeste y el signo positivo indica que el astro está en el Hemisferio Norte Celeste.

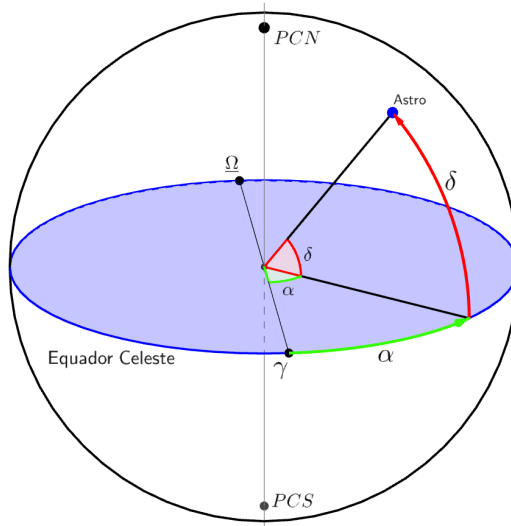


Figura 5.4: Coordenadas ecuatoriales

⁴La definición del Punto Vernal (γ) será explicada en la sección ?? . Mientras tanto, basta saber que este es un punto bien determinado en el Ecuador Celeste.

El sistema de coordenadas ecuatoriales está fijo en la esfera celeste y, por tanto, sus coordenadas no dependen del lugar o instante de observación. La ascensión recta y la declinación de un astro permanecen prácticamente constantes por largos períodos de tiempo⁵, i.e. es posible encontrar la posición de un objeto astronómico a través de sus coordenadas ecuatoriales.

5.2.3 Coordenadas Horizontales

Este sistema utiliza el Horizonte como plano fundamental y sus coordenadas son el acimut y la altura (o la distancia cenital). Es un sistema utilizado para determinar la posición de astros en el cielo para un observador y un instante específicos.

- **Horizonte:** plano tangente a la superficie terrestre en la posición del observador. Como el radio de la Tierra es mucho menor que el radio de la esfera celeste, se puede considerar que el plano del horizonte pasa por el centro de la esfera celeste, o sea, su intersección en la esfera celeste (la línea de horizonte⁶) es una circunferencia máxima.
- **Cenit:** punto encima del observador en el que la Esfera Celeste es interceptada por la vertical del lugar. Esta vertical es la recta perpendicular al plano del horizonte pasando por el observador.
- **Nadir:** punto diametralmente opuesto al cenit.
- **Círculos de altura:** círculos en la esfera celeste paralelos al horizonte.
- **Círculos verticales:** círculos en la esfera celeste que contienen al cenit y al nadir.
- **Puntos cardinales Norte (N) y Sur (S):** Proyecciones del PNC y del PSC , respectivamente, en la línea del horizonte.
- **Puntos cardinales Este (E) e Oeste (O):** Puntos sobre la línea del horizonte que pueden ser encontrados a partir de los puntos cardinales N o S a través de la rosa de los vientos.
- **Meridiano Local:** semicírculo máximo que contiene los puntos cardinales norte y sur pasando por el cenit.

⁵Como veremos en el apéndice de movimiento propio, ellas cambian, pero muy lentamente.

⁶Intersección del plano del horizonte con la Esfera Celeste.

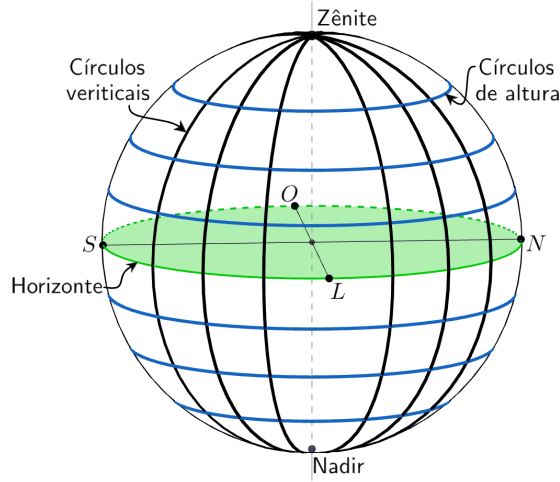


Figura 5.5: Elementos relevantes para las coordenadas horizontales (W es oeste y E es este)

A partir de estos conceptos, son definidas las dos coordenadas de este sistema:

- **Acimut** (A): arco medido sobre el horizonte con origen en el punto cardinal Norte y fin en el círculo vertical del astro. Generalmente, el sentido del ángulo se da en el sentido Norte-Este-Sur-Oeste (i.e. crece para el este). El intervalo de valores para el acimut es:

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

A veces⁷, el acimut es medido a partir del Sur. En estos casos, este crece en el sentido Sur-Oeste-Norte-Este.

- **Altura** (h): arco medido sobre el círculo vertical del astro con origen en el horizonte y fin en el propio astro. La altura posee el siguiente intervalo de valores:

$$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$$

⁷En el caso en el que el enunciado no especifique el origen, considere que este es el punto cardinal norte.

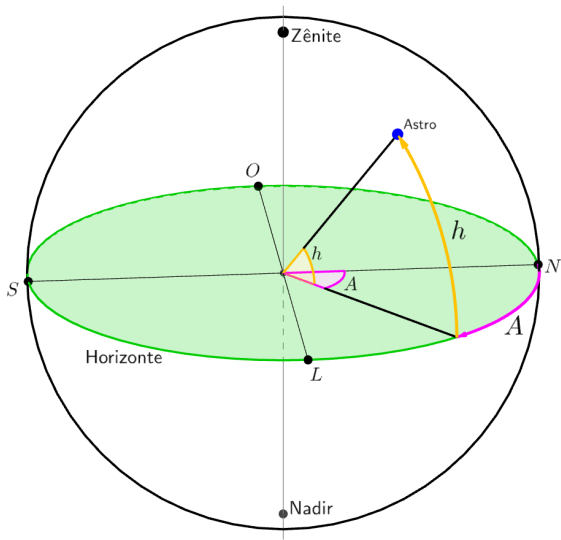


Figura 5.6: Coordenadas horizontales

En lugar de la altura, podemos utilizar una coordenada llamada distancia cenital para medir ángulos perpendiculares al plano del horizonte. Esta es:

- **Distancia cenital** (z): arco medido sobre el círculo vertical del astro con origen en el cenit y fin en el propio astro. Por lo tanto, la distancia cenital y la altura de un astro son ángulos complementarios, esto es:

$$z + h = 90^\circ \Rightarrow \boxed{z = 90^\circ - h}$$

Así, se puede concluir que los valores posibles para la distancia cenital de un astro están en el intervalo:

$$0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

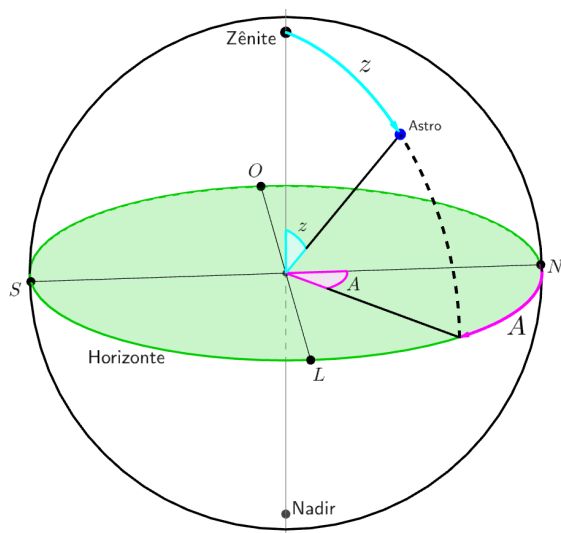


Figura 5.7: Coordenadas horizontales

Ahora que vimos el sistema de coordenadas ecuatoriales y horizontales, es importante comprender la relación entre ellas. La figura 5.8 representa un observador en la superficie terrestre y el polo celeste correspondiente al hemisferio de la Tierra en el que se encuentra (en el caso de la imagen, el observador está en el hemisferio Sur, por lo tanto, este verá el *PSC*).

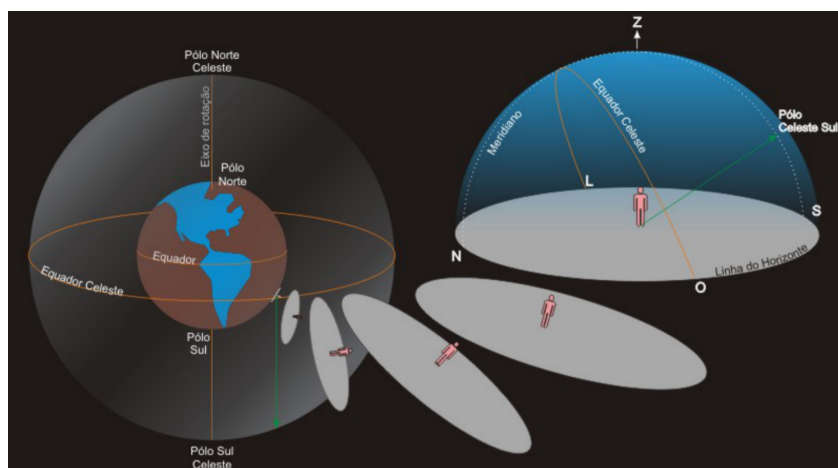


Figura 5.8: Horizonte de un observador

Con esto en mente, podemos llegar a un resultado **extremadamente** rele-

vante para la astronomía de posición:

La altura del polo celeste elevado es la latitud del lugar de observación

Vamos a demostrar eso. Primeramente, tenemos en la figura 5.9 que el ángulo entre el Ecuador de la Tierra y el observador que, por definición, es la latitud geográfica ϕ , es igual al ángulo entre el Ecuador Celeste y el cenit del observador. De este modo, siendo δ_Z la declinación del cenit, tenemos:

$$|\delta_Z| = |\phi|$$

Además de esto, como el eje de rotación de la Tierra y la línea Norte-Sur son perpendiculares al Ecuador Celeste y a la vertical del lugar, respectivamente, entonces se puede concluir que el módulo de la declinación del cenit será igual a la altura h_P del Polo Celeste Elevado (el Polo Celeste que está encima del horizonte para un determinado observador). Por lo tanto:

$$|\delta_Z| = h_P$$

En resumen, podemos concluir que el módulo de la latitud de un local $|\phi|$ es igual al módulo de la declinación del cenit δ_Z y es igual a la altura del polo celeste elevado h_P , ¡así como queríamos demostrar! Podemos escribir estas relaciones algebraicamente:

$|\phi| = |\delta_Z| = h_P$

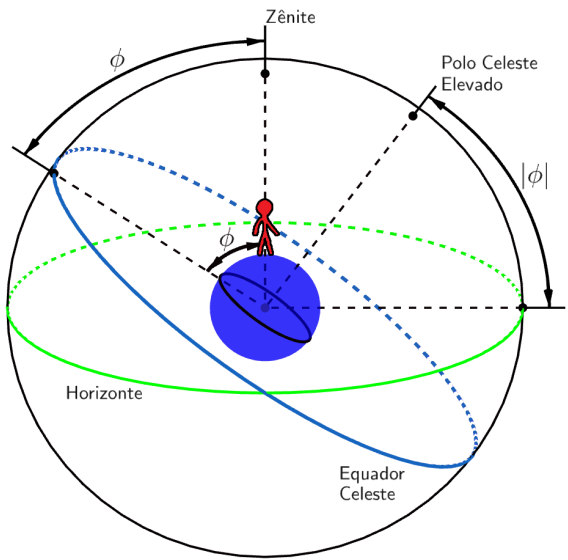


Figura 5.9: La latitud como la altura del polo celeste elevado

Sin embargo, es importante notar las siguientes relaciones:

- En el caso en el que el observador esté en el hemisferio norte, este verá el *PNC*, pero no el *PSC*;
- En el caso en el que el observador esté en el hemisferio sur, este verá el *PSC*, pero no el *PNC*.

Note también que el Ecuador Celeste siempre interceptará los puntos cardinales Este y Oeste, pues, por su definición, el Ecuador Celeste debe interceptar el Horizonte en una línea que pasa por el centro de la esfera celeste y que es perpendicular a la línea Norte-Sur. Esta línea formada por esta intersección es la línea Este-Oeste, como usted puede observar en la figura 5.10:

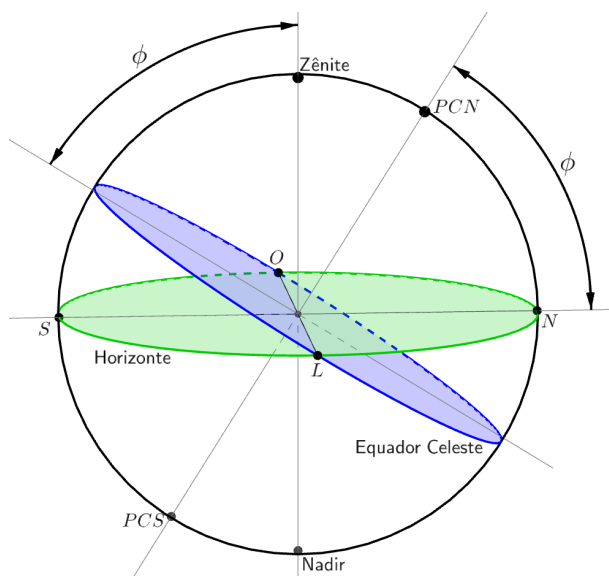


Figura 5.10: Sistema ecuatorial y horizontal

En resumen, se debe comprender que el sistema horizontal es un sistema local, esto es, que se encuentra fijo en la Tierra. Las coordenadas acimut y altura (o acimut y distancia cenital) dependen del lugar y del instante de la observación y no son características del astro.

5.2.4 Coordenadas Horarias

Este sistema utiliza el Ecuador como plano fundamental y sus coordenadas son la declinación (la misma coordenada utilizada en el sistema ecuatorial) y el ángulo horario. Es un sistema utilizado para determinar la posición de astro en el cielo de un observador en particular y posee aplicaciones importantes en

el estudio de las escalas de tiempo.

Es interesante notar que este sistema se basa en elementos del sistema ecuatorial (como el Ecuador Celeste) y del sistema horizontal (como el Meridiano Local).

- **Ángulo horario (H):** arco medido sobre el ecuador celeste con origen en el meridiano local y fin en el meridiano del astro.

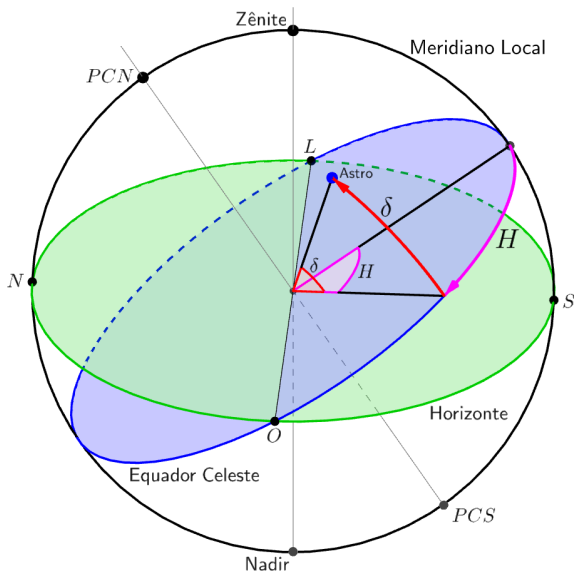


Figura 5.11: Coordenadas horarias

Hay 2 convenciones bastante utilizadas para este ángulo:

- Creciendo para el oeste, o sea, en el sentido del movimiento diurno⁸ de los astros, independientemente del acimut del astro. En este caso:

$$0h \leq H \leq 24h$$

⁸Este fenómeno será tratado con mayor profundidad en la sección 5.3.

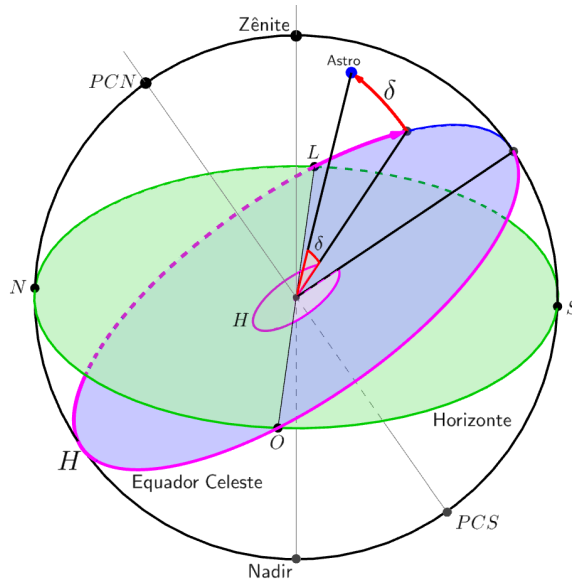


Figura 5.12: Primera convención

- Dependiente del acimut del astro. En el caso en el que el astro esté al oeste del meridiano local:

$$0\text{h} \leq H \leq 12\text{h}$$

Sin embargo, en el caso en el que el astro esté al este del meridiano local:

$$-12\text{h} \leq H \leq 0\text{h}$$

De este modo, en el caso de la figura 5.13, el astro tendría $H = 0$ cuando está sobre el meridiano local, $H = 6\text{h}$ cuando esté en el mismo meridiano del punto cardinal oeste y $H = -6\text{h}$ cuando esté en el mismo meridiano del punto cardinal este.

- **Polo Norte Eclíptico (PNE)**: intersección más próxima al PNC de la esfera celeste con la recta perpendicular al plano de la eclíptica que pasa por el centro de la esfera celeste.
- **Polo Sur Eclíptico (PSE)**: intersección más próxima al PSC de la esfera celeste con la recta perpendicular al plano de la eclíptica que pasa por el centro de la esfera celeste. Es diametralmente opuesto al Polo Eclíptico Norte.
- **Punto de Aries (γ)**: también conocido como Punto Vernal o Punto γ , es el punto de intersección de la Eclíptica con el Ecuador Celeste cuando el Sol se está moviendo del hemisferio Sur para el hemisferio Norte en su movimiento anual por la Eclíptica.
- **Punto de Libra (Ω)**: es el punto de intersección de la Eclíptica con el Ecuador Celeste cuando el Sol se está moviendo del hemisferio Norte para el hemisferio Sur en su movimiento anual por la Eclíptica. Es diametralmente opuesto al Punto Vernal.

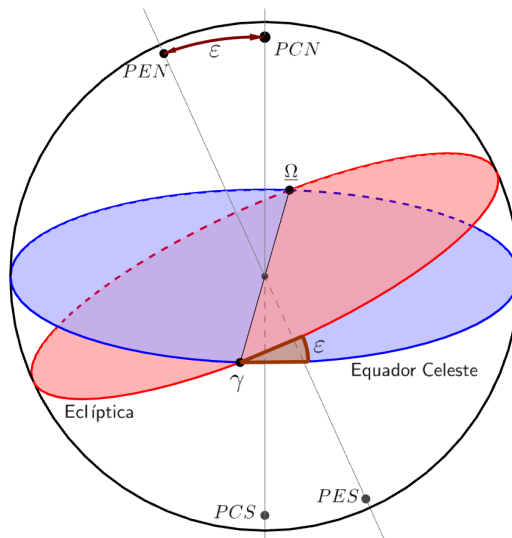


Figura 5.14: El Ecuador Celeste y la Eclíptica

Note en la figura arriba que el plano de la eclíptica posee una inclinación ε en relación al Ecuador Celeste. Este ángulo es llamado **oblicuidad de la eclíptica** y su valor es de $\varepsilon = 23^{\circ}27'$. Esta inclinación es resultado de la inclinación existente entre el eje de rotación de la Tierra y su órbita, como está ilustrado en la imagen abajo:

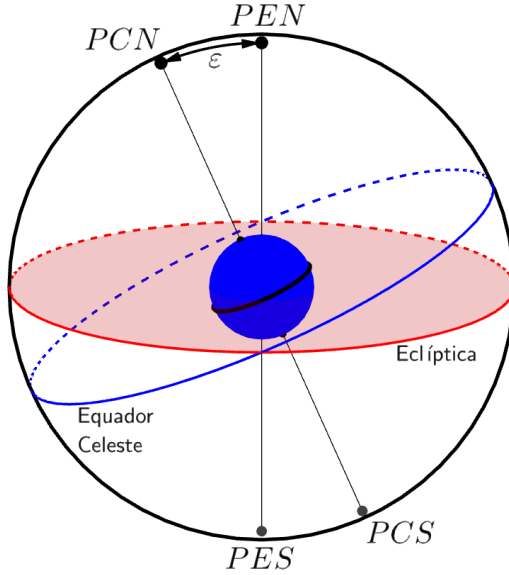


Figura 5.15: Oblicuidad de la eclíptica y la inclinación del eje de rotación de la Tierra.

A partir de estos conceptos, son definidas las dos coordenadas de este sistema:

- **Longitud eclíptica** (l): arco medido sobre la eclíptica con origen en el Punto Vernal y fin en el meridiano eclíptico¹⁰ del astro. Es contado en el sentido horario si la esfera celeste es vista en el sentido $PSE-PNE$ (análogo a crecer para el este). Su intervalo de valores es:

$$0^\circ \leq l \leq 360^\circ$$

- **Latitude eclíptica** (b): arco medido sobre el meridiano eclíptico del astro con origen en la Eclíptica y fin en el propio astro. Posee el siguiente intervalo de valores:

$$-90^\circ \leq b \leq +90^\circ$$

en el que el signo negativo indica que el astro está en el hemisferio Eclíptico Sur y el signo positivo indica que el astro está en el Hemisferio Eclíptico Norte.

¹⁰análogamente al meridiano del sistema ecuatorial, es cualquier semicírculo en la esfera celeste que contiene el PNE y el PSE .

5.2.6 Coordenadas Galácticas

Este sistema utiliza el Ecuador Galáctico como plano fundamental y sus coordenadas son la longitud galáctica y la latitud galáctica. Es un sistema utilizado para estudiar el contenido y la estructura de la Vía Láctea.

Algunos elementos relevantes para este sistema de coordenadas son:

- **Ecuador Galáctico:** plano que pasa por el Centro Galáctico y contiene el plano central de la Galaxia.
- **Polo Norte Galáctico (PNG):** una de las intersecciones de la esfera celeste con la recta perpendicular al Ecuador Galáctico que pasa por el centro de la esfera celeste. De las dos intersecciones, el PNG y el PSG, el primero está más próximo al PNC. Sus coordenadas ecuatoriales son: $\alpha_{PGN} = 12^{\text{h}}49^{\text{m}}$ e $\delta_{PGN} = 27^{\circ}24'$.
- **Polo Sur Galáctico (PSG):** punto diametralmente opuesto al PNG.
- **Centro de la Galaxia (CG):** centro de la Vía Láctea. Sus coordenadas ecuatoriales son: $\alpha_{CG} = 17^{\text{h}}43^{\text{m}}$ e $\delta_{CG} = -28^{\circ}55'$.
- **Nodo ascendente del Ecuador Galáctico (NA):** punto de intersección del Ecuador Galáctico con el Ecuador Celeste cuya ascensión recta es de $\alpha_{NA} = 18^{\text{h}}49^{\text{m}}$.

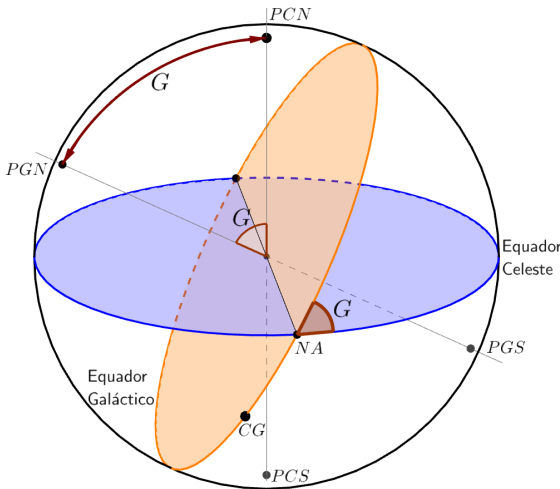


Figura 5.18: Coordenadas galácticas

Note en la figura arriba que el Ecuador Galáctico posee una inclinación G en relación al Ecuador Celeste de módulo $G = 62,4^{\circ}$.

A partir de estos conceptos, son definidas las dos coordenadas de este sistema:

- **Longitud galáctica (L):** arco medido sobre el Ecuador Galáctico con origen en el centro de la Galaxia y fin en el meridiano galáctico¹¹ del astro. Es contado en el sentido horario si la esfera es vista en el sentido *PSG-PNG* (análogo a crecer hacia el este). Posee el siguiente intervalo de valores:

$$0^\circ \leq L \leq 360^\circ$$

- **Latitud galáctica (B):** arco medido sobre el meridiano galáctico del astro con origen en el Ecuador Galáctico y fin en el propio astro. Su intervalo de valores es:

$$-90^\circ \leq B \leq +90^\circ$$

en el que el signo negativo indica que el astro está en el hemisferio Galáctico Sur y el signo positivo indica que el astro está en el hemisferio Galáctico Norte.

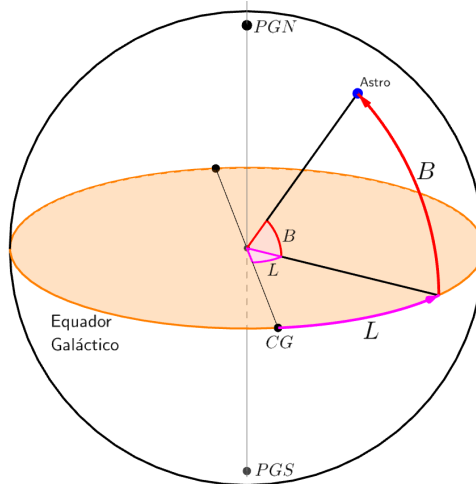


Figura 5.19: Coordenadas galácticas

¹¹análogamente al meridiano del sistema ecuatorial, es cualquier semicírculo en la esfera celeste que contiene el *PNG* y el *PSG*.

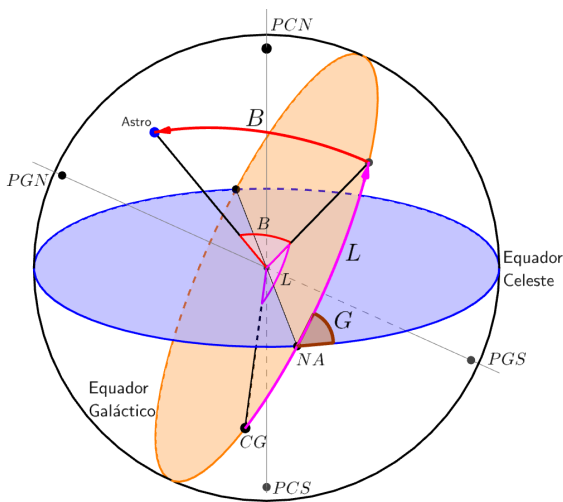


Figura 5.20: Coordenadas galácticas

Recuerde que la longitud galáctica L es contada partiendo del Centro de la Galaxia CG , no del nodo ascendente NA . Las coordenadas galácticas del nodo ascendente son: $B_{NA} = 0^\circ$ e $L_{NA} = 32,3^\circ$.

5.2.7 Resumen de los Sistemas de Coordenadas Astronómicas

Sistema	Coordenadas	Intervalo
Ecuatorial	δ : declinación	$-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$
	α : ascensión recta	$0h \leq \alpha \leq 24h$
Horizontal	h : altura	$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$
	A : acimut	$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$
Horario	δ : declinación	$-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$
	H : ángulo horario	$0h \leq H \leq 24h$
Eclíptico	b : latitud eclíptica	$-90^\circ \leq b \leq +90^\circ$
	l : longitud eclíptica	$0^\circ \leq l \leq 360^\circ$
Galáctico	B : latitud galáctica	$-90^\circ \leq B \leq +90^\circ$
	L : longitud galáctica	$0^\circ \leq L \leq 360^\circ$

5.3 Movimiento Diurno de los Astros

Como un observador en la Tierra ve la esfera celeste rotar en el sentido anti-horario cuando es vista a lo largo del sentido Sur-Norte, podemos concluir que un observador en la Tierra verá las estrellas girando alrededor del PNC en

el sentido anti-horario y las estrellas girando alrededor del *PSC* en el sentido horario.

Como vimos en la sección 5.1, la esfera celeste y, consecuentemente, los astros incrustados en ella, giran en el sentido contrario al de la Tierra. El sentido de rotación de la Tierra puede ser fácilmente descrito por la regla de la mano derecha, así como está ilustrado en la figura abajo. De este modo, apuntando el dedo para el *PNC*, los astros giran en el sentido contrario de cierre de la mano.



Figura 5.21: Rotación de la Tierra y regla de la mano derecha

Esto implica que, a lo largo de un día, un observador en la Tierra ve las estrellas surgir del horizonte cerca al punto cardinal este (acimut $0^\circ < A < 180^\circ$), recorrer círculos diurnos paralelos al Ecuador Celeste y, por fin, desaparecer en el horizonte del hemisferio occidental (acimut $180^\circ < A < 360^\circ$).

El intervalo de tiempo que una estrella tarda para dar una vuelta completa en su círculo diurno es denominado día sideral y posee una duración de $D_{sid} = 23\text{h}56\text{m}04\text{s}$ ¹²

Las figuras abajo ilustran el movimiento diurno de los astros en la esfera celeste para observadores en una latitud intermedia cualquiera ϕ , observadores en los polos $\phi = \pm 90^\circ$ y en el Ecuador $\phi = 0^\circ$.

¹²Mostraremos esto en el próximo capítulo.

• En una latitud cualquiera (ϕ)

Como ya vimos, la altura del polo celeste visible (PNC para $\phi > 0$ y PSC para $\phi < 0$) corresponde al módulo de la latitud.

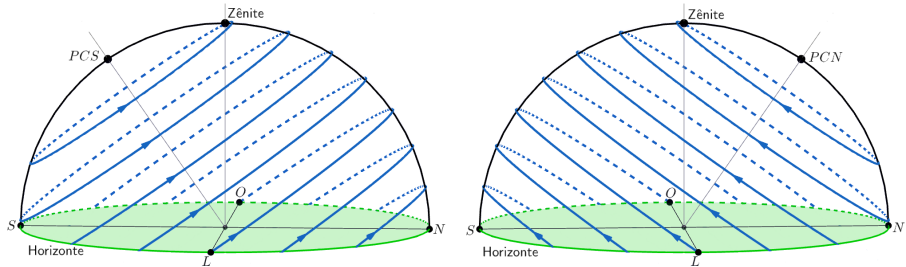


Figura 5.22: Movimiento diario de los astros en una latitud cualquiera. En la figura a la izquierda, $-90^\circ < \phi < 0^\circ$. Y en la figura a la derecha, $0^\circ < \phi < 90^\circ$

• En los Polos ($\phi = \pm 90^\circ$)

En este caso, el polo celeste elevado coincide con el cenit del observador. O sea, el observador en el Polo Norte tendrá el PNC coincidiendo con su cenit y el observador en el Polo Sur tendrá el PSC coincidiendo con su cenit. Por lo tanto, los círculos diarios de los astros sean paralelos al horizonte.

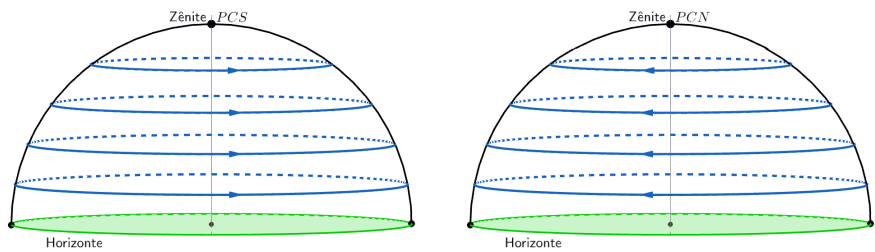


Figura 5.23: Movimiento diario de los astros en los polos. La figura de la izquierda representa el Polo Sur, y la figura de la derecha representa el Polo Norte

• En el Ecuador ($\phi = 0^\circ$)

En este caso, el PNC coincide con el punto cardinal Norte y el PSC coincide con el punto cardinal Sur. Por lo tanto, los círculos diarios de los astros serán perpendiculares al horizonte.

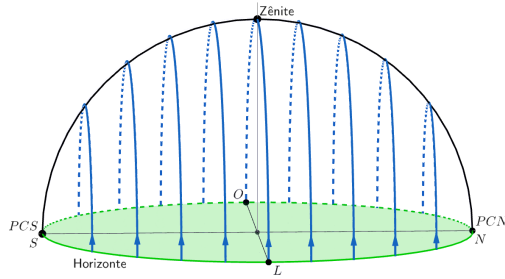


Figura 5.24: Movimiento diurno de los astros en el Ecuador

5.3.1 Salida, Puesta y Pasaje Meridiano de un Astro

Se define la **salida** de un astro como el instante en que este posee altura $h = 0^\circ$ mientras esta está aumentando (i.e. acimut $0^\circ < A < 180^\circ$). En otras palabras, la salida de un astro es el instante en que este surge de la línea del horizonte.

Análogamente, se define la **puesta** de un astro como el instante en que este posee altura $h = 0^\circ$ mientras esta está disminuyendo (i.e. acimut $180^\circ < A < 360^\circ$). En otras palabras, la puesta de un astro es el instante en que este desaparece en el horizonte.

Por fin, se define el **pasaje meridiano** de un astro como el instante en que este se encuentra sobre el meridiano local. Por la simetría de la situación, este instante ocurre exactamente en el instante medio entre la salida de un astro y su puesta. O sea, el intervalo de tiempo entre la salida y el pasaje meridiano de un astro es igual al intervalo de tiempo entre el pasaje meridiano y la puesta.

5.3.2 Culminación Superior e Inferior

Durante su movimiento diurno, un astro realiza dos pasajes meridianos. El pasaje meridiano en el que el astro llega a su altura máxima se llama **culminación superior**, mientras que el pasaje meridiano en el que el astro llega a su altura mínima se llama **culminación inferior**.

Podemos encontrar la distancia cenital z de un astro en su culminación **superior** en función de su declinación δ y la latitud del observador ϕ . Para relacionar estas cantidades, analizaremos los 4 casos posibles a través de los cortes de la esfera celeste.

- Observador en el hemisferio norte

1. $\delta < \phi$

2. $\delta > \phi$

- Observador en el hemisferio sur

1. $\delta < \phi$

2. $\delta > \phi$

Primeramente, vamos a analizar la situación en el hemisferio norte (HN):

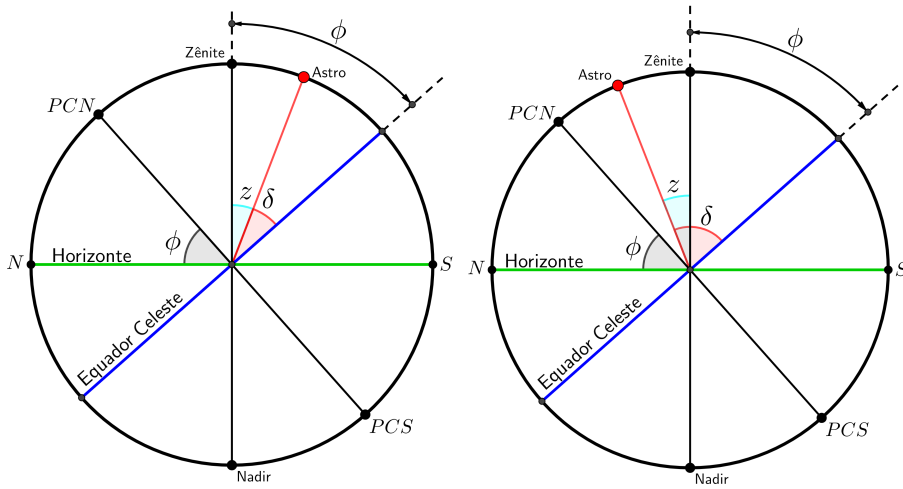


Figura 5.25: En la figura de la izquierda, tenemos $\delta < \phi$. Mientras que en la figura de la derecha, tenemos $\delta > \phi$. Ambos casos son en el HN

Por lo tanto, para un observador en el hemisferio Norte ($\phi > 0$), tenemos:

Si $\delta < \phi$ (este caso también incluye declinaciones negativas):

$$\phi = z + \delta \Rightarrow z = \phi - \delta$$

Se $\delta > \phi$:

$$\delta = z + \phi \Rightarrow z = \delta - \phi$$

Ahora, vamos a analizar lo que ocurre en el hemisferio Sur (HS):

5.3.3 Estrellas Circumpolares

Usted puede notar en la figura 5.22 que, dependiendo de la latitud del observador, estrellas próximas al polo celeste visible describen sus círculos diarios integralmente encima del horizonte. Análogamente, estrellas próximas al polo oculto puede permanecer todo el tiempo debajo del horizonte para ciertos observadores. Estas estrellas son llamadas **estrellas circumpolares**.

Si las culminaciones superior e inferior de un astro ocurren encima del horizonte, este es llamado **circumpolar visible**.

Si las culminaciones superior e inferior de un astro ocurren debajo del horizonte, este es llamado **circumpolar invisible**.

La imagen abajo ilustra las regiones en que se encuentran las estrellas circumpolares **visibles** y **invisibles** para un observador en el HN. Si este se encuentra en el HS, la situación sería análoga.

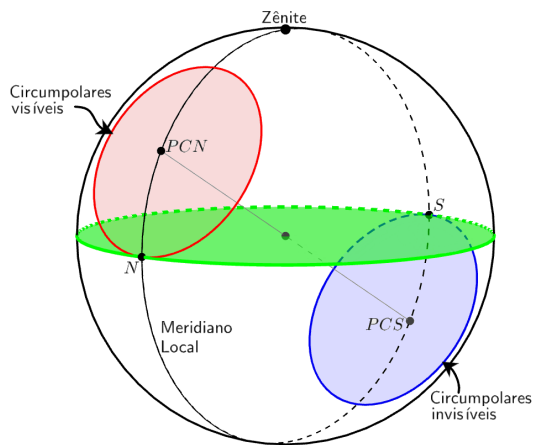


Figura 5.27: Estrellas circumpolares visibles e invisibles en la esfera celeste.

Ahora, vamos a encontrar la relación algebraica entre la latitud de un observador y la declinación de un astro para que este sea circumpolar. Es conveniente analizar el corte de la esfera celeste, así como está representado en la siguiente imagen:

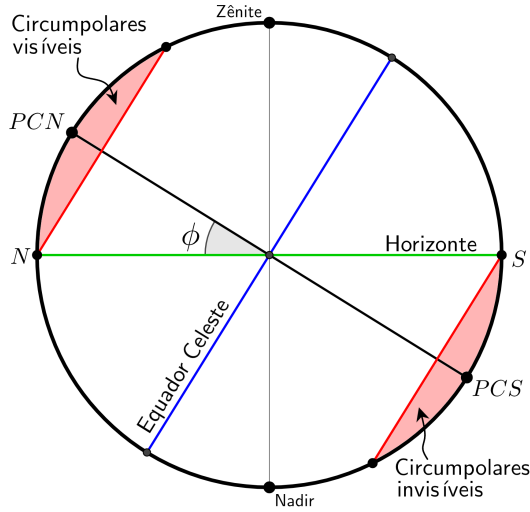


Figura 5.28: Estrellas circumpolares visibles e invisibles en el meridiano local.

Así como hicimos en el caso de las culminaciones superiores e inferiores, necesitamos analizar algunos casos:

- Observador en el HN ($\phi > 0$)
- Observador en el HS ($\phi < 0$)

En ambos casos, para que una estrella sea circumpolar visible, su altura debe estar en el máximo $2|\phi|$ y en el mínimo $|\phi|$ durante la culminación superior. Por lo tanto, estrellas que poseen altura $|\phi| \leq h \leq 2|\phi|$ en su culminación superior son circumpolares visibles.

Sabiendo esto, podemos determinar el módulo de la declinación mínima para que una estrella sea circumpolar visible. Por la figura 5.29, tenemos:

$$90^\circ = |\phi| + |\delta_{\min}| \Rightarrow |\delta_{\min}| = 90^\circ - |\phi|$$

Note que este resultado puede ser generalizado para observadores en el HS, ya que estamos hablando del módulo de la declinación.

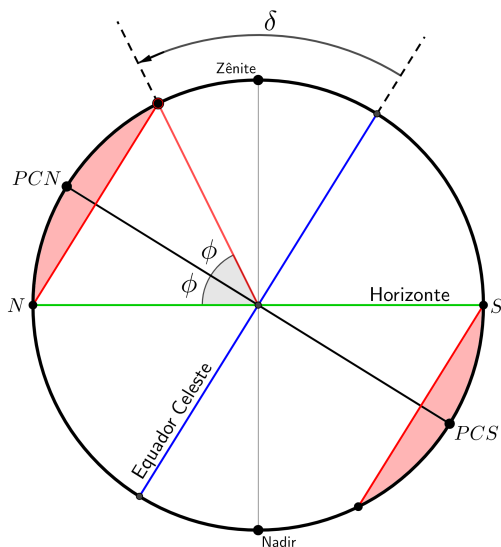


Figura 5.29: Relación entre δ e ϕ para que una estrella sea circumpolar visible

Ahora, para que una estrella sea circumpolar invisible, su altura debe estar en el máximo 0° y en el mínimo $-|phi|$ durante la culminación superior. Por lo tanto, estrellas que poseen altura $-|phi| \leq h \leq 0^\circ$ en su culminación superior son circumpolares invisibles.

Con esto, podemos realizar un procedimiento análogo a aquel de las circumpolares visibles. Note por la figura 5.29 que el ángulo entre el plano del horizonte y el ecuador celeste a la derecha del cenit es $|\delta|$ y que el ángulo entre el horizonte y el polo oculto (PSC) a la derecha del cenit es $|\phi|$, o sea:

$$90^\circ = |\phi| + |\delta_{\min}| \Rightarrow |\delta_{\min}| = 90^\circ - |\phi|$$

Por lo tanto, vemos que la expresión de $|\delta_{\min}|$ (el módulo, ¡no $\delta_{\min}!$) es la misma tanto para circumpolares visibles e invisibles. De esta manera, podemos generalizar:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi|$$

Como ambas incógnitas están en módulo, note que encontraremos dos intervalos como solución para δ dado un valor de ϕ y dos intervalos como solución para ϕ dado un valor de δ . Esto es coherente con lo esperado, pues recuerde que tal expresión vale para ambas circumpolares visibles e invisibles.

Por lo tanto, de las dos soluciones obtenidas al aplicar esta fórmula, basta realizar un breve análisis para descubrir cuál es la condición de circumpolaridad visible y cuál es la condición de circumpolaridad invisible.

Ejemplo 1

Un observador está localizado en una latitud $\phi = -30^\circ$. ¿Cuál es el intervalo de declinaciones para que una estrella esté siempre encima del horizonte? ¿Y cuál es el intervalo para que una estrella esté siempre debajo del horizonte?

Solución

Por la condición de circumpolaridad:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi| = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Si $\delta < 0$, entonces $|\delta| = -\delta$. Por otro lado, si $\delta > 0$, entonces $|\delta| = \delta$. Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$\boxed{\delta \geq 60^\circ}$$

y

$$-\delta \geq 60^\circ \Rightarrow \boxed{\delta \leq -60^\circ}$$

Ahora, es simple asociar cada una de las soluciones al tipo de circumpolaridad. Note que las declinaciones negativas representan estrellas próximas al polo visible (*PSC*) del observador, i.e. estas representan las circumpolaridades visibles. Análogamente:

Estrellas con declinación $\delta \leq -60^\circ$ estarán siempre encima del horizonte y estrellas con declinación $\delta \geq 60^\circ$ estarán siempre debajo del horizonte.

Un hecho interesante es que es posible determinar la latitud de un lugar apenas midiendo las alturas h_s y h_i de un astro en sus culminaciones superior e inferior, respectivamente.

Sabemos que el ángulo entre los astros y los polos celestes siempre son los mismos ($90^\circ - \delta$ o $90^\circ + \delta$). Así, siendo θ el ángulo entre un astro y el polo celeste elevado, tenemos que sus alturas durante las culminaciones serán:

$$h_i = |\phi| - \theta$$

$$h_s = |\phi| + \theta$$

en que esta expresión de h_s vale **solamente** si la estrella culmina superiormente con el mismo acimut de su culminación inferior¹³.

¹³Por ejemplo, esto no ocurre si la culminación inferior fuera a la izquierda del cenit y la superior fuera a la derecha, lo cual es posible. Queda como ejercicio al lector encontrar la relación entre las latitudes y las alturas en esta situación.

Sumando las dos ecuaciones:

$$h_i + h_s = 2|\phi| - \theta + \theta \Rightarrow |\phi| = \frac{h_i + h_s}{2}$$

5.3.4 Sol

Como resultado del movimiento de rotación de la Tierra, el movimiento diurno del Sol se da en el mismo sentido que el de las estrellas, o sea, en el sentido de Este para Oeste. Sin embargo, diferentemente de las estrellas, la ascensión recta y la declinación del Sol no permanecen constantes a lo largo de un año debido a su trayectoria sobre la Eclíptica (que es el fruto de la traslación de la Tierra alrededor del Sol).

El Sol recorre una vuelta completa en la eclíptica en el período de una traslación de la Tierra, o sea, en un año. Como la órbita terrestre es aproximadamente circular¹⁴, el Sol camina sobre la eclíptica con una velocidad angular aproximadamente constante.

Debido a la variación de la ascensión recta del Sol, que puede ser observada en la figura 5.30, este se mueve $\approx 1^\circ$ por día¹⁵ para el este, lo que hace que el intervalo de tiempo entre dos pasajes meridianas consecutivas del Sol sea $\approx 4min$ mayor¹⁶ que el de las estrellas.

Como la eclíptica posee una inclinación en relación al Ecuador Celeste de $\varepsilon 23^\circ 27'$ debido a la inclinación del eje de rotación de la Tierra en relación a su plano orbital, la declinación del Sol varía anualmente entre $-23^\circ 27' \leq \delta_\odot \leq +23^\circ 27'$ pasando por 4 puntos peculiares en la eclíptica:

¹⁴En el próximo capítulo serán profundizados los efectos de la pequeña excentricidad de la órbita de la Tierra en el movimiento diurno del Sol.

¹⁵Estamos haciendo la razón $\frac{360^\circ}{365 \text{ días}} \approx 1^\circ$. Claro, esto es solamente una estimación.

¹⁶La velocidad de rotación de la Tierra es cerca de $\frac{360^\circ}{24 \text{ h}} = \frac{1^\circ}{4 \text{ min}}$, i.e. la diferencia de 1° lleva $\approx 4 \text{ min}$ para ser “corregida”.

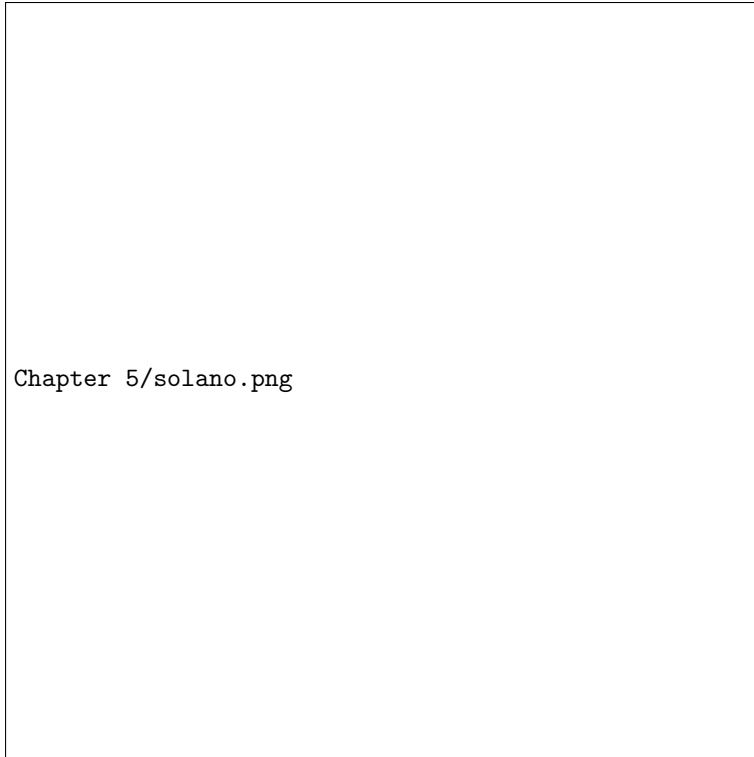


Figura 5.30: Posiciones del Sol a lo largo del año.

- **Equinoccio de marzo:** ocurre alrededor del día 21/03 cuando el Sol cruza el Ecuador Celeste yendo del hemisferio Sur celeste al hemisferio Norte celeste. Esto significa que el Punto γ se encuentra en este punto. Sus coordenadas ecuatoriales en esta fecha son: $\alpha_{\odot} = 0h$ y $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$.
- **Solsticio de junio:** ocurre alrededor del día 21/06 cuando el Sol se encuentra en su máxima declinación. Por lo tanto, sus coordenadas ecuatoriales en esta fecha son: $\alpha_{\odot} = 6h$ y $\delta_{\odot} = +23^{\circ}27'$.
- **Equinoccio de septiembre:** ocurre alrededor del día 21/09 cuando el Sol cruza el Ecuador Celeste yendo del hemisferio Norte celeste al hemisferio Sur celeste. Esto significa que el Punto Ω se encuentra en este punto. Por lo tanto, sus coordenadas ecuatoriales en esta fecha son: $\alpha_{\odot} = 12h$ y $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$.
- **Solsticio de diciembre:** ocurre alrededor del día 21/12 cuando el Sol se encuentra en su declinación mínima. Por lo tanto sus coordenadas ecuatoriales en esta fecha son: $\alpha_{\odot} = 18h$ y $\delta_{\odot} = -23^{\circ}27'$.

El resultado de esta variación de la declinación del Sol a lo largo del año da origen a las **estaciones del año**, pues esta es acompañada de un cambio en el círculo diurno del Sol durante un año. Como está ilustrado en la figura 5.31, la declinación del Sol varía anualmente entre $-23^{\circ}27'$ y $+23^{\circ}27'$.

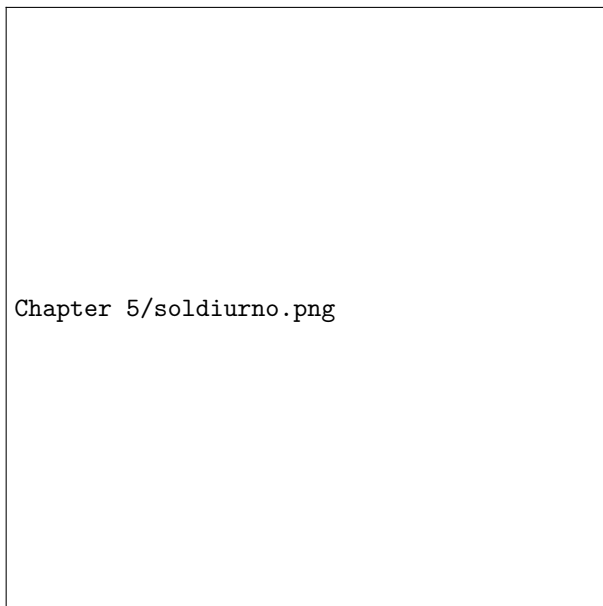


Figura 5.31: Círculos diurnos del Sol variando la declinación entre $\delta = -23^{\circ}27'$ y $\delta = +23^{\circ}27'$.

A su vez, la variación de los círculos diurnos del Sol interfiere en la incidencia solar, provocando alteraciones climáticas durante las diferentes estaciones del año. Por ejemplo, cuando el círculo diurno es mayor ($\delta < 0$ en el HS, p.ex.), una localidad recibe más luz solar durante un día, por tanto, dando origen a las estaciones calientes (i.e. Verano).

Podemos resumir estos resultados:

- A lo largo de un **día**, la trayectoria del Sol es prácticamente idéntica a aquella de una estrella cualquiera. Este nace en el este, se pone en el oeste, culmina, puede ser circumpolar, etc.
- A lo largoe de un **año**, la trayectoria diaria del Sol varía principalmente debido a la alteración de su declinación. Así como está ilustrado en la figura 5.31, esta varía anualmente entre $-23^{\circ}27'$ y $+23^{\circ}27'$.

5.3.5 Luna

El plano orbital de la Luna tiene una inclinación de $5^{\circ}9'$ en relación a la eclíptica. A pesar de que este ángulo permanece aproximadamente constante, el plano orbital no es fijo, moviéndose tal que su eje describe un círculo completo en torno del eje de la eclíptica en un período de 18,6 años.

Por lo tanto, en relación al Ecuador Celeste, la órbita de la Luna tiene una inclinación que varía de $18,4^{\circ}$ ($23,5^{\circ} - 5,15^{\circ}$) a $28,7^{\circ}$ ($23,5^{\circ} + 5,15^{\circ}$).

Por día, la Luna se mueve $360^{\circ}/27,3 \text{ días} \approx 13^{\circ}$ para el este en relación a las estrellas. Este movimiento es un reflejo de la revolución de la Luna alrededor de la Tierra, que se da cada 27,3 días (mes sideral). Como el Sol se mueve $\approx 1^{\circ}$ para el este por día, entonces, por día, la Luna está $\approx 12^{\circ}$ al este del Sol. Debido a esto, la Luna cruza el meridiano local $12^{\circ} \cdot \left(\frac{4 \text{ min}}{1^{\circ}}\right) \approx 50 \text{ min}$ más tarde que en el día anterior.

5.4 Trigonometría Esférica

La trigonometría esférica es una herramienta matemática que posibilita relacionar arcos y ángulos en la esfera celeste, siendo por lo tanto **extremadamente** importante para la Astronomía de Posición. En esta sección, estudiaremos algunas de sus propiedades.

5.4.1 Triángulos Esféricos

Definición

Antes de introducirnos a la idea de un triángulo esférico, es importante saber lo que son las **grandes circunferencias** (también llamadas circunferencias máximas). Una gran circunferencia es definida como cualquier circunferencia en la superficie esférica cuyo centro coincide con el centro de la esfera. Cualquier circunferencia en la superficie esférica que no satisfaga esto es llamada **pequeña circunferencia**.

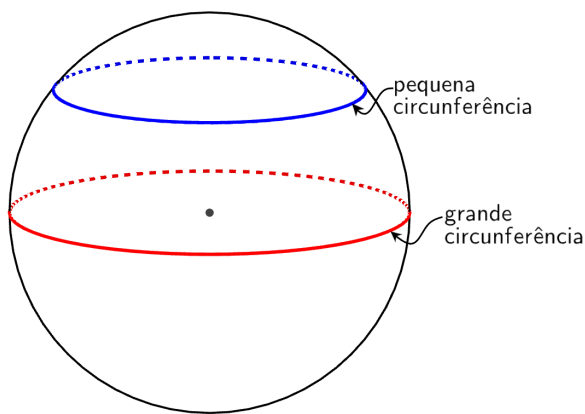


Figura 5.32: Pequena y gran circunferencia.

Cuando dos circunferencias máximas se interceptan en un punto, forman entre sí un **ángulo esférico**. Su medida es igual al ángulo plano entre las tangentes en el punto de intersección de dos arcos que forman el ángulo esférico. Análogamente, este ángulo puede ser representado en un arco esférico. Tal arco debe ser de una circunferencia máxima contenida entre los dos lados del ángulo esférico y distantes 90° de su vértice, así como está ilustrado en la figura 5.33.

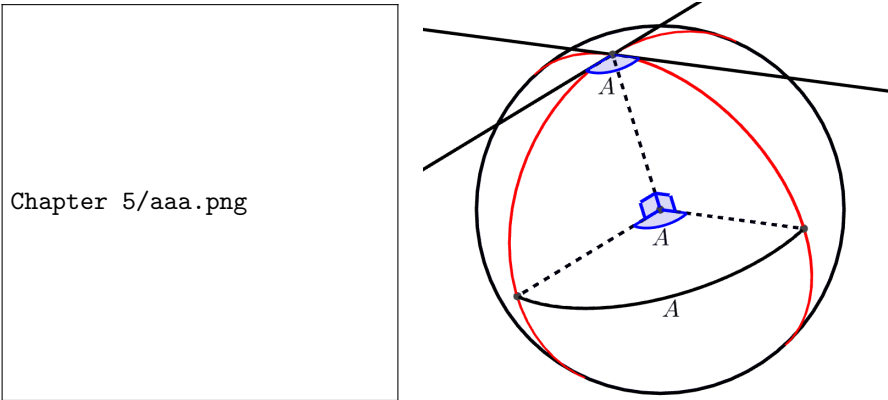


Figura 5.33: A la izquierda se muestra un ángulo esférico y a la derecha se muestran los correspondientes de este ángulo.

Con esto, se puede notar que arcos de circunferencias máximas en triángulos esféricos pueden ser medidos por ángulos. Esto es especialmente conveniente en astronomía de posición, pues difícilmente nos interesamos por el radio de la esfera celeste, que es esencialmente infinito.

Ahora que sabemos los conceptos de gran circunferencia y ángulo esférico, vamos a definir lo que es un triángulo esférico.

Los triángulos esféricos no son cualquier figura formada por tres arcos en la superficie de una esfera; sus lados deben ser arcos de **grandes circunferencias**. Denotamos los ángulos de un triángulo esférico por las letras mayúsculas (A, B, C) y sus lados correspondientes por letras minúsculas (a, b, c) . En otras palabras, si tres puntos de la superficie esférica son unidos por arcos de circunferencia máxima menores que 180° , la figura obtenida se denomina triángulo esférico, como la imagen abajo:

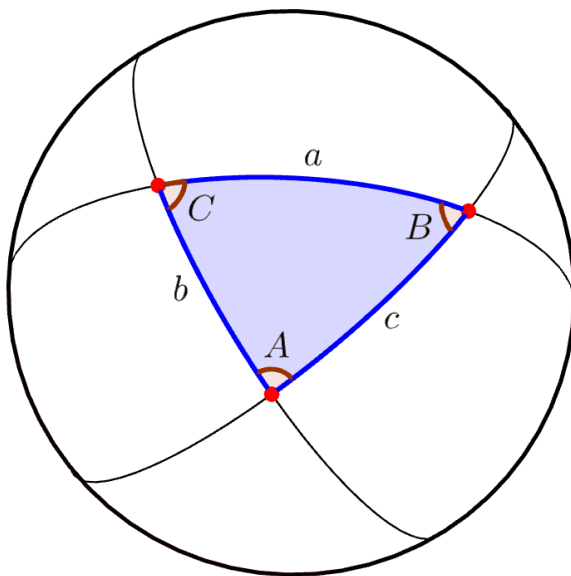


Figura 5.34: Triángulo esférico y los arcos de grande circunferencia que lo forma.

Vale la pena enfatizar que los lados de triángulos esféricos son arcos de grandes circunferencias pues estos arcos definen la menor distancia entre dos puntos en la superficie de una esfera, así como la menor distancia entre dos puntos en un plano y una recta.

Propiedades

- La suma de los ángulos de un triángulo esférico no es constante, como es el caso de un triángulo plano (180°). Esta es **siempre** mayor que 180 grados y menor que 540 grados. Incluso, todo el exceso de 180 grados es directamente proporcional al área del triángulo esférico.
- La suma de los lados de un triángulo esférico es mayor que cero y menor que 180 grados.

- Los lados mayores están opuestos a los ángulos mayores en el triángulo esférico.
- La suma de dos lados del triángulo esférico es siempre mayor que el tercer lado, y su diferencia es siempre menor.
- Cada uno de los lados y ángulos del triángulo esférico es menor que 180 grados.

Para “resolver” (encontrar los valores de todos los lados y ángulos) un triángulo esférico, es necesario conocer mínimo tres elementos: o tres ángulos, o dos lados y un ángulo, o un ángulo y dos lados. Esto es hecho a partir de ciertas relaciones fundamentales, de las cuales serán presentadas las tres principales: ley de los cosenos, ley de los senos y ley del coseno-coseno o ley de los 4 elementos. Tenga cuidado para no confundir las leyes de los senos/cosenos con aquellas de los triángulos planos.

5.4.2 Ley de los Cosenos

De manera general, la ley de los cosenos relaciona los siguientes elementos de un triángulo esférico:

- A : un ángulo del triángulo esférico
- LO : el lado opuesto a ese ángulo
- LA_1 : uno de los lados adyacentes a ese ángulo
- LA_2 : el otro lado adyacente a ese ángulo

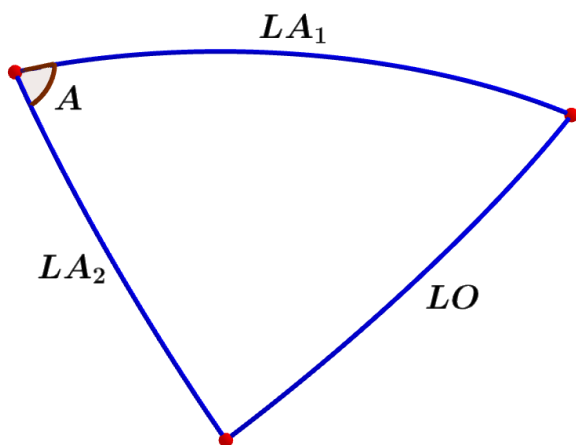


Figura 5.35: Elementos involucrados en la ley de los cosenos.

A partir de esto, la ley de los cosenos es escrita como:

$$\cos LO = \cos LA_1 \cos LA_2 + \sin LA_1 \sin LA_2 \cos A$$

Por ejemplo, aplicando esta expresión al triángulo esférico genérico de la figura 5.34, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

5.4.3 Ley de los Senos

La ley de los senos relaciona los siguientes elementos:

- A_1 : un ángulo del triángulo esférico
- LO_1 : el lado opuesto a ese ángulo
- A_2 : otro ángulo del triángulo esférico
- LO_2 : el lado opuesto a ese otro ángulo

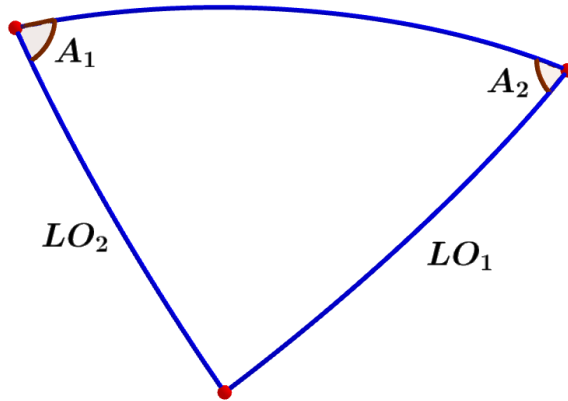


Figura 5.36: Elementos involucrados en la ley de los senos.

Esta ley establece que:

$$\frac{\sin A_1}{\sin LO_1} = \frac{\sin A_2}{\sin LO_2}$$

Por ejemplo, aplicando esta expresión al triángulo esférico genérico de la figura 5.34, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$$

5.4.4 Ley del Coseno-coseno o Cuatro Elementos

En esta ley, los elementos utilizados están dispuestos de la siguiente manera:

- L_I : lado interno
- L_E : lado externo
- A_I : ángulo interno
- A_E : ángulo externo

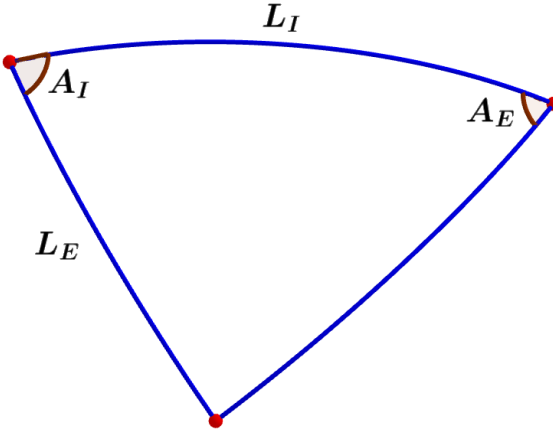


Figura 5.37: Elementos involucrados en la ley del coseno-coseno.

Note que esta recibe el nombre de “Ley de los cuatro elementos” pues relaciona cuatro elementos **consecutivos** en un triángulo esférico. Esta dice que:

$$\cot L_E \text{ sen } L_I = \cot A_E \text{ sen } A_I + \cos A_I \cos L_I$$

Por ejemplo, aplicando esta expresión al triángulo esférico genérico de la figura 5.34, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\cot b \text{ sen } c = \cot B \text{ sen } A + \cos c \cos A$$

$$\cot b \text{ sen } a = \cot B \text{ sen } C + \cos a \cos C$$

$$\cot a \text{ sen } b = \cot A \text{ sen } C + \cos b \cos C$$

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cot A \operatorname{sen} B + \cos c \cos B$$

$$\cot c \operatorname{sen} a = \cot C \operatorname{sen} B + \cos a \cos B$$

$$\cot c \operatorname{sen} b = \cot C \operatorname{sen} A + \cos b \cos A$$

5.5 Ejemplos de Aplicación

En esta sección, serán presentados algunos ejemplos clásicos en la astronomía de posición que hacen uso de la trigonometría esférica con la intención de hacer la aplicación de estas leyes y conceptos más intuitiva para el lector.

5.5.1 Distancia Angular

Sean 1 y 2 dos astros arbitrarios en la esfera celeste. Para encontrar la distancia angular d entre ellos, basta conocer las coordenadas de ambos astros en un determinado sistema de coordenadas¹⁷.

Por ejemplo, dadas las coordenadas ecuatoriales de estos astros, podemos calcular la distancia angular d entre ellos a partir del siguiente triángulo esférico:

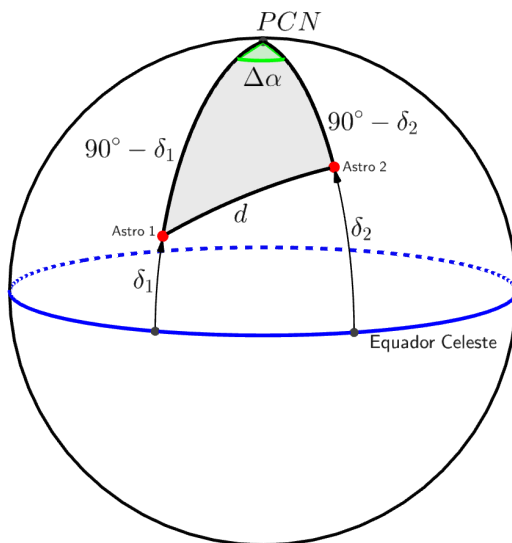


Figura 5.38: Triángulo esférico utilizado para calcular la distancia angular entre dos astros.

¹⁷En la realidad, dado un sistema de coordenadas, basta conocer las coordenadas perpendiculares al plano fundamental de ambos astros y la diferencia entre las otras coordenadas de cada astro.

Aplicando la ley de los cosenos en el triángulo esférico arriba, obtenemos:

$$\cos d = \cos (90^\circ - \delta_1) \cos (90^\circ - \delta_2) + \sin (90^\circ - \delta_1) \sin (90^\circ - \delta_2) \cos \Delta\alpha$$

Note que es irrelevante distinguir si $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ o si $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, pues $\cos(x) = \cos(-x)$.

Como $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ e $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, tenemos:

$$\cos d = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \Delta\alpha$$

Note que un proceso equivalente puede ser hecho para encontrar la distancia angular entre dos puntos conociendo las coordenadas de ambos en otro sistema de coordenadas astronómicas.

5.5.2 Triángulo de Posición

Uno de los triángulos esféricos más comunes y útiles es llamado Triángulo de Posición, que es un triángulo esférico formado por un astro, el cenit del observador y el polo celeste elevado (*PNC* o *PSC*). Este es especialmente importante pues posibilita relacionar los sistemas de coordenadas horizontales y ecuatoriales. La imagen abajo ilustra esta situación.

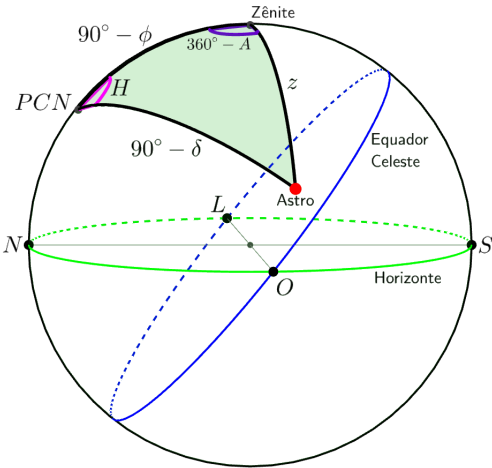


Figura 5.39: Ejemplo de triángulo de posición

Podemos aplicar en el triángulo de posición de la figura arriba las 3 leyes presentadas de la trigonometría esférica para relacionar sus lados y ángulos esféricos:

- Por la **ley de los cosenos**, tenemos:

$$\cos z = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \phi) \cos H$$

$$\boxed{\cos z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}$$

También, podemos relacionar:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos z \cos(90^\circ - \phi) + \sin z \sin(90^\circ - \phi) \cos(360^\circ - A)$$

$$\boxed{\sin \delta = \cos z \sin \phi + \sin z \cos \phi \cos A}$$

- Por la **ley de los senos**, tenemos:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(360^\circ - A)} = \frac{\sin z}{\sin H} \Rightarrow \boxed{-\frac{\cos \delta}{\sin A} = \frac{\sin z}{\sin H}}$$

pues $\sin(360^\circ - x) = -\sin x$.

- Por la **lei do cosseno-cosseno**, tenemos:

$$\cot(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \phi) = \cot(360^\circ - A) \sin H + \cos(90^\circ - \phi) \cos H$$

$$\boxed{\tan \delta \cos \phi = -\cot A \sin H + \sin \phi \cos H}$$

$$\begin{aligned} \text{pues } \cot(90^\circ - x) &= \frac{\cos(90^\circ - x)}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \text{ e } \cot(360^\circ - x) = \\ \frac{\cos(360^\circ - x)}{\sin(360^\circ - x)} &= \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x. \end{aligned}$$

También, podemos relacionar:

$$\cot z \sin(90^\circ - \phi) = \cot H \sin(360^\circ - A) + \cos(90^\circ - \phi) \cos(360^\circ - A)$$

$$\boxed{\cot z \cos \phi = -\cot H \sin A + \sin \phi \cos A}$$

Es importante recordad que lo que acabamos de hacer fue con la intención de transmitir la idea general de lo que debe ser hecho en problemas de trigonometría esférica. El triángulo de posición de la figura 5.39 es apenas un ejemplo, y por lo tanto no debe ser considerado como un caso general. Como veremos en la sección 5.6, lo ideal no es memorizar las ecuaciones recién deducidas, y sí, comprender los fundamentos detrás de ellas.

$$\Delta t = 2H_{ocaso}$$

Aislando el H_{ocaso} en la ecuación encontrada anteriormente a partir de la trigonometría esférica, obtenemos $H_{ocaso} = (-\tan \phi \tan \delta)$, así que:

$$\Delta t = 2 \arccos(-\tan \phi \tan \delta)$$

Por lo tanto, note que el intervalo de tiempo Δt entre la salida y la puesta de un astro con una determinada declinación δ depende apenas de la latitud ϕ del observador.

5.5.4 Conversión entre Sistemas de Coordenadas

La trigonometría esférica también nos permite convertir las coordenadas de un astro de un sistema para otro. Por ejemplo, el triángulo de posición ejerce el papel de convertir coordenadas ecuatoriales en horizontales o viceversa, además de posibilitar relacionarlas con el ángulo horario de un astro.

Ahora, vamos apenas a ver la conversión entre las coordenadas eclípticas y ecuatoriales, una vez que las relaciones entre otros sistemas aplican ideas análogas.

Eclípticas y Ecuatoriales

Primeramente, veremos el caso para un astro de latitud eclíptica b cualquiera posicionado en el primer cuadrante de ascensión recta, como está representado en la figura abajo:

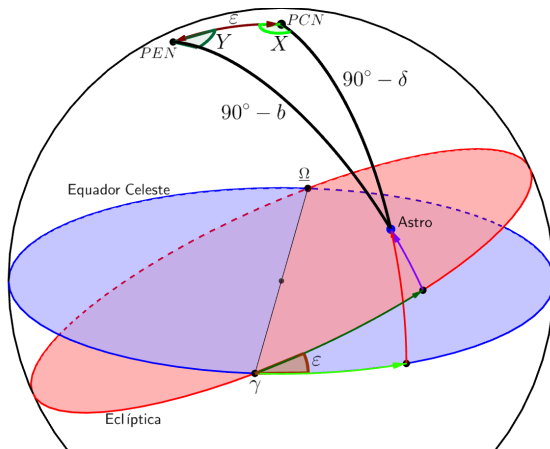


Figura 5.41: Caso para un astro en una latitud eclíptica b cualquiera posicionado en el primer cuadrante de ascensión recta.

Note que los ángulos X y Y representados en la imagen valen $X = (90^\circ + \alpha)$ y $Y = (90^\circ - l)$.

Aplicando las 3 leyes de la trigonometría esférica, obtenemos las siguientes ecuaciones:

- Por la **ley de los cosenos**:

$$\cos(90^\circ - b) = \cos(90^\circ - \delta) \cos \varepsilon + \sin(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon \cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\boxed{\sin b = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha}$$

pues $\cos(90^\circ + x) = -\sin x$.

También:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos \varepsilon \cos(90^\circ - b) + \sin \varepsilon \sin(90^\circ - b) \cos(90^\circ - l)$$

$$\boxed{\sin \delta = \cos \varepsilon \sin b + \sin \varepsilon \cos b \sin l}$$

- Por la **ley de los senos**:

$$\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - b)} = \frac{\sin(90^\circ - l)}{\sin(90^\circ - \delta)} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos \alpha}{\cos b} = \frac{\cos l}{\cos \delta}}$$

pues $\sin(90^\circ + x) = \cos x$.

- Por la **ley del coseno-coseno**:

$$\cot(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon = \cot(90^\circ - l) \sin(90^\circ + \alpha) + \cos \varepsilon \cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\boxed{\tan \delta \sin \varepsilon = \tan l \cos \alpha - \cos \varepsilon \sin \alpha}$$

Y también:

$$\cot(90^\circ - b) \sin \varepsilon = \cot(90^\circ + \alpha) \sin(90^\circ - l) + \cos \varepsilon \cos(90^\circ - l)$$

$$\boxed{\tan b \sin \varepsilon = -\tan \alpha \cos l + \cos \varepsilon \sin l}$$

Ahora, veremos un caso particular de la situación arriba bastante común: cuando $b = 0$. Este es bastante utilizado para transformar las coordenadas eclípticas del Sol en coordenadas ecuatoriales o viceversa, pues, por la definición de la eclíptica, el Sol siempre posee $b = 0$. Note que podríamos apenas tomar los resultados arriba y sustituir $b = 0$, sin embargo, es interesante analizar como podemos aplicar las leyes de la trigonometría esférica en esta situación. Observe el triángulo esférico abajo.

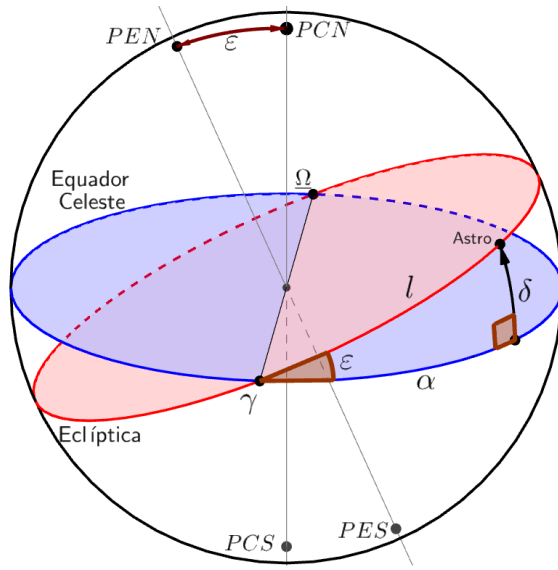


Figura 5.42: Caso en que $b=0$ para un astro en el primer cuadrante de ascensión recta.

- Por la **ley de los cosenos**:

$$\cos \delta = \cos l \cos \alpha + \sin l \sin \alpha \cos \varepsilon$$

También:

$$\cos l = \cos \delta \cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha \cos 90^\circ \Rightarrow \boxed{\cos l = \cos \delta \cos \alpha}$$

- Por la **lei dos senos**:

$$\frac{\sin l}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} \Rightarrow \boxed{\sin l = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}}$$

- Por la **lei do cosseno-cosseno**:

$$\cot \delta \sin \alpha = \cot \varepsilon \sin 90^\circ + \cos \alpha \cos 90^\circ \Rightarrow \boxed{\tan \delta = \tan \varepsilon \sin \alpha}$$

Y también:

$$\cot l \sin \alpha = \cot 90^\circ \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \tan l \cos \varepsilon}$$

Es importante resaltar que estas expresiones son válidas **solamente** para el primer cuadrante de ascensión recta. Esto es consecuencia de dos factores principales:

1. Los lados de triángulos esféricos no pueden superar 180° , por definición.
2. No todas las funciones utilizadas son bien definidas para valores fuera de este cuadrante, como las funciones trigonométricas inversas.

Como veremos en la siguiente sección y en el problema 8, lo correcto es realizar un procedimiento análogo para cada cuadrante.

5.6 Consejos para la Resolución de Problemas

La astronomía de posición exige la utilización de métodos que no acostumban a ser utilizados en ningún otro contenido visto en las escuelas o en demás olimpiadas, y por eso puede ser un poco difícil avanzar en los problemas de este tópico, especialmente para alumnos que estén comenzando, pero incluso aquellos que se clasifican para las fases más avanzadas pueden cometer errores fatales en la resolución de las preguntas. Sin embargo, existen algunos consejos que pueden auxiliar a la evolución en este campo.

1. Hacer un dibujo 3D de la situación

El primer paso para resolver cualquier problemas de astronomía de posición es entender y visualizar lo que está ocurriendo, y un buen diseño es fundamental en este proceso. De manera general, es fuertemente recomendado hacer un dibujo tridimensional para todas las situaciones¹⁸, especialmente en preguntas de trigonometría esférica.

2. En el dibujo, representar valores próximos a los del enunciado.

En el caso en el que el enunciado diga que hay un observador de latitud $\phi = -80^\circ$ observando una estrella de $\delta = 50^\circ$, es recomendado hacer un dibujo en el que el PSC está relativamente próximo al cenit. Esto le puede ayudar a identificar casos particulares y a estimar la respuesta final¹⁹. Sin embargo, en preguntas de trigonometría esférica, este análisis es especialmente relevante para identificar el cuadrante de ciertos ángulos. Ciertas funciones trigonométricas solo funcionan para ciertos cuadrantes, y por lo tanto es importante identificarlos antes de realizar los cálculos.

¹⁸Para problemas de pasaje meridiana, basta un corte 2D de la esfera celeste, a pesar de que un dibujo 3D puede facilitar en la visualización.

¹⁹P.ex., en caso de que el dibujo muestre que un astro culmina próximo al horizonte, pero que su resultado sea $h = 80^\circ$, es capaz que haya algo errado.

3. No memorizar las fórmulas finales

Muchos resultados en la astronomía de posición son casos particulares que no son tomados en cuenta en las fórmulas. Por ejemplo, las ecuaciones obtenidas en la sección 5.5.2 no funcionan para observadores en el hemisferio Sur o para astros en el hemisferio oriental. De este modo, el ideal es entender el procedimiento utilizado y adaptarlo de acuerdo con cada pregunta - basta memorizar las tres leyes de la trigonometría esférica.

4. Cuidado con funciones trigonométricas inversas

En preguntas de trigonometría esférica, acostumbra a ser necesario utilizar las funciones trigonométricas inversas para obtener resultados numéricos. Sin embargo, como vimos en el primer capítulo del libro, estas no proporcionan valores únicos. De este modo, es capaz que usted necesite encontrar tanto el seno como el coseno de un ángulo para determinar su valor²⁰. Sin embargo, en caso de que su dibujo sea muy bien hecho, es posible identificar cual de los valores es el verdadero.

5.7 Problemas

5.1. (Principiante) ¿Cuál es la declinación de un astro que un observador en una latitud $\phi = 23^\circ 45' \text{S}$ observa con una altura $h = 42^\circ 11'$ durante su culminación superior?

5.2. (Principiante) ¿Es posible ver Mintaka ($\delta = -0^\circ 17'$) desde el polo norte de la Tierra? Considere la refracción atmosférica como $34'$.

5.3. (Principiante) La estrella Deneb posee declinación $\delta = 45^\circ 17'$. ¿En qué lugares de la Tierra esta permanece siempre encima del horizonte? ¿Y en cuales esta siempre permanece debajo del horizonte?

5.4. (Principiante) (IV OLAA) Un observador en el día de solsticio de junio conoce la altura de un poste y mide su sombra durante el pasaje meridiano del centro del disco solar por el meridiano del lugar.

²⁰Para esto, sería necesario utilizar más de una ley de la trigonometría esférica.

Ayúdelo y calcule cuál es el menor tiempo que él necesitará esperar para que la estrella tenga nuevamente esa altura.

Dado: la estrella pasa $T = 10$ horas en el cielo.

5.7. (Intermedio) ¿Cuál es la distancia sobre la superficie de la Tierra entre las ciudades de Bogotá ($\lambda = 74^{\circ}4'33''\text{O}$; $\phi = 4^{\circ}35'53''\text{N}$) y la ciudad de Oxford ($\lambda = 1^{\circ}15'28''\text{O}$; $\phi = 51^{\circ}45'7''\text{N}$)?

Considere la Tierra como una esfera perfecta de radio $R = 6,37 \cdot 10^6\text{m}$.

5.8. (Intermedio) La estrella Sirius posee coordenadas ecuatoriales $\delta = -16^{\circ}43'$ y $\alpha = 06\text{h}45\text{m}$. En un determinado instante, un observador en una latitud $\phi = -42^{\circ}31'$ observa la estrella próximo al horizonte Este con una altura de $h = 20^{\circ}$. Para este observador, ¿cuál era el tiempo sideral local en el momento de la observación?

5.9. (Intermedio) (IOAA/2019 adap.) Un estudiante decide realizar un trayecto peculiar sobre la superficie de la Tierra, que puede ser considerada como perfectamente esférica. Siendo $R = 6371\text{ km}$, él:

1. Anda R para el Sur;
2. Anda R para el Este;
3. Anda R para el Norte.

Después de realizar estos tres pasos, él curiosamente regresa a la misma posición inicial. Dibuje la trayectoria realizada por el estudiante y encuentre las coordenadas de cada punto en que él hace una curva.

5.10. (Intermedio) Un astrónomo, en posesión de un telescopio de montaje altacimutal, decide apuntar para un punto de altura $h = 50^{\circ}$ y acimut $A = 100^{\circ}$. Al mirar por el ocular, nota que apuntó para la estrella Alpha Centauri ($\alpha = 14\text{h}39\text{min}31\text{s}$ y $\delta = -60^{\circ}48'51''$). Después de un cierto tiempo, el astrónomo rotó horizontalmente el telescopio en un ángulo de 50° en sentido horario y, al mirar nuevamente por el ocular, avistó la estrella Sirio ($\alpha = 1\text{h}37\text{min}41\text{s}$ y $\delta = -57^{\circ}14'5''$). Con base en esto, responda: ¿cuál es la latitud de lugar de observación, sabiendo que el observador se encuentra en el Hemisferio Sur? Considere que el acimut crece para el Este a partir del punto cardinal Norte.

5.11. (Intermedio) (ROSAOC adap.) Debido a la refracción atmosférica ($34'$ próximo al horizonte), un objeto no nacería en un determinado lugar de la Tierra no se pone debajo del horizonte, permaneciendo siempre encima. ¿En cuáles latitudes próximas a los polos de la Tierra esto puede ocurrir?

5.12. (Intermedio) (IOAA/2012) En el Observatorio Nacional de Brasil, localizado en la ciudad de Río de Janeiro ($22^{\circ}54' \text{ S}$, $43^{\circ}12' \text{ W}$), existe un reloj de sol encima de la puerta de la cúpula del telescopio de 32 cm, mirando al norte. El mostrador está en el plano Este-Cenit-Oeste y la varilla es paralela al eje de la Tierra. ¿Para cuáles declinaciones del Sol y durante cuál período del año (meses y estaciones) el reloj (i) no funciona durante, por lo menos, una fracción del día? Y (ii) ¿no funciona en ningún momento durante el día?

5.13. (Intermedio) En un distante sistema extrasolar, denominado M4Y4HU, se encuentra un planeta, cuya inclinación del eje de rotación es de $\epsilon = 45^{\circ}$. Considerando un sistema de coordenadas ecuatoriales análogos a los utilizados en la Tierra, analice la siguiente situación:

En un determinado día, la declinación de la estrella de este sistema era de $\delta_1 = 17^{\circ}$. 40 días después, la declinación pasó a ser de $\delta_2 = 32^{\circ}$. Con base en esto, responda: ¿cuál es el período de traslación del planeta, considerando que este sigue una órbita circular?

5.14. (Avanzado) Un estudiante nota que, en el mismo instante en el que el punto vernal está culminando superiormente, el Sol posee ángulo horario $H = -9,00h$. Despreciando la excentricidad de la órbita de la Tierra, encuentre:

- a) La fecha de observación.
- b) La mínima latitud que un observador necesitaría estar para que el Sol no se ponga en ningún momento del día.

5.15. (Avanzado) Calcule la duración de la salida del Sol en una latitud ϕ considerando que este posee un diámetro angular D y está con declinación δ . Desprecie efectos de refracción atmosférica.

5.16. (Avanzado) (Vinhedo P1/2021 adap.) El método más común para localizar el polo Sur celeste es prolongar el eje mayor de la Cruz del Sur (Crux) 4,5 veces a partir de Acrux ($\alpha \text{ Cru}$).

- a) Para determinar la precisión de este método, calcule el ángulo entre el polo Sur celeste verdadero y el polo celeste determinado por la Cruz del Sur.
- b) El número 4,5 es una aproximación que funciona suficientemente bien para determinar la posición del polo Sur celeste. Sin embargo, esta no es la mejor aproximación posible. Calcule el valor por el cual el eje mayor de la Cruz del Sur debe ser prolongado para obtener la posición más próxima al polo Sur celeste.

Dados:

Acrux (α Cru): $\delta = -63^\circ 13'$, $\alpha = 12\text{h}27\text{min}48\text{s}$

Gacrux (γ Cru): $\delta = -57^\circ 14'$, $\alpha = 12\text{h}32\text{min}21\text{s}$

5.17. (Avanzado) Un observador en la latitud $\phi = 60^\circ 00' N$ observa una estrella de declinación $\delta = 80^\circ 00'$ a lo largo de un año y repara que su acimut nunca supera un cierto valor. Calcule tal acimut máximo y muestre que la estrella no siempre puede ser vista en esa situación.

5.18. (Avanzado) Considere un observador localizado en un determinado lugar de latitud $\phi = 45^\circ N$. Al mirar para el punto cardinal Norte, el observador ve una torre, la cual posee un formato cilíndrico de radio $R = 30\text{ m}$ y altura desconocida, pero la suficientemente grande. Al medir su distancia en relación al centro de la base de la torre, encuentra $d = 100\text{ m}$. Calcule la mínima declinación que una estrella debe tener para que siempre esté oculta por la torre en relación al lugar del observador.

5.19. (Avanzado) (Vinhedo/2021) Calcule el ángulo $\angle 132$ del triángulo esférico formado por las estrellas 1, 2 y 3.

Coordenadas		
1	2	3
Sistema eclíptico	Sistema ecuatorial	Sistema acimutal
$\ell = 92^\circ 15'$	$\alpha = 6^{\text{h}}22^{\text{m}}$	$A = 152^\circ 48'$
$b = 50^\circ 00'$	$\delta = 47^\circ 32'$	$z = 17^\circ 52'$

La estrella 3 es vista desde un lugar con latitud $\phi = 53^\circ 36'$ y tiempo sideral $T = 5^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}$. Considere que el acimut crece en el sentido horario a partir del punto cardinal Norte.

5.20. (Avanzado) (IOAA/2011) Debido a la precesión del eje de la Tierra, la región del cielo visible a partir de un lugar con coordenadas gráficas fijas cambia con el tiempo. Es posible que, en algún momento, Sirius no salga cuando es observado desde Krakow, mientras que ¿Canopus todavía se alza y se pone? Asuma que el eje de la Tierra describe un cono de ángulo 47° . Krakow está en la latitud $50,1^\circ N$; las coordenadas ecuatoriales actuales (ascensión recta y declinación) de esas estrellas son:

- Sirius (α CMa): $6^{\text{h}}45^{\text{m}}$, $-16^\circ 43'$
- Canopus (α Car): $6^{\text{h}}24^{\text{m}}$, $-52^\circ 42'$

5.8 Solución

- 5.1.** Como fue mostrado en la sección 5.3.2, la distancia cenital de un astro en su culminación es:

$$z = \pm(\delta - \phi)$$

o sea, la declinación será:

$$\delta = \phi - z = -23^\circ 45' - (90^\circ - 42^\circ 11')$$

o

$$\delta = z + \phi = 90^\circ - 42^\circ 11' - 23^\circ 45'$$

Por lo tanto, el astro posee una declinación de $\boxed{\delta = -71^\circ 34' \text{ ou } \delta = +24^\circ 04'}$

- 5.2.** Sin la refracción atmosférica, la trayectoria diurna de Mintaka sería un círculo abajo del horizonte, i.e. sería imposible verla. Sin embargo, como la refracción atmosférica hace que su altura aumente $34'$, tenemos que su trayectoria es un círculo $-17' + 34' = 17'$ encima del horizonte. Así, es posible observar Mintaka.

- 5.3.** Por la condición de circumpolaridad:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi| \Rightarrow |\phi| \geq 90^\circ - |\delta| = 90^\circ - 45^\circ 17'$$

$$|\phi| \geq 44^\circ 43'$$

Así, tenemos las soluciones: $\phi \geq +44^\circ 43'$ e $\phi \leq -44^\circ 43'$

Como la declinación de Deneb es positiva, sabemos que esta será circumpolar visible, esto es, permanecerá siempre encima del horizonte para observadores en latitudes $\phi \geq +44^\circ 43'$. Consecuentemente, sabemos que esta será siempre circumpolar invisible para $\phi \leq -44^\circ 43'$.

- 5.4.** a) El Sol está cruzando el meridiano local más próximo al punto cardinal Norte, por lo tanto $\boxed{A = 0^\circ}$.
- b) En el día de solsticio de junio la declinación es de $\boxed{\delta = +23^\circ 27'}$.
- c) En el solsticio de junio la ascensión recta del Sol es de $\boxed{\alpha = 6\text{h}}$.
- d) Como el Sol está sobre el meridiano local, entonces $\boxed{H = 0\text{h}}$.
- e) Como $TSL = H + \alpha$, entonces: $TSL = 6\text{h} + 0\text{h} \Rightarrow \boxed{TSL = 6\text{h}}$.
- f) Analizando la figura, tenemos:

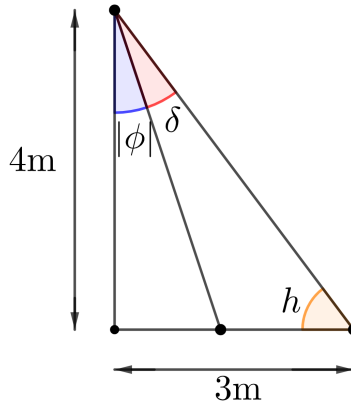


Figura 5.44: Esquema de los ángulos en el triángulo en la pregunta

Entonces la altura del Sol será dada por:

$$\tan(h) = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{h = 53,13^\circ}$$

g) Por la geometría del triángulo:

$$\tan(\delta + |\phi|) = \frac{3}{4} \Rightarrow \delta + |\phi| = 36^\circ 52' 12''$$

Como $\delta = 23^\circ 27'$, tenemos:

$$|\phi| = 36^\circ 52' 12'' - 23^\circ 27' = 13^\circ 25' 12''$$

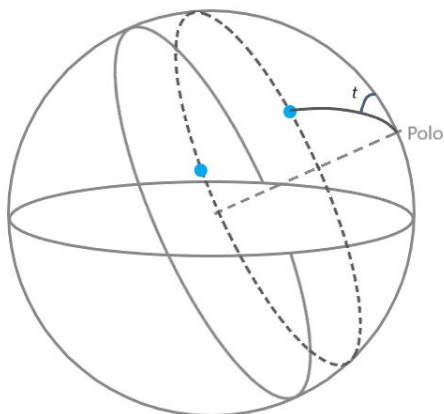
Como el Sol en el Solsticio de Junio está en su mínima altura angular para ese observador, entonces el observador está localizado en el hemisferio Sur, por lo tanto: $\boxed{\phi = 13^\circ 25' 12'' \text{ S}}$

5.5. En el caso de una estrella en el horizonte, su altura angular será igual al módulo de su declinación. Además, se sabe que la altura del Ecuador Celeste es igual al complementar de la latitud astronómica. Con esto, tenemos:

$$\phi = 90^\circ - |\delta|$$

$$\boxed{\phi = 63^\circ 34' \text{ N}}$$

5.6. En líneas de puntos está representada la trayectoria de la estrella en la esfera celeste y de azul están los puntos en que la estrella tiene la altura mencionada.



El tiempo desde la salida hasta la culminación superior es de $\frac{T}{2}$, así, el tiempo que falta para la culminación superior es $t = \frac{T}{2} - 2$, es el tiempo que Uayple necesitará esperar es de

$$\Delta t = 2t = 2 \left(\frac{10}{2} - 2 \right) = \boxed{6 \text{ h}}$$

5.7. Siendo d la distancia angular entre las ciudades, tenemos:

$$\cos d = \sin \phi_B \sin \phi_O + \cos \phi_B \cos \phi_O \cos \Delta \lambda$$

Donde $\Delta \lambda = \lambda_B - \lambda_O$. Substituyendo los valores, llegamos a:

$$d = 75^\circ 48' 13''$$

Por lo tanto, la distancia s entre las ciudades sobre la superficie terrestre es de:

$$s = \frac{d}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{75^\circ 48' 13''}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6,37 \cdot 10^6$$

Por lo tanto:

$$\boxed{s = 8,43 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

5.8. Primeramente, es necesario encontrar el ángulo horario de Sirius en el momento de la observación a través del siguiente triángulo de posición:

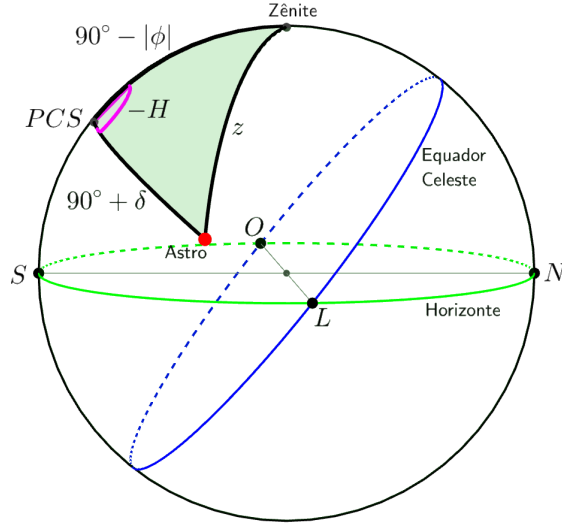


Figura 5.45: Triángulo de posición de la situación

Por la ley de los cosenos, tenemos:

$$\cos z = \cos(90^\circ - |\phi|) \cos(90^\circ + \delta) + \sin(90^\circ - |\phi|) \sin(90^\circ + \delta) \cos(-H)$$

Como $z = 90^\circ - h$, entonces:

$$\sin h = -\sin |\phi| \sin \delta + \cos |\phi| \cos \delta \cos(-H)$$

Aislando el $\cos(-H)$:

$$\cos(-H) = \frac{\sin h + \sin |\phi| \sin \delta}{\cos |\phi| \cos \delta}$$

Substituyendo los valores:

$$\cos(-H) = \frac{\sin(20^\circ) + \sin(42^\circ 31') \sin(-16^\circ 43')}{\cos(42^\circ 31') \cos(-16^\circ 43')}$$

Por lo tanto:

$$H = -77^\circ 56' \Rightarrow H = -5\text{h}12\text{m}$$

Por lo tanto, el tiempo sideral local era de:

$$TSL = \alpha + H = 6\text{h}45\text{m} - 5\text{h}12\text{m} \Rightarrow \boxed{TSL = 1\text{h}33\text{m}}$$

- 5.9.** Antes de todo, necesitamos recordar que una distancia R a lo largo de una esfera de radio R corresponde a un ángulo $\theta = 1 \text{ rad} \approx 57,30^\circ$. Con esto, se puede notar que la situación es parecida con:

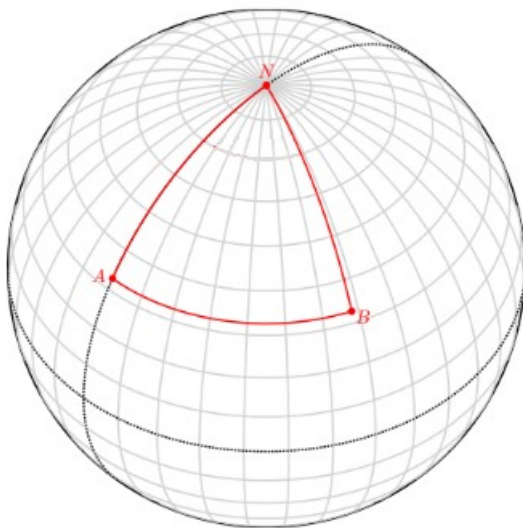
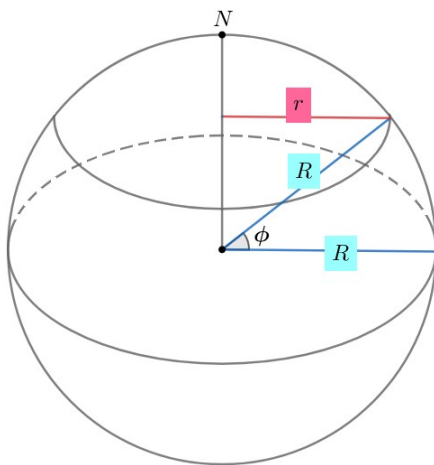


Figura 5.46: Trayectoria del estudiante

Donde el estudiante comienza en uno de los polos (N), va para el sur por uno de los meridianos (NA), va para el este a lo largo de un paralelo (AB) y, por fin, va para el norte por otro meridiano (BN). Suponiendo que el punto N es el Polo Norte y que A está sobre el meridiano de Greenwich ($\lambda_A = 0$), tenemos que la latitud de A y B es de:

$$\phi_A = \phi_B = 90^\circ - \theta = \boxed{32,70^\circ}$$

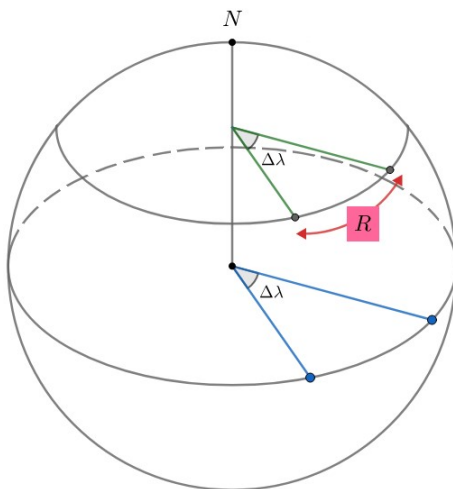
Por fin, necesitamos la longitud de B . Note que el arco $\widehat{AB}$ **no** hace parte de un círculo máximo, o sea, el triángulo ABN no es esférico. De este modo, no podemos recorrer la trigonometría esférica, y sí, la trigonometría plana. Primeramente, vamos a encontrar el radio del círculo al cual el arco $\widehat{AB}$ pertenece:

Figura 5.47: Encontrando el radio de $\widehat{AB}$

Note que:

$$r = R \cos \phi$$

Siendo $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$ la diferencia entre las longitudes de A e B , podemos relacionar la longitud R del arco $\widehat{AB}$ con $\Delta\lambda$ por:

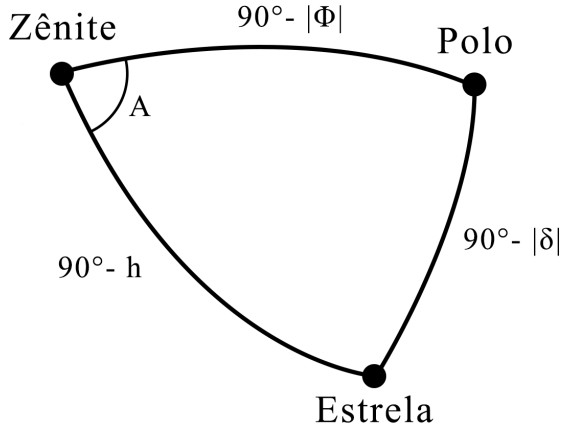
Figura 5.48: Encontrando $\Delta\lambda$

Note que:

$$R = r\Delta\lambda \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{1}{\cos\phi}}$$

Como $\lambda_A = 0$, $\lambda_B = \Delta\lambda = 1,19 \text{ rad} = \boxed{68,09^\circ}$.

5.10. Para la resolución de esta pregunta, considere el siguiente triángulo esférico:



Por ley de los cosenos:

$$\text{sen } |\delta_{\alpha\text{Centauri}}| = \text{sen } |\phi| \text{sen}(h) + \cos |\phi| \cos(h) \cos(A)$$

$$\text{sen } |\delta_{\text{Sirius}}| = \text{sen } |\phi| \text{sen}(h) + \cos |\phi| \cos(h) \cos(A + 50^\circ)$$

Substrayendo las ecuaciones:

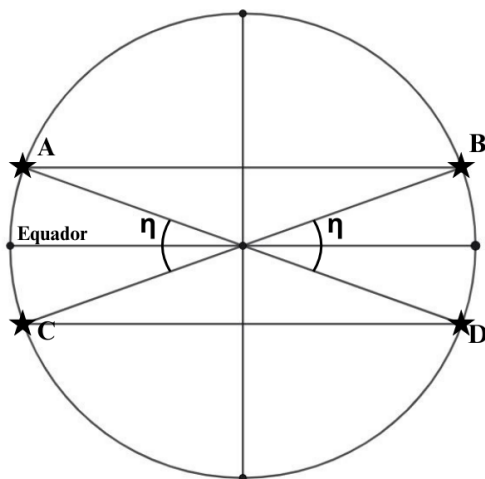
$$\text{sen } |\delta_{\text{Sirius}}| - \text{sen } |\delta_{\alpha\text{Centauri}}| = \cos |\phi| \cos(h) \cdot (\cos(A + 50^\circ) - \cos(A))$$

$$\Rightarrow |\phi| = \arccos \left(\frac{\text{sen } |\delta_{\text{Sirius}}| - \text{sen } |\delta_{\alpha\text{Centauri}}|}{\cos(h) \cdot (\cos(A + 50^\circ) - \cos(A))} \right)$$

Con esto:

$$\boxed{\phi \approx 85,9^\circ S}$$

5.11. La geometría necesaria para la resolución de esta pregunta está representada en la imagen abajo:



En que $\eta = 34'$ se trata de la refracción próxima al horizonte, la cual está exagerada en la figura para mejor entendimiento.

Las líneas $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ representan, respectivamente, las trayectorias real y ficticia (por cuenta de la refracción) de una determinada estrella. Imaginando ahora un lugar arbitrario en la superficie terrestre cuyo horizonte astronómico pueda ser representado por la línea $\overline{AD}$, vemos que tal localización atiende* a la condición del enunciado, una vez que, sin considerar la refracción, la estrella nunca sería visible, pero, por la presencia de ella, pasa a ser circumpolar (en ambas situaciones la estrella toca el horizonte). De este modo, cualquier lugar con el módulo de la latitud entre $90^\circ - \eta$ e 90° atiende a la condición expuesta por la pregunta:

$$\phi \in [-90^\circ, -89^\circ 43') \text{ ou } \phi \in (89^\circ 43', 90^\circ]$$

* Atiende, pero parcialmente. El enunciado exige que la estrella esté siempre encima del horizonte, sin poder tocarlo. Por esto, inclusive, que los valores $\pm 89^\circ 43'$ no están incluidos en los intervalos de la respuesta final.

5.12. De una forma general, la condición para que el reloj funcione es que la luz solar incida en el mostrador. Sabiendo esto, podemos analizar las condiciones requeridas:

(i) Para esta condición, podemos analizar el caso extremo, esto es, el caso en el que el reloj para de funcionar por un único instante.

Como se mencionó anteriormente, es necesario que, para que el reloj pare de funcionar, la luz solar no incida en su mostrador. Como el mostrador está apuntando para el norte, es necesario que, en el caso extremo, el Sol esté en el "lado" sur del cielo, esto es, con acimut perteneciente al

intervalo $90^\circ < A < 270^\circ$. Como el Sol, en el caso del hemisferio Sur, se va aproximando desde el norte conforme aumenta su altura angular, el caso extremo en cuestión se trata del instante en que el Sol está en el horizonte (o sea, en su posición más al sur). De esta forma, en el caso límite, $\delta_\odot = 0^\circ$, de forma que:

$$-23^\circ 27' \leq \delta_\odot \leq 0^\circ$$

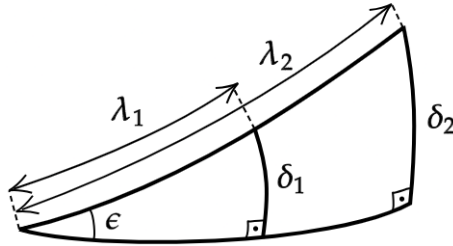
(ii) Considerando que el mostrador esté en el plano Este-Cenit-Oeste, podemos concluir que este está en la vertical. Como el instante en que el Sol está más al norte es durante la culminación superior, es necesario que, en el caso extremo de funcionamiento del reloj, el Sol esté en el Cenit. De esta forma:

$$\delta_{\max} = -|\phi| \text{ (condição de culminação superior no Zênite)}$$

El intervalo de declinaciones será:

$$-23^\circ 27' \leq \delta_\odot \leq -22^\circ 54'$$

5.13. Para la resolución de esta pregunta, considere la siguiente geometría:



λ es un análogo a la latitud eclíptica, siento entonces la longitud angular recorrida por la estrella desde el equinoccio más próximo.

Ahora, por la ley de los senos:

$$\text{sen}(\lambda) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\text{sen}(\epsilon)}$$

Aplicando esta fórmula para δ_1 e δ_2 , podemos entonces calcular el desplazamiento angular de la estrella en esos 40 días:

$$\Delta\lambda = \arcsin\left(\frac{\text{sen}(\delta_2)}{\text{sen}(\epsilon)}\right) - \arcsin\left(\frac{\text{sen}(\delta_1)}{\text{sen}(\epsilon)}\right) = \frac{2\pi\Delta t}{P}$$

En que P es el período de traslación del planeta (y consequentemente el período de movimiento aparente de la estrella). De esta forma:

$$P = \frac{2\pi\Delta t}{\arcsin\left(\frac{\text{sen}(\delta_2)}{\text{sen}(\epsilon)}\right) - \arcsin\left(\frac{\text{sen}(\delta_1)}{\text{sen}(\epsilon)}\right)}$$

Calculando:

$$P \approx 597 \text{ días}$$

- 5.14.** a) Sabemos que el ángulo horario del punto vernal, el TSL , puede ser escrito como:

$$TSL = H + \alpha$$

Donde H y α se refieren a un astro cualquiera, e.g. el Sol. En el caso de la pregunta, el punto vernal está culminando superiormente, o sea, $TSL = 0$. De este modo, la ascensión recta del Sol es:

$$\alpha = -H = 9h$$

Ahora, vamos a analizar la situación en coordenadas ecuatoriales. Como estamos despreciando la excentricidad de la órbita de la Tierra, la velocidad angular del Sol vista desde la Tierra (sin tomar en cuenta su rotación) es constante. Note también que $\alpha = 6h$ en el solsticio de Junio y $\alpha = 12h$ en el equinoccio de Septiembre, o sea, la observación fue hecha entre esas fechas. Con esto, podríamos encontrar el tiempo Δt transcurrido desde el equinoccio de Marzo a través de la trigonometría esférica. Sin embargo, buscaremos el valor de $\Delta t'$, que representa el tiempo que falta para que el Sol esté en el punto de Libra. El motivo de esto quedará claro en breve. De este modo, podemos hacer un triángulo esférico con el Sol, el punto de Libra y la proyección del Sol en el Ecuador Celeste:

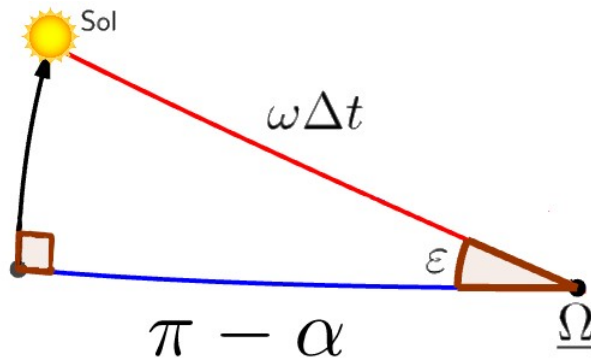


Figura 5.49: Proyección de la posición del Sol en el ecuador celeste

Como queremos relacionar cuatro elementos consecutivos, debemos aplicar la ecuación de los cuatro elementos:

$$\cot 90^\circ \sen \varepsilon + \cos(\pi - \alpha) \cos \varepsilon = \cot(\omega \Delta t') \sen(\pi - \alpha)$$

Pero $\cot 90^\circ = 0$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ y $\sen(\pi - \alpha) = \sen \alpha$. Assim:

$$\cot(\omega \Delta t') = -\cot \alpha \cos \varepsilon \Rightarrow$$

Utilizando $\omega = \frac{2\pi}{T}$, donde $T = 365,24$ días, tenemos:

$$\Delta t' = \frac{T}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{-\tan \alpha}{\cos \varepsilon} \right)$$

Note que la función $\tan^{-1}$ solo es definida para ángulos menores que 90° , por eso realizamos este procedimiento de utilizar el punto de Libra como referencia. A partir de la expresión arriba, obtenemos $\Delta t' = 48,16$ días. Como $\Delta t = \frac{T}{2} - \Delta t'$ pasaron $\Delta t = 134,46$ días desde el equinoccio de Marzo ($\approx 21/3$). Considerando que el año no es bisiesto, tenemos que la fecha es próxima al día 2 **de Agosto**. Como esperado, esta entra entre Junio y Septiembre.

b) Ahora, necesitamos encontrar la declinación del Sol en la fecha indicada. Podemos utilizar el mismo triángulo esférico de antes:

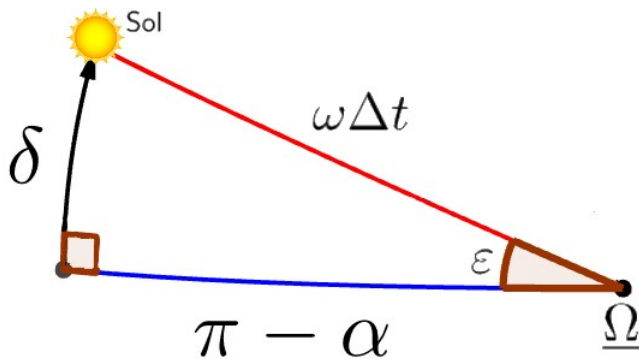


Figura 5.50: Encontrando la declinación del Sol

Queremos relacionar δ , ε y α , entonces podemos utilizar la ecuación de los cuatro elementos nuevamente:

$$\cot \varepsilon \sin 90^\circ + \cos(\pi - \alpha) \cos 90^\circ = \cot \delta \sin(\pi - \alpha)$$

Sabemos que $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ e $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Así:

$$\cot \varepsilon = \cot \delta \sin \alpha$$

Ou sea:

$$\delta = \tan^{-1}(\tan \varepsilon \sin \alpha)$$

Como $\alpha = 135^\circ$, tenemos que $\delta = 17,05^\circ$.

Para que el Sol no se ponga en ningún momento del día (i.e. ser circumpolar), la latitud mínima de un observador es $\phi = 90^\circ - \delta = \boxed{72,95^\circ N}$.

- 5.15.** Para resolver este problema, es necesario notar que el tiempo Δt de la salida del Sol será igual a la diferencia del ángulo horario H' del fin de la puesta del Sol y el ángulo horario H del inicio de la puesta: $\Delta t = H' - H$.

Note que la puesta se inicia cuando el borde inferior del Sol toca el horizonte, o sea, en el inicio de la puesta el centro del disco del Sol estará a una altura igual a la mitad de su diámetro aparente, por lo tanto la distancia cenital en ese instante será $z = 90^\circ - D/2$.

Por lo tanto, obtenemos el siguiente triángulo de posición:

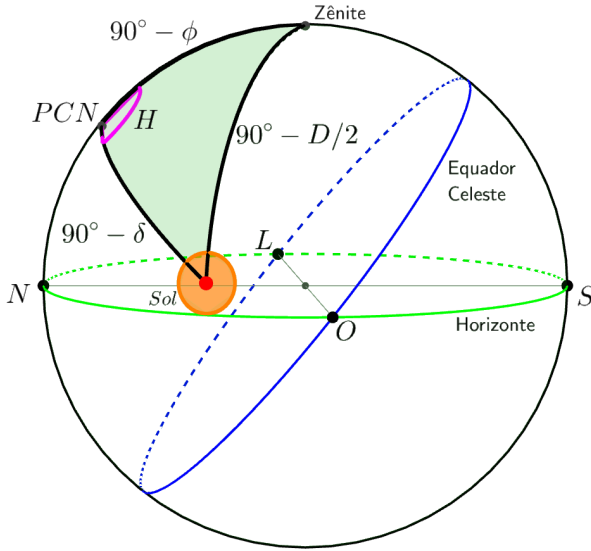


Figura 5.51: Inicio de la puesta del Sol

Por la ley de los cosenos:

$$\cos(90^\circ - D/2) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \phi) \cos H$$

$$\sin(D/2) = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Aislando $\cos H$:

$$\cos H = \frac{\sin(D/2) - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$$

$$H = \arccos \left(\frac{\sin(D/2) - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta} \right)$$

Ahora, solo necesitamos darnos cuenta de que la puesta tiene su fin en el instante en que la borda superior del Sol toca el horizonte, o sea, en el instante en que el centro del disco del Sol tiene altura cenital de $z' = 90^\circ + D/2$.

Dessa forma, temos o triângulo de posição:

5.16. a) Primeramente, es importante dibujar los siguientes triángulos esféricos:

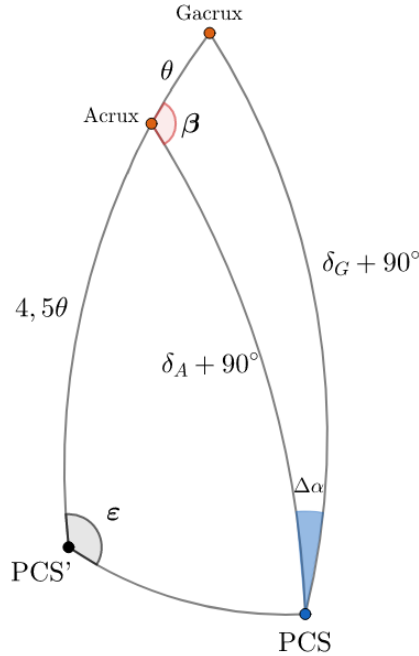


Figura 5.53: Triángulos esféricos de la situación

Con la ley de los cosenos, es posible calcular el valor de θ :

$$\cos \theta = \cos(90^\circ + \delta_A) \cos(90^\circ + \delta_G) + \sin(90^\circ + \delta_A) \sin(90^\circ + \delta_G) \cos \Delta\alpha$$

$$\cos \theta = \sin \delta_A \sin \delta_G + \cos \delta_A \cos \delta_G \cos \Delta\alpha$$

Substituyendo los valores:

$$\cos \theta = \sin(-63^\circ 13') \sin(-57^\circ 14') + \cos(-63^\circ 13') \cos(-57^\circ 14') \cos(1,1375^\circ)$$

$$\cos \theta = 0,9945 \Rightarrow \theta = \arccos(0,9945)$$

$$\theta = 6^\circ 01'$$

Utilizando nuevamente la ley de los cosenos, es posible calcular el valor de β :

$$\cos(90^\circ + \delta_G) = \cos(90^\circ + \delta_A) \cos \theta + \sin(90^\circ + \delta_A) \sin \theta \cos \beta$$

$$-\sin \delta_G = -\sin \delta_A \cos \theta + \cos \delta_A \sin \theta \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{-\sin \delta_G + \sin \delta_A \cos \theta}{\cos \delta_A \sin \theta}$$

Substituyendo los valores:

$$\cos \beta = \frac{-\sin(-57^\circ 14') + \sin(-63^\circ 13') \cos(6^\circ 01')}{\cos(-63^\circ 13') \sin(6^\circ 01')}$$

$$\cos \beta = -0,9947 \Rightarrow \beta = \arccos(-0,9947)$$

$$\beta = 174^\circ 07'$$

Vale la pena señalar que utilizar la ley de los senos para calcular el valor de β generaría una ambigüedad, pues sería imposible determinar si el ángulo estaría en el primer cuadrante o en el segundo cuadrante.

Por último, la ley de los cosenos también puede ser usada para calcular el valor de γ :

$$\cos \gamma = \cos(4,5\theta) \cos(90^\circ + \delta_A) + \sin(4,5\theta) \sin(90^\circ + \delta_A) \cos(180^\circ - \beta)$$

$$\cos \gamma = -\cos(4,5\theta) \sin \delta_A - \sin(4,5\theta) \cos \delta_A \cos \beta$$

Substituyendo los valores:

$$\cos \gamma = -\cos(4,5 \cdot 6^\circ 01') \sin \delta_A - \sin(4,5 \cdot 6^\circ 01') \cos(-63^\circ 13') \cos(174^\circ 07')$$

$$\cos \gamma = 0,9989 \Rightarrow \arccos(0,9989)$$

$\gamma = 2^\circ 41'$

Por lo tanto, el ángulo entre el polo real y el polo determinado en base a la cruz del Sur equivale a $2^\circ 41'$.

b) En la situación óptima deseada, tenemos que el análogo del ángulo ε de la figura 5.53 debe ser 90° . Así:

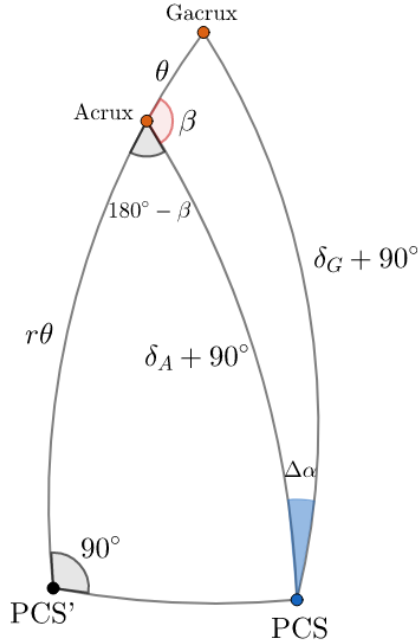


Figura 5.54: Triángulos esféricos de la situación óptima

Aplicando la ecuación de los cuatro elementos en el triángulo PCS' - Acrux - PCS:

$$\cot 90^\circ \sin(180^\circ - \beta) + \cos(r\theta) \cos(180^\circ - \beta) = \cot(\delta_A + 90^\circ) \sin(r\theta)$$

Como $\cot 90^\circ = 0$, $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ y $\cot(90^\circ + x) = \frac{\cos(90^\circ + x)}{\sin(90^\circ + x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$, temos:

$$-\cos(r\theta) \cos \beta = -\tan \delta_A \sin(r\theta) \Rightarrow \tan(r\theta) = \frac{\cos \beta}{\tan \delta_A}$$

Realizando los debidos cálculos:

$$\tan(r\theta) = 0,5021 \Rightarrow r\theta = 26^\circ 41'$$

Como $\theta = 6^\circ 01'$, llegamos al resultado final:

$$r = 4,44$$

Así, el valor ideal para el prolongamiento sería de 4,44:

- 5.17.** Primeramente, note que $|\delta| \geq 90^\circ - |\phi| \Leftrightarrow 80^\circ \geq 30^\circ$, ou seja, a estrela é circumpolar. Perceba também que o Sol nunca é circumpolar na localidade do observador, uma vez que sua declinação nunca ultrapassa cerca de $23^\circ 27'$, logo há "noites" em todos os dias do ano (i.e. o Sol se põe todo dia). Agora, note que o observador só conseguirá ver a estrela na situação de azimute máximo durante a noite, porém nem sempre esses eventos coincidem. Desse modo, a observação da estrela em seu azimute máximo só é possível em alguns dias do ano. Note também que isso somente não ocorreria em locais próximos aos polos nos quais o Sol nunca nasce.

Dicho esto, la situación de acimut máximo está representada en la siguiente figura:

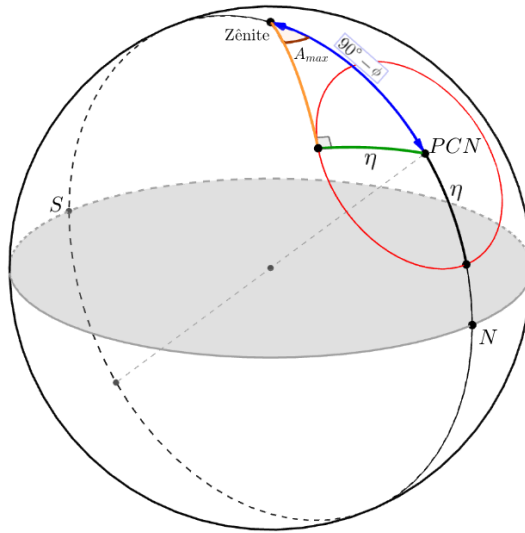


Figura 5.55: Acimut máximo

Aplicando la ley de los senos en el triángulo esférico formado:

$$\frac{\text{sen}(90^\circ - \phi)}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{\text{sen } \eta}{\text{sen } A_{max}}$$

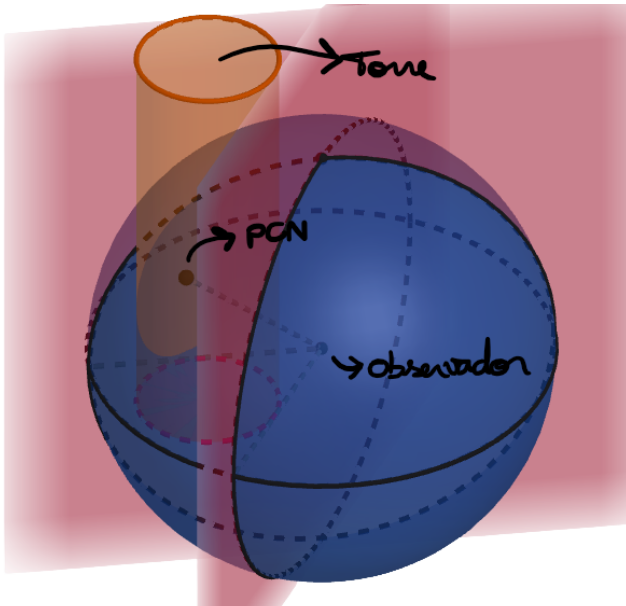
Donde $\eta = 90^\circ - \delta$. Como $\text{sen}(90^\circ - x) = \cos x$ e $\text{sen } 90^\circ = 1$, podemos reescribir esta ecuación como:

$$\cos \phi = \frac{\cos \delta}{\text{sen } A_{max}}$$

Ou sea:

$$A_{max} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\cos \delta}{\cos \phi} \right) = 11^{\circ}34'$$

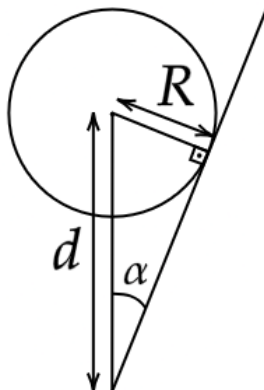
5.18. De inicio, es importante entender que, proyectando la torre en la esfera celeste, será formado un huso esférico, el cual representa la región del cielo invisible al observador. Esto puede ser visualizado a través de la siguiente imagen:



El hecho de la torre ser suficientemente grande nos permite extrapolar su tamaño al nivel de la esfera celeste, de modo que la proyección de esta (representada por la intersección de los planos de color rojo con la esfera celeste) sea, de hecho, un huso esférico.

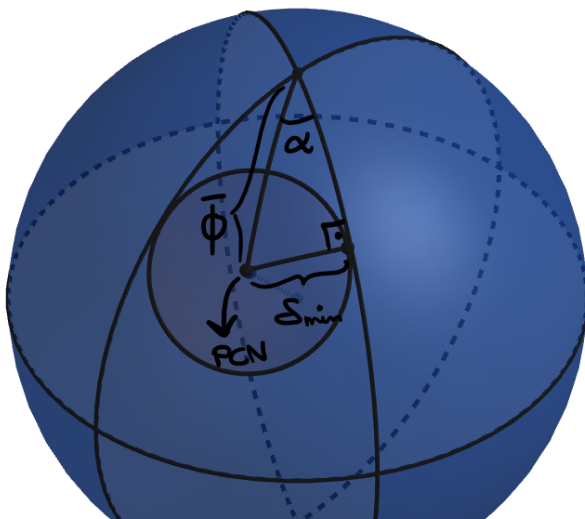
Imaginando ahora que exista una estrella arbitraria de distancia polar Δ , esta se mantendrá siempre oculta por la torre en caso de que la misma permanezca siempre dentro del huso esférico analizado. La máxima distancia polar (y consecuentemente la mínima declinación) corresponderá al caso en que la trayectoria "toque" los extremos del fuso.

Por trigonometría plana, podemos encontrar el ángulo de semiapertura del huso (α):



$$\text{sen } \alpha = \frac{R}{d}$$

Ahora, observando el posicionamiento del polo elevado en el huso esférico en cuestión, podemos esquematizar la siguiente situación:

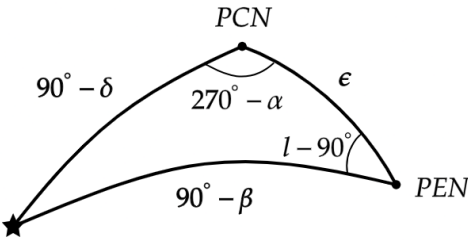


El ángulo recto en la imagen puede ser justificado por medios geométricos: la curva de menor distancia entre un punto (en este caso, el PNC) es un arco de círculo máximo (a saber, uno de los lados del huso) consiste en un arco de círculo máximo perpendicular al arco analizado. Ahora, por la ley de los senos:

$$\frac{\cos \delta_{\min}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\cos \phi}{\text{sen } 90^\circ} \implies \cos \delta_{\min} = \frac{R}{d} \cos \phi$$

$\delta_{\min} \approx 64^{\circ}54'$

5.19. Convirtiendo las coordenadas de la estrella 1:



Aplicando la ley del coseno-coseno:

$$\cos(\epsilon) \cos(l - 90^{\circ}) = \sin(\epsilon) \cot(90^{\circ} - b) - \sin(l - 90^{\circ}) \cot(270^{\circ} - b)$$

$$\alpha = 270^{\circ} - \arctan \left(\frac{-\sin(l - 90^{\circ})}{\cos(\epsilon) \cos(l - 90^{\circ}) - \sin(\epsilon) \cot(90^{\circ} - b)} \right)$$

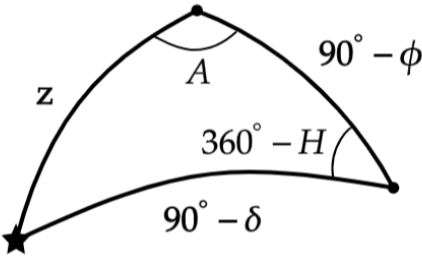
$\alpha = 95^{\circ}5'$ (lembre-se de usar o resultando de arctan no segundo quadrante)

calculando δ usando la ley de los senos:

$$\frac{\sin(90^{\circ} - \delta)}{\sin(l - 90^{\circ})} = \frac{\sin(90^{\circ} - b)}{\sin(270^{\circ} - \alpha)}$$

$$\delta = 73^{\circ}27'$$

Convirtiendo las coordenadas de la estrella 3:



Aplicando la ley de los cosenos:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(z) \cos(90^\circ - \phi) + \sin(z) \sin(90^\circ - \phi) \cos(A)$$

$$\delta = 37^\circ 10'$$

aplicando la ley de los senos:

$$\frac{\sin(360^\circ - H)}{\sin(z)} = \frac{\sin(A)}{\sin(90^\circ - \delta)}$$

$$H = 349^\circ 52^m = 23^h 19^m$$

aplicando la fórmula de tiempo sideral:

$$T = \alpha + H$$

$$5^h = \alpha + 23^h 28^m$$

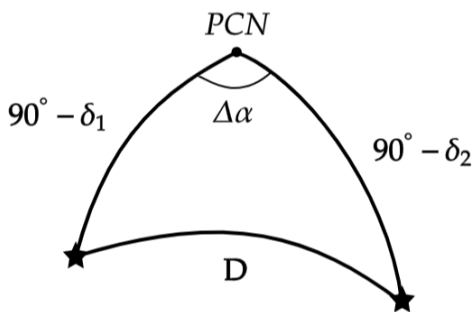
$$\alpha = 5^h 41'$$

Ahora, con estos valores en mano podemos calcular el ángulo $\angle 132$.

Con triángulos esféricos similares a este podemos calcular la distancia entre las estrellas con la fórmula:

$$\cos D = \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\Delta\alpha)$$

$$D_{1-3} = 36^\circ 36', \quad D_{1-2} = 25^\circ 55', \quad D_{2-3} = 12^\circ 49'$$



$$\cos D_{1-2} = \cos D_{1-3} \cos D_{2-3} + \sin D_{1-3} \sin D_{2-3} \cos(132^\circ)$$

$$\angle 132 = 28^\circ 9'$$

5.20. En el hemisferio Norte, para que las estrellas nunca nazcan, es necesario que la siguiente relación se deba cumplir:

$$\delta < \phi - 90^\circ$$

En el caso de Krakow:

$$\delta < -39,9^\circ$$

Ahora, podemos analizar las estrellas en cuestión.

Para facilitar, podemos convertir las latitudes ecuatoriales en eclípticas a través de la siguiente fórmula de conversión de la trigonometría esférica:

$$\sin(\beta) = \cos(\epsilon) \sin(\delta) - \sin(\epsilon) \cos(\delta) \sin(\alpha)$$

Substituyendo los valores numéricos:

$$\beta_{\text{Sirius}} = -39,7^\circ$$

$$\beta_{\text{Canopus}} = -75,9^\circ$$

En este sentido, necesitamos determinar el impacto de la precesión en las coordenadas ecuatoriales de las estrellas (en especial la declinación).

De acuerdo con el modelo de precesión asumido, el módulo de la diferencia entre la declinación de una estrella y su latitud eclíptica nunca debe ser mayor que $23,5^\circ$. De esta forma, calculando los posibles valores de declinación de las estrellas, tenemos:

$$\text{Sirius: } -63,2^\circ < \delta_{\text{Sirius}} < -16,2^\circ$$

$$\text{Canopus: } -90^\circ < \delta_{\text{Canopus}} < -52,4^\circ$$

De acuerdo con la condición expuesta en el inicio de la solución y con los intervalos obtenidos, podemos concluir que Sirius se puede convertir en una estrella que nunca salga. Canopus, a su vez, siempre será una estrella que nunca se alzaré en Krakow.

Capítulo 6

Escalas de Tiempo

Desde los orígenes de la humanidad, el concepto del tiempo siempre ha estado muy presente en la vida de las personas, ya sea para predecir cuándo se pondría el sol o para calcular los días que faltaban para la temporada de lluvias. Hoy en día, el uso de relojes digitales y calendarios es tan común que casi no nos paramos a pensar en el significado de esos números tan presentes en nuestro día a día. En este capítulo, estudiaremos los conceptos relacionados con el paso del tiempo. Traducción realizada con la versión gratuita del traductor DeepL.com

6.1 Proyectando en el Ecuador Celeste

Uma ferramenta muito útil para a visualização dos diversos conceitos que iremos aprender neste capítulo é um desenho 2D do equador celeste, pois as escalas de tempo são medidas sobre esse plano. Por convenção, iremos sempre analisar a visão do hemisfério Sul, como representado na imagem abaixo:

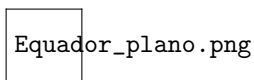


Figura 6.1: Plano del ecuador celeste

Ahora, ilustremos esta herramienta en una situación clásica. Como vimos en el capítulo de astronomía de posición, el ángulo horario es el arco sobre el ecuador celeste entre el meridiano local de un observador y el meridiano de un astro, creciendo hacia el **oeste**. De este modo, siendo λ la longitud (que crece hacia el **este** a partir del meridiano de Greenwich) de un observador que ve una estrella de ángulo horario H , tenemos:

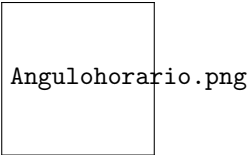


Figura 6.2: Ángulo horario de un astro. Imagen fuera de escala (en la práctica, el astro está infinitamente distante)

Obsérvese que, desde el punto de vista convencional, las magnitudes que crecen hacia el oeste giran en sentido antihorario, como el ángulo horario. Por otro lado, las magnitudes que crecen hacia el este se representan en sentido horario, así como la longitud del observador.

Como era de esperarse, puede observarse que $H = 0$ cuando el astro pasa por el meridiano local y que $\lambda = 0$ cuando el observador se encuentra sobre el meridiano de Greenwich. Además, vale analizar el movimiento diario del astro. Como vimos en el capítulo anterior, los astros nacen por el este y se ponen por el oeste, es decir, se mueven hacia el oeste a lo largo del día. De este modo, tenemos:

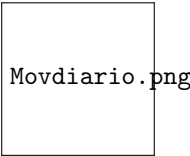


Figura 6.3: Movimiento diario de los astros

6.2 Sol Verdadero y Sol Medio

Uno de los astros más importantes para nuestra noción de tiempo es el Sol, que ha sido utilizado por la mayoría de los pueblos a lo largo de la historia para definir escalas como la hora y el segundo. Sin embargo, posee ciertas peculiaridades que lo vuelven poco conveniente cuando se requiere medir el tiempo con alta precisión (del orden de minutos):

- La órbita de la Tierra alrededor del Sol es elíptica, lo que hace que la velocidad angular del Sol visto desde la Tierra varíe a lo largo del año; item Existe una inclinación ($\approx 23^{\circ}27'$) entre el plano de la órbita terrestre y el plano del ecuador terrestre.

Cabe resaltar que la segunda peculiaridad es especialmente incómoda, pues hace necesario proyectar la posición del Sol (que está en la eclíptica) sobre el ecuador celeste, lo cual exige un cálculo más complejo que una simple regla de tres, como veremos más adelante. En vista de estos aspectos, en lugar de

utilizar el Sol verdadero para medir el paso del tiempo, se define un astro ficticio conocido como el **Sol medio**. Este posee dos características principales:

- Su velocidad angular alrededor de la Tierra es constante, lo que significa que su ascensión recta crece linealmente;
- Su declinación es siempre nula, es decir, su trayectoria anual se encuentra sobre el ecuador celeste de la Tierra.

Así, se define el **día solar medio** como *exactamente* de 24 horas. Por otro lado, el **día solar**¹ es el intervalo de tiempo entre dos pasos meridianos consecutivos del Sol (verdadero). Debido a la excentricidad de la órbita terrestre y a la oblicuidad de la eclíptica, la duración de un día solar es variable, oscilando entre $23^h59^m39^s$ y $24^h00^m30^s$. Esto ocurre porque ambos factores hacen que la variación de la ascensión recta del Sol verdadero no sea constante a lo largo del año.

Como consecuencia, se genera una diferencia entre la ascensión recta del Sol medio y la del Sol verdadero con el transcurso del tiempo. Un resultado de ello puede observarse en el analema, que consiste en diversas fotografías del Sol tomadas en intervalos de exactamente un día solar medio (24 h) entre sí (es decir, a una hora fija, por ejemplo, 12:00). Así, el Sol medio se encuentra siempre en la misma posición en las fotografías y, debido a la diferencia entre las ascensiones rectas de los soles medio y verdadero, observamos la variación de la posición del Sol verdadero a lo largo de un eje paralelo al ecuador celeste (eje rojo en la imagen inferior).²

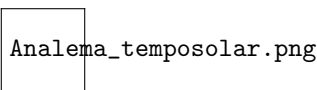


Figura 6.4: Analema

Como forma de cuantificar las diferencias derivadas del uso del Sol medio para el cálculo horario, se define un concepto conocido como **ecuación del tiempo** (ET), que es la diferencia entre las ascensiones rectas del Sol medio y del verdadero:

$$ET = \alpha_{\odot M} - \alpha_{\odot V}$$

La ecuación del tiempo varía a lo largo del año y consiste en una combinación de las diferencias producidas por los dos factores característicos del Sol verdadero: la excentricidad de la órbita terrestre y la oblicuidad de la eclíptica. La imagen siguiente representa la variación de cada uno de estos factores y de la ecuación del tiempo:

¹También puede llamarse día solar verdadero.

²La explicación del analema se profundiza en un apéndice del libro.

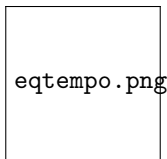


Figura 6.5: Ecuación del tiempo

Finalmente, analicemos ambos soles en la esfera celeste:

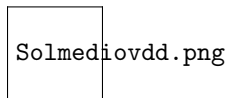


Figura 6.6: Sol medio y Sol verdadero en la esfera celeste

Despreciando la excentricidad de la órbita terrestre, es posible calcular el valor de ET como función del tiempo Δt transcurrido desde el equinoccio de marzo (punto γ). En primer lugar, la ascensión recta del Sol medio puede calcularse mediante una simple regla de tres:

$$\alpha_{\odot M} = \omega \Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

Donde T es el período de traslación de la Tierra. Ahora, para encontrar la ascensión recta del Sol verdadero, es necesario proyectar su posición sobre el ecuador celeste, tal como se representa en la imagen siguiente:

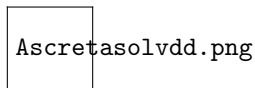


Figura 6.7: Ascensión recta del Sol verdadero

Se puede notar que la aplicación de la Ley de los Senos o de la Ley de los Cosenos no nos devolvería un resultado directo. En este caso, lo ideal es utilizar la ecuación de los cuatro elementos, vista en el capítulo anterior:

$$\cot AE \operatorname{sen} AI + \cos LI \cos AI = \cot LE \operatorname{sen} LI$$

Como $AE = 90^\circ$, $AI = i$, $LE = \omega \Delta t$ e $LI = \alpha_{\odot V}$, tenemos:

$$\cot 90^\circ \operatorname{sen} i + \cos \alpha_{\odot V} \cos i = \cot(\omega \Delta t) \operatorname{sen} \alpha_{\odot V}$$

Como $\cot 90^\circ = 0$, podemos llegar a la respuesta final:

$$\alpha_{\odot V} = \tan^{-1} \left(\cos i \cdot \tan \left(2\pi \frac{\Delta t}{T} \right) \right)$$

Dado que $ET = \alpha_{\odot M} - \alpha_{\odot V}$, es posible encontrar la ecuación del tiempo como función del tiempo³. Cabe resaltar que la última expresión deducida solo es válida para $\Delta t < T/4$ y que sería necesario realizar un procedimiento análogo para cada cuadrante con el fin de obtener el resultado a lo largo de todo el año, el cual está representado en el segundo gráfico de la figura 6.5.

6.3 Escala Solar

En esta sección introduciremos dos nuevos conceptos: el tiempo solar verdadero local⁴ ($T_{\odot VL}$) y el tiempo solar medio local ($T_{\odot ML}$):

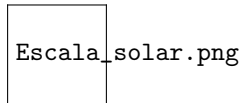


Figura 6.8: Escala solar cuando $ET > 0$

Como la gran mayoría de los conceptos relacionados con el tiempo, ambos crecen hacia el **oeste**. El $T_{\odot VL}$ es la noción más simple que podemos tener del horario, valiendo $0h$ cuando el Sol verdadero culmina inferiormente y $12h$ cuando culmina superiormente. Aunque no corresponde al horario que vemos en nuestros relojes, esos valores son relativamente próximos. Uno de los factores que causa tal discrepancia es la ET , también representada en la imagen. Nótese que, de acuerdo con la figura 6.1, la diferencia entre las ascensiones rectas de los soles medio y verdadero es igual a la diferencia entre los dos tiempos solares presentados, es decir:

$$ET = T_{\odot VL} - T_{\odot ML}$$

Es **esencial** resaltar dos aspectos importantes de esta ecuación:

- Cuando $ET > 0$, el Sol verdadero se encuentra más al oeste que el Sol medio, tal como se representa en la figura 6.8;
- Precaución: mientras que la ET escrita en términos de la ascensión recta es una resta entre el valor correspondiente al Sol medio y el del Sol verdadero, este orden se invierte cuando se expresa en términos de los tiempos solares verdadero y medio.

³Despreciando la excentricidad de la órbita terrestre.

⁴También conocido como tiempo solar aparente.

Finalmente, obsérvese que la relación entre los tiempos solares y los ángulos horarios de los soles es bastante directa. Para el Sol verdadero tenemos:

$$T_{\odot VL} = H_{\odot V} + 12h$$

donde $H_{\odot V}$ es el ángulo horario del Sol verdadero. Para el Sol medio:

$$T_{\odot ML} = H_{\odot M} + 12h$$

donde $H_{\odot M}$ es el ángulo horario del Sol medio. Ambas relaciones pueden deducirse observando la representación del ángulo horario en el plano del ecuador celeste en la figura 6.2 y comparándola con los tiempos solares vistos en esta sección.

6.4 Escala Sideral

La palabra “sideral” deriva del latín *sidereum*, que significa “en relación con el cielo”. En la sección anterior utilizamos como referencia al Sol, ya sea el verdadero o el medio. En esta sección, en cambio, nos basaremos en las estrellas distantes (que están esencialmente fijas en la esfera celeste), con especial atención al punto vernal γ .

6.4.1 Período Sideral e Sinódico

Las diferencias entre las escalas “siderales” y las demás escalas pueden resumirse en la pregunta: “¿qué estamos utilizando como referencia?”. La respuesta puede ilustrarse mediante el cálculo del período sinódico. Como contexto, consideremos dos planetas A y B que orbitan una misma estrella en órbitas circulares, tal como se muestra en la imagen siguiente.

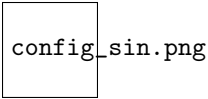


Figura 6.9: Contexto

El período sideral del planeta A es el tiempo que tarda en volver a la misma configuración con respecto a las estrellas distantes (que permanecen esencialmente inmóviles); es decir, el período sideral equivale al período de traslación de cada planeta. Lo mismo se aplica a B . De este modo, siendo P_i y ω_i el período sideral y la velocidad angular del planeta i , respectivamente, tenemos:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{P_i}$$

Por otro lado, el período sinódico de los planetas es el tiempo que tardan en volver a la misma configuración orbital **entre sí**. Por ejemplo, supongamos que los planetas están en oposición en un cierto instante. Después de un período sinódico S , volverán a esa misma configuración. Utilicemos esto para deducir el valor de S como función de P_A y P_B , según la imagen:

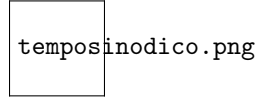


Figura 6.10: Período sinódico

Recordemos que, de acuerdo con la Tercera Ley de Kepler, los planetas más cercanos a la estrella poseen velocidades angulares mayores - en este caso, $\omega_A > \omega_B$. Así, puede observarse que el planeta A dará una vuelta completa (2π rad) y recorrerá un ángulo adicional θ antes de quedar nuevamente alineado con el planeta B , que solo habrá recorrido un ángulo θ . Por tanto:

$$\begin{cases} \varphi_A = 2\pi + \theta \\ \varphi_B = \theta \end{cases}$$

Además, los ángulos φ_i recorridos por los planetas se relacionan con sus velocidades angulares y con el tiempo S transcurrido desde el inicio mediante:

$$\begin{cases} \varphi_A = \omega_A S = \left(\frac{2\pi}{P_A} \right) S \\ \varphi_B = \omega_B S = \left(\frac{2\pi}{P_B} \right) S \end{cases}$$

Como $\varphi_A = 2\pi + \varphi_B$, podemos combinar estas expresiones para llegar a la respuesta final:

$$\varphi_A = 2\pi + \varphi_B \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{P_A} \right) S = 2\pi + \left(\frac{2\pi}{P_B} \right) S$$

Dividiendo ambos los lados de la ecuación por $2\pi S$, obtenemos:

$$\boxed{\frac{1}{S} = \frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_B}}$$

Cabe destacar que esta expresión solo es válida para planetas que orbitan una estrella en el **mismo sentido**.

Ejemplo 1

Un planeta hipotético orbitando el Sol en el mismo sentido que la Tierra tiene un período sideral igual a su período sinódico con respecto a la Tierra. Así, calcule el período sideral P_X de este planeta.

Solución

Primero, debemos determinar si este planeta (al que llamaremos X) es interior o exterior con respecto a la Tierra para aplicar la expresión del período sinódico. Probemos cada caso. Suponiendo que es inferior, $P_A = P_X$ y $P_B = P_{\oplus}$, es decir:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_X} - \frac{1}{P_{\oplus}}$$

Sin embargo, de acuerdo con el enunciado, $S = P_X$, lo que cancelaría los términos de la última ecuación, resultando en $P_{\oplus} \rightarrow \infty$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, podemos concluir que el planeta es **exterior**. Así, $P_A = P_{\oplus}$ y $P_B = P_X$, y por tanto:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_X}$$

Usando $S = P_X$ y reescribiendo, tenemos:

$$\frac{1}{P_X} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_X} \Rightarrow \boxed{P_X = 2P_{\oplus} = 2 \text{ años}}$$

Ejemplo 2

Calcule el equivalente del período sinódico S' en el caso en que los planetas A y B orbitan la estrella central en sentidos **opuestos**.

Solución

La deducción es análoga a la del caso en que los sentidos son iguales. La imagen siguiente representa el movimiento de los planetas:

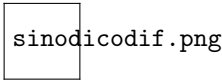


Figura 6.11: Ejemplo 2

Según la imagen, se observa que $\varphi_A + \varphi_B = 2\pi$. Como $\varphi_A = \omega_A S'$ y $\varphi_B = \omega_B S'$, tenemos:

$$\omega_A S' + \omega_B S' = 2\pi$$

Pero $\omega_A = \frac{2\pi}{P_A}$ y $\omega_B = \frac{2\pi}{P_B}$, por lo que podemos reescribir la última ecuación para obtener el resultado final:

$$\frac{1}{S'} = \frac{1}{P_A} + \frac{1}{P_B}$$

6.4.2 Conversión

Ahora, derivaremos la conversión entre la escala sideral y la solar. De acuerdo con lo visto hasta ahora, podemos presentar dos conceptos:

- Día sideral: período de rotación de la Tierra, es decir, el tiempo que tarda una estrella distante en volver a la misma posición vista por un observador fijo en la Tierra;
- Día solar⁵: el tiempo que tarda el Sol en volver a la misma posición visto por un observador fijo en la Tierra.

Estos conceptos están ilustrados en la siguiente imagen:

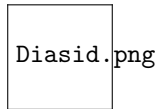


Figura 6.12: Día sideral (D_{sid}) y día solar ($D_{\odot}$)

Obsérvese que la estrella que estaba en el cenit del observador en $t = 0$ regresa a dicha posición después de un día sideral. Por otro lado, el Sol, que estaba culminando inferiormente en $t = 0$, vuelve a esta configuración después de un día solar. Además, cabe destacar que los días solar y sideral tienen valores diferentes debido al movimiento **combinado** de rotación y traslación de la Tierra: si la Tierra no se trasladara alrededor del Sol, $D_{sid} = D_{\odot} = P_{rot}$; y si la Tierra no rotara, no habría día sideral (es decir, $D_{sid} = 0$ o $D_{sid} = \infty$) y tendríamos $D_{\odot} = P_{tra}$ (traslación).

Ahora, realizaremos un procedimiento análogo al del período sinódico para encontrar el valor de D_{sid} como función de $D_{\odot}$. La imagen siguiente representa la situación:

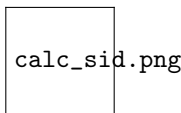


Figura 6.13: Cálculo de D_{sid}

⁵Para la discusión actual, utilizaremos el concepto de día solar medio.

Considerando que $\omega_{rot} > \omega_{tra}$, podemos relacionar los ángulos recorridos durante un día solar por el observador en la Tierra, φ_{rot} , y por el centro de la Tierra, φ_{tra} :

$$\begin{cases} \varphi_{rot} = 2\pi + \theta \\ \varphi_{tra} = \theta \end{cases}$$

Como el día sidereal es el propio período de rotación de la Tierra ($D_{sid} = P_{rot}$), tenemos que $\omega_{rot} = \frac{2\pi}{P_{rot}} = \frac{2\pi}{D_{sid}}$. Por otro lado, siendo $P_{tra} = 365,242$ días solares medios⁶, tenemos que $\omega_{tra} = \frac{2\pi}{P_{tra}}$. Con esto:

$$\begin{cases} \varphi_{rot} = \omega_{rot} D_{\odot} = \left(\frac{2\pi}{D_{sid}} \right) D_{\odot} \\ \varphi_{tra} = \omega_{tra} D_{\odot} = \left(\frac{2\pi}{P_{tra}} \right) D_{\odot} \end{cases}$$

Combinando todas estas expresiones:

$$\varphi_{rot} = 2\pi + \varphi_{tra} \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{D_{sid}} \right) D_{\odot} = 2\pi + \left(\frac{2\pi}{P_{tra}} \right) D_{\odot}$$

Dividiendo ambos lados de la expresión por $2\pi D_{\odot}$:

$$\frac{1}{D_{sid}} = \frac{1}{D_{\odot}} + \frac{1}{P_{tra}}$$

Si $1D_{\odot} = 1$ día solar medio = 24h y $P_{tra} = nD_{\odot}$, tenemos:

$$\frac{1}{D_{sid}} = \frac{1}{D_{\odot}} + \frac{1}{nD_{\odot}} \Rightarrow \boxed{D_{sid} = \frac{n}{n+1} D_{\odot}}$$

Realizando el cálculo ($n = 365,2422$), obtenemos $\boxed{D_{sid} = 23^h 56^m 4,1^s}$. La imagen siguiente muestra las consecuencias de esta diferencia a lo largo de un día. Obsérvese que, a lo largo de un año, esta pequeña diferencia de casi 4^m se “acumula” de manera que, después de un año, podemos ver la estrella en la misma posición inicial realizando la observación a la hora original. Esto da origen a los términos «constelación de invierno» y «constelación de verano», ya que el cielo que observamos desde cualquier lugar de la Tierra cambia a lo largo del año. Por ejemplo, el triángulo de verano es un asterismo formado por las estrellas Vega, Deneb y Altair que puede verse en verano, pero no en invierno (del Hemisferio Norte).

⁶Este es el valor de un año **tropical**. Discutiremos los tipos de años en la sección 6.7

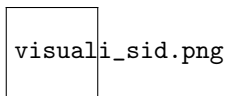


Figura 6.14: Consecuencia de la diferencia entre el día sidereal y el día solar

Por último, cabe destacar que la escala de tiempo sidereal posee sus propias unidades. De manera análoga a la escala solar, tenemos segundos, minutos, horas y días siderales. Para convertir entre estas escalas, basta utilizar:

$$t_{sid} = t_{\odot} \frac{n}{n+1}$$

6.4.3 Tiempo Sideral

En la escala solar, utilizamos conceptos relacionados con el Sol, como su ángulo horario, $T_{\odot}VL$ y $T_{\odot}ML$ para representar su posición en el cielo. En la escala sidereal, utilizamos el concepto de **tiempo sidereal local** (TSL) para representar la posición del **punto vernal** en el cielo. Aunque podríamos usar cualquier estrella como referencia, el punto vernal es especialmente conveniente porque siempre se encuentra (por definición) en el ecuador celeste **y** en la eclíptica, y no posee movimiento propio. Estas características consideran el efecto de la precesión de la Tierra, aunque no la nutación⁷.

El TSL se define como el ángulo horario del punto vernal, como se muestra en la figura siguiente. Puede medirse tanto en horas solares como en horas siderales, y puede convertirse de una a otra usando la relación ya vista:

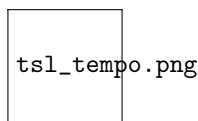


Figura 6.15: TSL

Existe una expresión muy relevante que relaciona el ángulo horario H y la ascensión recta α de cualquier astro con el TSL . Aunque ya se vio en el capítulo de astronomía de posición, la deduciremos ahora. Observando la figura:

⁷Se podría usar el concepto de punto vernal verdadero, pero rara vez se requiere en exámenes.

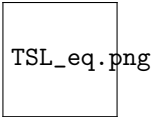


Figura 6.16: TSL como función de α y H

Recordemos que la ascensión recta se mide sobre el ecuador celeste desde el punto vernal y crece hacia el **este**. Así, directamente de la figura se obtiene:

$$TSL = H + \alpha$$

6.5 Definiciones

6.6 Definiciones

En esta sección aprenderemos otros conceptos relacionados con el estudio del tiempo. Aunque pueda parecer "memorización", es fundamental entender los fundamentos teóricos para resolver problemas de este tema.

6.6.1 Greenwich

El meridiano de Greenwich, o meridiano principal, es relevante por dos razones:

- Marca la longitud cero;
- Está en el centro del huso horario UTC +0.

Por ello, es común expresar varios conceptos con respecto a Greenwich. El ejemplo más habitual es el horario: un evento que comienza a las 14 : 00 UTC⁸ comenzará a las 11 : 00 en São Paulo (UTC −3) y a las 10 : 00 en Cuiabá (UTC −4).

También es habitual expresar TSL , $T\odot VL$ y $T\odot ML$ en Greenwich, denominándolos respectivamente TSG (tiempo sideral de Greenwich), $T\odot VG$ (tiempo solar verdadero de Greenwich) y $T\odot MG$ (tiempo solar medio de Greenwich). Esto se hace porque Greenwich es un referente astronómico. Por ejemplo, si un estudiante en Singapur informa un TSL en su longitud, necesitaríamos conocer dicha longitud para calcularlo. Es más conveniente que proporcione directamente el TSG . La figura muestra estos tres conceptos:

⁸Anteriormente, UTC se llamaba GMT. Todavía se usa GMT en algunas regiones.

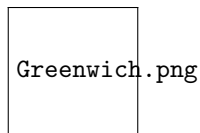
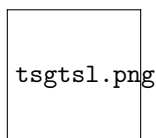


Figura 6.17: Escalas de tiempo en Greenwich

Para convertir valores de Greenwich a locales (cualquier longitud), consideramos la conversión entre TSG y TSL ; las conversiones de $T \odot VG$ y $T \odot MG$ son análogas:

Figura 6.18: Conversión entre TSG y TSL

Directamente, se obtiene:

$$TSL = TSG + \lambda$$

Finalmente, $T \odot MG$ también puede llamarse UT (*Universal Time*).

6.6.2 Husos horarios

Un huso horario delimita una región donde todos los habitantes usan la misma hora (tiempo civil). Generalmente⁹, cada huso abarca $7,5^\circ$ al oeste y este de un meridiano central. Por ejemplo, el centro del huso UTC -3 se encuentra en $\lambda = -45^\circ$. La figura muestra los husos del planeta:

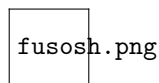


Figura 6.19: Husos horarios de la Tierra

Definimos el huso F como la longitud del centro del huso de un lugar. Por ejemplo, Moscú tiene $\lambda = 37^\circ, 37', 6,3''$ y pertenece al huso UTC $+3$, es decir, $F = +45^\circ$. La figura ilustra este concepto de forma general:

⁹Factores geopolíticos pueden alterar esto, por ejemplo, China usa un solo huso horario.

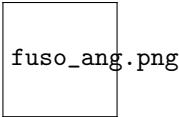


Figura 6.20: Ángulo de huso F

6.6.3 Tiempo de huso

Finalmente, llegamos al concepto que determina la hora en nuestros relojes. Los factores a considerar son:

- Sol medio: usamos como referencia el Sol medio, no el verdadero; la ecuación del tiempo cuantifica la diferencia;
- Husos horarios: importa el huso donde se encuentra el observador, no su longitud exacta. Se usa el centro del huso como referencia.

Así, el **tiempo de huso** TF , o **tiempo civil**, corresponde al tiempo solar medio del centro del huso:

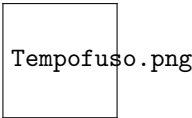


Figura 6.21: Tiempo de huso TF

Con esto, concluimos los conceptos principales de las escalas de tiempo. Una estrategia general para resolver problemas de este contenido es:

1. Dibujar el plano del ecuador celeste;
2. Representar los valores dados y los valores deseados;
3. Relacionar los ángulos para obtener la respuesta final.

A continuación, algunos ejemplos prácticos.

Ejemplo 3

Calcule la culminación superior del Sol en São Paulo ($\lambda = -46^{\circ},38',20''$, UTC -3). Se da que la ecuación del tiempo en el día de observación es $ET = +12$ min.

Solución

Analizamos la situación en el plano del ecuador celeste. Es conveniente hacer un dibujo que represente razonablemente los valores numéricos dados.

En la culminación superior del Sol (verdadero), su proyección en el plano del ecuador celeste coincide con el cenit del observador, así:

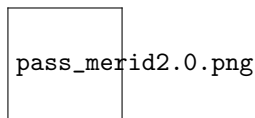


Figura 6.22: Hora de paso meridiano

De acuerdo con los ángulos de la figura:

$$TF + ET - (|\lambda| - |F|) = 12h \Rightarrow TF = 12h + |\lambda| - |F| - ET$$

Sustituyendo los valores: $TF = 11^h54^m33^s$. Valor cercano a las 12 : 00 como era de esperar.

Ejemplo 4

Despreciando la excentricidad de la órbita terrestre, responda:

1. Para un observador en el ecuador, ¿cuándo sale el Sol más tarde: en el solsticio de junio o en el equinoccio de marzo?
2. Para un observador en el ecuador, ¿cuándo sale el Sol más tarde: en el equinoccio de marzo o al día siguiente?

Solución

La clave es recordar la ecuación del tiempo (ET). Despreciando la excentricidad de la órbita terrestre, las ascensiones rectas del Sol medio y del Sol verdadero coinciden **solo** en solsticios y equinoccios. Además, $ET > 0$ para $\Delta t < T/4$, donde Δt es el tiempo desde el equinoccio de marzo. Entonces:

a) Como $ET = 0$ en el solsticio de junio y en el equinoccio de marzo, el Sol sale a la misma hora en ambos días.

b) El Sol verdadero está más al oeste que el Sol medio para $\Delta t < T/4$. Aquí, $\Delta t = 1$ día, por lo que el Sol sale más temprano que en el equinoccio vernal.

6.7 Traslación de la Tierra y la Luna

Estudiaremos conceptos relacionados con las órbitas de la Tierra y la Luna.

6.7.1 Tipos de años

Año sidereal

Tiempo que tarda la Tierra en completar una vuelta alrededor del Sol respecto a las estrellas fijas: 365,2564 días solares medios.

Año tropical

Tiempo entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto vernal. Es el utilizado para las estaciones: 365,2422 días solares medios. La diferencia con el año sidereal se debe a la precesión terrestre.

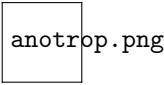


Figura 6.23: Diferencia entre año sidereal y año tropical

6.7.2 Meses de la Luna

Mes sidereal

Período sidereal de la órbita lunar alrededor de la Tierra: 27,3217 días.

Mes sinódico o lunación

Intervalo entre dos configuraciones idénticas consecutivas. La diferencia con el mes sidereal se debe a la traslación de la Tierra alrededor del Sol, como muestra la figura:

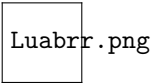


Figura 6.24: Diferencia entre el mes sidereal y el mes sinódico

Perceba que la situación es análoga a la diferencia entre el día solar y el día sidereal (fig. 6.12), con las únicas sustituciones siendo $D_{\odot} \rightarrow P_{sin}$ y $D_{sid} \rightarrow P_{sid}$. Así, podemos escribir:

$$\frac{1}{P_{sid}} = \frac{1}{P_{sin}} + \frac{1}{P_{tra}}$$

Sustituyendo $P_{tra} = 365,2422$ días y $P_{sid} = 27,3217$ días, obtenemos:

$P_{sin} = 29,531$ días

6.8 Problemas

6.1. (Principiante) En un determinado día, Mercurio estaba en máxima elongación este¹⁰ con respecto a la Tierra. Considerando la órbita circular de Mercurio con radio $R = 0,39$ UA, calcule después de cuántos días esta configuración se repetirá.

6.2. (Intermedio) Considerando órbitas circulares de la Tierra y Mercurio con radios $R_{\oplus}$ y R_M :

- Demuestre que el ángulo entre Mercurio y la Tierra visto desde el Sol varía con una tasa $\omega_{rel} = \omega_M - \omega_{\oplus}$, donde ω_M y $\omega_{\oplus}$ son las velocidades angulares de Mercurio y de la Tierra.
- Calcule ΔT para que Mercurio vaya de la máxima elongación este a la máxima elongación oeste.

6.3. (Intermedio) (P1 Vinhedo/2021) Cierta día, Giulia decide ir a la playa. Sin embargo, se pierde en medio del camino durante la madrugada y nota que su reloj marca 6:32 al amanecer. Sabiendo que se encuentra en el hemisferio Sur, ¿cuál es su longitud?

Datos: El ángulo horario del Sol en su amanecer era -80° , ella está en el huso -3 UTC y $ET = 0$ el día de la observación.

6.4. (Intermedio) Calcule la duración de un día solar alternativo $D'_{\odot}$ en caso de que el sentido de rotación de la Tierra fuese contrario a su sentido de traslación. Considere que $P_{sid} = \frac{n}{n+1} * 24$ horas solares, donde $n = 365,2422$ días.

6.5. (Intermedio) (IOAA adap.) Las coordenadas de la Gran Nube de Magallanes (LMC) son $\alpha = 5^h 24^m$ y $\delta = -70^\circ 00'$. La latitud y la longitud de Phuket son $7^\circ 53'$ y $98^\circ 24'$ E, respectivamente. Calcule el TSG cuando la LMC culmina.

6.6. (Avanzado) (SAO) ¿A qué hora amanece en la Ciudad de Singapur (latitud cercana a 0, $\lambda = 103,8^\circ$ E, UTC +8)? Considere que:

- $ET = 0$ el día de la observación;
- La refracción atmosférica cerca del horizonte vale $\eta = 34'$;
- El Sol amanece cuando es posible ver su borde superior;
- El diámetro angular del Sol es $32'$.

¹⁰Ver apéndice de [Configuraciones Planetarias](#).

6.7. (Intermedio) Sirius posee coordenadas ecuatoriales $(\delta, \alpha) = (-16^\circ 43', 6^h 45^m)$. El día 21/12, FiYa observa el cielo en João Pessoa - PB ($\phi = -7^\circ 7'$). FiYa adora Sirius y pide su ayuda para calcular los siguientes datos:

- ¿Cuál es el intervalo de tiempo (en el TSL) en el que Sirius estará sobre el horizonte?
- ¿Cuándo culminará la estrella?
- Considerando que Sirius es visible cuando todo el disco solar está bajo el horizonte (considere la refracción atmosférica $\theta = 34'$), ¿por cuánto tiempo será posible observar a Sirius en el cielo?

6.8. (Principiante) La ecuación del tiempo se define como $ET = \alpha_M - \alpha_V$ donde α_M es la ascensión recta del Sol medio y α_V es la ascensión recta del Sol verdadero. En su forma más pura, puede ser definida como la suma de dos senoides, una relacionada con la oblicuidad de la eclíptica y otra relacionada con la excentricidad de la Tierra. Por ello, es negativa en una mitad del año y positiva en otra. ¿En qué parte del año es negativa y en cuál es positiva? ¿Por qué?

6.9. (Avanzado) Suponiendo que hoy la Luna tiene coordenadas ecuatoriales $(\delta_L, \alpha_L) = (6^\circ 56', 0^h 42^m)$ calcule el Tiempo Civil en que la Luna nacerá en Fortaleza ($\phi = -3^\circ 46', \lambda = -38^\circ 32'$) dentro de 2 días. ¿Cuál será la fase de la Luna en ese día?

Datos: El período de la Luna es $P_L = 27,3$ días, Fortaleza sigue el huso UTC-3.

6.10. (Intermedio) Un observador en Río de Janeiro $22^\circ 54' 10'' S, 42^\circ 12' 28''$ notó que a las 11 : 00 : 00 (hora civil), el ángulo horario del Sol era igual a $-0^h 58^m 51^s$. Sabiendo que Río de Janeiro sigue el huso UTC-3, responda:

- ¿Cuál es el valor del tiempo en el momento de la observación?
- Ese mismo día, el Sol cruzó el meridiano local con una distancia cenital de $z = 39^\circ 3' 19''$. Ignorando la excentricidad de la órbita de la Tierra, estime aproximadamente el día del año en que esta observación ocurrió
- Debido a la simetría de la eclíptica, hay dos posibles fechas en que el Sol cruza el meridiano local con un determinado z . ¿Cómo nos dice la ecuación del tiempo cuál de ellas es la correcta?

6.11.

6.12.

6.13.

6.14.

6.15.

6.16.

6.17.

6.18.

6.19.

6.20.

6.9 Gabarito

- 6.1.** En la deducción del período sinódico, calculamos el tiempo entre dos configuraciones sucesivas de oposición entre los planetas. Observe que el cálculo sería el mismo, independientemente de la configuración específica. De este modo, basta calcular el período sinódico entre Mercurio y la Tierra.

El período sideral P_M de Mercurio puede ser calculado por la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{P_M^2}{R^3} = \frac{1 \text{ año}^2}{1 \text{ UA}^3} \Rightarrow P_M = 0,244 \text{ años}$$

Luego, por la ecuación del período sinódico:

$$\frac{1}{P_{sin}} = \frac{1}{P_M} - \frac{1}{P_{\oplus}} \Rightarrow \boxed{P_{sin} = 0,32 \text{ años}}$$

- 6.2.** a) Observe que esta tasa de variación **es independiente** del instante en que observamos los planetas. De este modo, podemos elegir cualquier situación inicial para analizar la variación del ángulo θ entre Mercurio y la Tierra. Por conveniencia, vamos a considerar que Mercurio está en conjunción inferior en relación a la Tierra en $t = 0$, tal como se representa en la imagen de abajo.

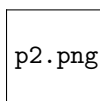


Figura 6.25: Problema 2

Note que $\theta = \theta_M - \theta_{\oplus}$. Además, tenemos que $\theta_M = \omega_M \Delta t$ y que $\theta_{\oplus} = \omega_{\oplus} \Delta t$. Como el valor de θ para $t = 0$ era nulo, tenemos que su tasa de variación ω_{rel} es:

$$\omega_{rel} = \frac{\theta - 0}{\Delta t} = \frac{\omega_M \Delta t - \omega_{\oplus} \Delta t}{\Delta t}$$

O sea:

$$\boxed{\omega_{rel} = \omega_M - \omega_{\oplus}}$$

- b) Lo que vimos en el apartado a) tiene una implicación interesante: podemos considerar la Tierra como parada y Mercurio con una velocidad angular ω_{rel} alrededor del Sol. De este modo, podemos hacer el dibujo:

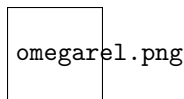


Figura 6.26: Problema 2

De este modo, observe que el tiempo ΔT buscado es:

$$\Delta T = \frac{2\alpha}{\omega_{rel}}$$

Así, basta encontrar α . Por los radios de las órbitas, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{R_M}{R_{\oplus}}$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{2 \cos^{-1} \left(\frac{R_M}{R_{\oplus}} \right)}{\omega_M - \omega_{\oplus}}$$

- 6.3.** Tenemos que $TF = \left(6 + \frac{32}{60}\right) h$, $H = -\frac{80}{15} h$, $F = -3 h$ y $ET = 0$ y queremos λ . Así, representando todos los valores (más precisamente, sus módulos) en el plano del ecuador:

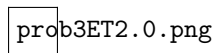


Figura 6.27: Problema 3

Por la geometría de la situación, tenemos:

$$TF + |H| - (|\lambda| - |F|) = 12 h \Rightarrow |\lambda| - |F| = TF + |H| - 12$$

Sustituyendo los valores, obtenemos $|\lambda| - |F| = -0,133 h = -2^\circ$. De este modo, $|\lambda| = 45^\circ - 2^\circ \Rightarrow \boxed{\lambda = 43^\circ \text{ Oeste}}$.

- 6.4.** La imagen de abajo representa la situación deseada:

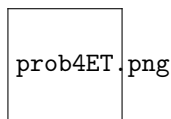


Figura 6.28: Problema 4

Observe que, en $t = D'_{\odot}$:

$$\begin{cases} \varphi_{rot} = 2\pi - \theta \\ \varphi_{tra} = \theta \end{cases}$$

Como $\varphi_{rot} = \left(\frac{2\pi}{D_{sid}}\right) D'_{\odot}$ y $\varphi_{tra} = \left(\frac{2\pi}{P_{tra}}\right) D'_{\odot}$, tenemos:

$$\left(\frac{2\pi}{D_{sid}}\right) D'_{\odot} = 2\pi - \left(\frac{2\pi}{P_{tra}}\right) D'_{\odot}$$

Sustituyendo $D_{sid} = \frac{n}{n+1} D_{\odot}$ y $P_{tra} = n D_{\odot}$, tenemos:

$$\frac{n+1}{n} D'_{\odot} = D_{\odot} - \frac{D'_{\odot}}{n}$$

O sea¹¹:

$$D'_{\odot} = \frac{n}{n+2} D_{\odot}$$

6.5. La situación está representada en la imagen de abajo.

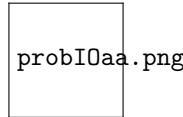


Figura 6.29: Problema 5

Como $TSL = H + \alpha$ y $H = 0$ (culminando), tenemos que $TSL = \alpha$. De este modo, por la geometría de la situación, tenemos:

$$TSG - TSL + \lambda = 24h \Rightarrow TSG = 24h + \alpha - \lambda$$

Realizando los cálculos, obtenemos $TSG = 22^h 50^m 24^s$.

6.6. Sea H' el ángulo horario del borde superior del Sol. Podemos encontrar H' en el amanecer por la clásica expresión (vista en el último capítulo):

$$\cos H' = -\tan \varphi \tan \delta$$

Como $\varphi = 0$, tenemos que $H' = -90^\circ$. Ahora, observe la siguiente imagen:

¹¹Este problema ya apareció en una IOAA, pero la solución encontrada en el IOAA Book es incorrecta.

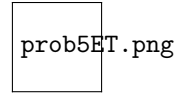


Figura 6.30: Problema 6

Note que el centro del Sol estará un ángulo $\eta + R$ ($R = 16'$ es el radio angular del Sol) bajo el horizonte. De este modo, su ángulo horario H es:

$$H = -(6h + \eta + R)$$

Ahora, observe la siguiente imagen:

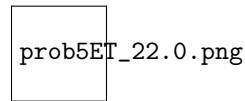


Figura 6.31: Problema 6

Se puede percibir que:

$$TF + |H| - (F - \lambda) = 12h \Rightarrow TF = 6 - \eta - R + F - \lambda$$

Sustituyendo los valores:

$$TF = 6h - \frac{0^\circ 34'}{15^\circ}h - \frac{0^\circ 16'}{15^\circ}h + 8h - \frac{103,8^\circ}{15^\circ}h$$

Haciendo las cuentas, obtenemos $TF = 7h01min28s$.

Capítulo 7

Sistemas Binarios

Hasta ahora, todos los análisis hechos al respecto de sistemas de dos cuerpos fueron para el caso específico en que $M \gg m$, i.e. la masa central está exactamente sobre el centro de masa y no posee velocidad. En este capítulo, vamos a tratar el caso general del problema de dos cuerpos, en que M y m son comparables¹.

7.1 Centro de Masa

El concepto de centro de masa es extremadamente importante para el estudio de la dinámica de cualquier tipo de sistema, principalmente por simplificar el análisis matemático necesario para comprenderlo. Este es definido como el punto hipotético donde podemos considerar que toda la masa de un sistema físico está concentrada, de forma que tal sistema se mueva como si todas las fuerzas externas estuvieran siendo aplicadas en ese punto. Por ejemplo, una fuerza gravitacional atrayendo un cuerpo cualquiera puede ser² considerada como siendo aplicada sobre el centro de masa del cuerpo.

Un ejemplo práctico del concepto de centro de masa es cuando tratamos de equilibrar objetos sobre un dedo. Así como puede ser observado en la figura abajo, imagínese a usted inicialmente tratando de equilibrar una tabla de madera. Intuitivamente, usted va a colocar su dedo sobre el centro de la barra, que es justamente donde está el centro de masa. Ahora, en caso de que una piedra sea colocada sobre la parte derecha de la tabla, usted necesitaría mover su dedo para la derecha para conseguir equilibrar el nuevo sistema, ya que el

¹De manera parecida, cuando una de las masas en un sistema de tres cuerpos es despreciable con relación a las otras, la dinámica del sistema se vuelve mucho más simple. Es en este sistema que se encuentran los puntos de Lagrange.

²En la realidad, esto solo es válido si algunas condiciones fueran satisfechas (como la homogeneidad del campo gravitacional), pero no necesitamos preocuparnos por esto mientras tanto.

centro de masa también se desplazó en esa dirección.

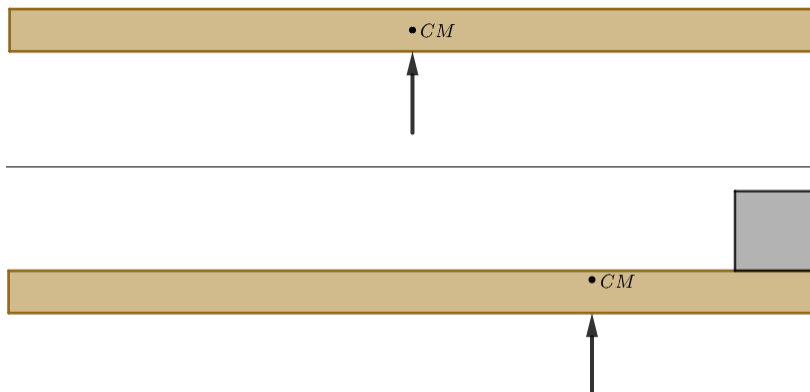


Figura 7.1: Aplicación del centro de masa

En un contexto astronómico, el centro de masa de un sistema binario es especialmente relevante por tres razones:

1. Ambos cuerpos orbitan el centro de masa del sistema. Por ejemplo, el foco primario de la órbita lunar en el sistema Tierra - Luna no está exactamente en el centro de la Tierra, pero sí en el centro de masa de este sistema³. De este modo, la Tierra también realiza una órbita eclíptica en torno de este centro de masa;
2. La recta que conecta los cuerpos **siempre** pasa sobre el centro de masa del sistema;
3. Es conveniente analizar situaciones en el referencial del centro de masa. Por ejemplo, en un sistema binario cualquiera en una galaxia muy lejos de la Tierra, no podemos despreciar la Ley de Hubble, que proporciona una velocidad radial adicional a las estrellas. Sin embargo, en el referencial del centro de masas de ese sistema (que posee la misma velocidad radial de la Ley de Hubble que las estrellas individuales), tal componente no aparece.

Vamos a abordar cada una de estas razones con más calma en las próximas secciones. Ahora, vamos a aprender a calcular la posición del centro de masa de un sistema de partículas arbitrario, así como está representado en la imagen:

³Despreciando interferencias gravitacionales externas.

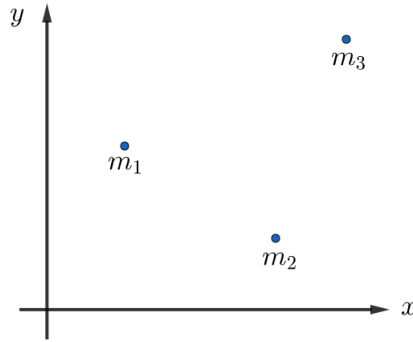


Figura 7.2: Sistema de partículas

Cualitativamente, esperamos que masas mayores posean una mayor influencia en la posición del centro de masa que masas pequeñas. En este ámbito, las coordenadas (x_{CM}, y_{CM}) son calculadas por una media ponderada de las coordenadas de cada partícula individual. En el caso de nuestro sistema, siendo (x_i, y_i) las coordenadas de la partícula de masa m_i , tenemos:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{M}$$

Análogamente, para la coordenada y :

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{M}$$

Donde n es el número de partículas (en nuestro caso, $n = 3$) y $M = \sum_1^n m_i$ es la masa total del sistema.

Por fin, vale la pena resaltar que estas ecuaciones pueden ser escritas vectorialmente. Siendo $\vec{R}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM})$, tenemos:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{r}_i}{M}$$

Ejemplo 1

En un sistema binario con estrellas de masa m_1 y m_2 , la distancia entre ellas es de d en un dado instante de tiempo, así como está representado en la imagen abajo. Siendo así, calcule:

- Las distancias r_1 y r_2 de cada estrella hasta el centro de masa;
- La razón $\frac{r_1}{r_2}$.

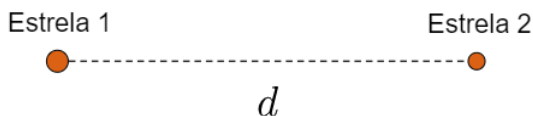


Figura 7.3: Ejemplo 1

Solución

a) Primeramente, vamos a tener de convención un sistema de coordenadas cartesiano. Es conveniente alinear el eje x con la recta que conecta las estrellas de forma que el origen está sobre la estrella 1⁴, así como puede ser observado en la imagen:

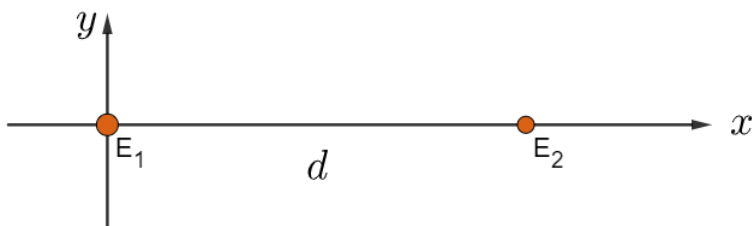


Figura 7.4: Solución ejemplo 1

Como la coordenada y de las estrellas es nula, $y_{CM} = 0$. Ahora, podemos utilizar la ecuación del centro de masa para encontrar x_{CM} :

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

La estrella 1 está sobre el origen ($x_1 = 0$) y la estrella 2 dista d del origen ($x_2 = d$), por lo tanto:

$$x_{CM} = \boxed{r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d}$$

Para encontrar r_2 , basta notar que $r_1 + r_2 = d$, o sea:

$$r_2 = d - r_1 = d \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d}$$

b) Basta dividir las expresiones encontradas:

⁴La respuesta final no depende de como usted haga la convención de los ejes.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{m_2}{m_1 + m_2}d}{\frac{m_1}{m_1 + m_2}d} \Rightarrow \boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

Vale resaltar que este resultado puede ser reescrito como $0 = m_2 r_2 - m_1 r_1$, que es la coordenada x_{CM} del centro de masa con la convención del origen como estando en el propio CM, i.e. $x_{CM} = 0 = m_2 r_2 - m_1 r_1$. Note que esto implica que en un sistema binario el cuerpo más masivo **siempre** está más próximo del centro de masa que el cuerpo más leve.

Los resultados encontrados en este ejemplo son **extremadamente** importantes, y serán utilizados con frecuencia en las próximas secciones.

7.2 Órbitas Circulares

Vamos a analizar la situación en que ambas órbitas del sistema son circulares, así como está representado en la imagen abajo. Note que M , el CM y m son colineales, así como lo esperado por la segunda propiedad del centro de masa. Esto implica que los períodos orbitales de M y m son **idénticos**. Sin embargo, note que M está más próximo al CM que m , o sea, $M > m$.

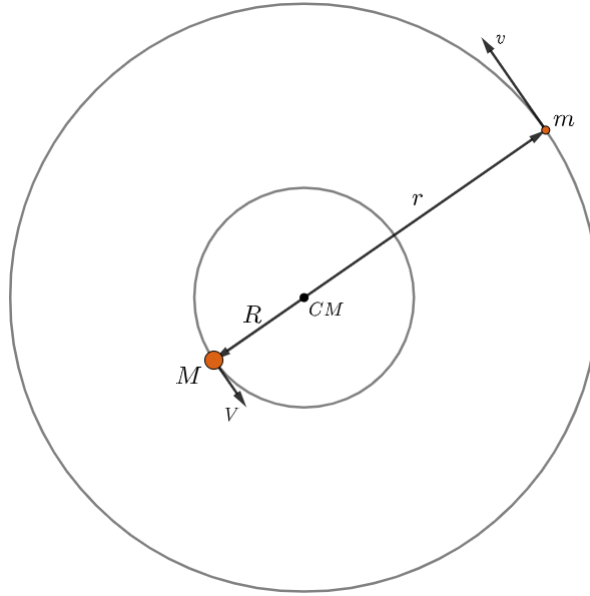


Figura 7.5: Sistema binario de órbitas circulares

En el caso en que $M \gg m$, lo que hicimos en el capítulo 2 fue igualar la fuerza gravitacional con la resultante centrípeta y utilizar la relación entre la velocidad, el período y el radio de la órbita. Ahora, vamos a realizar el mismo procedimiento para cada masa.

Por la ley de gravitación universal, la fuerza gravitacional F_g en ambos cuerpos es:

$$F_g = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

Ahora, note que m y M realizan órbitas circulares de radio r y R , respectivamente, en torno del centro de masa. De este modo, podemos igualar la fuerza gravitacional con la resultante centrípeta de cada cuerpo:

En M , tenemos:

$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = \frac{MV^2}{R}$$

Como $V = \frac{2\pi R}{T}$, podemos reescribir esta expresión como:

$$\frac{Gm}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (7.1)$$

Análogamente para m , podemos obtener:

$$\frac{GM}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (7.2)$$

Sumando las ecuaciones 7.1 y 7.2, obtenemos:

$$\frac{G(M+m)}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2(R+r)}{T^2}$$

O sea:

$$\boxed{\frac{T^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}}$$

Que es el equivalente de la Tercera Ley de Kepler para sistemas binarios de órbitas circulares! Note que, en el caso límite en que $M \gg m$, $R \rightarrow 0$ y $M+m \rightarrow M$, o sea, volvemos a la ecuación encontrada en el segundo capítulo.

7.2.1 Velocidades y Distancias

Ahora, vamos a ver relaciones entre las velocidades V y v , las distancias R y r y las masas M y m por dos métodos diferentes y confirmar que estos producen resultados idénticos.

Centro de masa:

Siendo $\vec{R}$ y $\vec{r}$ los vectores de posición de las estrellas con origen en el CM, de acuerdo con la definición vectorial del centro de masa utilizando como origen el propio centro de masa, tenemos:

$$\vec{R}_{CM} = 0 = M\vec{R} + m\vec{r}$$

O sea:

$$\boxed{M\vec{R} = -m\vec{r}}$$

Note que la expresión del ejemplo 1 es muy parecida con esta. La única diferencia es que antes habíamos analizado solamente la relación entre los módulos de los vectores. Sin embargo, vale la pena notar que el signo negativo aparece pues el sentido de $\vec{R}$ y $\vec{r}$ son opuestos.

La utilización de la notación vectorial es importante para lo que haremos ahora. Como $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ⁵, podemos derivar la expresión arriba con

⁵Si usted no sabe cálculo, puede interpretar estas ecuaciones como un $\text{velocidad} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ "generalizado".

relación al tiempo para obtener:

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} = -m \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \boxed{M\vec{V} = -m\vec{v}}$$

O, tratando de los módulos:

$$MV = mv$$

Resultante centrípeta:

A pesar de las deducciones vistas a partir del centro de masa ser válidas para cualquier tipo de órbita, vale la pena analizar lo que ocurre cuando las órbitas son circulares.

Primeramente, podemos dividir las ecuaciones 7.1 por la ecuación 7.2 para obtener:

$$\frac{m}{M} = \frac{R}{r} \Rightarrow MR = mr$$

Ahora, sabemos que $V = \frac{2\pi R}{T}$ y $v = \frac{2\pi r}{T}$. Así:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{V}{R} = \frac{v}{r}$$

De este modo, podemos encontrar:

$$\boxed{\frac{m}{M} = \frac{R}{r} = \frac{V}{v}}$$

¡Así como lo esperado!

7.3 Caso general

En el segundo capítulo del libro, vimos las Leyes de Kepler para sistemas binarios en que $m_1 \gg m_2$. Ahora, vamos a generalizarlas para un sistema binario cualquiera.

- **1ª Ley:** Las órbitas de las estrellas son elípticas (en lo general, cónicas);
- **2ª Ley:** El segmento que conecta el centro de masa hasta una de las estrellas barre áreas iguales en tiempos iguales;
- **3ª Ley:** Sean a_1 y a_2 los semiejes mayores de las órbitas de las estrellas de masa m_1 y m_2 . El período P de las estrellas (que es el mismo para ambas) es:

$$\frac{P^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Ahora, vamos a deducir algunas propiedades geométricas de las órbitas de las estrellas a partir solamente de las leyes de Kepler y de las propiedades del centro de masa.

7.3.1 Formato

De acuerdo con la 1ª Ley de Kepler, sabemos que las órbitas de ambas estrellas son elípticas. Sin embargo, todavía queda una duda al respecto de la disposición de cada una de estas elipses con relación al centro de masa. Intuitivamente, tenemos dos opciones para analizar cuál es la correcta:

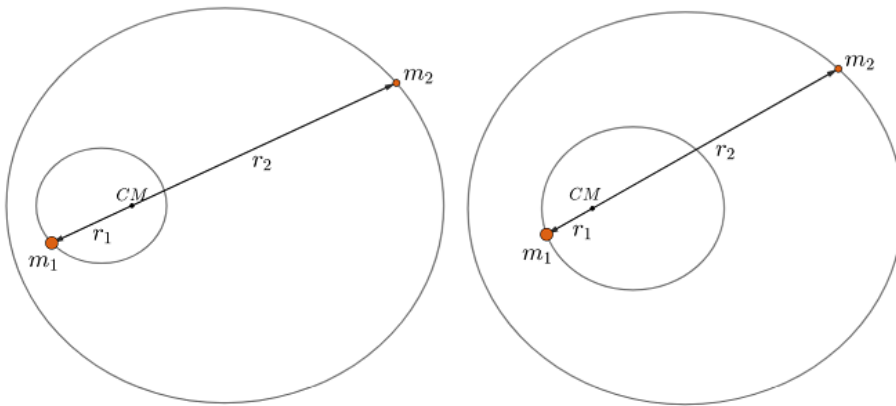


Figura 7.6: Opciones para el formato de las órbitas en un sistema binario

En la opción de la izquierda, cuando m_1 está en el periastro, m_2 también está. Ya en la opción de la derecha, cuando m_1 está en el periastro, m_2 está en el apoastro.

Para determinar cuál de las opciones es correcta, necesitamos recordar que $m_1 r_1 = m_2 r_2$ (centro de masa). Vamos a analizar primero la opción de la derecha:

Cuando m_1 está en su periastro, m_2 está en su apoastro, o sea, $r_1 = a_1(1 - e_1)$ e $r_2 = a_2(1 + e_2)$. De este modo:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow m_1 a_1(1 - e_1) = m_2 a_2(1 + e_2) \quad (7.3)$$

Por otro lado, cuando m_1 está en su apoastro, m_2 está en su periastro, o sea, $r'_1 = a_1(1 + e_1)$ y $r'_2 = a_2(1 - e_2)$. Así:

$$m_1 r'_1 = m_2 r'_2 \Rightarrow m_1 a_1(1 + e_1) = m_2 a_2(1 - e_2) \quad (7.4)$$

Sumando las ecuaciones 7.3 y 7.4, tenemos:

$$2m_1a_1 = 2m_2a_2 \Rightarrow m_1a_1 = m_2a_2$$

Por ahora, no hay nada errado. Sin embargo, substrayendo 7.3 de 7.4, tenemos:

$$2m_1a_1e_1 = -2m_2a_2e_2$$

Pero como $m_1a_1 = m_2a_2$, tenemos que $e_1 = -e_2$, lo que no hace sentido visto que no existe excentricidad negativa. De este modo, el formato correcto está representado por la **situación en la izquierda de la figura 7.6!**

7.3.2 Excentricidad

Una propiedad muy relevante sobre sistemas binarios es que las excentricidades de las órbitas individuales son **idénticas**. Para probar esto, vamos a aplicar las propiedades del centro de masa en la figura abajo (que, como acabamos de probar, representa correctamente un sistema binario):

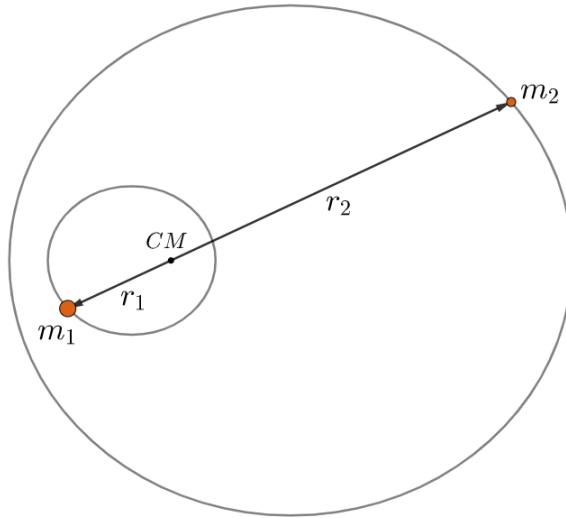


Figura 7.7: Sistema binario general

Cuando m_1 está en el periastro, m_2 también lo está, por lo tanto:

$$m_1a_1(1 - e_1) = m_2a_2(1 - e_2) \quad (7.5)$$

Ahora, cuando m_1 y m_2 están en sus apoastros, tenemos:

$$m_1a_1(1 + e_1) = m_2a_2(1 + e_2) \quad (7.6)$$

Sumando las ecuaciones:

$m_1 a_1 = m_2 a_2$

¡Que ya es una propiedad importante por si sola! Ahora, substrayendo las ecuaciones:

$$2m_1 a_1 e_1 = 2m_2 a_2 e_2$$

Así:

$e_1 = e_2$

¡Así como queríamos demostrar!

Ejemplo 2

¿Cuál es la excentricidad mínima de un sistema binario con estrellas de masa m_1 y m_2 para que las órbitas individuales se intersecten? En esta situación es posible una colisión entre las estrellas?

Solución

Vamos a asumir, sin pérdida de la generalización, que $m_1 > m_2$. La situación en el caso límite está representada por la imagen abajo:

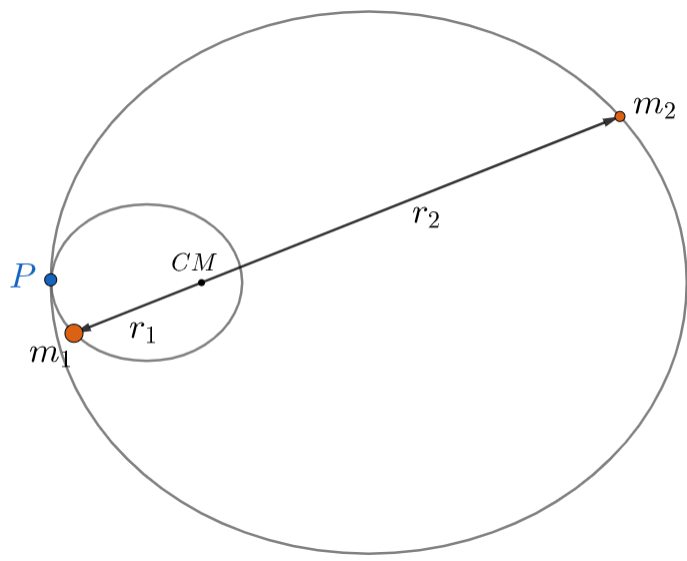


Figura 7.8: Situación límite

Se puede notar que, en esa situación, la distancia de CM al apoastro de la órbita de m_1 es idéntica a la distancia de CM al periastro de la órbita de m_2 . Así:

$$a_1(1 + e_1) = a_2(1 - e_2)$$

Sin embargo, acabamos de ver que $e_1 = e_2 = e_{min}$. Así:

$$e_{min} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}$$

No obstante, ya vimos que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}$. De este modo:

$$e_{min} = \frac{\frac{a_2}{a_1} - 1}{\frac{a_2}{a_1} + 1} \Rightarrow \boxed{e_{min} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}$$

Ahora, respondiendo a la segunda pregunta, es imposible tener una colisión, visto que siempre que uno de los cuerpos esté en el punto de intersección, el otro estará del otro lado del centro de masa.

Finalmente, vale la pena resaltar que en caso de que la excentricidad fuese mayor que la excentricidad mínima, las órbitas serían parecidas con:

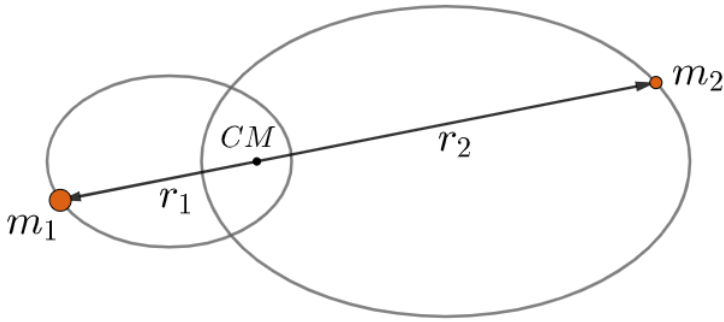


Figura 7.9: Cuando $e > e_{min}$

Aprendemos en las últimas secciones las principales características relacionadas a la dinámica de sistemas binarios (o de estrellas con exoplanetas). En caso de que quisiéramos ir un poco más allá (e.g. encontrar la velocidad de cada estrella en un punto cualquiera), precisaríamos utilizar un concepto conocido como órbita relativa, que infelizmente supera el alcance de este libro. Ahora, estudiaremos los 4 tipos principales de sistemas binarios.

7.4 Inclinación orbital

Antes de comenzar a estudiar los sistemas binarios, vamos a ver un concepto extremadamente relevante para lo que veremos en breve. Cuando miramos al cielo, es esperado que la mayoría de los objetos, e.g. galaxias, no estén alineados con nuestra línea de visión. En este ámbito, la inclinación orbital i es el ángulo entre la línea de visión y el vector normal (perpendicular) a la órbita/superficie, así como puede ser observado en la imagen abajo.

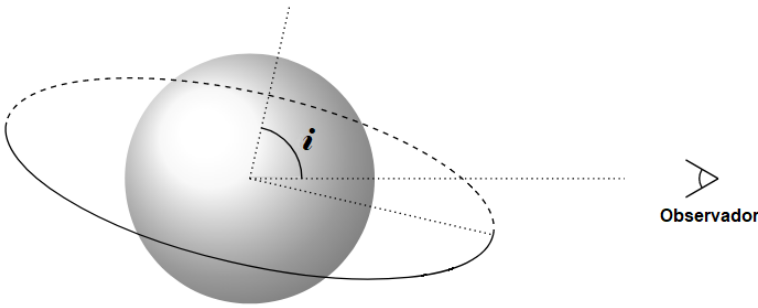


Figura 7.10: Inclinación orbital i

Cuando $i = 90^\circ$ / $i = 0^\circ$, llamamos la órbita “edge-on” / “face-on”, respectivamente.



Figura 7.11: Ejemplo de galáxia edge-on (NGC 891)



Figura 7.12: Ejemplo de galáxia face-on (M74)

Algunas aplicaciones importantes de este concepto son:

- El hecho de que un círculo inclinado en relación a la línea de visión sea visto como una elipse;
- Obtención de la velocidad total a partir de la velocidad radial;
- Determinación de las condiciones en que un sistema es eclipsante;
- Cálculo de la duración de un eclipse.

El siguiente problema ilustra la primera y segunda aplicaciones:

Ejemplo 3

Un exoplaneta de masa despreciable con relación a la masa de su estrella realiza una órbita circular parecida con lo que está representado en la figura abajo. Algunos científicos en la Tierra consiguieron medir los ángulos representados por los semiejes mayor y menor de la órbita observada, α y β , la velocidad radial máxima del exoplaneta, v_{r-max} , y su paralaje p . Solamente con estos datos, encuentre el período de la órbita y la masa de la estrella. Considere la velocidad radial del centro de masa del sistema como nula⁶.

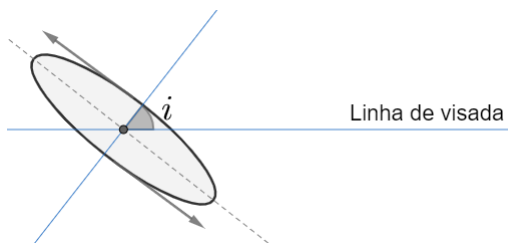


Figura 7.13: Ejemplo 3

⁶Esta podría ser causada por la expansión del universo (i.e. Ley de Hubble), por ejemplo.

Solución

La primera cosa a notar es que, de acuerdo con la primera aplicación vista, los científicos verán una órbita elíptica del exoplaneta en torno al centro de masa. La imagen abajo ilustra esta situación:

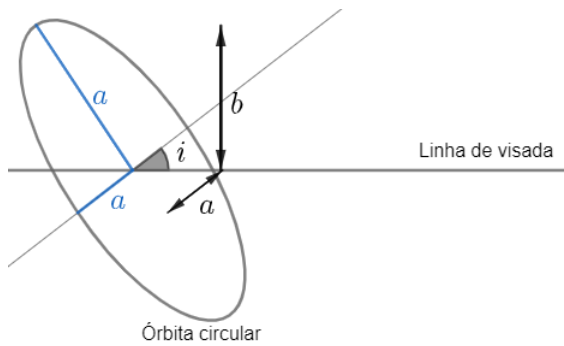


Figura 7.14: Solución ejemplo 3

Siendo a el radio de la órbita circular del exoplaneta, se puede percibir que ¡el semieje mayor de la elipse observada también vale a ! Por otro lado, el semieje menor b es la componente proyectada de a perpendicularmente a la línea de visión. Observe el triángulo formado:

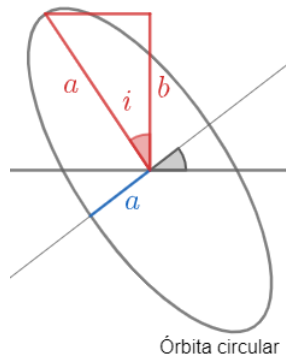


Figura 7.15: Solución ejemplo 3

De este modo, tenemos:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$

A partir del paralaje p , podemos encontrar la distancia d hasta el sistema:

$$d[pc] = \frac{1}{p['']}$$

Así, podemos encontrar a y b como función de d , α y β :

$$a = \alpha d$$

y

$$b = \beta d$$

O sea, ¡podemos encontrar la inclinación orbital i ! Ahora, note que el módulo de la velocidad radial es máximo cuando el exoplaneta pasa sobre el plano de visión. En ese punto, la velocidad hace un ángulo de $90^\circ - i$ con la línea de visión, así como se puede observar en la figura abajo. De este modo, podemos encontrar una relación entre v_{r-max} y la velocidad v del exoplaneta en torno de la estrella en el referencial de la estrella:

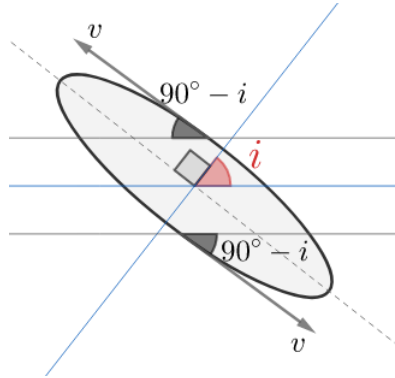


Figura 7.16: Encontrando la velocidad radial

$$v_{r-max} = v \cos(90^\circ - i) = v \sin i$$

Pero como tenemos i , podemos encontrar v . Ahora, note que $v = \frac{2\pi a}{P}$, donde P es el período de la órbita. Así:

$$P = \frac{2\pi a}{v} \Rightarrow P = \frac{2\pi \alpha d \sin i}{v_{r-max}}$$

Sabemos que $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$, por lo tanto:

$$M = \frac{v^2 a}{G} \Rightarrow M = \frac{v_{r-max}^2 \alpha d}{G \sin^2 i}$$

Ahora, vamos a ver un problema en que la velocidad radial del centro de masa no puede ser despreciada:

Ejemplo 4

Científicos calcularon las velocidades radiales máxima y mínima, v_a y v_b , respectivamente, de la rotación de una galaxia espiral aproximadamente circular con inclinación orbital i . Sabiendo que la galaxia posee velocidad de rotación angular uniforme ω , calcule su radio R y su distancia d hasta la Tierra.

Pista: la velocidad radial de un punto que dista d de la Tierra es $v_r = H_0 d$, donde H_0 es la constante de Hubble (esto solo es válido para d muy grande).

Solución

Vamos primeramente a analizar el caso simplificado en que $i = 90^\circ$, o sea la galaxia es edge-on. La imagen abajo representa esa situación:

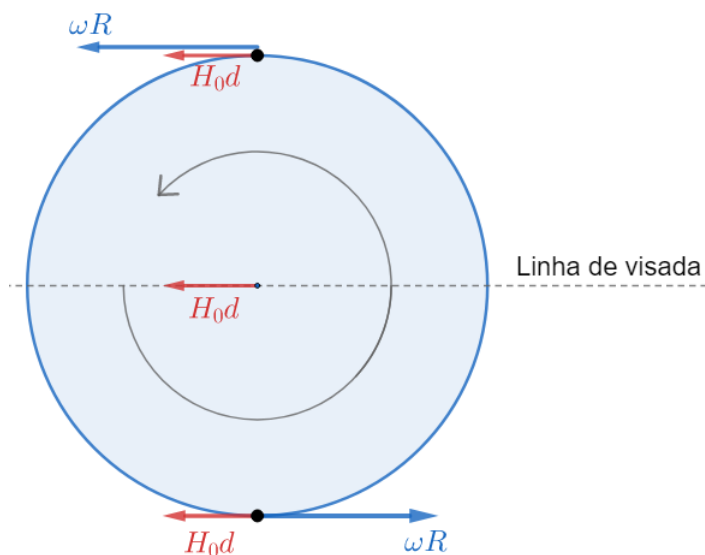


Figura 7.17: Caso simplificado en que $i = 90^\circ$

Se puede percibir que el punto superior es donde la velocidad radial es máxima (v_a) y que el punto inferior es donde la velocidad radial es mínima (v_b). Vale la pena destacar que, en caso que la velocidad radial v_c del centro de la galaxia hubiese sido dada, bastaría con utilizar $v_c = H_0 d$ para encontrar la distancia. De este modo:

$$v_a = H_0 d + \omega R$$

y

$$v_b = H_0 d - \omega R$$

Sumando las ecuaciones, obtenemos:

$$v_a + v_b = 2H_0 d \Rightarrow d = \frac{v_a + v_b}{2H_0}$$

Por otro lado, haciendo $v_a - v_b$, tenemos:

$$v_a - v_b = 2\omega R \Rightarrow R = \frac{v_a - v_b}{2\omega}$$

Que son los valores buscados en el caso en que $i = 90^\circ$. Note que la única diferencia de esta situación para el caso general es que en el caso general solamente una componente de la velocidad de rotación de la galaxia es radial. La imagen abajo representa la geometría necesaria para encontrar la componente radial:

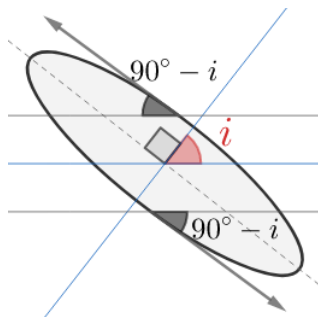


Figura 7.18: Encontrando la componente radial de la velocidad

Como el ángulo entre ωR y la línea de visión es de $90^\circ - i$, tenemos que la componente radial de ωR es $v_r = \omega R \cos(90^\circ - i) = \omega R \sin i$. Así:

$$v_a = H_0 d + \omega R \sin i$$

y

$$v_b = H_0 d - \omega R \sin i$$

Sumando las ecuaciones, tenemos:

$$d = \frac{v_a + v_b}{2H_0}$$

Por otro lado, substrayéndolas:

$$R = \frac{v_a - v_b}{2\omega \sin i}$$

7.5 Binarias Visuales

Un sistema binario es llamado visual cuando ambas estrellas son visibles. En estos casos, es posible encontrar las masas individuales de cada estrella. Vamos a analizar una situación en que ambas órbitas son circulares, así como está representado en la figura abajo:

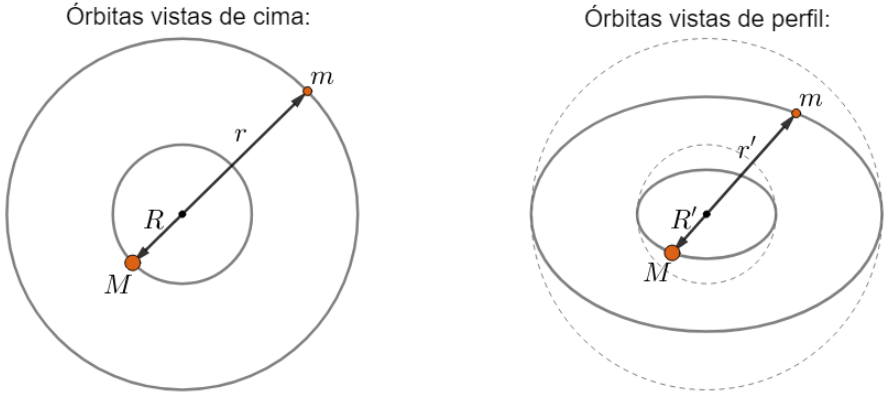


Figura 7.19: Binarias visuales

A partir de observaciones, conseguimos encontrar las siguientes informaciones del sistema:

- El período P del sistema;
- Los ángulos comprendidos por los semiejes mayor y menor de las órbitas 1 (M) y 2 (m): α_1 , β_1 , α_2 y β_2 , respectivamente;
- La distancia d hasta el sistema (por paralaje, p.ex.).

De manera parecida con lo que hicimos en el Ejemplo 3, podemos encontrar la inclinación orbital i :

$$\cos i = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \boxed{\cos i = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}}$$

Donde $b_1 = \beta_1 d$, $b_2 = \beta_2 d$, $a_1 = \alpha_1 d$ y $a_2 = \alpha_2 d$.

Ahora, note que $R = a_1$ y $r = a_2$. De este modo, podemos encontrar la razón entre las masas a través de la ecuación del centro de masa:

$$\frac{M}{m} = \frac{r}{R} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{m} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Por fin, necesitamos utilizar la Tercera Ley de Kepler de sistemas binarios par encontrar las masas individuales:

$$\frac{P^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \Leftrightarrow M+m = \frac{4\pi^2(R+r)^3}{GP^2}$$

Como $R = \alpha_1 d$, $r = \alpha_2 d$ y $m = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} M$, podemos encontrar M :

$$M + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} M = \frac{4\pi^2 d^3 (\alpha_1 + \alpha_2)^3}{GP^2}$$

Por lo tanto:

$$M = \frac{4\pi^2 d^3 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{GP^2}$$

Análogamente para m :

$$m = \frac{4\pi^2 d^3 \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{GP^2}$$

7.6 Binarias Astrométricas

Cuando solamente una de las estrellas de un sistema binario puede ser observada, este recibe el nombre de astrométrico. Note que lo que veremos también es válido para estrellas con exoplanetas, visto que es muy difícil observar un exoplaneta.

Cuando miramos para el cielo, es esperado que, ignorando efectos de paralaje (que es despreciable para distancias muy grandes), la posición de una estrella varíe continuamente (movimiento propio). Sin embargo, en caso que la estrella también esté oscilando en torno de un punto que se mueve de acuerdo con el movimiento propio, esto puede sugerir que hay otro cuerpo interactuando gravitacionalmente con ella, caracterizando un sistema binario o un exoplaneta. La imagen abajo representa esto:

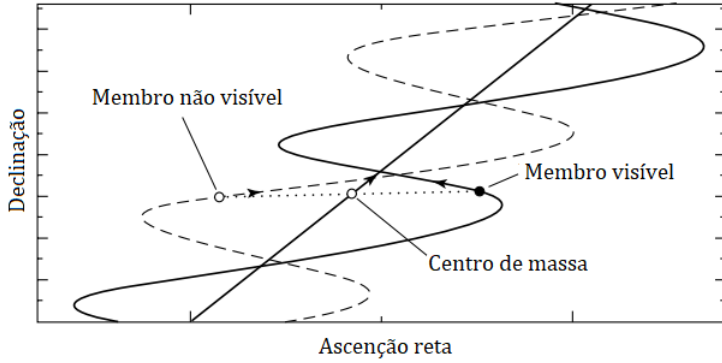


Figura 7.20: Binarias astrométricas

Es posible “sustraer” el movimiento propio del movimiento del miembro visible, lo que resultaría en una órbita observada parecida con aquellas que estudiamos en las últimas secciones. Vamos a estudiar cuantitativamente una situación en que las órbitas del sistema binario son circulares. A partir de observaciones, es posible encontrar:

- La distancia d hasta el sistema (por paralaje, p.ex.);
- La masa M de la estrella visible⁷;
- El ángulo comprendido por el semieje mayor de la órbita observada de la estrella, α ;
- El período P del sistema.

Veremos que es posible encontrar la masa m de la componente no visible (que puede ser una estrella o un exoplaneta). Como ya vimos, el radio R de la órbita de la estrella visible es:

$$R = \alpha d$$

Por la Tercera Ley de Kepler para sistemas binarios:

$$\frac{P^2}{(R + r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

Por la ecuación del centro de masa:

$$MR = mr$$

⁷Podemos medir el flujo de la estrella en la Tierra. Como tenemos su distancia hasta nosotros, podemos encontrar su luminosidad. A partir de esto, podemos utilizar relaciones entre la luminosidad y la masa de las estrellas para encontrar su masa, así como vimos en el capítulo 3.

Con estas ecuaciones en mano, podemos encontrar una expresión que involucre m y las otras variables. Substituyendo r de la ecuación del centro de masa en la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{P^2}{R^3 \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

Reescribiendo:

$$\frac{m^3}{(M + m)^2} = \frac{4\pi^2 \alpha^3 d^3}{GP^2}$$

Note que no es fácil aislar m como función de las demás variables, una vez que tal ecuación es una cúbica. Sin embargo, es posible resolverla por iteración, pero esto supera el alcance de este libro.

7.7 Binarias Espectroscópicas

Las binarias espectroscópicas son sistemas en que analizamos el espectro de dos estrellas para determinar sus parámetros. Trataremos la situación en que $i = 90^\circ$ y ambas órbitas son circulares, que es el caso más clásico. Observe las dos imágenes abajo:

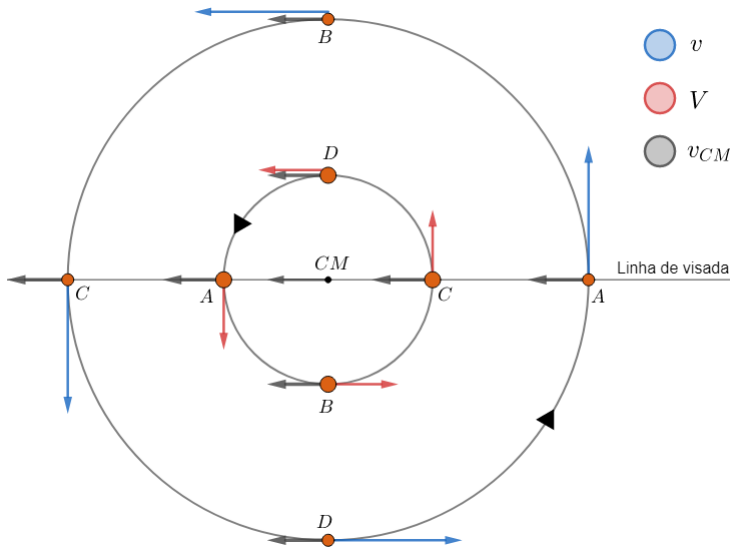


Figura 7.21: v y V son las velocidades de m y M en el referencial de CM , respectivamente. La velocidad total es la suma vectorial de v_{CM} con la velocidad en el referencial de CM

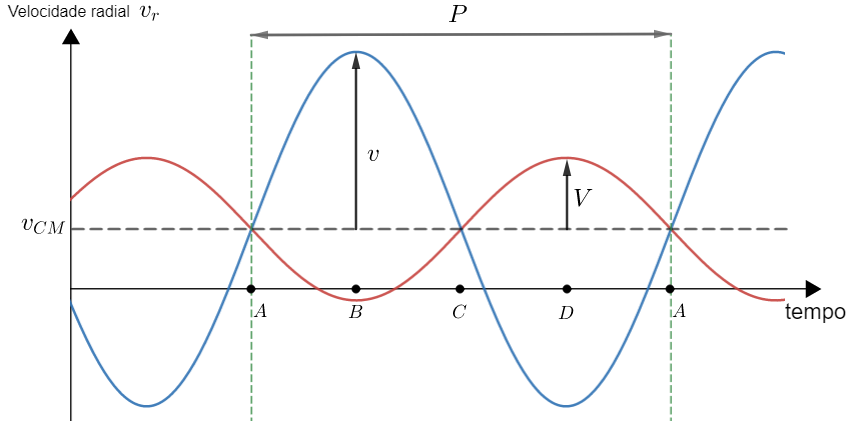


Figura 7.22: Gráfico de la velocidad radial para m (azul) y M (rojo)

Desde la Tierra, es posible determinar el gráfico de la figura 7.22 calculando el redshift de las estrellas en diversos instantes de tiempo. Con este, es inmediato encontrar v_{CM} (velocidad cuando las curvas se interceptan), v y V (representados en el gráfico) y el período P del sistema. Con estas informaciones, es posible encontrar m , M , r , y R , como veremos ahora.

Como las órbitas son circulares, tenemos que es posible encontrar r y R por:

$$v = \frac{2\pi r}{P} \Rightarrow \boxed{r = \frac{vP}{2\pi}}$$

y

$$V = \frac{2\pi R}{P} \Rightarrow \boxed{R = \frac{VP}{2\pi}}$$

Ahora, por la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{P^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

Por la ecuación del centro de masa:

$$MR = mr$$

Juntando estas dos expresiones, podemos encontrar M :

$$M + m = M \left(\frac{r+R}{r} \right) = \frac{4\pi^2(R+r)^3}{GP^2}$$

Así:

$$M = \frac{4\pi^2 r(R+r)^2}{GP^2}$$

Ya para m , tenemos:

$$m = \frac{4\pi^2 R(R+r)^2}{GP^2}$$

Vamos a ver una aplicación práctica de esto en el ejemplo abajo.

Ejemplo 5

Un estudiante analiza el espectro de la línea de absorción Sodio D1 (longitud de onda en reposo de 5895,5 Å) de cada estrella de un sistema binario edge-on. Debido al movimiento relativo de las estrellas con relación a la Tierra, las longitudes de onda observadas sufren redshift y se alteran. Vea los datos recolectados para la longitud de onda del espectro de absorción de la línea Sodio D1:

Comprimento de onda de cada estrela na linha Sódio D1

t/días	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/días	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

Figura 7.23: Ejemplo 5

Utilizando los valores de la tabla, determine:

- a) Las velocidades v_1 y v_2 de cada estrella;
- b) La razón entre las masas de las estrellas, $\frac{m_1}{m_2}$, y la razón entre los radios de sus órbitas, $\frac{r_2}{r_1}$;
- c) La distancia r entre las estrellas;
- d) Las masas individuales de cada estrella, m_1 y m_2 .

Solución

a) La primera cosa a analizar es la variación temporal de las longitudes de onda. Mirando los valores de la tabla, es posible identificar un patrón sinusoidal, pero, por fines didácticos, la imagen abajo es un gráfico de λ de cada estrella (rojo $\rightarrow$ 1, azul $\rightarrow$ 2) entre $t = 0,3$ y $t = 2,4$. La recta morada representa la longitud de onda de reposo, $5895.5\text{\AA}$.

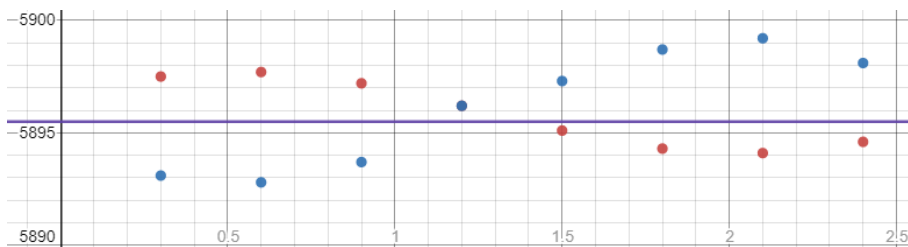


Figura 7.24: Plot de las longitudes de onda

Note que tal comportamiento se da pues las estrellas, que poseen velocidad constante, no poseen la velocidad apuntando directamente para nosotros a lo largo de sus órbitas, entonces la componente radial de la velocidad varía continuamente. De este modo, se puede observar que los puntos de mínimo y máximo en el gráfico arriba son cuando la velocidad de la estrella está en la dirección radial y esta se está aproximando (mínimo) o alejándose (máximo) de nosotros.

Para la estrella 1:

$$\begin{cases} \lambda_{max1} = 5897,7\text{\AA} \\ \lambda_{min1} = 5894,1\text{\AA} \end{cases}$$

Ya para la estrella 2:

$$\begin{cases} \lambda_{max2} = 5899,0\text{\AA} \\ \lambda_{min2} = 5892,8\text{\AA} \end{cases}$$

Con esto, vamos a calcular v_1 . Siendo v_{CM} la velocidad del centro de masa, tenemos para el punto de velocidad radial máxima:

$$v_{CM} + v_1 = c \left(\frac{\lambda_{max1}}{\lambda_0} - 1 \right)$$

Ya para el punto de velocidad radial mínima:

$$v_{CM} - v_1 = c \left(\frac{\lambda_{min1}}{\lambda_0} - 1 \right)$$

Subtrayendo estas ecuaciones, tenemos:

$$v_1 = \frac{c}{2\lambda_0} (\lambda_{max1} - \lambda_{min1}) = 9,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Realizando los mismos cálculos para la estrella 2, obtenemos:

$$v_2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

b) Sabemos que las estrellas orbitan el centro de masa común, por lo tanto:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1} = 1,7$$

c) Analizando el gráfico, vemos que el período P del sistema binario es cerca de tres días. Ahora, como $v_i = \frac{2\pi r_i}{P}$, tenemos, para el cuerpo 1:

$$r_1 = \frac{v_1 P}{2\pi} = 3,8 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Ya para el cuerpo 2:

$$r_2 = \frac{v_2 P}{2\pi} = 6,5 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Note también que la razón $\frac{r_2}{r_1}$ es próxima a aquella calculada en el item b), como es esperado.

Así, la distancia r entre las estrellas es de $r = r_1 + r_2 = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ m}$

d) Por la tercera ley de Kepler:

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \Rightarrow m_1 + m_2 = 9,6 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Calculamos la razón $\frac{m_1}{m_2} = 1,72 = k$ en el item b), por lo tanto, siendo $M = m_1 + m_2$:

$$M = m_1 + m_2 = m_2(1 + k) \Rightarrow m_2 = \frac{M}{1 + k} = 3,5 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

y

$$m_1 = k m_2 = 6,1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

7.8 Binarias Eclipsantes

En las binarias visuales y astrométricas, nuestros datos son recolectados a partir de observaciones. Ya en las binarias espectroscópicas, analizamos el espectro de las estrellas. Ahora, en las binarias eclipsantes, utilizamos las curvas de luz del sistema binario para identificar los parámetros de las estrellas.

Antes de estudiar la situación en la que hay un eclipse, vamos a aprender a calcular la **magnitud combinada** de un sistema binario. El siguiente ejemplo ilustra este concepto:

Ejemplo 6

En un sistema binario, las magnitudes de las estrellas son $m_1 = 2,0$ y $m_2 = 3,0$. Calcule la magnitud mínima de este sistema, esto es, la magnitud combinada del sistema binario.

Solución

La condición de magnitud mínima es satisfecha cuando ambas componentes están visibles, esto es, cuando no hay eclipse. En esta situación, siendo F_1 y F_2 los flujos individuales de cada estrella, tenemos que el flujo combinado F_{comb} será:

$$F_{comb} = F_1 + F_2$$

Por Pogson, la magnitud combinada m_{comb} es de:

$$m_{comb} - m_1 = -2,5 \log \frac{F_{comb}}{F_1} = -2,5 \log \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \right)$$

Podemos encontrar la razón de los flujos aplicando Pogson entre las estrellas individuales:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 10^{-0,4}$$

Por lo tanto:

$$m_{comb} = m_1 - 2,5 \log \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \right) = 2 - 2,5 \log (1 + 10^{-0,4}) = \boxed{1,64}$$

En este problema, el flujo que llega a la Tierra, F_c , fue fácilmente calculado sumando los flujos de las estrellas individuales, al final no había ninguna ocultación.

7.8.1 Flujos

Cuando miramos para el cielo, algunas estrellas aparentan variar sus brillos periódicamente. De hecho, existen estrellas que se expanden y contraen periódicamente de forma que sus brillos varíen periódicamente - las cefeidas, por ejemplo. Sin embargo, otra explicación para tal comportamiento es la presencia de un sistema binario (o de un exoplaneta). Cuando un sistema binario posee inclinación orbital i muy próxima a 90° se puede observar que las estrellas pasan una al frente de la otra durante un período de tiempo, resultando en tales alteraciones de flujo.

Antes de todo, es importante definir los dos tipos de eclipses que ocurren en un período:

- Eclipse primario: mayor caída en el brillo
- Eclipse secundario: menor caída en el brillo

Vamos a analizar el caso general: tenemos dos estrellas de radios R_1 y R_2 (donde $R_1 > R_2$) y temperaturas T_1 y T_2 . Considerando la inclinación orbital como $i = 90^\circ$, vamos a calcular los flujos en tres situaciones:

- (a) Ambas estrellas están completamente visibles;
- (b) La estrella 2 está detrás de la estrella 1;
- (c) La estrella 2 está al frente de la estrella 1.

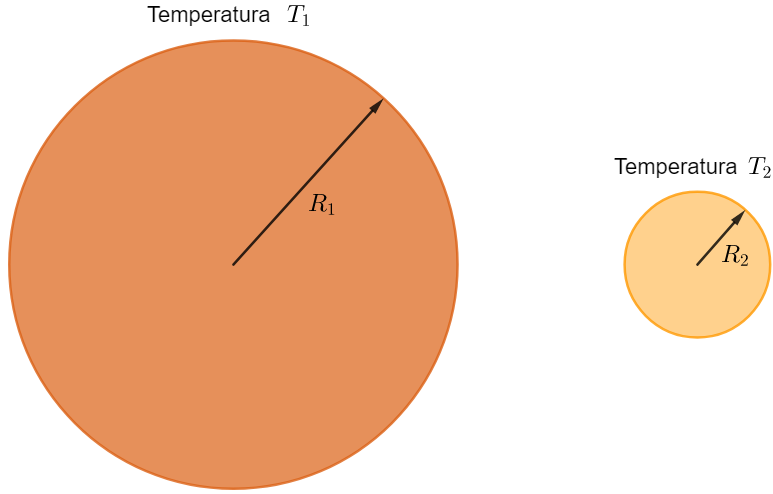


Figura 7.25: Estrellas del sistema binario

La primera situación es idéntica a aquella del Ejemplo 6. El flujo F_a en esta situación es, por la Ley de Stefan-Boltzmann:

$$F_a = F_1 + F_2 = k(R_1^2 T_1^4 + R_2^2 T_2^4)$$

En la segunda situación, se puede notar que la luz de la estrella 2 no llega a la Tierra, o sea, el flujo F_b es:

$$F_b = F_1 = kR_1^2 T_1^4$$

Ya en la tercera situación, podemos calcular el flujo F_c considerando que el brillo superficial de las estrellas es constante, o sea, el flujo es **proporcional al área visible**. De este modo, F_c puede ser interpretado como el flujo total de la estrella 1 substrayendo del flujo de una estrella de radio R_2 y temperatura T_1 y sumando el flujo de la estrella 2 (es como si estuviésemos cambiando un pedazo de radio R_2 de la estrella 1 por la estrella 2)⁸. Así:

$$F_c = k(R_1^2 T_1^4 - R_2^2 T_1^4 + R_2^2 T_2^4)$$

Con estos valores, es posible encontrar la razón entre las temperaturas de las estrellas en caso que F_a , F_b y F_c sean conocidos. Note:

$$F_a - F_b = kR_2^2 T_2^4$$

y

⁸En caso que un exoplaneta estuviese pasando al frente de la estrella grande (en vez de una estrella), bastaría considerar $T_2 \approx 0$.

$$F_a - F_c = kR_2^2 T_1^4$$

Dividiendo la ecuación de abajo por la de arriba:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{F_a - F_c}{F_a - F_b}$$

Por fin, también podemos encontrar una relación entre los radios. Note que:

$$F_a - F_c = kR_2^2 T_1^4$$

Como $F_b = kR_1^2 T_1^4$, tenemos:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{F_a - F_c}{F_b}$$

Con estas ecuaciones en mente, podemos finalmente analizar las curvas de luz de sistemas binarios. Existen dos casos: cuando la estrella mayor es más fría/más caliente que la estrella menor. El enunciado de la pregunta siempre indicará (muchas veces, indirectamente) cuál de las situaciones es la correcta. Vamos a analizar solamente la primera de ellas, visto que lo otro es análogo. Así, la curva de luz cuando la estrella mayor es más fría está representada abajo:

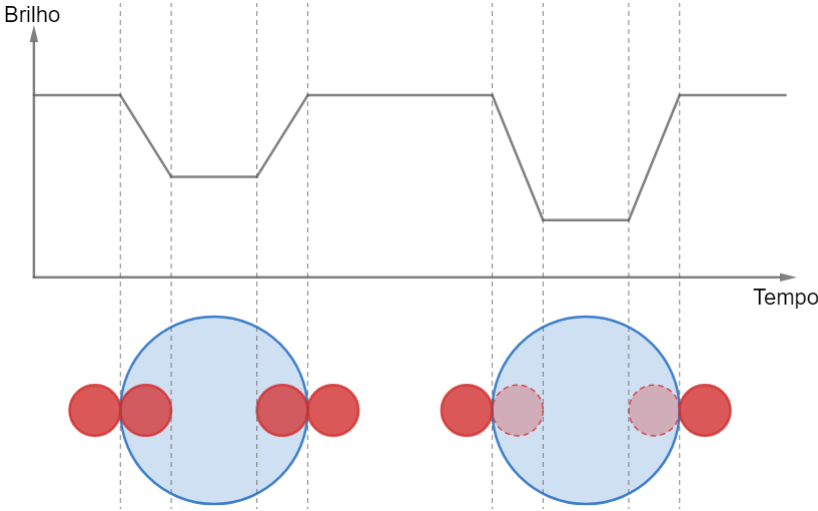


Figura 7.26: Estrella mayor más fría

Se puede notar que el eclipse secundario (mayor flujo) ocurre cuando la estrella menor pasa en frente de la estrella mayor. Esto ocurre porque cuando la estrella menor pasa por detrás de la estrella mayor, obtenemos el flujo apenas

de la estrella fría, mientras que cuando la estrella menor pasa al frente, estamos “substituyendo” un pedazo frío por un pedazo caliente del mismo tamaño, o sea, se tiene un flujo mayor.

Siendo F_0 el flujo sin eclipse, F_P el flujo en el eclipse primario y F_S el flujo en el eclipse secundario, podemos realizar las siguientes comparaciones:

$$\begin{cases} F_0 = F_a \\ F_P = F_b \\ F_S = F_c \end{cases}$$

En caso de que la estrella mayor fuese más caliente, tendríamos $F_P = F_c$ e $F_S = F_b$.

Vale la pena destacar que, en la práctica, las curvas de luz en las regiones “intermedias” (cuando la estrella menor todavía no está completamente contenida en la región de la estrella mayor) no están compuestas por líneas rectas. Esto ocurre debido a un fenómeno conocido como oscurecimiento del limbo, que hace que el brillo superficial sea menor próximo al contorno de la estrella.

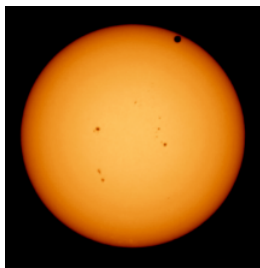


Figura 7.27: Oscurecimiento del limbo

7.8.2 Intervalos de Tiempo

Acabamos de ver que es posible encontrar la razón entre las temperaturas y los radios de las estrellas de un sistema binario analizando los flujos de la curva de luz. Ahora, vamos a calcular la razón entre los radios de cada componente analizando algunos intervalos de tiempo de los eclipses. Esta vez, no hay distinción sobre si la estrella mayor es más caliente o más fría que la menor.

Dos intervalos de tiempo son interesantes:

- T : intervalo en que el flujo deja de ser máximo;
- t : intervalo en que el flujo es mínimo.

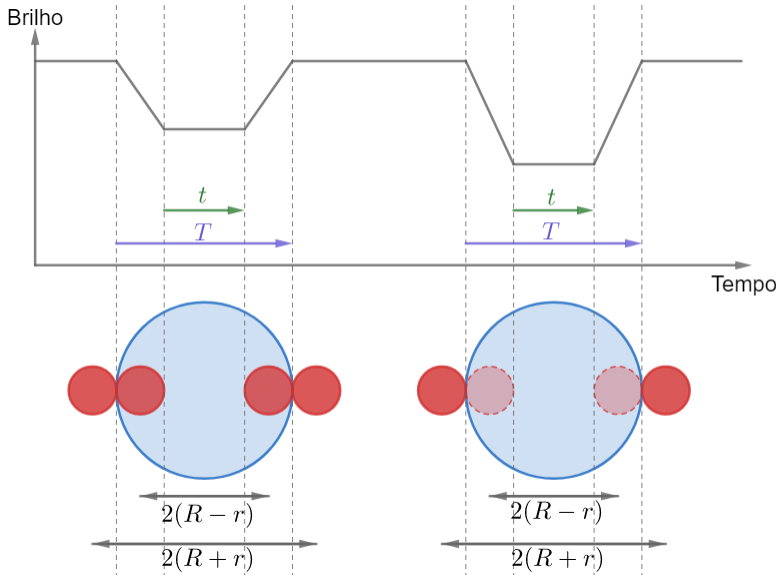


Figura 7.28: Intervalos de tempo

Note que T começa quando a estrela menor “toca” a estrela maior e termina quando ela deixa de tocar a estrela maior. Desse modo, a distância percorrida por qualquer ponto da estrela menor (e.g. seu centro) durante T é $\Delta S = r + 2R + r = 2(R + r)$. Por outro lado, t começa quando a estrela menor está completamente imersa na região da estrela maior e termina quando ela deixa de estar completamente em tal região. Assim, a distância percorrida por seu centro durante t é $\Delta s = 2(R - r)$. Com isso, podemos fazer⁹:

$$\Delta S = v_{rel}T \Rightarrow T = \frac{2(R + r)}{v_{rel}}$$

e

$$\Delta s = v_{rel}t \Rightarrow t = \frac{2(R - r)}{v_{rel}}$$

Onde v_{rel} é a velocidade relativa entre as estrelas, i.e. a soma das velocidades individuais das estrelas em relação ao CM. Agora, dividindo as equações:

$$\frac{T}{t} = \frac{R + r}{R - r}$$

Chamando $k = \frac{T}{t}$, temos:

⁹Rigorosamente, deveríamos analisar grandezas angulares, como o ângulo percorrido pela estrela menor e a velocidade angular relativa entre as estrelas, porém, para grandes distâncias, o que estamos fazendo é válido. Além disso, note que estamos tratando do caso em que a inclinação i é exatamente ou muito próxima de 90° .

$$k(R - r) = R + r \Rightarrow R(k - 1) = r(k + 1) \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{k + 1}{k - 1}$$

Por fim:

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{T + t}{T - t}}$$

O seguinte exemplo ilustra o que vimos até agora:

Exemplo 7

A curva de luz abaixo é de um sistema binário fictício com estrelas X e Y . Considerando que a estrela X é mais brilhante, mas Y é mais quente, calcule:

- $\frac{R_X}{R_Y}$, a razão entre os raios das estrelas.
- $\frac{L_X}{L_Y}$, a razão entre as luminosidades das estrelas.
- $\frac{T_X}{T_Y}$, a razão entre as temperaturas das estrelas.

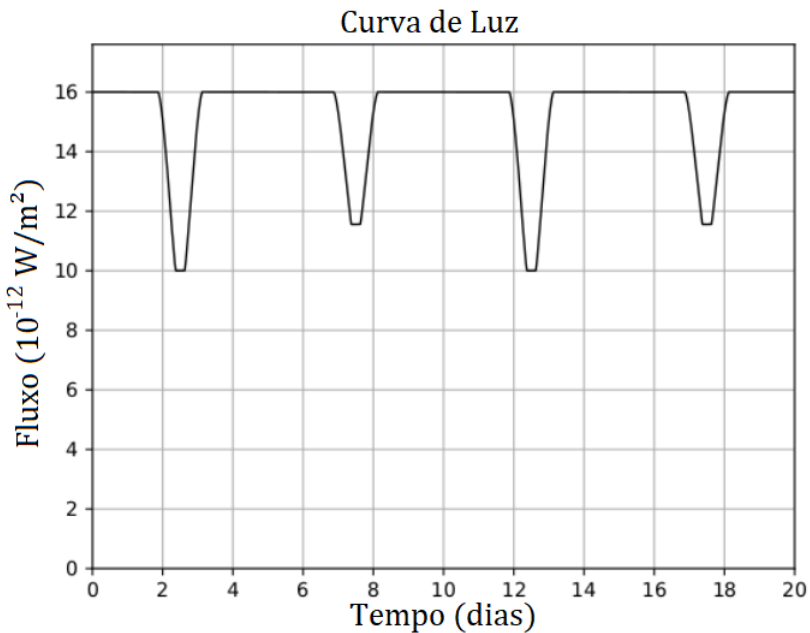


Figura 7.29: Exemplo 7

Solução

a) Antes de tudo, qual das estrelas é maior? O enunciado nos deu que $L_X > L_Y$ e que $T_X < T_Y$, logo, utilizando a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L_X > L_Y \Leftrightarrow R_X^2 T_X^4 > R_Y^2 T_Y^4$$

Note que essa inequação só pode ser satisfeita se $R_X > R_Y$.

Agora, analisando o gráfico, obtemos $T = 1,25$ dias e $t = 0,25$ dias (medições feitas com régua). Desse modo, basta aplicarmos a fórmula recém-deduzida:

$$\frac{R_X}{R_Y} = \frac{T + t}{T - t} = 1,5$$

Ainda, poderíamos ter obtido o mesmo resultado analisando os fluxos. Perceba que $F_a = 16 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$, $F_b = 10 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ e $F_c = 11,5 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$, ou seja:

$$\left(\frac{R_Y}{R_X} \right)^2 = \frac{F_a - F_c}{F_b} = 0,45$$

Ou seja, $\frac{R_X}{R_Y} = 1,49$. Em uma prova, ambas as respostas (1,5 e 1,49) seriam válidas.

b) Acabamos de ver que a estrela X é maior e mais fria, então a situação é idêntica àquela estudada anteriormente nesta seção. Assim, temos:

$$F_a = F_X + F_Y = 16 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

e

$$F_b = F_X = 10 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Vale lembrar que a maior queda no fluxo ocorre quando a estrela Y está atrás da estrela X . Como temos F_X e a soma $F_X + F_Y$, é fácil encontrar F_Y :

$$F_X + F_Y = 16 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2 \Rightarrow F_Y = (16 - 10) \cdot 10^{-12} = 6 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Como ambas as estrelas estão essencialmente à mesma distância da Terra:

$$\frac{L_X}{L_Y} = \frac{F_X}{F_Y} = \frac{10}{6} = 1,67$$

c) Como sabemos a razão entre as luminosidades e os raios, basta utilizarmos a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{L_X}{L_Y} = \left(\frac{R_X}{R_Y} \right)^2 \left(\frac{T_X}{T_Y} \right)^4 \Rightarrow \frac{T_X}{T_Y} = \left(\frac{L_X}{L_Y} \left(\frac{R_Y}{R_X} \right)^2 \right)^{1/4}$$

Fazendo as devidas contas, temos:

$$\frac{T_X}{T_Y} = \boxed{0,93}$$

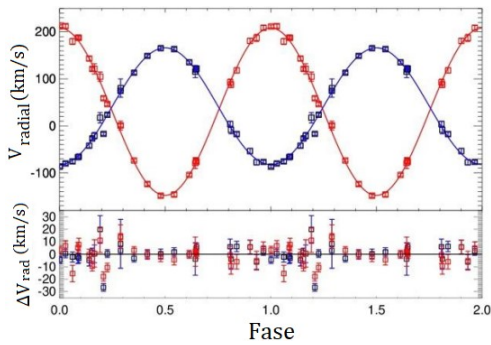
Ainda, é possível encontrarmos esse mesmo resultado analisando diretamente os fluxos analisados, que nesse caso vimos que são $F_a = 16 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$, $F_b = 10 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ e $F_c = 11,5 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Temos, como já deduzimos anteriormente:

$$\left(\frac{T_X}{T_Y} \right)^4 = \frac{F_a - F_c}{F_a - F_b} = \frac{16 - 11,5}{16 - 10} \Rightarrow \frac{T_X}{T_Y} = \boxed{0,93}$$

Como esperado!

7.9 Problemas

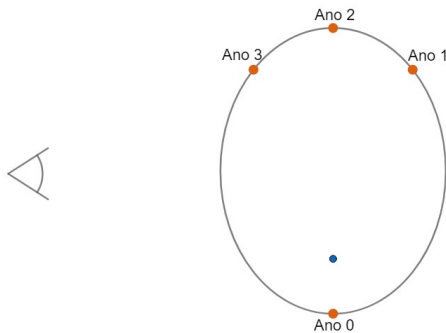
7.1. (Iniciante) (P3 Online/2019) Observações espectroscópicas do sistema binário de anãs brancas WD 1242-105 forneceram as curvas de velocidade radiais apresentadas abaixo.



A curva vermelha representa a componente A, enquanto a azul é da componente B. O que podemos afirmar a respeito das relações entre as velocidades radiais (V), períodos (P) e massas (M)?

- a) $V_A < V_B$, $P_A < P_B$ e $M_A < M_B$
- b) $V_A < V_B$, $P_A = P_B$ e $M_A > M_B$
- c) $V_A > V_B$, $P_A = P_B$ e $M_A < M_B$
- d) $V_A > V_B$, $P_A > P_B$ e $M_A > M_B$

7.2. (Iniciante) (P2 Barra/2019) Considere um sistema binário em que uma estrela no sistema é mais massiva do que a outra. Na figura a seguir vemos a órbita da menos massiva das estrelas ao longo de 4 anos. Ao fim do quarto ano, a estrela está de volta à posição inicial (Ano 0).



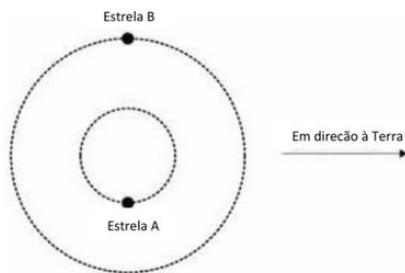
Desenhe as órbitas das duas estrelas vistas perpendicularmente

7.3. (Iniciante) (Prova individual OLAA/2013) Em um sistema binário, as estrelas orbitam ao redor de um ponto em comum. Assuma que ambas emitem uma luz com comprimento de onda de $6,58 \cdot 10^{-7}$ m.

- a) Quando as estrelas estão na configuração mostrada na figura abaixo, o comprimento de onda da luz medida na Terra é $6,58 \cdot 10^{-7}$ m para ambas. Explique o porquê disso.



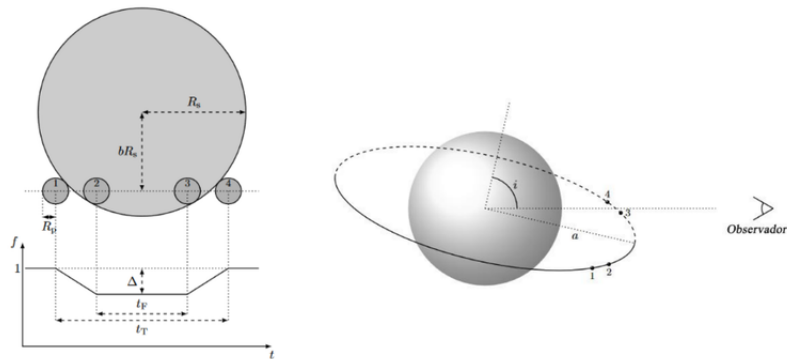
- b) Quando as estrelas estão nas posições mostradas na figura a seguir, o observador na Terra mede dois comprimentos de onda: $6,50 \cdot 10^{-7}$ m para a estrela A e $6,76 \cdot 10^{-7}$ m para a estrela B. Determine a velocidade das estrelas e indique qual está se distanciando e qual está se aproximando de nós.



7.4. (Iniciante) (P2 Online/2020) Considere uma binária visual de órbitas circulares com $i = 0^\circ$. Sabendo que o período é $P = 12,5$ anos, a separação angular máxima vista da Terra é $\alpha = 1,00''$, a paralaxe trigonométrica do sistema é $p = 0,10''$ e que, com relação ao centro de massa, a estrela secundária está a uma distância quatro vezes maior que a distância da estrela primária, calcule a massa de cada componente.

7.5. (Iniciante) (P1 Barra/2020) À medida que um planeta orbita sua estrela hospedeira, para planos orbitais vistos quase de perfil ($i = 90^\circ$), ele passa periodicamente, ou “transita”, em frente ao disco estelar, conforme visto pelo observador. Isso causa uma pequena diminuição no fluxo estelar observado, que pode ser medido.

Os diagramas esquemáticos abaixo (NÃO desenhados em escala) mostram a **curva de luz do trânsito** resultante (fluxo normalizado f versus tempo t) para um disco estelar uniformemente brilhante (à esquerda) e a geometria da perspectiva do observador (à direita).



Se o ângulo de inclinação i for exatamente 90° , o planeta atravessa o disco estelar ao longo do diâmetro. Para outros valores de i , o trânsito ocorre ao longo de uma corda, cujo centro fica a uma distância bR_s do centro do disco estelar, como mostrado. O fluxo sem trânsito está normalizado para 1 e a queda máxima durante o trânsito é dada por Δ .

Considere um trânsito planetário com $i = 90^\circ$ em torno de uma estrela que tem uma mancha estelar no seu equador, comparável ao tamanho do planeta. O período de rotação da estrela é o dobro do período de translação do planeta ($P_e = 2P_p$).

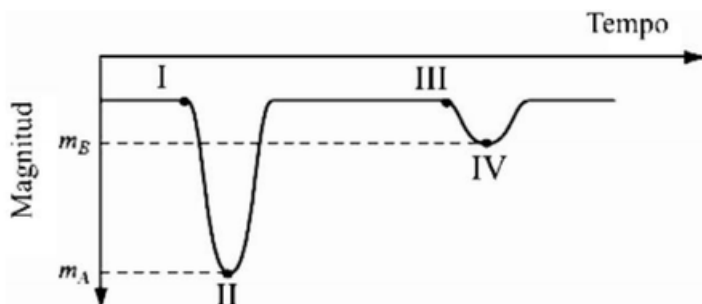
Desenhe os diagramas esquemáticos da curva da luz de trânsito para cinco trânsitos sucessivos do planeta.

O fluxo sem trânsito, para cada trânsito, deve ser normalizado independentemente. Suponha que o planeta não encontre a mancha estelar no primeiro trânsito, mas no segundo, sim.

7.6. (Intermediário) (P1 Vinhedo/2021) Considere um sistema binário a 20,0 pc da Terra em que as duas estrelas possuem órbitas circulares com diâmetros angulares aparentes de $1,50''$ e $0,500''$. Devido ao deslocamento Doppler, para um observador no plano orbital do sistema binário o comprimento de onda central da linha H_α da estrela de menor massa atinge um valor máximo de 656,330 nm. Considere que o comprimento de onda da linha H_α equivale a 656,281 nm quando medido em laboratório. Calcule o período orbital do sistema, em anos.

7.7. (Intermediário) (Prova em Grupo OLAA/2014) A figura mostra a curva de luz de uma binária eclipsante tipo Algol, cujo plano orbital está na direção

da linha de visada. Indicam-se as magnitudes aparentes, m_A e m_B , correspondentes aos mínimos primário e secundário da curva de luz, respectivamente. A profundidade de cada mínimo Δ é definido como a diferença entre a magnitude aparente m_A ou m_B e a magnitude aparente total da binária m_{tot} (quando não há eclipse). Considere que as duas componentes possuem raio R e que as temperaturas efetivas das componentes mais brilhante e mais débil são T_B e T_A , respectivamente.



- a) Faça um esquema das posições relativas entre as duas componentes do sistema, com respeito ao observador, correspondentes aos seguintes pontos da curva de luz:

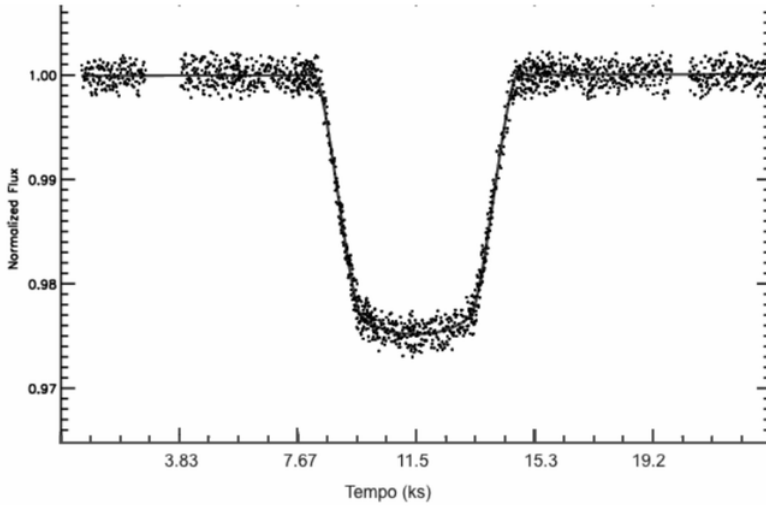
- I. imediatamente antes que se comece a produzir o mínimo primário
- II. quando se alcança o mínimo primário
- III. imediatamente antes que se comece o mínimo secundário e
- IV. quando se alcança o mínimo secundário.

Indique claramente qual é a estrela A e qual é a B.

- b) Encontre uma expressão que relacione a profundidade de cada mínimo da curva de luz com a luminosidade total da binária (L_{tot}) e a luminosidade individual de cada componente (L_A , L_B).
- c) Sabendo que as temperaturas efetivas das componentes são $T_B = 12000\text{ K}$ e $T_A = 5000\text{ K}$, calcule a profundidade Δmag de cada mínimo.

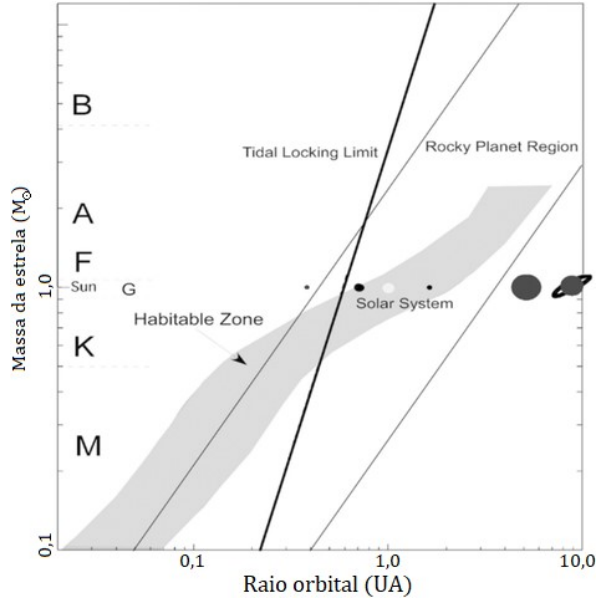
7.8. (Intermediário) (P2 Barra/2017) A Figura abaixo mostra a curva de luz decorrente do trânsito do exoplaneta HD189733b, que orbita uma estrela de tipo espectral K1V com $0,8 M_{\odot}$.

No eixo vertical encontra-se o fluxo normalizado da estrela hospedeira, e no eixo horizontal o tempo. O período orbital do exoplaneta é de 2,218573 dias.



Com base nessas observações, determine:

- O semi-eixo (a) maior da órbita do exoplaneta;
- Sua velocidade orbital v , supondo uma órbita circular;
- A razão r/R entre o raio do exoplaneta (r) e o raio da estrela (R).
- Supondo que a estrela hospedeira tenha $0,85 R_{\odot}$, calcule o raio do exoplaneta (em km). É possível especular qual sua composição mais provável (isto é, gasosa ou rochosa)?
- A figura a seguir mostra em cinza a extensão da zona de habitabilidade circunstelar (ou zona de Goldilocks) para estrelas de diferentes tipos espectrais. No caso de HD189733b, podemos afirmar que ele é um exoplaneta na zona habitável?



7.9. (Avançado) (P1 Barra/2020 adap.) BH Vir é um sistema binário localizado na constelação de Virgem, com paralaxe de $p = 6,70 \text{ mas}$ (milissegundos de arco). O sistema é eclipsante ($i \approx 90^\circ$) e tem órbitas aproximadamente circulares. Sabe-se que a magnitude aparente total do sistema na banda V é de $m_v = 9,64$ e que o raio de cada uma de suas componentes é $R_1 = 1,250 R_{\odot}$ e $R_2 = 1,114 R_{\odot}$. Considere que a estrela 1 é mais massiva e mais fria que a estrela 2.

Abaixo, encontramos os gráficos do fluxo normalizado do sistema e das velocidades radiais v_1 e v_2 de cada componente do binário.

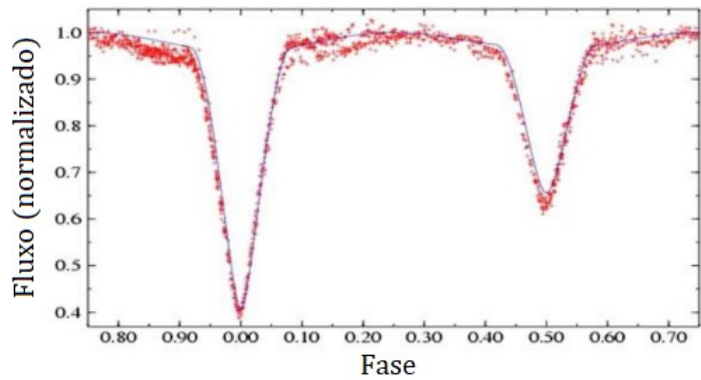


Figura 7.30: Fluxo normalizado

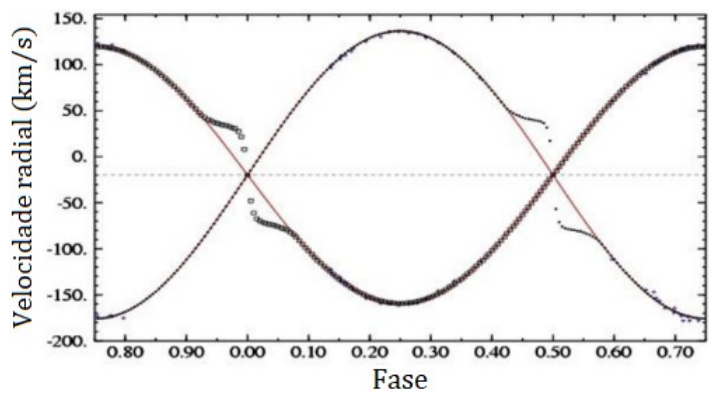


Figura 7.31: Velocidade radial

Utilize os gráficos para, com base neles e nos dados fornecidos:

- a) Calcular, em km/s, a velocidade radial do centro de massa do sistema em relação à Terra. Com base na sua resposta, diga se o sistema binário está se aproximando ou se afastando da Terra.
- b) Calcular a razão entre as massas das componentes;
- c) Calcular a magnitude absoluta $M_{v,1}$ e $M_{v,2}$ de cada uma das componentes na banda V.

7.10. (Avançado) Os pontos de Lagrange de um sistema de duas massas comparáveis M e m ($M > m$) representam posições em que corpos menores podem ficar em repouso em relação às massas maiores, assim como pode ser observado na imagem abaixo. Assim, responda:

- a) Qual a velocidade angular dos pequenos corpos colocados nos pontos de Lagrange? Em torno de que ponto eles giram? Considere que a distância entre M e m é D e que todas as órbitas são circulares.
- b) Qual a distância d do ponto L2 até o centro de m ? Considere $d \ll D$.

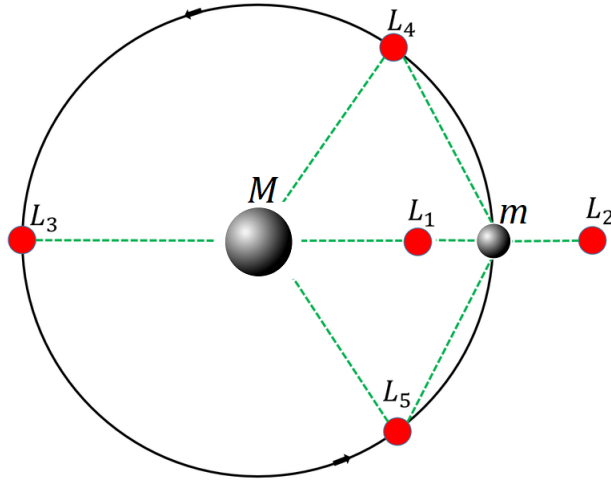


Figura 7.32: Pontos de Lagrange

7.11. (Avançado) (Adaptado Barra 2024) Durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, Hugo observava a estrela Plo I com seu telescópio. Comparando o seu espectro com o de outras estrelas, ele descobre que Plo I é uma estrela de nêutrons e estima sua massa como sendo $M_1 = 2M_\odot$. Ele também observa que Plo I possui variações senoidais em sua velocidade radial ao longo do tempo e conclui que Plo I deve fazer parte de um sistema binário com outro corpo celeste, Plo II. Observando a curva de velocidade de Plo I, Hugo também determina que Plo I possui uma órbita circular de período P e velocidade radial máxima K . Porém, ele não sabe qual é a massa M_2 de Plo II e nem qual é a inclinação i .

- a) A partir da 3ª lei de Kepler e da 2ª lei de Newton, encontre uma expressão para a **função de massa** do sistema binário formado por Plo I e Plo II em termos de P , K e constantes universais. Você pode utilizar que a função de massa é dada por:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

- b) Utilizando suas medidas, Hugo calcula que a função de massa do binário é $f = 46,2M_\odot$. Desejamos encontrar o valor mínimo $M_{2,\min}$ para a massa de Plo II, sabendo que ele corresponde ao caso em que $i = 90^\circ$. Suponha $M_{2,\min} > M_1$. A partir disso, determine $M_{2,\min}$. Seu resultado é condizente com a hipótese? Responda SIM ou NÃO, justificando com cálculos.
- c) Com base em sua resposta do item anterior, conclua: é mais provável que Plo II seja um exoplaneta, uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro?

7.12. (Iniciante) Dado um sistema binário de inclinação i , qual a relação entre os raios das estrelas, R_1 e R_2 , o semi eixo maior a e a inclinação do sistema para que hajam eclipses?

7.13. (Intermediário) Num sistema binário formado pelas estrelas 1 e 2 é edge-on. Temos que $R_1 > R_2$. Qual deve ser a relação entre T_1 e T_2 para que o eclipse principal ocorra quando a estrela 2 passar na frente da estrela 1?

7.14. (Avançado) Considere um sistema de estrelas binárias idênticas, onde ambas possuem massa M e orbitam em um mesmo círculo, separadas por uma distância a . Nesse cenário, há alguns pontos de estabilidade em que uma massa m , em que $m \ll M$, pode se encontrar em repouso no referencial do sistema binário.

- a) Quantos são os pontos de equilíbrio desse sistema?
- b) Quantos desses pontos são estáveis?

7.15. (Avançado) (adaptado - OLAA 2025) A estrela HD 209458 foi uma das primeiras em que a presença de um planeta foi detectada pelo método fotométrico de trânsito, no qual o fluxo luminoso da estrela hospedeira diminui quando o planeta passa em sua frente. O fenômeno pode ser representado, de forma simplificada, pelas figuras a seguir:

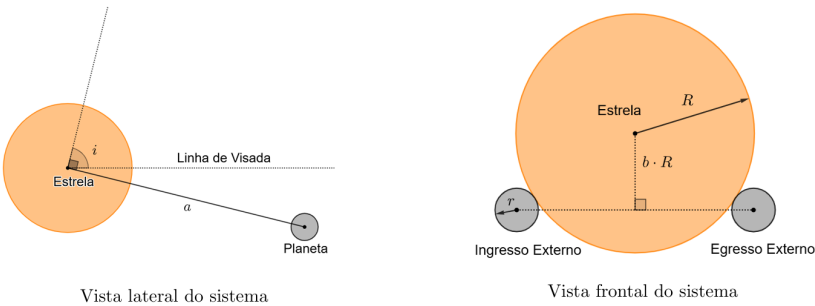


Figura 7.33: Vistas esquemáticas do sistema estrela-planeta durante o trânsito

Na notação utilizada, r é o raio do planeta, R é o raio da estrela, a é o semieixo maior da órbita do planeta, i é o ângulo de inclinação orbital e bR o parâmetro de impacto. O parâmetro de impacto é definido como a distância mínima, em unidades de raio estelar, entre o centro do disco estelar e a trajetória projetada do centro do planeta durante o trânsito. Suponha que a órbita do planeta seja circular e que $a \gg R$.

A partir dos diagramas, faça o que se pede nos seguintes itens:

- a) Escreva uma expressão para b como função do semieixo maior da órbita a , da inclinação i da mesma e do raio R da estrela.
- b) Mostre que o tempo total de trânsito, como representado pela vista frontal do sistema, é dado por:

$$\Delta t = 2R \sqrt{\frac{a}{GM}} \sqrt{\left(\frac{r^2}{R^2} + 1\right) - b^2}$$

Observações dessa estrela resultaram na curva de luz mostrada na figura a seguir. No gráfico, o eixo vertical representa o fluxo luminoso relativo (normalizado) da estrela, enquanto o eixo horizontal mostra o tempo (em dias) em relação ao centro do trânsito.

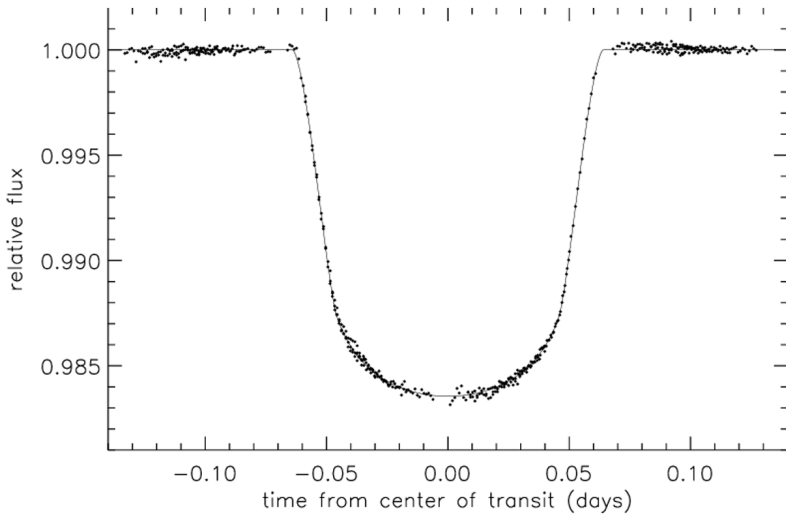


Figura 7.34: Curva de luz normalizada do trânsito planetário em HD 209458

- c) Sabendo que a estrela HD 209458 possui $R = 1,20R_{\odot}$, massa $M = 1,15M_{\odot}$ e o parâmetro de impacto do planeta é dado por $b = 0,59$ este o raio do planeta, r , em raios terrestres.
- d) Determine o período orbital do planeta, P , e o semi eixo maior, a , de sua órbita.

7.16. (Intermediário) A maioria das explosões de supernova tipo *Ia* acontecem em sistemas binários, quando uma anã branca absorve a massa da sua companheira e extrapola o limite de Chandrasekhar ($M_{lim} = 1,4M_{\odot}$) e colapsa. Vamos estudar o que acontece em um sistema binário após uma explosão de super nova tipo *Ia* utilizando um modelo simplificado.

Nessa questão, considere que inicialmente o sistema é formado por uma anã branca, de massa M_1 e por uma gigante vermelha de massa M_2 . As estrelas inicialmente possuem massa $M_1 = 1,4M_\odot$ e $M_2 = 3,8M_\odot$. Considere também, que após a supernova o momento do sistema condinua constante, para qualquer referencial inercial.

- a) Sabendo que ambas as estrelas possuem órbitas circulares de período $T = 6,8$ dias encontre os raios das órbitas a_1 e a_2 .
- b) Considerando agora que a estrela 1 exploda em supernova e deixe um núcleo degenerado de massa $M_{1,f} = 0,8M_\odot$ e imediatamente após a explosão tem a sua velocidade inalterada, encontre os novos semi eixos orbitais $a_{1,f}$ e $a_{2,f}$ (Agora, as órbitas não são mais necessariamente circulares).
- c) Calcule a diferença na velocidade do centro de massa do sistema antes e depois da supernova.

7.17. (Intermediário) Durante a observação de um sistema binário com inclinação $i = 49^\circ$ foram medidas os comprimentos de ondas da linha H_α de uma das estrelas. A tabela a seguir mostra os comprimentos de ondas medidos junto com o fluxo normalizado do sistema.

λ (nm)	F/F_c	λ (nm)	F/F_c
655,40	1,03	655,50	1,10
655,60	1,17	655,69	1,28
655,77	1,47	655,86	1,71
655,93	1,82	656,01	1,66
656,07	1,39	656,13	1,09
656,18	0,84	656,23	0,67
656,28	0,57	656,33	0,66
656,37	0,82	656,42	1,09
656,48	1,40	656,54	1,68
656,61	1,77	656,68	1,69
656,75	1,48	656,84	1,28
656,92	1,17	657,01	1,10
657,10	1,04		

Sabendo que o comprimento de onda central da linha H_α é $\lambda_{H_\alpha} = 656,3$ nm e que ambas as estrelas tem $M = 1,4M_\odot$ encontre o período do sistema binário.

7.18.

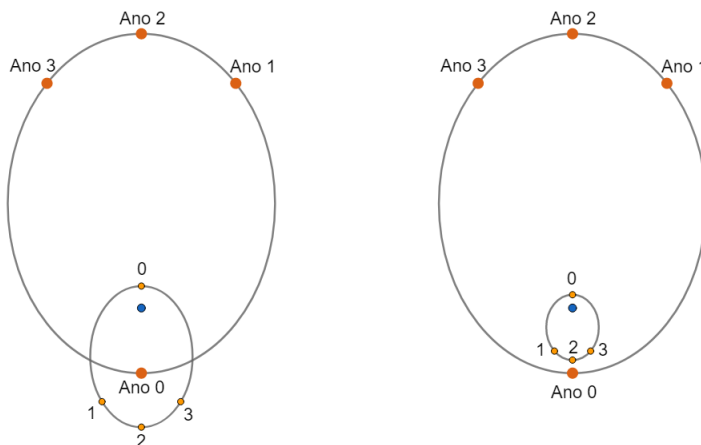
7.19.

7.20.

7.10 Gabarito

7.1. Pelo gráfico, fica claro que a amplitude da curva vermelha é maior que a da azul, i.e. $V_A > V_B$. Agora, como $M_A V_A = M_B V_B$, $V_A > V_B \Rightarrow M_A < M_B$. Como vimos ao longo do capítulo $P_A = P_B$ para sistemas binários, logo a alternativa correta é a letra C).

7.2. Ambas as representações são corretas:

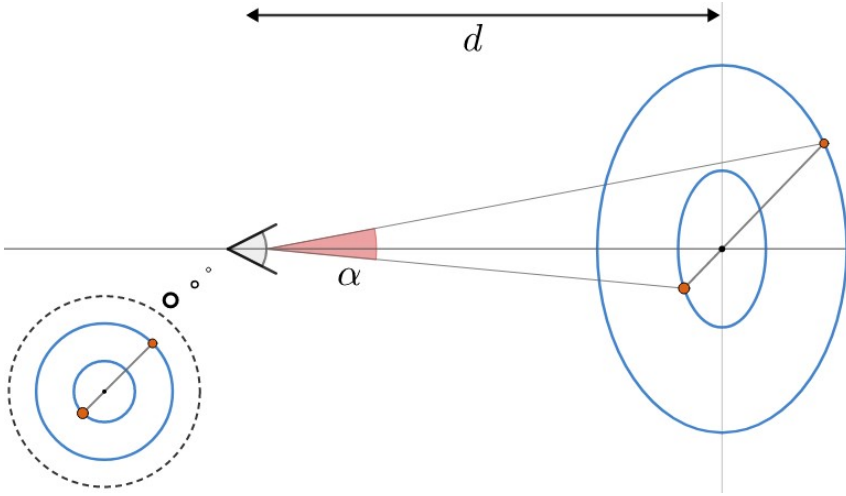


- 7.3.** a) O efeito Doppler ocorre quando um objeto está se afastando ou aproximando do observador, i.e. sua velocidade radial não é nula. No caso mostrado, as velocidades das estrelas são puramente tangenciais, e por isso não há efeito Doppler da luz.
- b) Podemos calcular a velocidade radial v_r de cada estrela utilizando a fórmula do redshift não-relativístico:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Com isso, obtemos $v_A = -3,65 \cdot 10^6$ m/s e $v_B = 8,21 \cdot 10^6$ m/s. Como a velocidade radial de A é negativa, ele está se aproximando. Por outro lado, como $v_B > 0$, a estrela B está se afastando.

7.4. Podemos ilustrar a situação pelo desenho:



Como $\alpha \ll 1$, temos que a distância física a entre as componentes é:

$$a = d \cdot \alpha$$

Pela paralaxe, podemos achar a distância d ao sistema:

$$\frac{d [\text{pc}]}{1 \text{ pc}} = \frac{1''}{p [']}$$

Usando $p = 0,1''$, obtemos $d = 10 \text{ pc}$. Agora, podemos achar a por:

$$a = 10 \text{ pc} \cdot 1''$$

Entretanto, pela definição de parsec¹⁰, $1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{1''}$, logo:

$$a = 10 \text{ UA}$$

Agora, pela Terceira Lei de Kepler para sistemas binários:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Porém, sabemos que $\frac{1 \text{ ano}^2}{1 \text{ UA}^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 1M_{\odot}}$ (Terceira Lei de Kepler aplicada na Terra). Assim:

¹⁰Veja o apêndice de paralaxe.

$$(m_1 + m_2)[M_\odot] = \frac{\frac{a[\text{UA}]^3}{1 \text{ UA}^3}}{\frac{P[\text{ano}]^2}{1 \text{ ano}^2}}$$

Como $a = 10 \text{ UA}$ e $P = 12,5 \text{ anos}$:

$$m_1 + m_2 = 6,4M_\odot$$

Agora, o enunciado nos disse que a distância de m_2 ao centro de massa (r_2) é quatro vezes maior que essa distância da componente 1 (r_1). Assim:

$$r_2 = 4r_1$$

Pelo centro de massa:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = 4 \Rightarrow m_1 = 4m_2$$

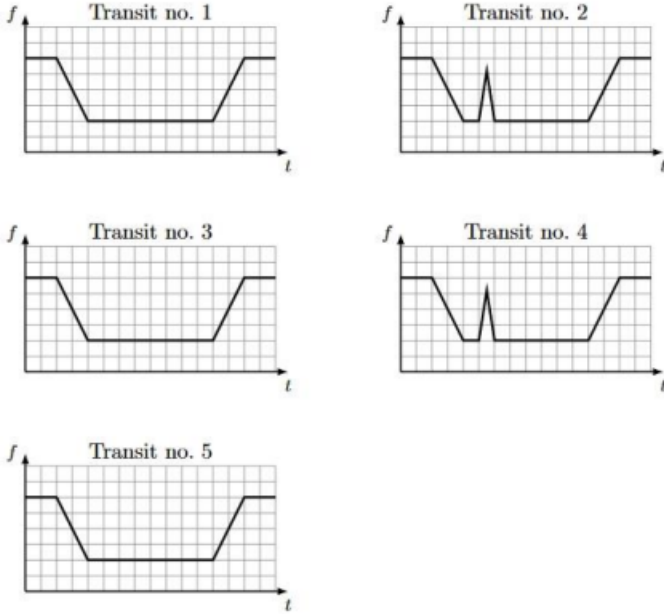
Sabemos $m_1 + m_2$ e $\frac{m_1}{m_2}$, então basta finalizarmos:

$$4 = \frac{m_1}{m_2} = \frac{6,4M_\odot - m_2}{m_2} = \frac{6,4M_\odot}{m_2} - 1$$

Assim, obtemos $\boxed{m_2 = 1,28M_\odot}$ e $\boxed{m_1 = 5,12M_\odot}$.

7.5. Quando o planeta passa na frente de uma mancha estelar, ele bloqueia não uma região brilhante, mas uma região escura da superfície da estrela, de modo que a estrela aparece brevemente um pouco mais brilhante novamente. Como a mancha solar tem a mesma dimensão do planeta, o fluxo medido durante a passagem do planeta na frente da mancha deve ter QUASE a mesma intensidade do fluxo sem trânsito.

Ainda, o “período sinódico” de P_e e P_p é $S = 2 \text{ anos}$. Assim, como o planeta encontra a mancha no segundo trânsito, ele também a encontrará no quarto (dois anos depois).



7.6. Calculando a velocidade da estrela de menor massa pelo efeito Doppler:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \Rightarrow v_r = 2,24 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Perceba que o diâmetro angular de $D_{\text{menos}} = 1,50''$ é da órbita da estrela menos massiva (já que $1,50'' > 0,50''$). Podemos encontrar o raio R_{menos} dessa órbita por:

$$R_{\text{menos}} = d \frac{D_{\text{menos}}}{2}$$

Pelos valores do enunciado:

$$R_{\text{menos}} = 20 \text{ pc} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,50''$$

Como $1 \text{ UA} = 1 \text{ pc} \cdot 1''$, por definição, temos:

$$R_{\text{menos}} = 15 \text{ UA}$$

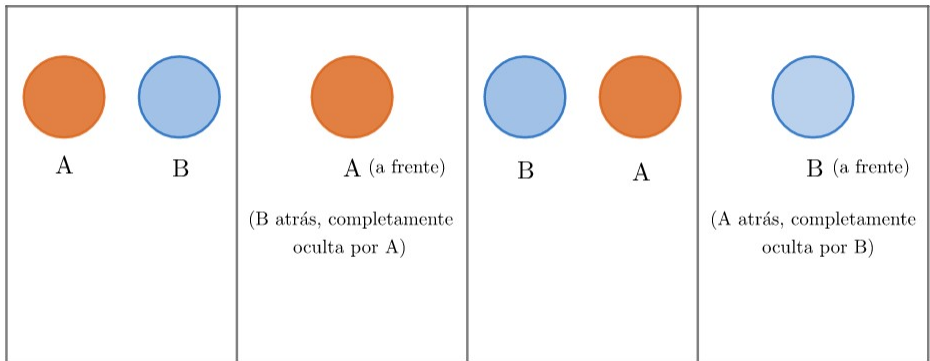
Sabemos que v_r e R_{menos} se relacionam por $v_r = \frac{2\pi R_{\text{menos}}}{T}$, afinal a órbita é circular. Assim, podemos encontrar T :

$$T = \frac{2\pi R_{\text{menos}}}{v_r} = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 1,496 \cdot 10^{11}}{2,24 \cdot 10^4}$$

Ou seja:

$$T = 6,3 \cdot 10^8 \text{ s} = \boxed{20 \text{ anos}}$$

7.7. a) Desenhando a situação:



b) A profundidade do primeiro mínimo será igual a magnitude de A subtraída da magnitude total, pois a estrela B estará completamente oculta. Com isso, podemos comparar as magnitudes utilizando a Equação de Pogson:

$$\Delta_{pri} = m_A - m_{tot} = -2,5 \log \frac{F_A}{F_{tot}}$$

$$\Delta_{pri} = -2,5 \log \left(\frac{\frac{L_A}{4\pi d^2}}{\frac{L_{tot}}{4\pi d^2}} \right)$$

Como a distância das duas estrelas são essencialmente iguais:

$$\Delta_{pri} = -2,5 \log \frac{L_A}{L_{tot}}$$

$$\boxed{\Delta_{pri} = 2,5 \log \frac{L_{tot}}{L_A}}$$

Para calcularmos a profundidade do segundo mínimo (Δ_{sec}), podemos utilizar o mesmo método com $\Delta_{sec} = m_B - m_{tot}$. Assim:

$$\Delta_{sec} = m_B - m_{tot} = -2,5 \log \frac{F_B}{F_{tot}}$$

$$\Delta_{sec} = 2,5 \log \frac{L_{tot}}{L_B}$$

- c) Como $L_{tot} = L_A + L_B$, podemos reescrever as expressões encontradas no item b) da seguinte forma:

$$\Delta_{pri} = 2,5 \log \left(\frac{4\pi R_A^2 \sigma T_A^4 + 4\pi R_B^2 \sigma T_B^4}{4\pi R_A^2 \sigma T_A^4} \right)$$

O enunciado diz que $R_A = R_B = R$, então podemos desenvolver a expressão da seguinte forma:

$$\Delta_{pri} = 2,5 \log \left(\frac{4\pi R^2 \sigma (T_A^4 + T_B^4)}{4\pi R^2 \sigma T_A^4} \right)$$

$$\Delta_{pri} = 2,5 \log \left(1 + \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^4 \right)$$

Substituindo os valores das temperaturas, encontramos $\Delta_{pri} = 3,83 \text{ mag}$. Já para o segundo mínimo:

$$\Delta_{sec} = 2,5 \log \left(1 + \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^4 \right)$$

Substituindo os valores, obtemos $\Delta_{sec} = 0,03 \text{ mag}$.

- 7.8.** a) Utilizando a Terceira Lei de Kepler:

$$P^2 = a^3 \cdot \frac{4\pi^2}{GM} \implies a = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}}$$

Substituindo os valores informados na questão (no SI):

$$a = \sqrt[3]{\frac{(2,218573 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,8 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{4\pi^2}}$$

Assim:

$$a = 4,62 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,031 \text{ UA}$$

- b) A velocidade em uma órbita circular é:

$$v = \frac{2\pi r}{P}$$

Como calculamos r no item anterior e o enunciado nos forneceu P :

$$v = \frac{2\pi \cdot 4,62 \cdot 10^9}{2,218573 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = \boxed{152 \text{ km/s}}$$

- c) O fluxo da estrela quando não está ocorrendo o trânsito do exoplaneta pode ser escrito como:

$$F_0 = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} \Rightarrow F_0 = \frac{R^2 \sigma T^4}{d^2}$$

Desprezando uma possível luminosidade do exoplaneta, temos que o fluxo durante o trânsito é:

$$F_t = \frac{R^2 \sigma T^4}{d^2} - \frac{r^2 \sigma T^4}{d^2}$$

Agora, conseguimos relacionar a queda do fluxo de uma estrela com a razão dos raios. Dividindo os fluxos:

$$\frac{F_t}{F_0} = \frac{\frac{R^2 \sigma T^4}{d^2} - \frac{r^2 \sigma T^4}{d^2}}{\frac{R^2 \sigma T^4}{d^2}}$$

Reescrevendo:

$$\frac{F_t}{F_0} = \frac{R^2 - r^2}{R^2} \Rightarrow \frac{F_t}{F_0} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Ou seja:

$$\boxed{\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \frac{F_t}{F_0}}}$$

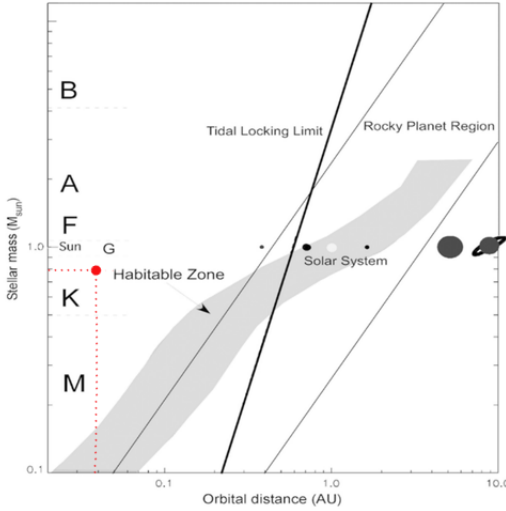
Pelo gráfico, podemos estimar a razão entre o fluxo no trânsito com o fluxo normalizado como 0,975. Substituindo na equação:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - 0,975} = \boxed{0,158}$$

- d) Utilizando a relação do item passado, $r = 0,158 \cdot R$. Pelo enunciado, $R = 0,85 R_\odot$, logo: $r = 0,134 R_\odot = 9,41 \cdot 10^4 \text{ km}$. Um planeta desse tamanho só pode possuir uma composição gasosa¹¹.

¹¹Para comparação isto equivale a quase 15 vezes o raio da Terra, ou 1,32 vezes o raio de Júpiter

- e) A massa da estrela vale $0,8 M_{\odot}$ e o planeta possui uma distância orbital de 0,031 UA. Assim, o planeta está na seguinte posição no gráfico:



Logo, ele não está na zona habitável.

- 7.9.** a) Quando as velocidades radiais dos dois corpos coincidem, elas são iguais à velocidade do centro de massa do sistema. Isso pode ser observado pela figura 7.21, em que a situação em questão está representada pelas letras A ou C. Assim, observando a intersecção das curvas no gráfico, obtemos $v_{CM} = -20$ km/s, i.e. o sistema está se aproximando de nós.
- b) Como a estrela 1 é mais massiva que a estrela 2 (enunciado), temos que a sua curva é aquela que possui velocidade radial $v_1 = 120$ km/s na intersecção com o eixo y . Ainda, $v_2 = -175$ km/s nessa situação. Perceba que essa intersecção representa a situação em que as velocidades radiais são máximas (para 1) e mínimas (para 2). Assim, podemos encontrar a velocidade de 1 e 2 com relação ao centro de massa por:

$$v_{1CM} = 120 - (-20) = 140 \text{ km/s}$$

e

$$v_{2CM} = -175 - (-20) = -155 \text{ km/s}$$

Ou seja, a estrela 1 possui velocidade 140 km/s com relação ao centro de massa quando cruza o eixo y . Porém, como o próprio centro de massa está se aproximando com $v_{CM} = -20$ km/s, a velocidade radial observada de 1 fica somente 120 km/s. O sinal negativo de v_{2CM} não

possui uma relevância muito grande, já que só nos interessamos por seu módulo. Agora, como as estrelas orbitam o centro de massa:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|v_{2CM}|}{|v_{1CM}|} = \frac{155}{140} = \boxed{1,107}$$

c) Pela paralaxe, podemos calcular a distância ao sistema:

$$\frac{d[\text{pc}]}{1\text{ pc}} = \frac{1''}{p['']} \Rightarrow d = 149,25\text{ pc}$$

Como a estrela 1 é mais fria e maior que a outra componente, a maior queda de fluxo ocorrerá quando ela eclipsar a estrela 2. Nessa situação:

$$F_1 = 0,4 \cdot F_{tot}$$

Onde esse 0,4 foi obtido pelo gráfico. Com isso podemos comparar a magnitude de 1 com a do sistema pela equação de Pogson:

$$m_1 - m_{tot} = -2,5 \log \left(\frac{F_1}{F_{tot}} \right) = -2,5 \log 0,4$$

Pelo enunciado, $m_{tot} = 9,64$. Assim, obtemos $m_1 = 10,635$. Entretanto, queremos encontrar a magnitude absoluta. Assim, pelo módulo de distância:

$$m_1 - M_1 = 5 \log d - 5 \Rightarrow M_1 = \boxed{4,77}$$

Se o fluxo da estrela 1 é 40% do total, o da estrela 2 será $F_2 = 0,6F_{tot}$, assim podemos realizar o mesmo procedimento que fizemos para 1 para encontrarmos sua magnitude absoluta. Por Pogson:

$$m_2 - m_{tot} = -2,5 \log \left(\frac{F_2}{F_{tot}} \right) = -2,5 \log 0,6 \Rightarrow m_2 = 10,195$$

Assim, pelo módulo de distância:

$$M_2 = m_2 - 5 \log d + 5 = \boxed{4,33}$$

7.10. a) Como a massa de prova possui massa desprezível, M e m realizam órbitas circulares em torno do centro de massa comum. Pode-se inferir pelo enunciado que um corpo localizado em qualquer um dos pontos de Lagrange deve possuir o mesmo período P que M e m para permanecer em repouso em relação a esses corpos. Isso só é possível se essa massa desprezível também orbitar o centro de massa de M e m .

Quantitativamente, basta aplicarmos a Terceira Lei de Kepler para sistemas binários para encontrarmos a velocidade angular $\omega = \frac{2\pi}{P}$:

$$\frac{P^2}{D^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{P^2} = \omega^2 = \frac{G(M+m)}{D^3} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{D^3}}}$$

b) A imagem abaixo representa a situação. De acordo com o Exemplo 1, sabemos que a distância entre M e o CM é $\frac{m}{M+m}D$ e que a distância m e o CM é $\frac{M}{M+m}D$. Agora, vamos analisar a força resultante na massa de prova μ ($\ll M, m$).

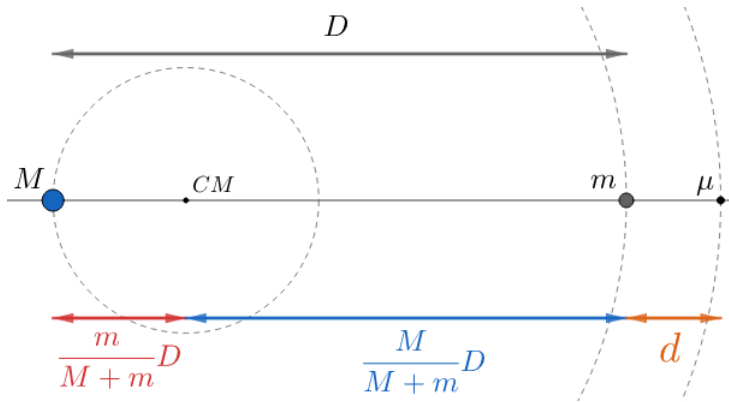


Figura 7.35: Segundo ponto de Lagrange

Pela Segunda Lei de Newton em μ :

$$F_M + F_m = R_{cp}$$

Onde $F_M = \frac{GM\mu}{(D+d)^2}$ é a força gravitacional de M em μ e $F_m = \frac{Gm\mu}{d^2}$ é a força gravitacional de m em μ . Agora, perceba que μ realiza uma órbita circular de raio $\left(\frac{M}{M+m}D + d\right)$ em torno do CM com velocidade angular ω . Assim, a resultante centrípeta é:

$$R_{cp} = \mu\omega^2 \left(\frac{M}{M+m}D + d \right)$$

Juntando essas equações e utilizando o resultado do item a), temos:

$$\frac{GM}{(D+d)^2} + \frac{Gm}{d^2} = \frac{G(M+m)}{D^3} \left(\frac{M}{M+m}D + d \right)$$

Reescrevendo:

$$\frac{M}{(D+d)^2} + \frac{m}{d^2} = \frac{M}{D^2} + \frac{(M+m)d}{D^3}$$

Agora, vamos utilizar o fato que $d \ll D$ (dado no enunciado) para chegarmos em uma resposta aproximada. A conhecida aproximação de Taylor nos diz que $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$. Desse modo, vamos manipular o termo da esquerda para ele ficar no formato $(1+\text{algo})^{\text{expoente}}$:

$$\frac{M}{(D+d)^2} = \frac{M}{D^2 \left(1 + \frac{d}{D}\right)^2} = \frac{M}{D^2} \left(1 + \frac{d}{D}\right)^{-2}$$

Agora, como $d \ll D$, podemos fazer $\frac{M}{D^2} \left(1 + \frac{d}{D}\right)^{-2} \approx \frac{M}{D^2} \left(1 - \frac{2d}{D}\right)$.
Com isso:

$$\frac{M}{D^2} \left(1 - \frac{2d}{D}\right) + \frac{m}{d^2} = \frac{M}{D^2} + \frac{(M+m)d}{D^3}$$

Reescrevendo:

$$\cancel{\frac{M}{D^2}} - \frac{2Md}{D^3} + \frac{m}{d^2} = \cancel{\frac{M}{D^2}} + \frac{Md}{D^3} + \frac{md}{D^3}$$

Multiplicando ambos os lados por d^2 , obtemos:

$$m = (3M + m) \left(\frac{d}{D} \right)^3$$

Por fim:

$$d = D \left(\frac{m}{3M + m} \right)^{1/3}$$

7.11. a) Utilizando a Terceira Lei de Kepler,

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

A velocidade radial máxima é dada por $v_{rad, max, 1} \equiv K = \frac{2\pi a_1}{P} \sin i$. Pelo teorema do centro de massa, $M_1 a_1 = M_2 a_2 \rightarrow a_2 = M_1 a_1 / M_2$. Substituindo na terceira Lei de Kepler,

$$\frac{a_1^3 (1 + M_1/M_2)^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

$$\left(\frac{2\pi a_1}{P}\right)^2 a_1 (1 + M_1/M_2)^3 = G M_2 (1 + M_1/M_2)$$

$$\left(\frac{2\pi a_1}{P}\right)^3 (1 + M_1/M_2)^2 = \frac{2\pi G M_2}{P}$$

$$\frac{K^3}{\sin^3 i} (M_1 + M_2)^2 = \frac{2\pi G M_2^3}{P}$$

Agora, podemos reescrever essa terceira lei de Kepler no formado da função de massa,

$$\boxed{\frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{K^3 P}{2\pi G}}$$

b) Resolvendo para M_2 e $i = 90^\circ$,

$$f = \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \rightarrow M_2^3 = (M_1 + M_2)^2 f$$

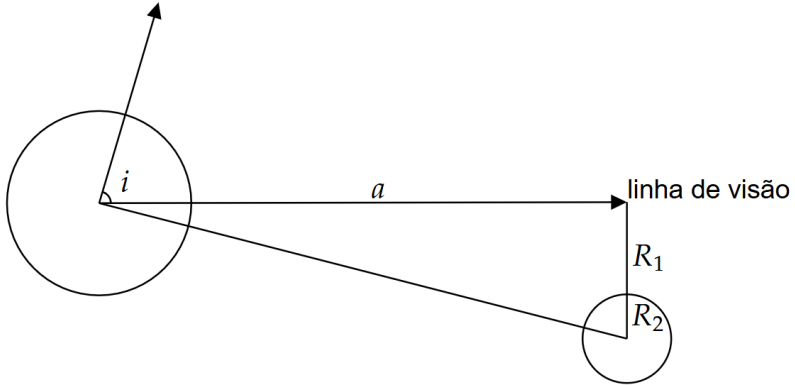
$$M_2 = ((M_1 + M_2)^2 f)^{1/3}$$

Resolvendo por iteração, obtemos:

$$\boxed{M_2 \approx 50 M_\odot}$$

c) Devido a alta massa de M_2 , podemos aferir que a mesma se trata de um buraco negro.

7.12. Observe o seguinte esquema,



O ângulo entre a linha de visão e a reta entre o centro da estrela 1 e o centro da estrela 2 é dado por $90 - i$. Utilizando trigonometria básica,

$$\text{sen}(90 - i) = \frac{R_1 + R_2}{a}$$

Da identidade $\text{sen}(90 - x) = \cos x$

$$\boxed{\cos i = \frac{R_1 + R_2}{a}}$$

É a relação que queríamos encontrar.

7.13. Vamos chamar de eclipse *A* o eclipse em que a estrela 1 passa em frente da estrela 2 e de eclipse *B* quando a estrela 2 passa em frente a estrela 1. Vamos agora analisar a situação de máximo de ambos os eclipses. No eclipse *A*, o fluxo total será apenas o fluxo da estrela 1.

$$\therefore F_A = kR_1^2 T_1^4$$

Onde k é uma constante de normalização. Já no eclipse 2, teremos uma parte da estrela 1 (a parte que não está coberta pela estrela 2) e o fluxo inteiro da estrela 2. Matematicamente,

$$F_B = kR_2^2 T_2^4 + kR_1^2 T_1^4 - kR_2^2 T_1^4$$

$$F_B = k(R_2^2 T_2^4 + (R_1^2 - R_2^2) T_1^4)$$

Para o eclipse primário ser o eclipse *B* o que se segue é,

$$F_B < F_A$$

$$R_2^2 T_2^4 + (R_1^2 - R_2^2) T_1^4 < R_1^2 T_1^4$$

$$R_2^2 T_2^4 - R_2^2 T_1^4 < 0$$

$$T_2^4 - T_1^4 < 0$$

$$\boxed{T_1 > T_2}$$

Surpreendentemente, esse resultado não depende do raio de nenhuma das estrelas.

- 7.14.** a) Os pontos que um terceiro corpo menor pode estar em equilíbrio em um sistema de 2 corpos, são justamente os *pontos de Lagrange*. Portanto, existem $\boxed{5 \text{ pontos de estabilidade}}$.
- b) Os pontos são L_1 , no meio do círculo entre as duas estrelas, L_2 e L_3 atrás de uma delas e L_4 e L_5 formando triângulos equiláteros. Para um ponto de equilíbrio ser considerado estável, após um pequeno deslocamento, é esperado que o corpo retorne para a posição inicial. Analizando previamente o ponto L_1 , no referencial inercial das estrelas, temos:

$$F = -\frac{GMm}{(a/2 + x)^2} + \frac{GMm}{(a/2 - x)^2} + m\omega^2 x$$

Pro sistema binário,

$$\omega = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}$$

$$F = -\frac{GMm}{(a/2 + x)^2} + \frac{GMm}{(a/2 - x)^2} + \frac{2GMmx}{a^3}$$

Simplificando,

$$F = -\frac{4GMm}{a^2(1 + \frac{2x}{a})^2} + \frac{4GMm}{a^2(1 - \frac{2x}{a})^2} + \frac{2GMmx}{a^3}$$

$$F = \frac{4GMm}{a^2} \left(\left(1 - \frac{2x}{a}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{2x}{a}\right)^{-2} \right) + \frac{2GMmx}{a^3}$$

Utilizando a aproximação $(1 + y)^n \approx 1 + ny$

$$F = \frac{4GMm}{a^2} \left(1 - \frac{4x}{a} - 1 - \frac{4x}{a} \right) + \frac{2GMmx}{a^3}$$

$$F = -\frac{30GMmx}{a^3}$$

Como a força é negativa, o ponto L_1 representa um ponto de equilíbrio estável.

Para o ponto L_2 (e equivalentemente L_3), primeiro vamos calcular a que distância da estrela a massa m se encontra:

$$F = -\frac{GMm}{(a+r)^2} - \frac{GMm}{r^2} + m\omega^2(a/2 + r)$$

No ponto L_2 a força total deve ser nula. Substituindo ω

$$\frac{GMm}{a^2(1+r/a)^2} + \frac{GMm}{r^2} = \frac{GMm}{a^2}(1+2r/a)$$

Simplificando e utilizando a mesma aproximação que anteriormente,

$$\frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2r}{a} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{2r}{a} \right)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4r}{a^3}$$

$$r = \frac{a}{4^{1/3}} \approx 0,63a$$

Agora voltando para a equação da força, mas diante uma pequena perturbação x ,

$$F = -\frac{GMm}{(a+r+x)^2} - \frac{GMm}{(r+x)^2} + m\omega^2(a/2 + r + x)$$

$$F = -\frac{GMm}{2,67a^2} \left(1 + \frac{x}{1,63a} \right)^{-2} - \frac{GMm}{0,4a^2} \left(1 + \frac{x}{0,63} \right)^{-2} + \frac{2GMm}{1,13a^2} \left(1 + \frac{1,13x}{a} \right)$$

Simplificando,

$$F = \frac{GMm}{a^2} \left[-\frac{1}{2,67} \left(1 - \frac{2x}{1,63a} \right) - \frac{1}{0,4} \left(1 - \frac{2x}{0,63} \right) + \frac{1}{0,56} \left(1 + \frac{1,13x}{a} \right) \right]$$

$$F = \frac{GMm}{a^2} \left(-1,09 + 10,41 \frac{x}{a} \right)$$

Mas note que como $x \ll a$ a força sempre será negativa, logo os pontos L_2 e L_3 representam equilíbrios estáveis.

Os pontos L_4 e L_5 , por sua vez, são conhecidos por serem instáveis, porém a demonstração da sua natureza leva cálculo diferencial e integral, que foje do escopo desse livro. Por tanto, há 3 pontos de equilíbrio estável.

7.15. a)

Apêndice A

Cosmologia

Desde os primórdios da existência humana, a origem de tudo foi tratada um grande mistério. Nesse âmbito, a cosmologia procura compreender o universo desde o seu “nascimento” até um futuro distante a partir de modelos físicos e matemáticos. Com a passagens dos séculos, a humanidade foi aprimorando as técnicas utilizadas para tal análise até, mais recentemente, Einstein desenvolver sua teoria da relatividade geral, a qual é utilizada até hoje no estudo da cosmologia.

Descobertas físicas e astronômicas foram fundamentais para, em conjunto, darem luz a características do nosso universo. A seguir, iremos estudar alguns dos fundamentos desse estudo.

A.1 Lei de Hubble-Lemaître

A Lei de Hubble-Lemaître afirma que o universo está expandindo para longe de nós com uma velocidade proporcional à distância de um ponto no universo até a Terra. Apesar de tal descoberta geralmente ser associada ao astrônomo Edwin Hubble, Lemaître havia deduzido a partir das equações da relatividade geral cerca de dois anos antes de Hubble, este que foi o primeiro a comprová-la empiricamente. Vamos lembrar das duas principais chaves que possibilitaram que Hubble determinasse as velocidades radiais e as distâncias de galáxias.

A primeira chave foi a relação período-luminosidade encontrada pela astrônoma Henrietta Leavitt em 1912. Essa relação fornecia um valor para a luminosidade de certas estrelas variáveis, conhecidas como cefeidas, em função de seus períodos de variação de brilho, que podiam ser observados da Terra. Medindo o fluxo de tais estrelas, seria possível encontrar a distância delas até nós. Desse modo, Hubble calculou a distância de certas galáxias até a Terra através das cefeidas contidas nelas.

A outra chave foi o trabalho de Vesto Slipher, que foi um dos pioneiros a utilizar o redshift de galáxias para calcular suas velocidades radiais.

Com essas ferramentas em mãos, a ideia de Hubble foi de procurar uma relação entre as velocidades radiais e as distâncias de galáxias. Plotando os valores encontrados no gráfico da figura A.1, ele observou uma relação **linear** entre v_r e d para inúmeras galáxias, que ficou conhecida como Lei de Hubble-Lemaître. Ele publicou a sua descoberta em 1929.

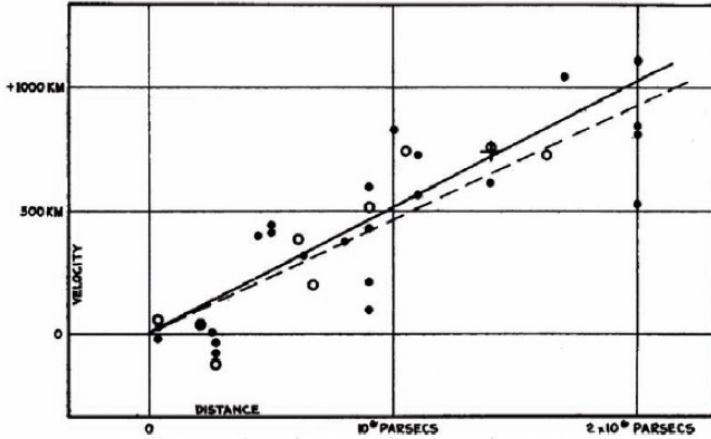


Figura A.1: Gráfico Velocidade de Recessão (km/s) vs Distância (pc)

Hubble representou a linearidade de v_r e d através da equação:

$$v_r = H_0 d$$

onde

- v_r : velocidade radial de recessão, normalmente em km s^{-1} ;
- H_0 : constante de Hubble. Seu valor atual¹ é cerca de $67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (dimensão de inverso do tempo);
- d : distância à galáxia, normalmente em Mpc.

Vale lembrar que nem todas as galáxias obedecem a Lei de Hubble-Lemaître. Para galáxias próximas da Via Láctea, a atração gravitacional influencia a velocidade de afastamento delas. Por exemplo, a velocidade radial de Andrômeda vista da Terra é cerca de -300 km/s , ou seja, ela está se aproximando de nós.

¹A constante de Hubble varia com o tempo. i.e. não é constante.

Estamos no centro do universo?

Um equívoco gerado pela superficial compreensão da Lei de Hubble-Lemaître é que, por consequência do afastamento das galáxias de nós, a Terra estaria no centro do universo. No entanto, o próprio caráter matemático dessa lei mostra que esse não é o caso, como iremos demonstrar. A imagem a seguir ilustra a Terra e outras duas galáxias A e B .

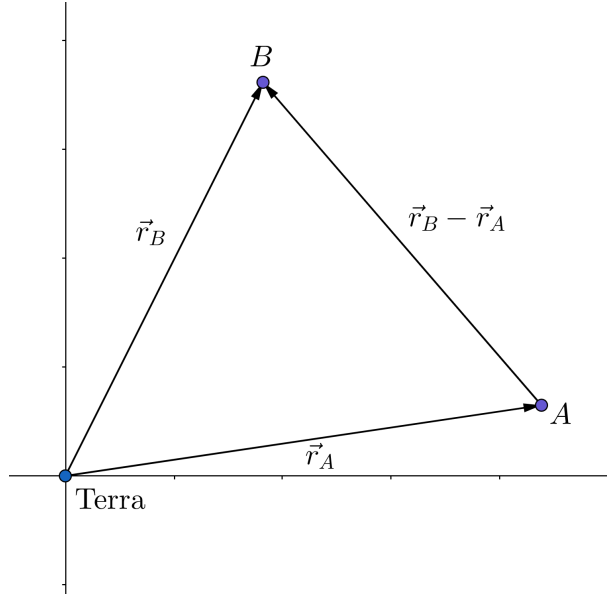


Figura A.2: A Terra e duas outras galáxias

Em relação à Terra, as velocidades de afastamento das galáxia A e B são, respectivamente:

$$\vec{v}_A = H_0 \vec{r}_A \quad \text{e} \quad \vec{v}_B = H_0 \vec{r}_B$$

Com isso, podemos calcular a velocidade radial $\vec{v}$ de B quando vista de A . Assim, no referencial de A , temos:

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Substituindo os valores de $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}_B - H_0 \vec{r}_A = H_0 (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Mas como o módulo de $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ é a distância entre A e B , temos que um observador em A também veria B se afastando com uma velocidade proporcional à distância entre essas galáxias. Desse modo, pode-se perceber que a Lei

de Hubble-Lemaître é **universal**, ou seja, funciona para qualquer observador. Isso prova que não existe um referencial especial, i.e. não existe um “centro do universo”.

Tempo de Hubble

A partir da Lei de Hubble-Lemaître, podemos encontrar uma **estimativa** para a idade do universo. Considerando que o universo é uma esfera que surgiu no Big-Bang ($t = 0$) e, desde então, vem expandindo com uma velocidade **constante** de acordo com a constante de Hubble atual, temos a seguinte situação:

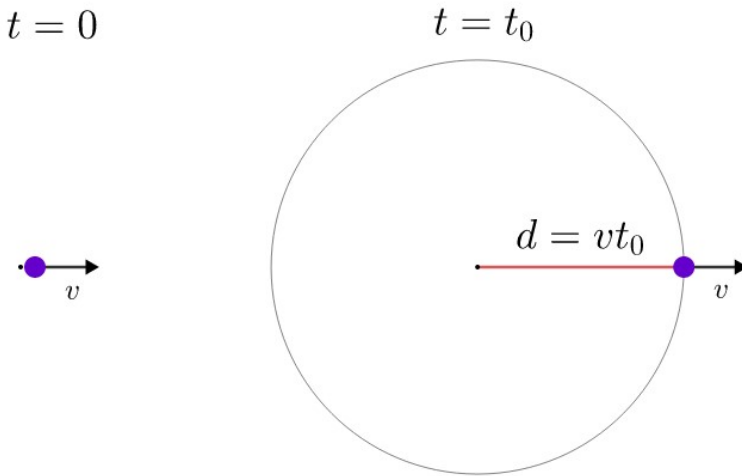


Figura A.3: Estimando a idade do universo

Onde t_0 seria a idade atual do universo. Como assumimos que a velocidade v é constante, o raio do universo é $d = vt_0$. Entretanto, pela Lei de Hubble-Lemaître, temos que $v = H_0 d$. Juntando esses resultados:

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{d}{H_0 d} = \boxed{\frac{1}{H_0}}$$

Utilizando $67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, obtemos $t_0 \approx 14,4$ bilhões de anos, o que é bem próximo do valor calculado mais recente encontrado de 13,8 bilhões de anos.

A.2 Redshift Cosmológico

Existem três principais causas de redshift:

- Dois corpos com velocidade radial entre si não-nula. Esse é o caso que vemos no nosso dia a dia, como em carros de fórmula 1.

- Campos gravitacionais. O redshift relacionado a essa causa é conhecido como redshift gravitacional.
- Expansão do universo. O redshift relacionado a essa causa é conhecido como redshift cosmológico.

Para o redshift cosmológico, basta relacionarmos a Lei de Hubble-Lemaître com a expressão comum do efeito doppler, seja este relativístico ou não. Desse modo:

Redshift cosmológico não-relativístico

A expressão não-relativística do efeito doppler nos diz que:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

Pela Lei de Hubble-Lemaître, $v_r = H_0 d$, logo:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{H_0 d}{c}$$

Redshift cosmológico relativístico

A expressão relativística do efeito doppler pode ser escrita em duas formas principais. A primeira delas dá o redshift para uma velocidade radial v_r :

$$z = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1$$

Já a segunda² dá v_r para um dado redshift z :

$$v_r = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Pela Lei de Hubble-Lemaître, elas podem ser reescritas como:

$$z = \sqrt{\frac{c + H_0 d}{c - H_0 d}} - 1$$

e

$$d = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

²As expressões são fundamentalmente idênticas, basta realizar uma manipulação algébrica para convertê-las, assim como vimos no terceiro capítulo.

Apêndice B

Paralaxe

A paralaxe é a diferença na posição aparente de um objeto fixo quando observado por dois observadores em lugares distintos. Um experimento bem simples que ilustra esse conceito pode ser realizado de acordo com a imagem abaixo. Apesar da mão estar fixa, o observador, que é o olho aberto, está mudando de posição, fazendo com que a imagem da mão apresente posições aparentes distintas.



Figura B.1: Paralaxe

Essa variação da posição relativa de objetos fixos graças à mudança da posição do observador é especialmente útil para determinarmos distâncias, assim como ilustrado pelo exemplo abaixo.

Exemplo 1:

Em um terreno plano, um estudante quer determinar a altura de uma montanha sem precisar escalá-la. Inicialmente, ele mede que o ângulo entre o topo da montanha e o solo é θ_0 . Após andar Δx na direção da montanha, o valor desse ângulo vira θ_f . Assim, calcule a altura da montanha, assim como a distância inicial do aluno até ela.

Solução

Podemos representar essa situação no seguinte desenho:

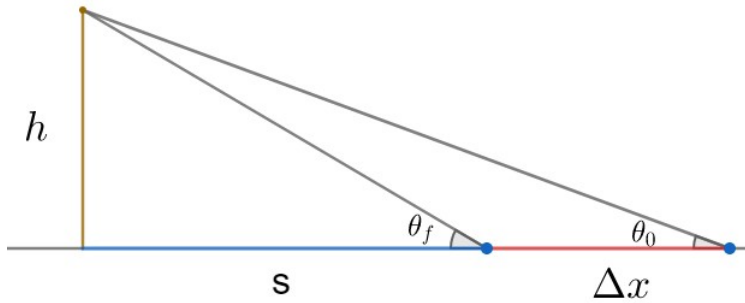


Figura B.2: Exemplo 1

Pela imagem, temos as seguintes relações:

$$\tan \theta_0 = \frac{h}{s + \Delta x}$$

e

$$\tan \theta_f = \frac{h}{s}$$

Podemos manipular essas equações para encontrarmos h :

$$h = \tan \theta_0 (\Delta x + s)$$

Como $s = \frac{h}{\tan \theta_f}$, temos:

$$h = \tan \theta_0 \left(\Delta x + \frac{h}{\tan \theta_f} \right)$$

Reescrevendo:

$$h = \Delta x \frac{\tan \theta_0 \tan \theta_f}{\tan \theta_f - \tan \theta_0}$$

Agora, podemos achar a distância $d = s + \Delta x$ que o aluno estava da montanha no início. Perceba que $\tan \theta_0 = \frac{h}{d}$, logo:

$$d = \Delta x \left(\frac{\tan \theta_f}{\tan \theta_f - \tan \theta_0} \right)$$

Dando um passo além, podemos determinar a distância de estrelas até a Terra através da paralaxe. Considerando a órbita da Terra em torno do Sol como circular, a posição aparenta da estrela varia de acordo com a translação da Terra. A imagem abaixo ilustra tal variação.

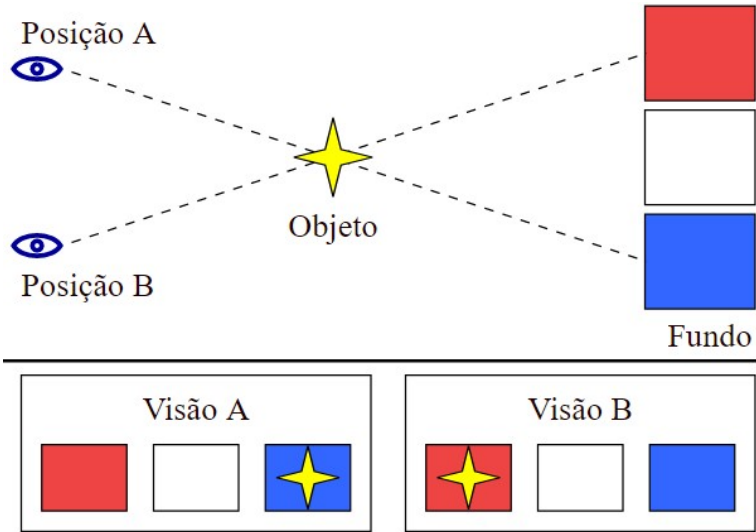


Figura B.3: Paralaxe de um astro

Assim, ao longo de um ano, a posição da estrela observada por nós irá oscilar em torno de dois pontos “limites” que ocorrem quando o ângulo entre a estrela e o Sol vistos da Terra é 90°. Assim, o **ângulo de paralaxe** p é definido como metade do deslocamento angular da estrela.

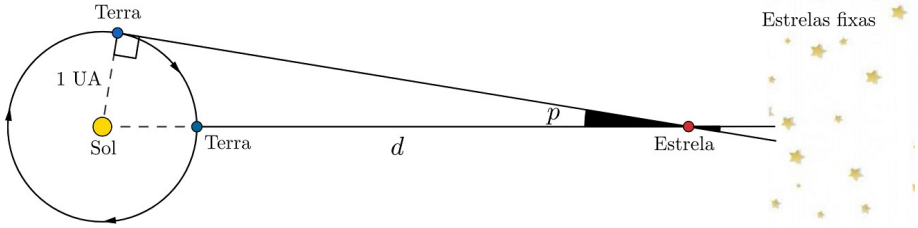


Figura B.4: Paralaxe heliocêntrica

De acordo com a figura, temos:

$$\sin p = \frac{1 \text{ UA}}{d}$$

Ademais, como $d \gg 1 \text{ UA}$ para todas as estrelas além do Sol, $p \ll 1$. Desse modo, podemos aproximar $\sin p \approx p [\text{rad}]$. Assim:

$$p [\text{rad}] = \frac{1 \text{ UA}}{d [\text{UA}]}$$

Entretanto, é comum utilizarmos a unidade **parsec** para medirmos a distância até as estrelas. Um parsec, 1 pc, é **definido** pela distância de uma estrela de paralaxe $1''$, tanto que seu nome origina da palavra *parallax second*. Assim:

$$1'' = \frac{1 \text{ UA}}{1 \text{ pc}}$$

Como $3600'' = 1^\circ$ e $180^\circ = \pi \text{ rad}$, temos:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{1''} \cdot \frac{3600''}{1^\circ} \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

O radiano não possui dimensão, logo:

$$1 \text{ pc} = \frac{3600 \cdot 180}{\pi} \text{ UA} \approx 206265 \text{ UA}$$

Sabemos que $1 \text{ rad} = \frac{3600 \cdot 180}{\pi}$ segundos de arco. Sendo $k = \frac{3600 \cdot 180}{\pi}$, temos:

$$p [\text{rad}] = \frac{1}{k} p [']$$

e

$$d [\text{UA}] = k d [\text{pc}]$$

Ou seja:

$$p\text{ [rad]} = \frac{1\text{ UA}}{d\text{ [UA]}} \Leftrightarrow \frac{1}{k} p["] = \frac{1\text{ UA}}{k\,d\text{ [pc]}}$$

Reescrevendo:

$$p["] = \frac{1\text{ UA}}{d\text{ [pc]}}$$

Mas, pela definição de parsec:

$$1'' = \frac{1\text{ UA}}{1\text{ pc}}$$

Dividindo essas equações:

$$\frac{p["]}{1''} = \frac{1\text{ pc}}{d\text{ [pc]}}$$

Que é a equação fundamental para encontrar a distância até um astro como função de sua paralaxe. Ainda, é comum medir p pela unidade $mas = 10^{-3}$ segundos de arco, em que mas significa milissegundo de arco.

Exemplo 2

Após meses de observação, a astrônoma Millenia calculou o deslocamento angular aparente máximo da estrela Polaris (α UMa) no céu, encontrando 14,3 mas . Assim, calcule a distância desse astro até a Terra, em parsecs.

Solução

Já que o ângulo de paralaxe é a metade do deslocamento angular aparente máximo da estrela, $p = 7,15\text{ mas} = 7,15 \cdot 10^{-3}\text{ arcsecs}$.

Logo:

$$d\text{ [pc]} = \frac{1''}{0,00715''}\text{pc} = 140,0\text{ pc}$$

Vale ressaltar que, mesmo com a tecnologia dos dias atuais, é significativamente difícil medir a paralaxe de estrelas que distam mais de 100 pc de nós. Desse modo, alternativas como o módulo de distância costumam ser mais utilizadas.

Apêndice C

Órbitas dos Planetas

Neste apêndice, vamos estudar algumas características importantes das órbitas de planetas. Iremos analisar o sistema solar, porém todos os conceitos se aplicam para qualquer sistema.

C.1 Planetas Interiores e Exteriores

Um conceito importante na astronomia é o de planeta inferior e exterior. Utilizando a Terra como referência, definimos um planeta como **inferior** se seu raio orbital for **menor** que o da Terra. Por outro lado, caso o raio orbital de um planeta seja **maior** que o da Terra, ele é chamado de **exterior**. Desse modo, temos:

- Planetas interiores: Mercúrio e Vênus;
- Planetas exteriores: Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

C.2 Inclinação da Órbita

Uma característica interessante do Sistema Solar é que as órbitas de todos os seus planetas estão essencialmente alinhadas. Isso significa que, independente do local de observação na Terra, iremos ver todos os planetas praticamente alinhados, assim como pode ser observado nas duas imagens abaixo¹.

¹A órbita da Lua em torno da Terra também é bem alinhada com tal plano.

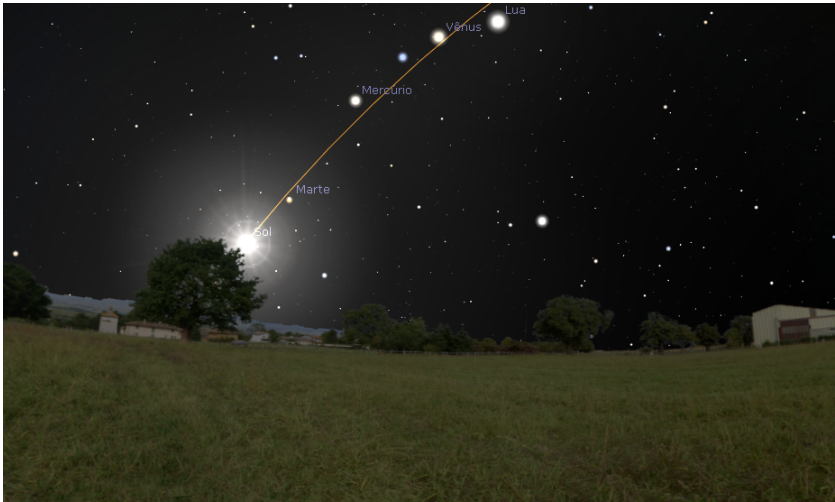


Figura C.1: Inclinação da órbita



Figura C.2: Inclinação da órbita

Utilizando como referência a órbita da Terra em torno do Sol, podemos definir a inclinação da órbita de um planeta como o ângulo entre as órbitas do planeta e da Terra. No caso, o arco laranja nas imagens acima representa

a Eclíptica, que não passa da projeção da órbita da Terra na esfera celeste. A imagem abaixo ilustra as inclinações das órbitas de cada planeta - como esperado, todos os valores são próximos de 0.

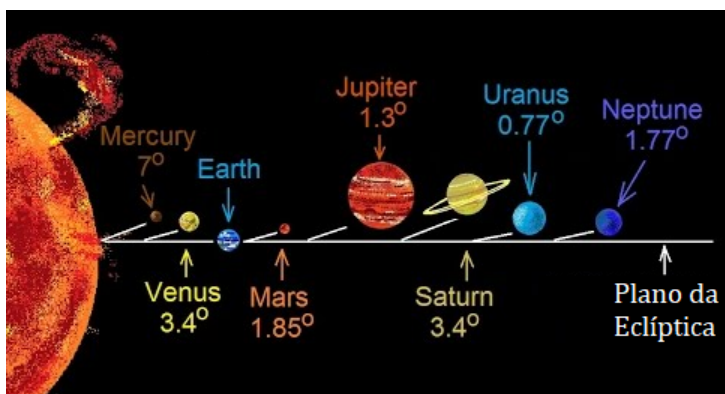


Figura C.3: Inclinação da órbita

C.3 Inclinação do Eixo de Rotação

A inclinação do eixo de rotação de um planeta (representado pelas letras ε ou i) mede o ângulo entre o seu equador e a eclíptica, assim como pode ser observado na imagem abaixo para a Terra.

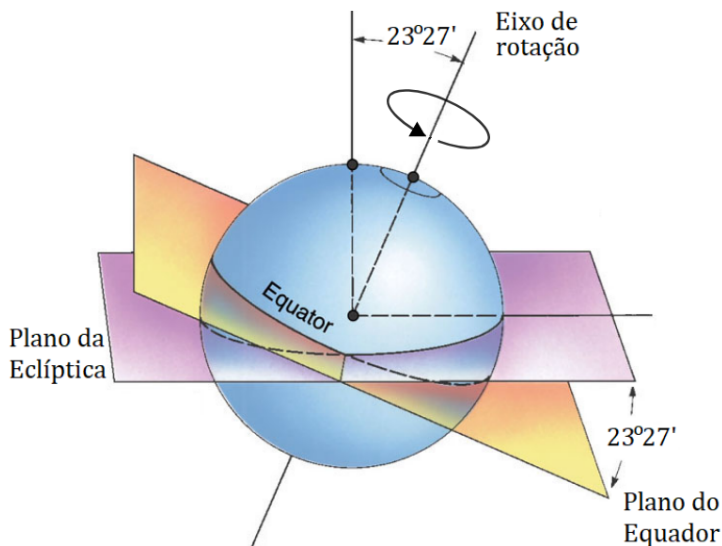


Figura C.4: Inclinação do eixo de rotação

Note que os planetas com inclinação $\varepsilon < 90^\circ$ giram no sentido anti-horário quando vistos de cima, já planetas com $\varepsilon > 90^\circ$ giram no sentido contrário, assim como representado na seguinte imagem:

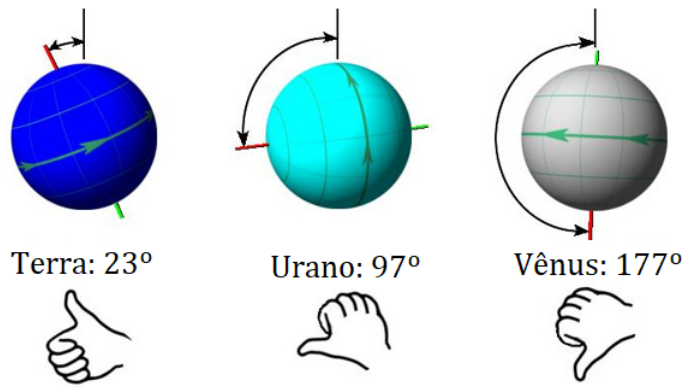


Figura C.5: Inclinação do eixo de rotação

Por fim, a imagem abaixo mostra as inclinações dos eixos de rotação de cada planeta.

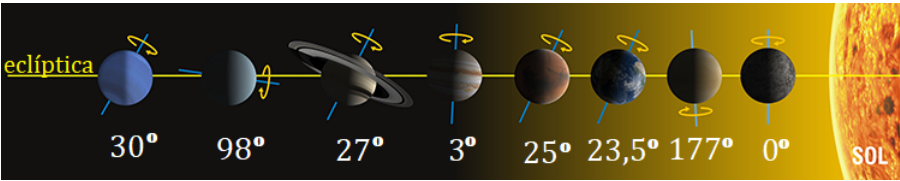


Figura C.6: Inclinação do eixo de rotação

C.4 Precessão e Nutação

A precessão e a nutação são dois tipos de movimentos que estão presentes em todos os corpos que giram em torno de si, como um peão ou a Terra (rotação). A precessão é caracterizada pela rotação do próprio eixo de rotação do corpo em torno de um segundo eixo. No caso da Terra, seu eixo de rotação é a própria reta que liga os polos norte e sul. Por outro lado, o eixo de rotação associado à precessão é a **reta que liga os os polos eclípticos**. A imagem abaixo ilustra isso.

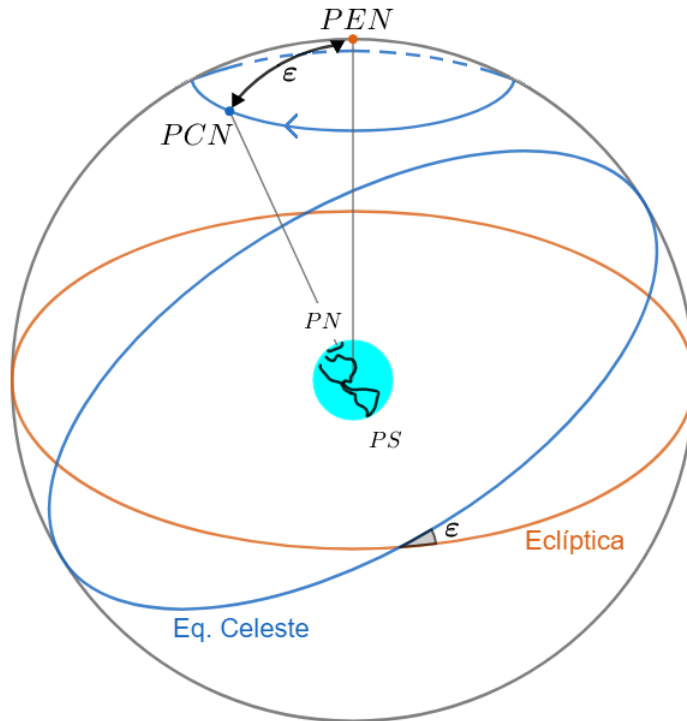


Figura C.7: Precessão da Terra

Desse modo, a precessão possui duas consequências principais:

- A posição do *PCN* no céu muda ao longo do tempo² (atualmente, ele está próximo de Polaris). Isso faz com que as coordenadas equatoriais dos astros também varie;
- As coordenadas eclípticas dos astros não são afetadas pela precessão. Por outro lado, as coordenadas eclípticas do *PCN* e do ponto vernal são.

A nutação é caracterizada por uma pequena oscilação do *PCN* em torno do círculo de precessão com um período de 18,6 anos, assim como representado pela imagem:

²O período de precessão da Terra é cerca de 26000 anos.

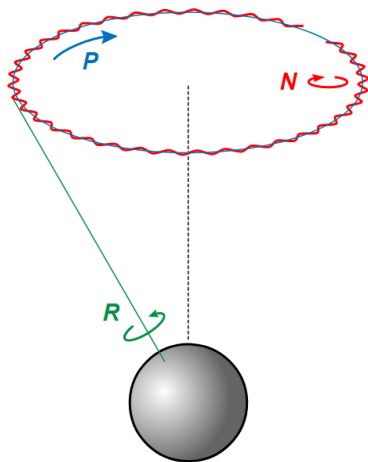


Figura C.8: Nutação da Terra

C.5 Configurações Planetárias

Caso um observador fosse colocado “acima” (no Polo Norte Eclíptico) do sistema solar, ele eventualmente veria os planetas em algumas posições especiais entre si. Tais posições recebem o nome de **configurações planetárias**. Utilizando como referência a Terra, elas são:

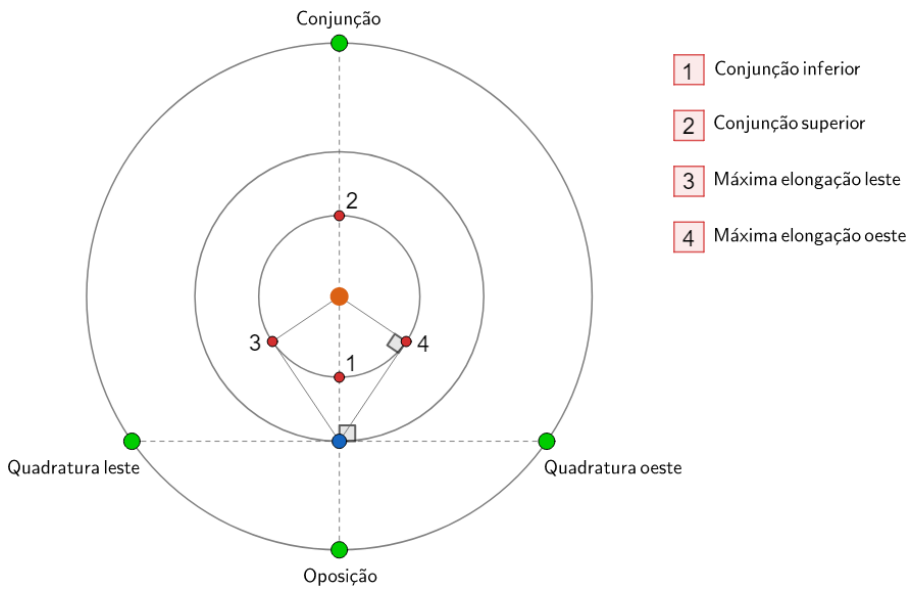


Figura C.9: Configurações Planetárias

Desse modo, definimos a **elongação** como o ângulo entre um planeta e o Sol quando vistos da Terra. Perceba que a elongação dos planetas exteriores pode ser qualquer ângulo entre 0 (conjunção), 90° quadratura e 180° (oposição). Por outro lado, a elongação dos planetas inferiores nunca ultrapassa um valor α_{max} chamado de elongação máxima. Vamos calcular esse valor em função do raio orbital R_i do planeta. Temos a seguinte imagem:

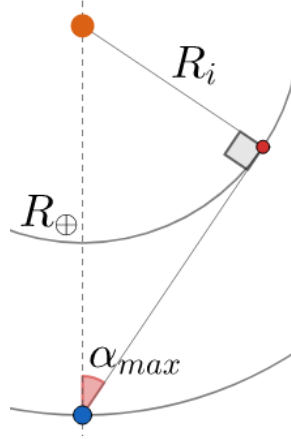


Figura C.10: Elongação máxima

Perceba³:

$$\text{sen } \alpha_{max} = \frac{R_i}{R_{\oplus}} \Rightarrow \alpha_{max} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{R_i}{1\text{UA}} \right)$$

Para Mercúrio:

$$R_M = 0,387\text{UA} \Rightarrow \alpha_{max-M} = 22,8^\circ$$

Já para Vênus:

$$R_V = 0,723\text{UA} \Rightarrow \alpha_{max-V} = 46,3^\circ$$

Desse modo, note que Vênus e Mercúrio **sempre** estarão próximos do Sol, assim como pode ser observado na figura C.2.

³Estamos desprezando a excentricidade e a inclinação das órbitas dos planetas.

Apêndice D

Analema

Um fenômeno muito curioso acontece quando tiramos diversas fotos do Sol ao longo de um ano em um horário e local definidos. Sobrepondo as imagens, o Sol não aparece sempre na mesma posição no céu, e sim, ele forma uma figura muito peculiar conhecida como **analema**.

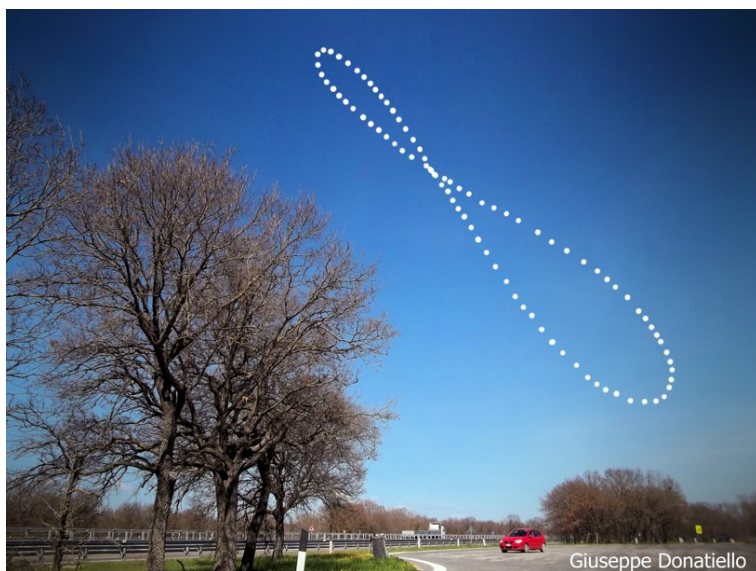


Figura D.1: Analema

Essa figura é resultado da combinação de dois fatores independentes: a **obliquidade da eclíptica** e a **excentricidade da órbita da Terra**. Para entendermos o porquê do formato do analema, precisamos compreender como essas características da órbita terrestre interferem no movimento anual do Sol.

Nesse âmbito, é conveniente analisarmos dois eixos do analema: um perpendicular e outro paralelo ao equador celeste.

A variação da posição do Sol ao longo do eixo perpendicular ao equador celeste ocorre exclusivamente pela variação da declinação do Sol ao longo do ano, que é um resultado da obliquidade da eclíptica.

Já a variação da posição do Sol ao longo do eixo paralelo ao equador celeste ocorre exclusivamente pelo efeito da equação do tempo, que é resultado tanto da obliquidade da eclíptica quanto da excentricidade da órbita da Terra.

Dessa maneira, vamos analisar com calma cada um desses efeitos individualmente para então estudarmos a combinação de ambos.

D.1 Efeito da Variação da Declinação do Sol

Como comentado no capítulo 5, o Sol percorre sua trajetória anual sobre a eclíptica, que é a projeção da órbita da Terra no equador celeste, assim como ilustrado pela imagem abaixo.

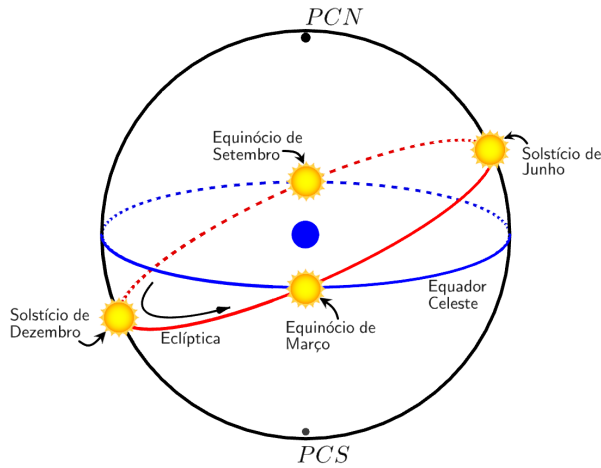


Figura D.2: Trajetória anual do Sol

A inclinação de ε entre a eclíptica e o equador celeste faz com que a declinação do Sol $\delta_{\odot}$ varie anualmente entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$, ou seja, como $\varepsilon = 23^{\circ}27'$, a declinação possui o seguinte intervalo: $-23^{\circ}27' \leq \delta_{\odot} \leq +23^{\circ}27'$.

Utilizando trigonometria esférica, é possível encontrar equações que descrevem a declinação do Sol como função do tempo. Fazendo isso, obtemos algo como:



Figura D.3: Declinação do Sol em função do tempo.

Essa mudança da declinação do Sol ao longo de um ano pode ser percebida por observadores na Terra. Temos que o Sol irá oscilar ao longo do eixo perpendicular ao equador celeste, com declinação indo de $-23^{\circ}27'$ até $23^{\circ}27'$. As seguintes imagens representam essa variação:

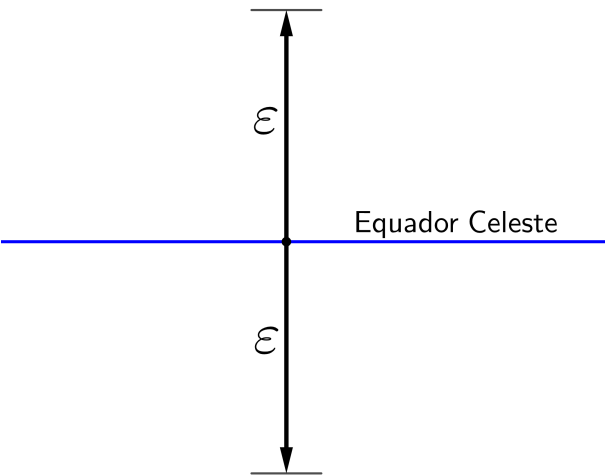


Figura D.4: Planificação da variação anual da posição do Sol ao longo do eixo perpendicular ao equador celeste

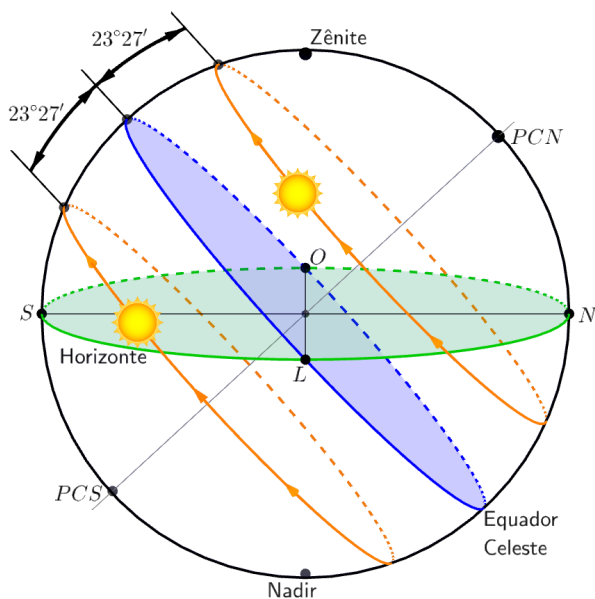


Figura D.5: Mudança da declinação do Sol ao longo de um ano

Se não fosse pelo efeito que iremos estudar a seguir, o analema seria simplesmente uma reta. Agora, vamos entender como se dá o movimento do Sol no eixo paralelo ao equador celeste.

D.2 Efeito da Equação do Tempo

Como comentado no capítulo 6, o tempo solar verdadeiro (que é baseado no ângulo horário do Sol verdadeiro) difere do tempo solar médio (que é baseado no ângulo horário do Sol médio) ao longo do ano de acordo com a equação do tempo.

A equação do tempo é um resultado tanto da excentricidade da Terra quanto da obliquidade da eclíptica. Os gráficos abaixo representam o efeito de cada um desses fatores individualmente e o resultado da combinação deles.

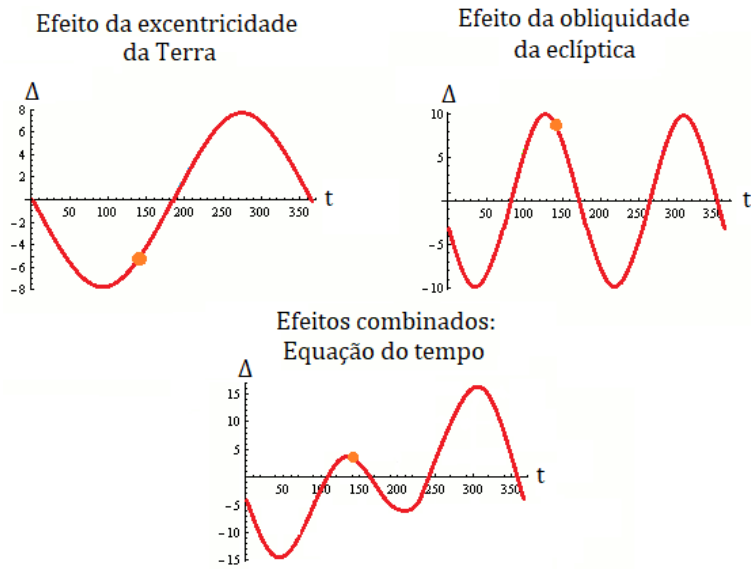


Figura D.6: Equação do tempo

Como o conceito de analema é tirar fotos sempre no mesmo horário, devemos perceber que esse horário refere-se ao tempo solar médio (pois é nele que o tempo civil é baseado). Dessa maneira, como o tempo solar verdadeiro difere do tempo solar médio ao longo do ano, o Sol possuirá um ângulo horário diferente a cada foto e, portanto, estará “atrasado” ou “adiantado” em relação ao Sol médio, dependendo da época do ano.

Perceba pelo gráfico dos efeitos combinados na figura D.6 que a equação do tempo possui um valor máximo e um valor mínimo. O valor mínimo ocorre um por volta de 11–12 de Fevereiro e representa o Sol verdadeiro 14min6s a leste do Sol médio. Já o valor máximo ocorre por volta de 31 de Outubro – 1 de Novembro e representa o Sol verdadeiro 16min33s à oeste do Sol médio. Portanto, note que há uma assimetria na “amplitude” da equação do tempo.

Dito isso, podemos concluir que, com o passar do ano, um observador verá o Sol variando sua posição ao longo do eixo paralelo ao equador celeste, indo de $ET_{\text{mín}}$ a leste do Sol médio até $ET_{\text{máx}}$ a oeste do Sol médio.

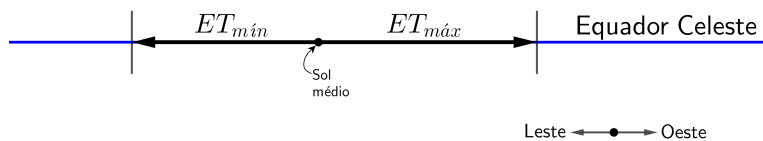


Figura D.7: Planificação da variação anual da posição do Sol ao longo do eixo paralelo ao equador celeste



Figura D.8: Eixo paralelo ao equador celeste

D.3 Efeitos Combinados

Agora que entendemos os efeitos da variação da posição do Sol em cada eixo, podemos finalmente compreender o formato do analema. Plotando em um gráfico, obtemos:

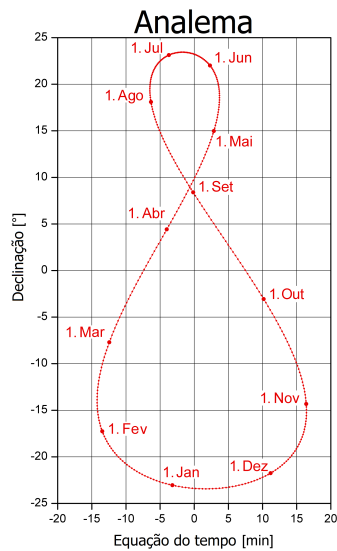


Figura D.9: Gráfico declinação versus equação do tempo de um analema.

Note que a variação da declinação é maior do que a variação da equação do tempo, fazendo com o analema fique mais “esticado” no eixo perpendicular ao equador celeste. Além disso, lembre-se que, como vimos pela figura D.4, o equador celeste é a mediatriz do segmento que liga o ponto de maior declinação do Sol ao ponto de menor declinação. Vale lembrar que essas extremidades representam os solstícios. A imagem abaixo ilustra a assimetria do analema com mais clareza:

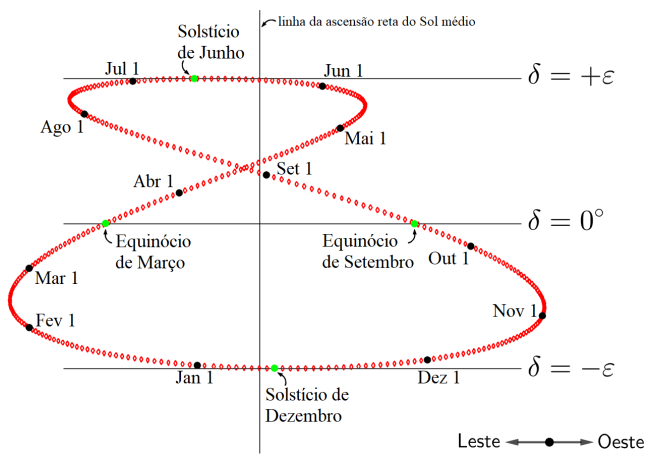


Figura D.10: Assimetria perceptível em ambos os eixos do analema.

Na imagem acima, além da assimetria do analema, é mais fácil notar que a declinação do Sol varia de $-\varepsilon$ até $+\varepsilon$ e que os equinócios ($\delta_{\odot} = 0$) ocorrem onde a figura do analema intersecta o equador celeste, sendo que o Equinócio de Março ocorre mais a leste do que o equinócio de Setembro.

Vale ressaltar que a “barriga” menor do analema ocorre inteiramente no hemisfério celeste Norte, logo sua extremidade está situada no solstício de Junho (quando $\delta_{\odot} = +\varepsilon$).

Portanto, agora que conhecemos melhor o analema, podemos analisar a imagem do início desse apêndice e desenhar algumas retas e pontos relevantes:

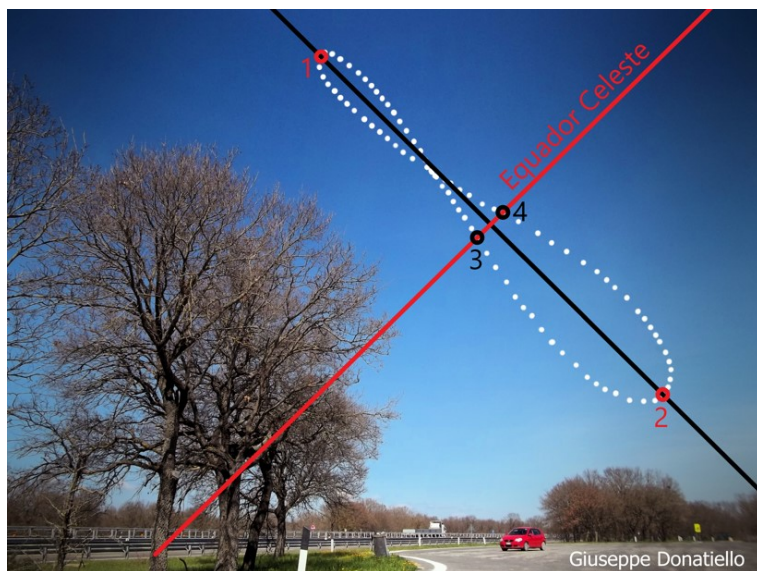


Figura D.11: Retas e pontos relevantes do analema

A primeira coisa a se fazer é traçar uma reta que passe pelas extremidades (pontos 1 e 2) do analema. Como vimos, essa reta representa o eixo da variação da declinação, ou seja, o eixo perpendicular ao equador celeste.

A partir dessa reta, podemos traçar o equador celeste traçando a mediatriz do segmento que liga os pontos 1 e 2.

Com as extremidades do analema (pontos 1 e 2) e as intersecções do equador celeste com o analema (pontos 3 e 4), conseguimos marcar a posição do Sol nos solstícios e equinócios. Para identificarmos qual é cada solstício, basta lembrar que a extremidade da “barriga” menor do analema é o solstício de Junho, fazendo com que a extremidade da “barriga” maior ocorra no solstício de

Dezembro.

Agora, a identificação dos equinócios é um pouco mais complicada. Primeiramente, devemos perceber que o analema está localizado no hemisfério oriental (isto é, possui azimute $0^\circ < A < 180^\circ$), pois a “barriga” menor está voltada para cima (ou seja, observador está no hemisfério Norte) e está voltada para a esquerda, indicando que o ponto cardeal Norte está logo à esquerda da imagem. Dessa forma, pela rosa dos ventos, o ponto em que o equador celeste toca o horizonte na imagem é o ponto cardeal Leste. Assim, devemos lembrar que, como ilustrado na figura [D.10](#), o Equinócio que ocorre mais a leste é o Equinócio de Março e o Equinócio que ocorre mais a oeste é o Equinócio de Setembro.

Portanto, na imagem acima, temos:

- Ponto 1: Solstício de Junho
- Ponto 2: Solstício de Dezembro
- Ponto 3: Equinócio de Março
- Ponto 4: Equinócio de Setembro

Com isso, analisamos completamente as características do analema.

Apêndice E

Relógio de Sol

Um relógio de Sol consiste de duas peças principais: um gnômon e um mostrador. A posição da sombra do gnômon possibilita a identificação do tempo solar verdadeiro local ($T_{\odot VL}$), que não necessariamente é o horário que vemos em nossos relógios¹. Neste apêndice, iremos ver dois tipos de relógio de Sol: o horizontal e o vertical.

E.1 Relógio de Sol Horizontal

Como diz o próprio nome, um relógio de Sol horizontal (ou “de chão”) é fixado ao chão, assim como ilustrado na imagem abaixo. Sua principal característica é que:

- O gnômon aponta para o polo visível ($HN \rightarrow PCN$ / $HS \rightarrow PCS$)

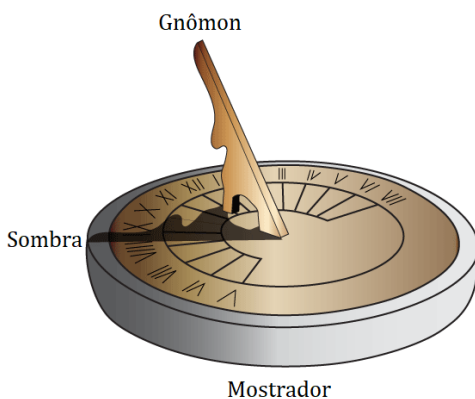


Figura E.1: Relógio de Sol horizontal. Ele está marcando 8:30 da manhã

¹No capítulo 6, falamos disso com mais calma.

Desse modo, o ângulo entre o gnômon e o mostrador é a própria latitude do local de observação. Agora, vamos aprender a determinar o hemisfério em que um relógio de Sol está. A imagem abaixo ilustra um relógio de Sol no **hemisfério norte**.

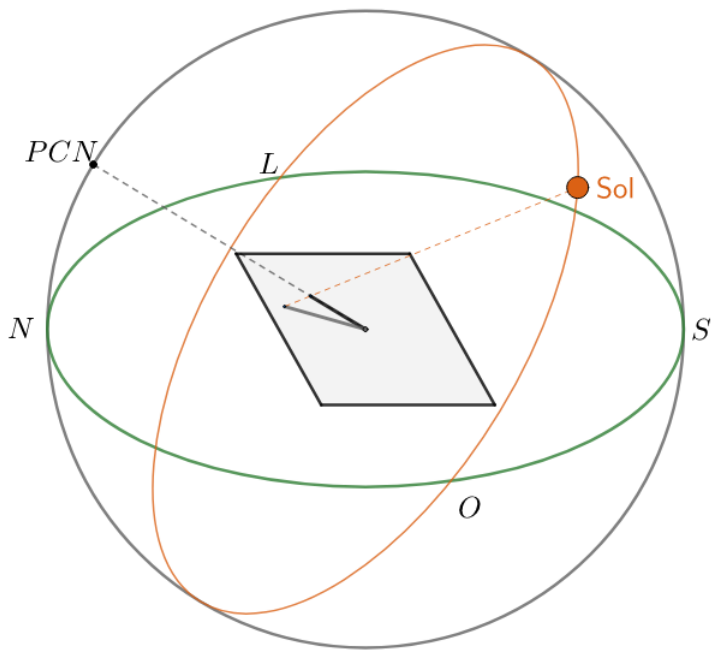


Figura E.2: Relógio de Sol horizontal no HN durante o equinócio

Desprezando a equação do tempo e a influência dos fusos, podemos observar duas características que devem estar presentes em **todo** relógio de Sol horizontal, independente de seu hemisfério.

- Quando o Sol está nascendo ($\approx 6:00$, leste), a sombra do Gnômon aponta para oeste. Isso implica que as primeiras horas da manhã estão na direção do oeste;
- Quando o Sol está se pondo ($\approx 18:00$, oeste), a sombra do Gnômon aponta para leste. Isso quer dizer que as últimas horas de Sol estão na direção do leste.

Desse modo, é possível encontrarmos as posições dos pontos cardeais leste e oeste somente olhando para as posições dos horários próximos de 6:00 e 18:00. Com isso, podemos determinar a posição de todos os pontos cardeais. Como o gnômon aponta para o polo visível, caso o ponto cardinal na direção do gnômon seja o **norte**, o relógio está no **HN**. Por outro lado, caso o gnômon aponte para o **sul**, o relógio está no **HS**.

Exemplo 1:

Em que hemisfério está o relógio horizontal da figura [E.1](#)?

Solução

Olhando para o relógio, podemos encontrar as posições dos horários 6:00 - à esquerda do gnômon - e 18:00 - à direita do gnômon. Desse modo, é possível determinar as posições aproximadas do leste e oeste, assim como representado na imagem abaixo.

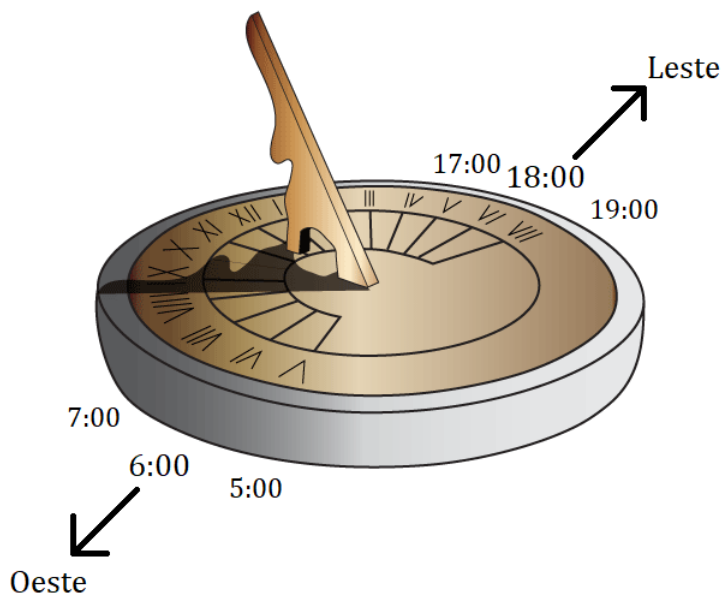


Figura E.3: Exemplo 1

Com isso, pode-se perceber que o gnômon está apontando para o ponto cardinal norte, ou seja, o relógio está no **hemisfério norte**.

E.2 Relógio de Sol Vertical

Um relógio de Sol vertical (ou “de parede”) é fixado em uma parede de forma que a sombra do gnômon fique sobre o mostrador vertical, assim como ilustrado na imagem abaixo. Sua principal característica é:

- O gnômon aponta para o polo oculto ($HN \rightarrow PCS / HS \rightarrow PCN$)

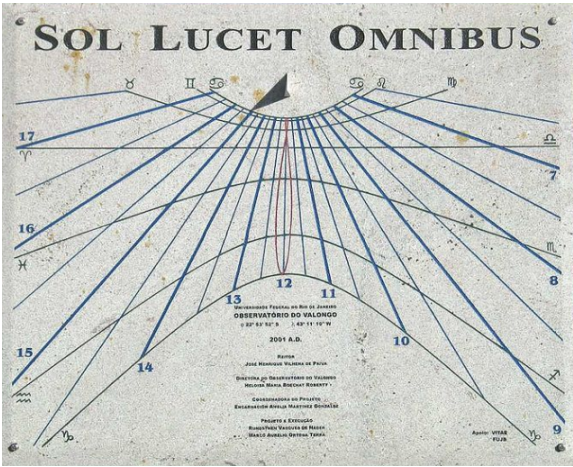


Figura E.4: Relógio de Sol vertical. Ele está marcando 15:00

Assim, o ângulo entre o gnômon e a parede em que está o relógio é $\theta = 90^\circ - \varphi$, assim como está representado na figura E.5. De maneira análoga ao que fizemos no caso do relógio horizontal, podemos determinar o seu hemisfério. A imagem E.6 ilustra um relógio de Sol no **hemisfério norte**.

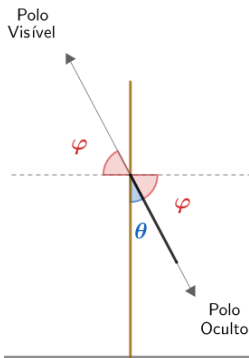


Figura E.5: Visão lateral de um relógio de Sol vertical

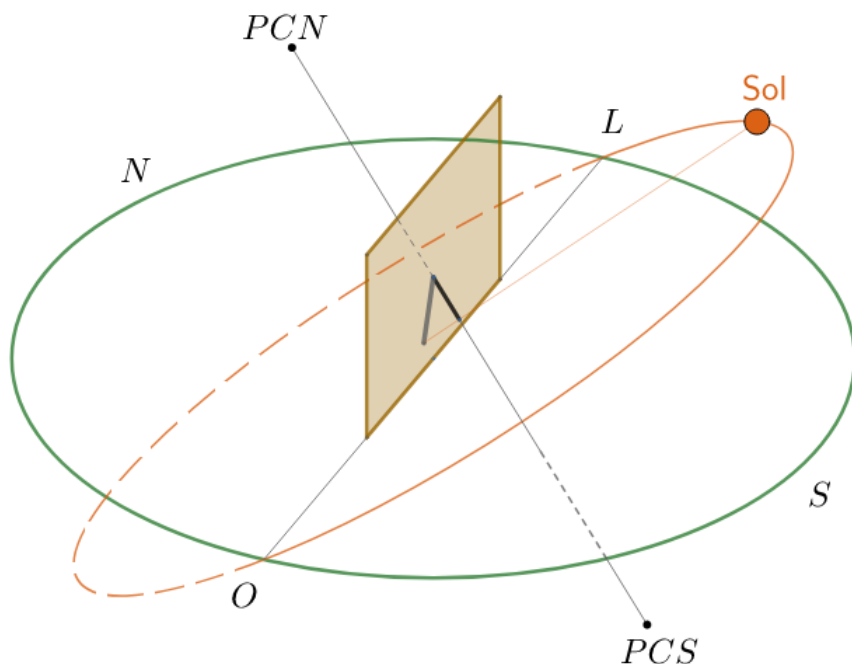


Figura E.6: Relógio de Sol vertical no HN durante o equinócio

Desse modo, podemos fazer as seguintes afirmações a respeito de **qualquer** relógio de Sol vertical, independente de seu hemisfério²:

- Quando o Sol está nascendo ($\approx 6:00$, leste), a sombra do Gnômon aponta para oeste. Isso implica que as primeiras horas da manhã estão na direção do oeste;
- Quando o Sol está se pondo ($\approx 18:00$, oeste), a sombra do Gnômon aponta para leste. Isso quer dizer que as últimas horas de Sol estão na direção do leste.

Assim, podemos determinar o hemisfério do relógio de maneira análoga ao que fizemos com o relógio horizontal - basta lembrar que o gnômon aponta para o polo oculto. Por fim, vale reforçar que a parede de um relógio do Sol vertical deve estar alinhada com a direção *leste – oeste*.

²São as mesmas do relógio de Sol horizontal.

Exemplo 2:

Em que hemisfério está o relógio vertical da figura [E.4](#)?

Solução

Podemos determinar as posições aproximadas do leste e oeste, assim como representado na seguinte imagem:

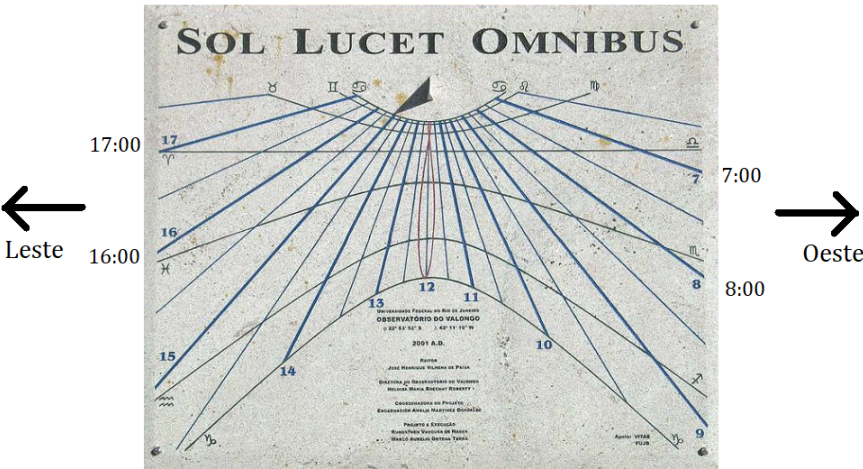


Figura E.7: Exemplo 2

Assim, note que a parede está virada para o norte, i.e. o PCN é o polo oculto. Desse modo, o polo visível é o PCS , e portanto o relógio está no hemisfério sul.

Apêndice F

Movimento Próprio

Ao contrário do senso comum, as estrelas não estão fixas no céu, e sim se movimentando com velocidades altíssimas, podendo chegar a centenas de km/s, pelo espaço sideral. Entretanto, por elas estarem muito distantes da Terra, é necessário esperar muito tempo para que essas velocidades resultem em alterações significativas de suas posições quando observadas por nós. Essa variação das posições dos astros é chamada de **movimento próprio**.

Dessa forma, o que realmente acontece é algo parecido com:

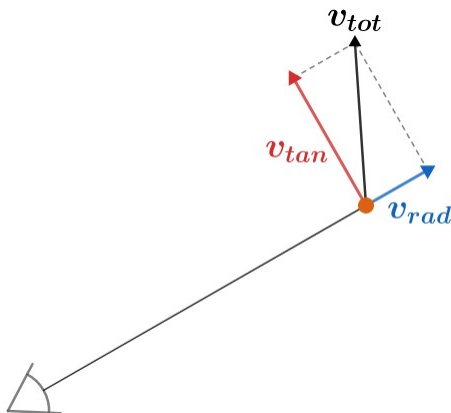


Figura F.1: Velocidades de um astro com relação à Terra

Agora, vamos analisar cada uma das componentes da velocidade total do astro, a radial e a tangencial.

Velocidade Radial

A velocidade radial v_{rad} nos diz o quão rápido o objeto se aproxima ou se afasta de nós. Caso ele esteja se **afastando**, então ele tem uma velocidade radial **positiva**. Por outro lado, caso o objeto esteja se **aproximando** de nós, ele possui uma velocidade radial **negativa**.

Perceba que a velocidade radial não resulta em variações da posição do astro quando visto da Terra, e sim, em mudanças de sua distância até nós.

O método mais comum de se calcular a velocidade radial de um astro é pelo redshift, assim como vimos no terceiro capítulo.

Velocidade Tangencial

A velocidade tangencial v_{tan} é a componente da velocidade de um astro relacionada à mudança de sua posição quando vista da Terra, e portanto é a causa do movimento próprio.

Vamos relacionar o movimento próprio μ de um astro, que é a variação temporal de sua posição no céu, com a velocidade tangencial e a distância de um astro. Após um pequeno intervalo de tempo Δt , temos:

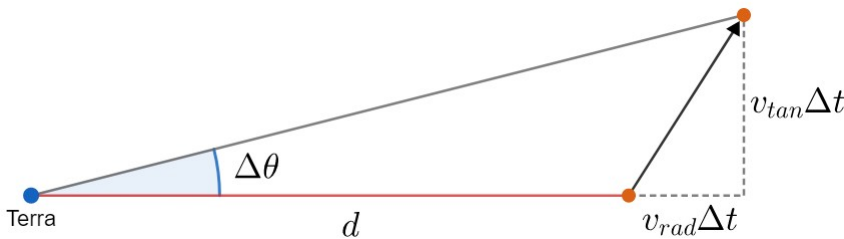


Figura F.2: Relação entre μ , v_{tan} e d

Temos:

$$\tan \Delta\theta = \frac{v_{tan} \Delta t}{d + v_{rad} \Delta t}$$

Como estamos tratando de pequenos intervalos de tempo e grandes distâncias, temos que $\Delta\theta \ll 1$, i.e. $\tan \Delta\theta \approx \Delta\theta$, e $d + v_{rad} \Delta t \approx d$. Assim:

$$\Delta\theta \approx \frac{v_{tan} \Delta t}{d}$$

Como $\mu = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, temos:

$$\boxed{\mu = \frac{v_{tan}}{d}}$$

F.1 Movimento Próprio na Esfera Celeste



Figura F.3: A imagem à esquerda e à direita representam as mesmas regiões do céu separadas por 20000 anos. O formato da cruz e a posição de α Cen (marcada) variam significativamente

Agora, vamos estudar a variação das coordenadas equatoriais de um astro devido ao seu movimento próprio. Em uma situação real, podemos medir com certa precisão a variação da declinação e da ascensão reta de uma estrela qualquer, como representado na tabela F.4. Apesar de ser intuitivo pensar que podemos encontrar μ somente aplicando um pitágoras entre as taxas de variação de α e δ , veremos que essa análise está incorreta.

Coordenadas de Vega			Coordenadas de Altair		
Ano	Ascensão Reta	Declinação	Ano	Ascensão Reta	Declinação
2011	18h36m56,43s	38°47'5,0"	2011	19h50m47,41s	8°52'10,3"
2001	18h36m56,35s	38°47'1,6"	2001	19h50m47,04s	8°52'6,4"
1991	18h36m56,27s	38°46'58,2"	1991	19h50m46,67s	8°52'02,5"
1981	18h36m56,19s	38°46'54,8"	1981	19h50m46,30s	8°51'58,6"
1971	18h36m56,11s	38°46'51,4"	1971	19h50m45,93s	8°51'54,7"

Figura F.4: Variação das coordenadas de Vega e Altair nas últimas décadas

Seja $\Delta\theta$ a variação da posição de uma estrela quando vista da Terra. As variações $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ associadas a esse ângulo podem ser observadas na seguinte imagem:

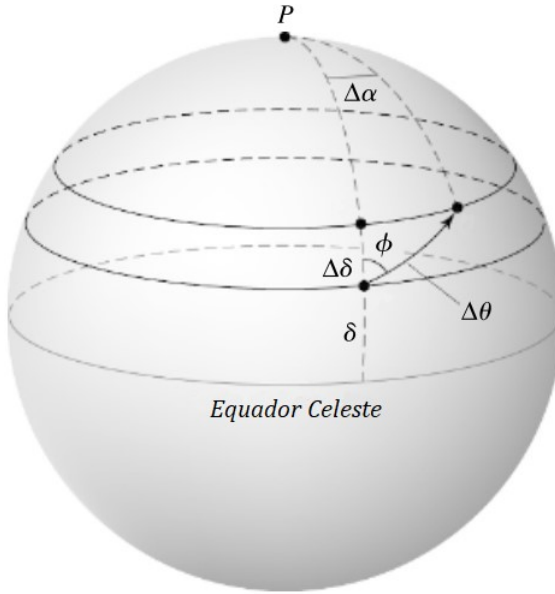


Figura F.5: Movimento próprio na esfera celeste

Desse modo, perceba que podemos¹ aplicar um Teorema de Pitágoras no triângulo da figura F.6.

$$(\Delta\theta)^2 = (\Delta\delta)^2 + (\Delta x)^2$$

Dividindo ambos os lados por $(\Delta t)^2$:

$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\delta}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$$

Sendo $\mu = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $\mu_\delta = \frac{\Delta\delta}{\Delta t}$ e $\mu_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, temos:

$$\mu^2 = \mu_\delta^2 + \mu_x^2$$

¹Isso só é válido para pequenas variações de coordenadas. O correto seria utilizar leis da trigonometria esférica, porém tal análise não costuma ser exigida em provas.

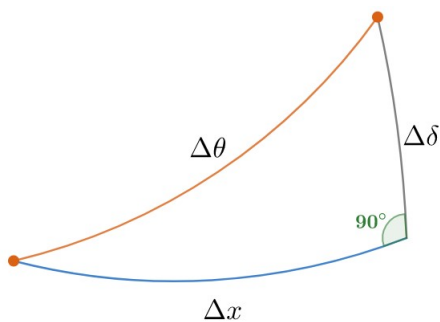


Figura F.6: Triângulo não esférico com as variações das coordenadas

Agora, vamos relacionar Δx com $\Delta\alpha$. Podemos representar o ângulo $\Delta\alpha$ da figura F.5 de quatro maneiras análogas:

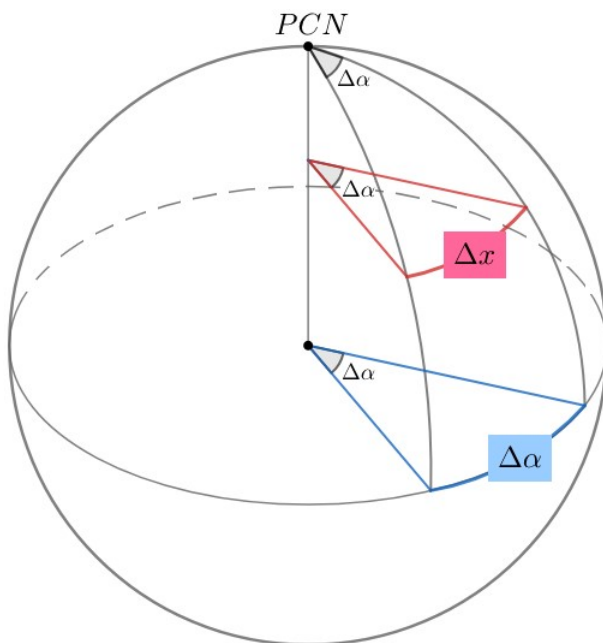


Figura F.7: Relacionando Δx e $\Delta\alpha$

Sendo R o raio da esfera celeste e r o raio da pequena circunferência vermelha, temos:

$$\Delta x = r \Delta\alpha$$

e

$$\Delta\alpha = R\Delta\alpha$$

As unidades dessas equações estão incorretas, o que é normal quando dizemos que a esfera celeste possui um raio R bem definido. Entretanto, como veremos a seguir, essa aparente incoerência irá desaparecer. Sendo δ a declinação do astro, podemos relacionar r e R pela imagem:

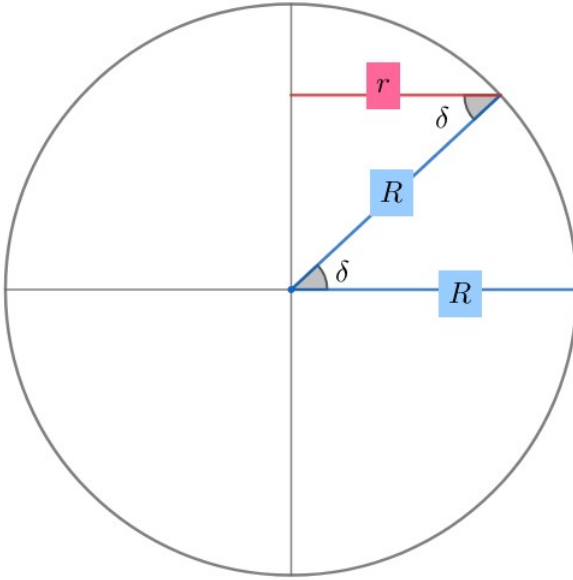


Figura F.8: Relacionando r e R

Perceba:

$$\cos \delta = \frac{r}{R}$$

Agora, dividindo as duas equações de antes:

$$\frac{\Delta x}{\Delta\alpha} = \frac{r}{R} = \cos \delta$$

Ou seja:

$$\boxed{\Delta x = \Delta\alpha \cos \delta}$$

Por fim, sendo $\mu_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, podemos chegar no resultado final:

$$\boxed{\mu^2 = \mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2}$$

O termo do cosseno pode ser interpretado de uma outra maneira. Vamos supor que um observador no hemisfério norte esteja observando o movimento diário das estrelas no céu. Um astro de $\delta = 0$, i.e. que esteja no horizonte do observador, e outro de $\delta = 80^\circ$, irão ambos dar um volta completa em torno do eixo de rotação da Terra após cerca de 24h². Entretanto, o astro de maior declinação percorrerá um círculo muito menor que aquele do astro no horizonte. Como ambos os astros possuem declinações constantes, o tamanho do círculo menor será $\cos 80^\circ = 0,17$ vezes o tamanho do círculo percorrido pelo outro astro. Isso pode ser observado na seguinte figura:

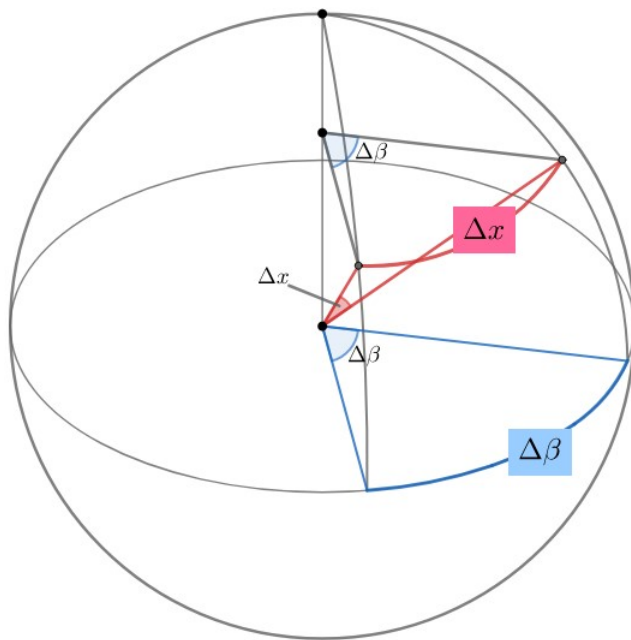


Figura F.9: Relacionando Δx e $\Delta\beta$ (somente quando esses valores são pequenos.)

Assim como provamos acima, temos:

$$\Delta x = \Delta\beta \cos \delta$$

²O correto seria um dia sideral, que foi estudado no capítulo 6.

Exemplo 1

Uma estrela possui velocidade radial v_r de 150 km/s e velocidade tangencial v_t de 100 km/s. Qual o ângulo β que o deslocamento espacial da estrela faz com a linha de visada?

Solução

Basta montar o seguinte esquema:

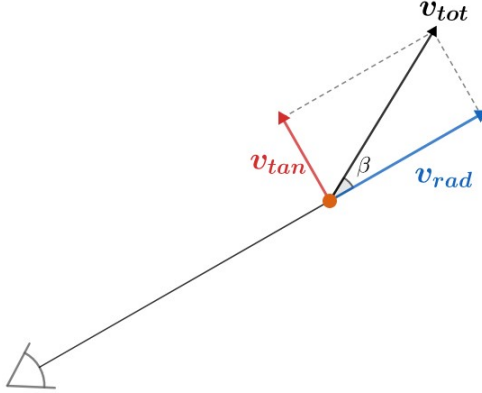


Figura F.10: Esquema das velocidades espaciais da estrela.

Assim, o ângulo procurado será

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_r}{v_t}\right) = \arctan(1,5) \approx \boxed{56,3^\circ}$$

Exemplo 2

Calcule o movimento próprio (em "/ano) de Altair na tabela F.4.

Solução

O movimento próprio em declinação μ_δ pode ser encontrado percebendo que a declinação aumentou 15,6" em 40 anos:

$$\mu_\delta = \frac{15,6''}{40 \text{ anos}} = 0,39''/\text{ano}$$

Já a ascensão reta aumentou 22,2" nesse mesmo período. Assim:

$$\mu_\alpha = \frac{22,2''}{40 \text{ anos}} = 0,555''/\text{ano}$$

A ascensão reta diminui 0,37s a cada 10 anos. Isso equivale a $0,37 \cdot 15 = 5,55''$ em 10 anos e logo $\mu_\alpha = 0,555''/\text{ano}$.

Com isso, basta utilizarmos a relação $\mu^2 = \mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2$. A declinação a ser utilizada não é bem definida³, logo devemos utilizar o valor médio ($8^\circ 52' 02,5''$) para minimizar o erro. Desse modo, chegamos em $\mu = 0,673''/\text{ano}$.

Exemplo 3:

A Estrela de Barnard é a estrela com maior movimento próprio já descoberta. Temos os seguintes dados referentes a ela: paralaxe de 547 *mas*, velocidade radial -110 km/s, movimento próprio $10,43''/\text{ano}$ e magnitude 9,50. Assim, determine se em algum momento do universo será possível observar esse astro a olho nu. Considere que a sua velocidade permanece constante e que a magnitude limite do olho humano é 6.

Solução

A distância d até a estrela pode ser calculada pela paralaxe:

$$d[\text{pc}] = \frac{1}{547 \text{ mas}} = 1,828 \text{ pc}$$

Podemos converter esse valor para $d = 5,64 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

A velocidade tangencial pode ser calculada a partir do movimento próprio. Primeiramente, temos:

$$\mu = 10,43''/\text{ano} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ rad/s}$$

Logo:

$$v_{tan} = \mu d = 90,4 \text{ km/s}$$

Agora, perceba que a situação de máximo brilho de Barnard ocorrerá quando ela estiver o mais próxima possível da Terra. Desse modo, basta calcularmos sua magnitude nesse ponto. Temos a seguinte imagem:

³Isso porque estamos realizando aproximações que as variações das coordenadas são pequenas.

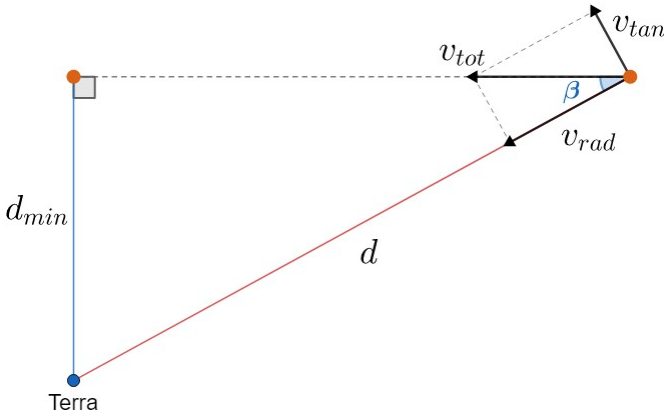


Figura F.11: Esquema da trajetória da estrela de Barnard ao longo do tempo até ficar a uma distância mínima d_{min} da Terra

Vamos encontrar o ângulo β :

$$\beta = \arctan \frac{v_{tan}}{|v_{rad}|} = \arctan \left(\frac{90,4}{110} \right) = 39,4^\circ$$

Assim, podemos encontrar d_{min} :

$$d_{min} = d \cdot \sin \beta = 3,58 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

Para encontrarmos a magnitude nessa distância mínima, basta utilizarmos a Equação de Pogson. Como a luminosidade de Barnard permanece constante:

$$9,50 - m = -2,5 \log \left(\frac{\frac{L_{bar}}{4\pi d^2}}{\frac{L_{bar}}{4\pi d_{min}^2}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{d_{min}^2}{d^2} \right) = -2,5 \log (0,403)$$

$$\Rightarrow m = 9,50 - 0,99 = \boxed{8,51}$$

Como o limite de magnitude do olho humano é +6, **nunca será possível enxergar a estrela de Barnard a olho nu**, considerando apenas seu movimento próprio.

Exemplo 4

Um estudante tenta medir o campo de visão da ocular de seu telescópio usando a rotação da Terra. Para tal, o observador aponta o telescópio para

Vega, desliga o motor de acompanhamento e mede o tempo que Vega leva para cruzar o diâmetro do campo de visão obtendo o valor $\Delta t = 5,3 \text{ min}$. Qual o campo de visão deste telescópio em minutos de arco?

Dados:

- Vega: $\alpha = 18,5 \text{ h}$ e $\delta = +39^\circ$
- Dia sideral: $D_{sid} = 23^h 56^m$

Solução

A situação pode ser ilustrada pela figura F.9. Nesse caso, o campo de visão do telescópio é o próprio ângulo Δx , enquanto o ângulo $\Delta \beta$ é a variação da amplitude de Vega durante o intervalo de tempo Δt . Como Vega dá uma volta completa em um dia sideral, temos:

$$\Delta \beta = 2\pi \frac{\Delta t}{D_{sid}}$$

Agora, sabemos que $\Delta x = \Delta \beta \cos \delta$, logo:

$$\Delta x = 2\pi \frac{\Delta t}{D_{sid}} \cos \delta$$

Realizando os cálculos, obtemos $\Delta x = 0,018 \text{ rad} = 62'$

Apêndice G

Eclipses

A palavra grega *eklipsis* significa “desaparecimento”. Na astronomia, o corpo ocultado é do Sol ou a Lua quando vistos da Terra, caracterizando um eclipse solar ou lunar, respectivamente. Neste apêndice, iremos compreender os fatores associados a esses espetáculos astronômicos.



Figura G.1: Eclipse solar

G.1 Fases da Lua

As fases da Lua são resultados das configurações entre a Terra, a Lua e o Sol. Desse modo, de acordo com a relação encontrada no capítulo 6, uma fase da Lua repete-se a cada cerca de 29,5 dias, que é o intervalo conhecido como um mês sinódico ou luação.

Agora, vamos nomear as fases da Lua. Temos a seguinte figura:

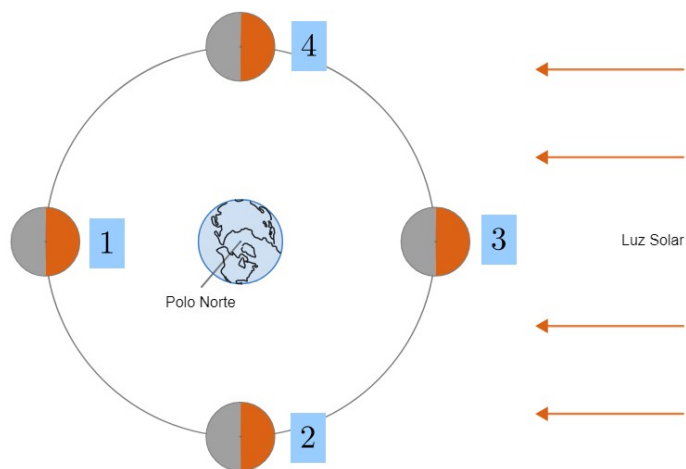


Figura G.2: Fases da Lua

Uma característica **muito** importante com relação às fases da Lua é que uma configuração fixa entre a Terra, a Lua e o Sol é observada de maneiras diferentes dependendo do hemisfério, assim como ilustrado na figura abaixo para a fase 4:

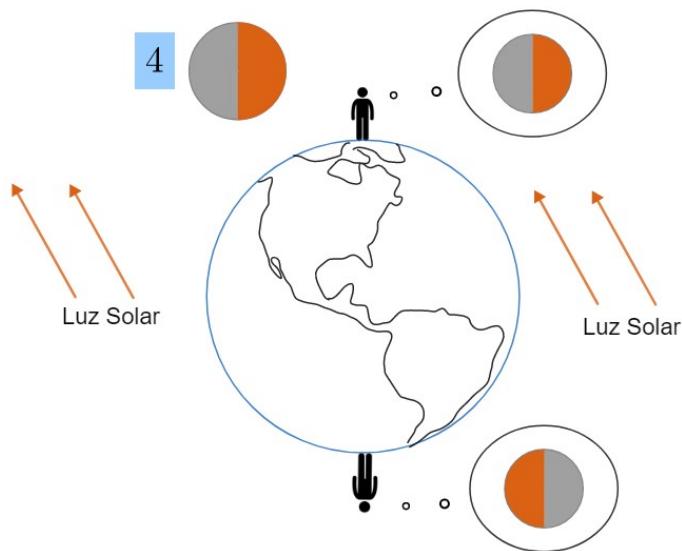


Figura G.3: “Inversão” da Lua

Assim, quando vistas do hemisfério **norte**, as fases da Lua são:

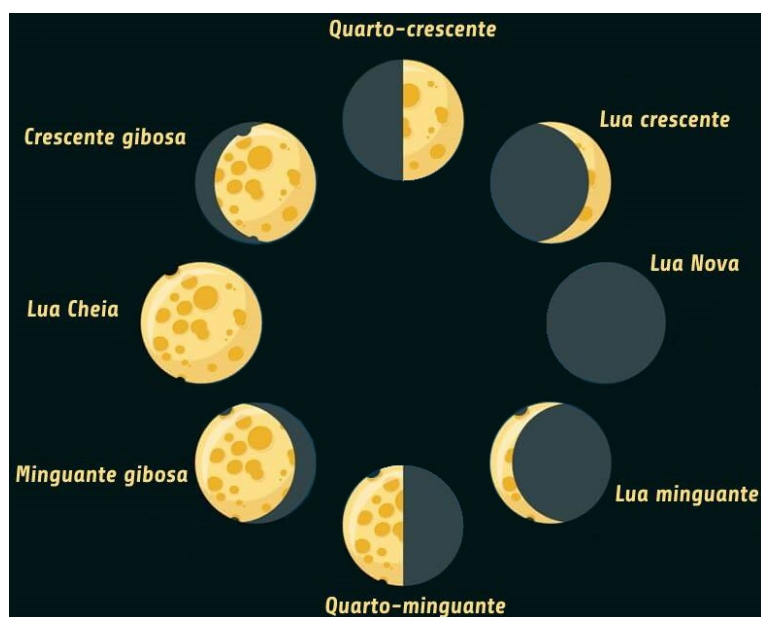


Figura G.4: Fases da Lua no HN

Ou seja, na imagem [G.2](#):

1. Lua cheia
2. Lua quarto minguante
3. Lua nova
4. Lua quarto crescente

Com isso, podemos determinar os horários de nascer o ocaso da Lua em cada uma de suas fases. Como o mês sinódico é muito maior que um dia, podemos desprezá-lo para tal objetivo. De maneira parecida, iremos desprezar a translação da Terra. Primeiramente, vamos encontrar o horário de nascer da Lua cheia.

Sabemos que a Terra gira de acordo com a regra da mão direita em torno de seu eixo, ou seja:

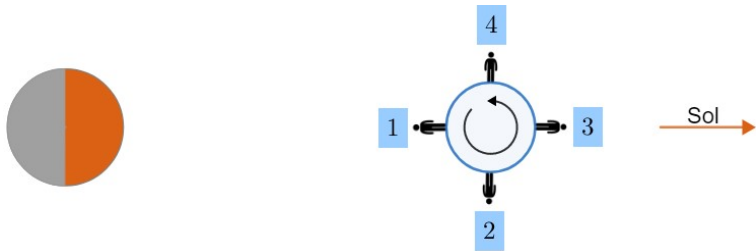


Figura G.5: Encontrando horários de nascer e ocaso da Lua

Vamos analisar essa imagem. Em 3, o Sol está a pino, i.e. são cerca de 12:00, mas a Lua não está visível. Já em 4, já é possível observar a Lua. Como a Terra deu um quarto de volta entre 3 e 4, passaram-se 6h desde o meio-dia, logo são cerca de 18:00. Isso significa que a Lua cheia nasce **aproximadamente**¹ às 18:00. De maneira análoga, ela culmina às 00:00 (ponto 1) e se põe às 6:00 (ponto 2). Realizando um procedimento análogo para as demais fases da Lua:

Fase da Lua	Horário do nascer	Horário do ocaso
Cheia	18:00	6:00
Quarto minguante	00:00	12:00
Nova	6:00	18:00
Quarto crescente	12:00	00:00

Faces visível e oculta

Uma importante característica da órbita da Lua é que ela é **síncrona**, i.e. seus períodos de rotação e translação são idênticos. A principal consequência disso é que sempre vemos a mesma face da Lua, assim como representado pela imagem abaixo.

¹Esse valor refere-se ao tempo solar verdadeiro local, que não necessariamente é igual ao tempo civil, porém costuma ser próximo.

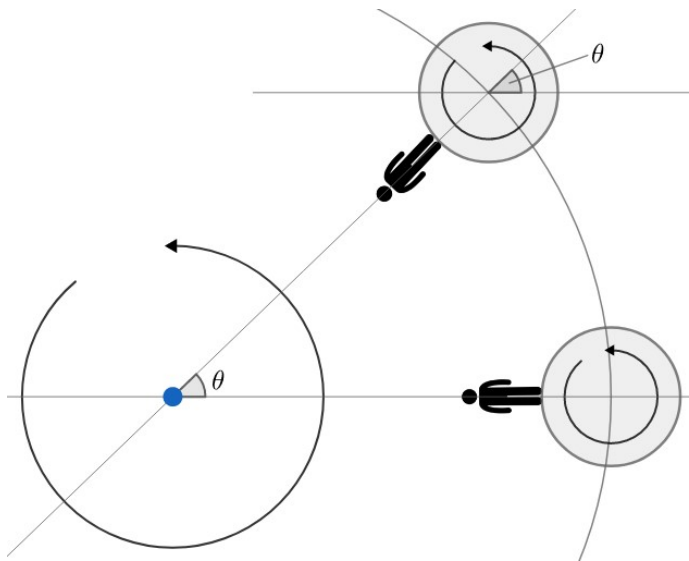


Figura G.6: Órbita síncrona da Lua

Na verdade, devido a um efeito chamado de **libração**, podemos enxergar um pouco mais que um hemisfério lunar. Esse efeito consiste de um pequeno balanceio da Lua, que pode ser visualizado por gifs na internet².

Por fim, vale ressaltar que a imagem da Lua muda de acordo com a posição do observador na Terra. De modo geral, mudanças de um hemisfério para o outro fazem com que ela fique invertida³, assim como representado pela imagem:



Figura G.7: Mudança da imagem da Lua dependendo do hemisfério.

²É difícil representá-lo por imagens.
³Tal inversão não é perfeita, pois seria necessário selecionar latitudes e longitudes específicas.

G.2 Eclipses

Como vimos no capítulo 5, a inclinação da órbita lunar em relação à eclíptica é cerca de $5,14^\circ$. Por essa razão, não é em toda fase nova ou cheia da Lua que há um eclipse. Para isso acontecer, é necessário um certo grau de alinhamento entre a Terra, a Lua e o Sol. Agora, vamos estudar melhor cada tipo de eclipse.

Eclipse solar

Quando há um alinhamento entre os três corpos celestes em questão, temos que ou a Terra ou a Lua pode ser o corpo entre os dois outros. Assim, um eclipse solar ocorre quando a Lua fica entre o Sol e a Terra. O efeito dos raios solares é produzir duas regiões de sombra: a umbra e a penumbra. A imagem abaixo representa essa situação.

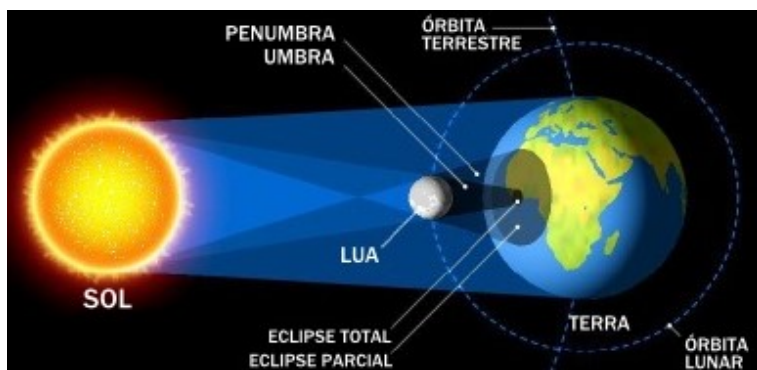


Figura G.8: Eclipse Solar

Na região do planeta mais escura, contida na **umbra**, ocorre um **eclipse solar total**, já que a Lua está totalmente em frente ao Sol. Por outro lado, na região da **penumbra**, um **eclipse solar anular ou parcial** é observado. A imagem abaixo, representa essas situações. Há ainda um terceiro caso conhecido como **eclipse solar anular** que será estudado a seguir.



Figura G.9: Tipos de eclipses solares

Eclipse solar anular

Dependendo da distância entre a Lua e a Terra, a projeção do cone de sombra na superfície terrestre pode ou não condicionar um eclipse solar total. Quando essa necessidade não é atendida, um eclipse solar anular é observado. A imagem abaixo ilustra a condição limite para um eclipse solar total.

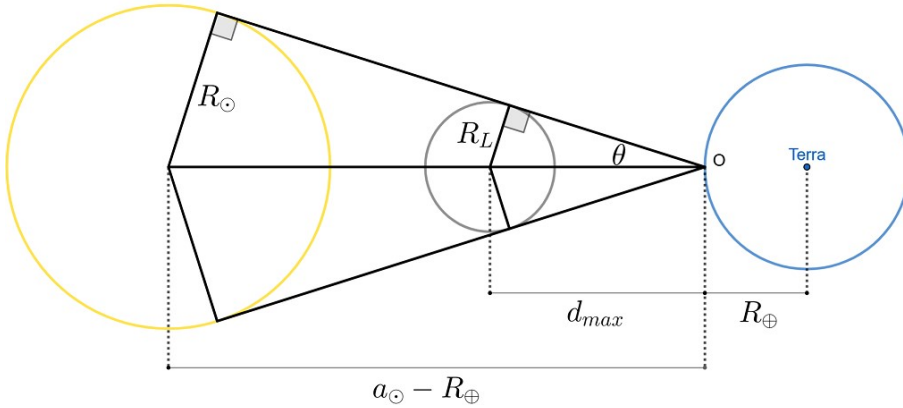


Figura G.10: Condição limite para um ponto na Terra observar um eclipse solar total

Agora, vamos calcular o valor máximo da distância Terra-Lua para que seja possível observar um eclipse solar total. Vale ressaltar que d_{max} vai da superfície da Terra até o centro da Lua, então a distância Terra-Lua é $d_{max} + R_{\oplus}$ nessa situação.

De acordo com a figura, temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{R_L}{d_{max}} = \frac{R_{\odot}}{a_{\odot} - R_{\oplus}}$$

Ou seja:

$$d_{max} = (a_{\odot} - R_{\oplus}) \frac{R_L}{R_{\odot}}$$

Realizando a conta, obtemos $d_{max} + R_{\oplus} = 3,8 \cdot 10^8$ m. Assim, caso a distância Terra-Lua eventualmente seja maior que esse valor, veremos um eclipse solar anular. Como a distância entre esses corpos quando a Lua está em seu afélio é $d_{af} \approx 4,1 \cdot 10^8$ m, temos que $d_{max} + R_{\oplus} < d_{af}$. Desse modo, é possível observarmos eclipses solares anulares.

Vale ressaltar que, em todo eclipse solar, a Lua está na fase nova.

Eclipse lunar

Enquanto o eclipse solar ocorria quando a Lua ocultava o Sol, eclipses lunares acontecem quando a Lua passa pela sombra da Terra. Novamente, é necessário haver um certo grau de alinhamento entre esses corpos. A imagem abaixo ilustra essa situação.

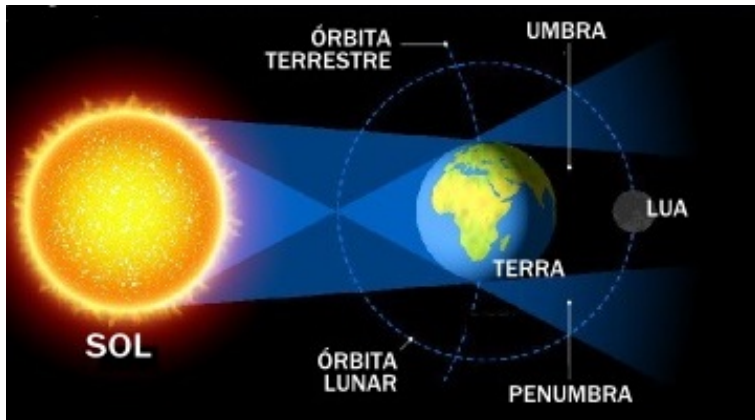


Figura G.11: Eclipse Lunar

Há 3 tipos de eclipses lunares: **total**, **parcial** e **penumbral**. Eles são caracterizados por:

- Eclipse lunar total: Lua completamente imersa na umbra
- Eclipse lunar parcial: Lua com partes tanto na umbra quanto na penumbra
- Eclipse lunar penumbral: Lua imersa na penumbra sem nenhuma parte na umbra

A imagem abaixo ilustra esses conceitos.

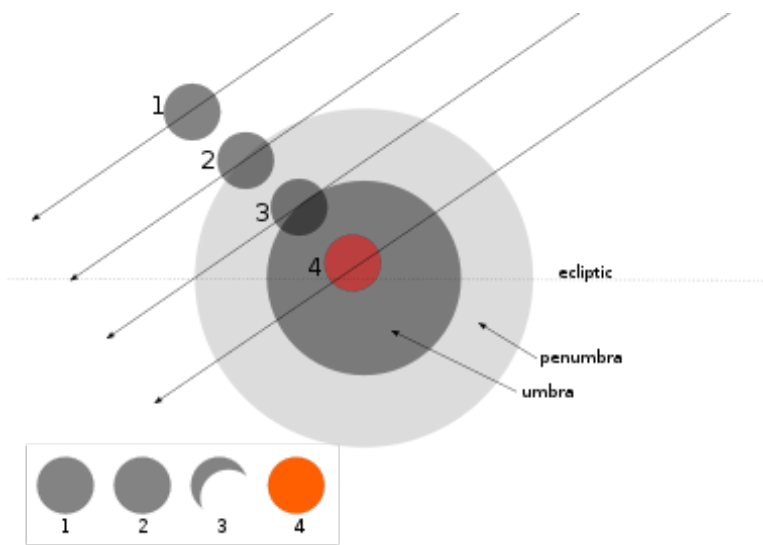


Figura G.12: Em 1, não há eclipse; em 2, há um **eclipse lunar penumbral**, mas parcial; em 3, há um **eclipse lunar parcial** e em 4, há o **eclipse lunar total**

Vale ressaltar que a Lua fica avermelhada durante um eclipse solar total. Nessa situação, toda a luz solar que incide na superfície lunar passou pela atmosfera terrestre, sofrendo tanto refração quanto dispersão de Rayleigh. Entretanto, a luz vermelha é menos sujeita a esses fatores que a luz azul, fazendo com que somente ela chegue na Lua. Ainda, eclipses lunares ocorrem quando a Lua está em sua fase cheia.

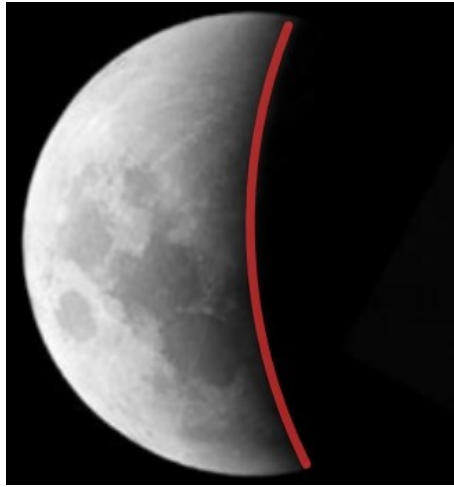
Exemplo 1

A fotomontagem a seguir traz duas imagens da Lua. Qual(is) dela(s) foram tiradas durante eclipses?



Solução

De acordo com a imagem G.4, não existe nenhuma fase da Lua que representa o posicionamento da concavidade da Lua da direita, que está destacado na imagem abaixo.



Desse modo, pode-se perceber que a imagem da direita representa um eclipse lunar, enquanto a da esquerda representa a Lua em sua fase crescente quando vista do HS.

Eclipses lunares anulares

De maneira análoga ao que fizemos para conferir a possibilidade de existirem eclipses solares anulares, podemos determinar a existência de eclipses lunares anulares, que ocorrem quando nenhum ponto da Lua está na umbra. No caso limite:

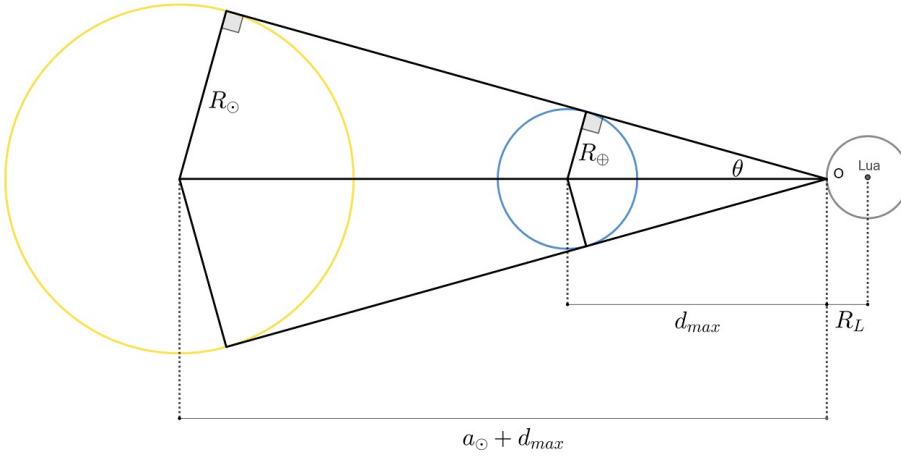


Figura G.13: Condição limite para a existência de eclipses lunares anulares

Pela figura, temos:

$$\sin \theta = \frac{R_{\oplus}}{d_{max}} = \frac{R_{\odot}}{a_{\odot} + d_{max}}$$

Reescrevendo:

$$d_{max} = a_{\odot} \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot} - R_{\oplus}}$$

Realizando os cálculos, obtemos $d_{max} = 1,39 \cdot 10^9$ m. Como a distância $d_{max} + R_L > d_{af}$, a Lua nunca fica longe o suficiente para possibilitar a existência desse eclipse. Desse modo, é impossível ocorrer um eclipse lunar anular.

Apêndice H

Ângulo Sólido

O ângulo sólido trata-se do equivalente tridimensional do ângulo plano. Enquanto este relaciona comprimentos em uma circunferência, o ângulo sólido fornece uma relação para a área de regiões em esferas.

Enquanto ângulos planos são medidos em radianos, em que 2π rad equivalem a uma circunferência completa, a unidade de medida de ângulo sólido é o **esferorradiano**, cujo símbolo é o sr. A imagem abaixo ilustra esses conceitos.

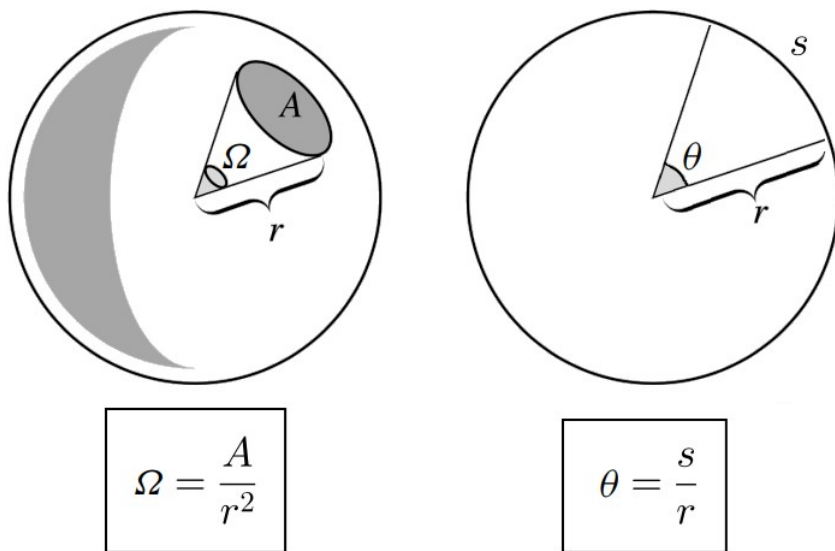


Figura H.1: Comparação entre o ângulo sólido e o ângulo plano

Assim como 2π rad equivalem a uma circunferência completa, podemos encontrar o valor em esferorradianos de uma esfera. Sabemos que a maior área

possível na superfície de uma esfera de raio r é $A_{esf} = 4\pi r^2$. Assim, o ângulo sólido Ω_{max} associado a essa área é:

$$\Omega_{max} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ sr}$$

H.1 Ângulo Sólido de Cones

A aplicação mais relevante do ângulo sólido na astronomia está relacionada ao cone. Em uma esfera de raio r , inserimos um cone de abertura 2θ , assim como ilustrado abaixo.

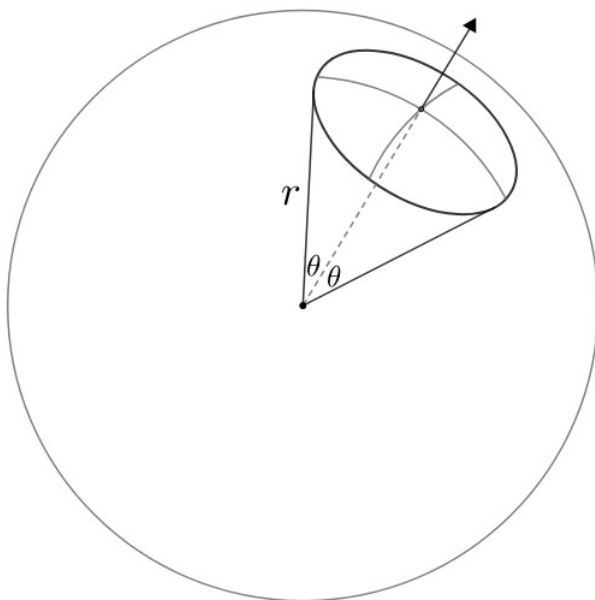


Figura H.2: Ângulo sólido de cone

A dedução do ângulo sólido associado a esse cone ultrapassa o escopo deste livro, porém seu valor é:

$$\Omega(\theta) = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Como esperado, $\Omega(\pi) = 4\pi \text{ sr}$, que equivale ao ângulo sólido de uma esfera completa.

Essa expressão é especialmente útil quando o ângulo θ é pequeno, i.e. $\theta \ll 1$. Nesse caso, podemos aproximar $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, ou seja:

$$\Omega_{peq} \approx 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)$$

Reescrevendo:

$$\boxed{\Omega_{peq} \approx \pi\theta^2}$$

Essa equação pode ser interpretada de outra maneira. Para $\theta \ll 1$, a área A associada a um objeto de raio ρ é:

$$A \approx \pi\rho^2$$

Pela definição de ângulo sólido, $\Omega = \frac{A}{r^2}$, logo:

$$\Omega_{peq} \approx \frac{\pi\rho^2}{r^2}$$

Mas, para $\theta \ll 1$, $\theta \approx \frac{\rho}{r}$, logo:

$$\Omega_{peq} \approx \pi\theta^2$$

Como esperado.

H.2 Conversão

É comum medirmos ângulos sólidos de objetos do céu em unidades além do sr. Por exemplo, caso o ângulo sólido de um objeto no céu seja muito pequeno, é mais conveniente utilizar o arcsec^2 . Outras unidades possíveis para o ângulo sólido são o rad^2 e os graus quadrados. Vamos aprender a converter entre elas.

Por **definição**, $1 \text{ sr} = 1 \text{ rad}^2$. Como $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, temos:

$$1 \text{ sr} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^2 \text{ graus quadrados}$$

Como $1^\circ = 3600 \text{ arcsec}$, temos:

$$1 \text{ sr} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3600}{1} \right)^2 \text{ arcsec}^2 \approx 4,25 \cdot 10^{10} \text{ arcsec}^2$$

Exemplo 1

Calcule o ângulo sólido compreendido pelo Brasil sabendo que ele possui $8.516.000 \text{ km}^2$ de área. Considere a Terra como uma esfera perfeita de raio 6371 km .

Solução

Podemos usar a definição de ângulo sólido:

$$\Omega_{BR} = \frac{A_{BR}}{R_{\oplus}^2} = \frac{8516000}{(6371)^2} = 0,2099 \text{ sr}$$

Também seria possível fazer uma simples regra de três:

$$\frac{4\pi R^2}{A_{BR}} = \frac{4\pi}{\Omega_{BR}}$$

Que resultaria no mesmo resultado.

Exemplo 2

M74, mais conhecida como Phantom Galaxy, é uma galáxia espiral de formato quase circular na constelação de Peixes. Sabendo que seu diâmetro angular vale $10'$, calcule seu ângulo sólido e sua “área física”, sabendo que ela se encontra a uma distância de 9 Mpc.

Solução

O raio angular de M74 vale metade de seu diâmetro angular, i.e. $5'$. Assim, podemos calcular seu ângulo sólido em arcsec²:

$$\Omega = \pi (5' \cdot 60)^2 \approx 282743 \text{ arcsec}^2$$

Como $1 \text{ sr} = \left(\frac{180 \cdot 3600}{\pi} \right)^2 \text{ arcsec}^2$:

$$\Omega = 282743 \text{ arcsec}^2 \cdot \left(\frac{\pi}{180 \cdot 3600 \text{ arcsec}} \right)^2 \text{ sr} = 6,65 \cdot 10^{-6} \text{ sr}$$

Assim, sua área física será:

$$A = \Omega R^2 = 6,65 \cdot 10^{-6} \cdot (9 \cdot 206265 \cdot 10^6 \cdot 1,496 \cdot 10^{11})^2 \approx \boxed{5,13 \cdot 10^{41} \text{ m}^2}$$

Onde o raio R da esfera é a própria distância de M74 até nós.