

$$v = u + at$$

$$\omega = \omega_0 + at$$

$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$$

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$$

$$v^2 = u^2 + 2as = \omega_0^2 + 2a\theta$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

GUIA DE FÍSICA EXPERIMENTAL

— Por medalhistas nacionais e internacionais —

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



Guia de Física Experimental

Edição 2.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Agosto de 2026

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

Em uma olimpíada de Física, a prova experimental costuma ser um desafio à parte. Ela exige mais do que o domínio teórico; testa a criatividade, a paciência e a habilidade de obter resultados confiáveis a partir de um aparato real, com todas as suas imperfeições.

Foi pensando nisso que nós, do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de ex-medalhistas em olimpíadas como a Olimpíada Internacional de Física (IPhO) e a Olimpíada Europeia de Física (EuPhO), desenvolvemos este material. Percebemos que muitas das habilidades cruciais para o sucesso no laboratório, aquelas que aprendemos com a própria experiência, nem sempre são encontradas nos livros.

Este guia compila essas lições práticas. Aqui, você encontrará um roteiro focado em desenvolver a sua intuição experimental: desde o planejamento das medições e a análise gráfica dos dados até o tratamento rigoroso de incertezas e a apresentação clara de seus resultados.

Nosso objetivo é transformar a prova experimental de uma fonte de ansiedade em uma chance para você aplicar seus conhecimentos com segurança e método. Esperamos que este material seja um valioso companheiro em sua jornada de preparação, ajudando você a alcançar todo o seu potencial.

Atualizações versão 2.0

Este livro foi inicialmente lançado em setembro de 2025. Nesta nova versão (Agosto de 2026), adicionamos:

-Dificuldade e tempo: Agora, todos os experimentos contam com uma classificação de dificuldade e de tempo esperado para resolução. A dificuldade pode ser: iniciante (para aplicar conceitos básicos), média (o nível comum de uma prova da OBF), difícil (o nível comum de uma prova da seletiva de física para olimpíadas internacionais) e insano (nível de provas internacionais como a IPHO). Nesta versão, a grande maioria dos experimentos são classificados com dificuldade iniciante ou média; nenhum deles é classificado como insano.

-Revisão de todos os capítulos: Nesta nova versão, fizemos diversos ajustes ao longo do livro, tanto nos capítulos teóricos quanto no experimentos.

-Novos conteúdos: Além de algumas adições ao longo dos capítulos teóricos, foi adicionado um novo apêndice sobre distribuição normal. O conteúdo do apêndice é bem avançado, mas é recomendado para aqueles que querem entender melhor sobre a estatística por trás dos experimentos e como obter resultados mais precisos.

Sumário

Créditos e Contato	12
1 Medidas, erros e incertezas	14
1.1 Introdução	14
1.2 Medidas	14
1.2.1 Algarismos significativos	14
1.2.2 Representação da medida	17
1.3 Erros e Incertezas	18
1.3.1 Apresentação da incerteza	19
1.3.2 Instrumentos de medida	21
1.3.3 Incerteza aleatória	23
1.3.4 Propagação de Incertezas	26
1.4 Questões	31
1.5 Soluções	33
2 O uso da calculadora	40
2.1 Introdução	40
2.2 Modos da calculadora	41
2.2.1 Cálculos Aritméticos Básicos	41
2.2.2 Desvio Padrão	41
2.2.3 Cálculos de regressão	44
2.2.4 Linearização	48
2.3 Incertezas Instrumentais	51
2.3.1 Instrumentos Analógicos	51

2.3.2	Instrumentos Digitais	52
2.4	Boas Práticas e Erros a Evitar	53
2.5	Questões	55
2.6	Soluções	68
3	Tabelas e Gráficos	82
3.1	Introdução	82
3.2	Tabela	82
3.2.1	Título	84
3.2.2	Símbolo ou nome e unidade das variáveis	84
3.2.3	Medidas e incerteza das medidas	84
3.3	Gráfico	85
3.3.1	Título	87
3.3.2	Eixos	87
3.3.3	Pontos Experimentais	88
3.4	Determinando coeficientes	90
3.4.1	Regressão Linear	91
3.4.2	Método Gráfico	92
3.5	Tabelas e Gráficos Linearizadas	93
3.6	Dilog e Monolog	96
3.6.1	Dilog	97
3.6.2	Monolog	97
3.6.3	Pontos Experimentais	98
3.7	Checklist de Boas Práticas	100
4	Instrumentos de medidas	102
4.1	A incerteza experimental	103
4.2	Instrumentos analógicos	104
4.2.1	Como usar uma régua ou fita métrica	105
4.2.2	Como usar um paquímetro	106
4.2.3	Como usar um micrômetro	107

4.3	Instrumentos digitais	109
4.3.1	Como usar um multímetro	110
5	Dicas gerais	114
5.1	Instruções iniciais	114
5.2	Dicas práticas	115
5.3	Cuidados na montagem	117
5.3.1	Mecânica	117
5.3.2	Óptica	119
5.3.3	Elétrica	122
5.3.4	Termodinâmica	123
5.4	Outras materiais de estudo	124
6	Experimentos de Mecânica	125
6.1	Introdução	125
6.2	Experimentos	125
6.2.1	Lançamento - Dificuldade média - 3h	125
6.2.2	Massa-mola - Dificuldade média - 5h	132
6.2.3	Pêndulo simples - Dificuldade iniciante - 1h30m	136
6.2.4	Pêndulo físico - Dificuldade média - 4h45m	139
6.2.5	Pêndulo de torção - Dificuldade média - 1h45m	145
6.2.6	Pêndulo duplo com mola - Dificuldade média - 1h	148
6.2.7	Pêndulo balístico - Dificuldade média - 1h15m	150
6.3	Soluções	152
6.3.1	Lançamento	152
6.3.2	Massa-mola	162
6.3.3	Pêndulo Simples	174
6.3.4	Pêndulo físico	178
6.3.5	Pêndulo de torção	198
6.3.6	Pêndulo duplo com mola	204
6.3.7	Pêndulo balístico	208

7	Experimentos de Óptica	212
7.1	Introdução	212
7.2	Experimentos	212
7.2.1	Lei de Snell - Dificuldade média - 2h15m	212
7.2.2	Prismas - Dificuldade iniciante - 1h15m	217
7.2.3	Lei de Malus - Dificuldade média - 1h30m	220
7.2.4	Redes de difração - Dificuldade média - 3h30m	222
7.2.5	Difração de fenda única - Dificuldade média - 2h30m	226
7.3	Soluções	228
7.3.1	Lei de Snell	228
7.3.2	Prismas	238
7.3.3	Lei de Malus	242
7.3.4	Redes de difração	245
7.3.5	Difração de fenda única	257
8	Experimentos de Circuitos	265
8.1	Introdução	265
8.2	Experimentos	265
8.2.1	Testando funções do multímetro - Dificuldade iniciante - 1h	265
8.2.2	Capacitores com dielétricos - Dificuldade iniciante - 1h45m	272
8.2.3	Resistores Ohmicos e Não-Ohmicos - Dificuldade média - 1h45m	275
8.2.4	Descarga de capacitor - Dificuldade iniciante - 1h30m	284
8.2.5	Curva característica de um LED - Dificuldade média -1h30m	286
8.2.6	Resistividade - Dificuldade iniciante - 1h	289
9	Experimentos de Miscelânea	293
9.1	Introdução	293
9.2	Experimentos	293
9.2.1	Força Magnética - Dificuldade média - 2h30m	293
9.2.2	Sistema Solar - Dificuldade média - 2h	297

9.2.3	Transformações gasosas - Dificuldade média - 1h15m	300
9.2.4	Lei de Wien/Stefan-Boltzmann - Dificuldade média - 1h15m	304
9.2.5	Flutuabilidade - Dificuldade iniciante - 1h	308
9.2.6	Pressão hidrostática - Dificuldade iniciante - 1h	311
9.2.7	Bernoulli - Dificuldade iniciante - 1h	314
9.2.8	Viscosidade - Dificuldade difícil - 3h	316
9.2.9	Efeito doppler - Dificuldade iniciante - 1h	319
9.2.10	Ressonância em uma cavidade com ar - Dificuldade iniciante - 2h	321
9.2.11	Ondas em cordas - Dificuldade iniciante - 1h	325
9.2.12	Interferômetro de Fabry-Perrot - Dificuldade média - 3h	328
9.2.13	Efeito fotoelétrico - Dificuldade média - 3h	332
9.3	Soluções	334
9.3.1	Força Magnética	334
9.3.2	Sistema Solar	342
9.3.3	Transformações gasosas	346
9.3.4	Lei de Wien/Stefan-Boltzmann	350
9.3.5	Flutuabilidade	357
9.3.6	Pressão hidrostática	361
9.3.7	Bernoulli	366
9.3.8	Viscosidade	369
9.3.9	Efeito doppler	387
9.3.10	Ressonância em uma cavidade com ar	390
9.3.11	Ondas em cordas	394
9.3.12	Interferômetro de Fabry-Perrot	397
9.3.13	Efeito fotoelétrico	406
A	Apêndice: Distribuição normal	411
A.0.1	Distribuição binomial	411
A.0.2	Distribuição Normal/Gaussiana	412

A.0.3	Propriedades	413
A.0.4	Média	415
A.0.5	Função erro	416
A.0.6	Soma de incertezas	417

Créditos e Contato

Autores

- Lucas Praça
- Lucas Tavares
- Arthur Gurjão
- Caio Yamashita
- Davi Tsuchie
- Elias Barros
- Eyke Cardoso
- Felipe Brandão
- Filipe Ya Hu
- Gustavo Globig
- João Victor Evers
- João Vitor Garcia
- Maria Beatriz Mesquita
- Paulo Vinícius
- Pedro Tsuchie
- Patrick Avelar
- Tiago Rocha
- Vitor Takashi

Autores dos capítulos teóricos

1. Medidas, Erros e Incertezas

- Lucas Praça
- Vitor Takashi
- **revisão:** Tiago Rocha e Eyke Cardoso

2. O uso da Calculadora

- Lucas Praça
- **revisão:** Tiago Rocha(2x)

3. Tabelas e Gráficos

- Vitor Takashi
- **revisão:** Lucas Praça e João Vitor Garcia

4. Instrumentos de Medida

- Vitor Takashi
- **revisão:** Lucas Praça e Eyke Cardoso

5. Dicas Gerais para Experimentos

- João Victor Evers

- Patrick Avelar

- **revisão:** Lucas Praça e Maria Beatriz Mesquita

Versão 2.0

1. Revisão e classificação dos experimentos

- Eyke Cardoso
- João Vitor Garcia
- Maria Beatriz Mesquita
- Tiago Rocha

2. Apêndice A: Distribuição normal

- Eyke Cardoso

3. Organização e administração

- Tiago Rocha

Capa

- Formatação da capa: Rebeca Mikai

Contato

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CgLpeLLyldLt79gtruOs5>

Instagram 

@projetonoiC

Site 

<https://noic.com.br/olimpiadas/fisica/>

Capítulo 1

Medidas, erros e incertezas

1.1 Introdução

Realizar medidas é um processo fundamental em qualquer experimento. No entanto, nenhuma medida é absolutamente exata – sempre há um erro associado. Neste capítulo, exploraremos como representar corretamente os valores medidos, levando em conta os erros experimentais e as incertezas envolvidas.

Os erros e incertezas são um dos pilares da física experimental. Portanto, compreender e tratá-los adequadamente é uma habilidade crucial para competições como a OBF, SOIF e olimpíadas internacionais. Pequenos descuidos podem levar a conclusões erradas, e um domínio desse tema pode fazer a diferença na apresentação de uma solução rigorosa e bem fundamentada.

1.2 Medidas

Em palavras simples, medir é simplesmente determinar o valor de uma grandeza física. Por exemplo, utilizar uma régua para aferir o comprimento de um lápis é essencialmente realizar uma medição. Muito provavelmente, você já realizou medidas centenas de vezes na sua vida. Entretanto, nesse capítulo veremos como é possível fazer isso de maneira correta e quais nuances é necessário ter para realizar uma medida corretamente.

1.2.1 Algarismos significativos

Antes de estudarmos a parte de medidas, erros e incertezas, é fundamental entender o que são algarismos significativos. Como o próprio nome indica, eles correspondem aos algarismos que realmente expressam algum significado de uma medida. Uma pergunta bem pertinente que pode surgir é: "Existem algarismos que não são significativos?" e a

resposta óbvia é que sim! Você certamente já foi chamado de "um zero à esquerda" alguma vez na vida, e a resposta daquela pergunta é bastante relacionada a isso. Por exemplo, a medida: 0,0094 m, tem apenas 2 algarismos significativos. Uma vez que ela também pode ser representada como 9,4 mm. Ou seja, os zeros à esquerda nesse exemplo não são significativos, já que apenas o 9 e o 4 representam uma informação real sobre a quantidade medida. Mas tome bastante cuidado, o algarismo 0 pode ser significativo em alguns casos! Regras para determinar algarismos significativos:

- Todos os dígitos diferentes de zero são significativos.
- Os zeros entre dígitos não nulos são significativos.
- Os zeros à direita de um número decimal são significativos.
- Os zeros à esquerda do primeiro dígito diferente de zero não são significativos.
- Os zeros à direita de um dígito sem ponto decimal não são significativos.

Para exemplificar, podemos criar a seguinte tabela com alguns exemplos:

Exemplos de algarismos significativos

Exemplo	Número	Quantidade de algarismos significativos
1	0,0423	3
2	0,423	3
3	1,23400	6
4	6302	4
5	800	1
6	8×10^2	1
7	$8,0 \times 10^2$	2
8	$0,8 \times 10^1$	1
9	0,400	3
10	$3,475 \times 10^4$	4

- **Exemplo 1:** Os zeros à esquerda do 4 não são significativos, pois servem apenas para posicionar a vírgula. Os dígitos 4, 2 e 3 são significativos.
 - **Exemplo 2:** O zero à esquerda do 4 não é significativo. 4, 2 e 3 são significativos.
 - **Exemplo 3:** Os zeros à direita de um número decimal são significativos, assim como os dígitos diferentes de zero.
 - **Exemplo 4:** Todos os dígitos diferentes de zero são significativos. O zero entre dígitos não nulos também é significativo.
-

- **Exemplo 5:** Como não há ponto decimal, os zeros à direita não são significativos. Apenas o 8 é considerado significativo.
- **Exemplo 6:** A notação científica indica que apenas o número 8 é significativo.
- **Exemplo 7:** O número antes do $\times 10^2$ é 8,0, ou seja, o zero após a vírgula é significativo, pois está à direita de um número decimal.
- **Exemplo 8:** O zero à esquerda do 8 não é significativo.
- **Exemplo 9:** O zero à esquerda do 4 não é significativo. Mas o 4 é significativo, e os dois zeros à direita do número decimal também são.
- **Exemplo 10:** A notação científica mostra claramente quais algarismos são significativos: 3, 4, 7 e 5.

Observação 1: Como os zeros à direita de um número decimal são considerados algarismos significativos, o número 1,000 possui uma maior precisão do que 1,0, mesmo que ambos sejam matematicamente equivalentes. Isso indica que a medição de 1,000 foi feita com um instrumento ou método mais preciso, capaz de distinguir até a terceira casa decimal.

Observação 2: embora o número 600 seja considerado que possui apenas um algarismo significativo. Dependendo da forma que é escrito, ele pode ter mais algarismos significativos:

- **Exemplo 1:** $600 \Rightarrow 1$ algarismo significativo. Os zeros à direita não são significativos, pois não há ponto decimal indicando que a precisão vai até eles.
- **Exemplo 2:** $600, \Rightarrow 3$ algarismos significativos. O ponto decimal indica que os zeros são significativos.
- **Exemplo 3:** $6 \times 10^2 \Rightarrow 1$ algarismo significativo.
- **Exemplo 4:** $6,0 \times 10^2 \Rightarrow 2$ algarismos significativos.
- **Exemplo 5:** $6,00 \times 10^2 \Rightarrow 3$ algarismos significativos.

Recomendação: Sempre que houver risco de ambiguidade, utilize a notação científica para expressar a significância de uma medida de forma clara e inequívoca.

Números Exatos

É importante distinguir números que vêm de medições (que sempre têm incerteza) de **números exatos**. Números exatos não possuem incerteza e, para fins de cálculo, podem ser considerados como tendo um número infinito de algarismos significativos. Eles surgem de duas fontes principais:

- **Contagem:** Por exemplo, as "6" medidas no experimento de Tavares (Seção 1.3.3) ou o número de oscilações de um pêndulo.
- **Definições:** Por exemplo, o fator "2" na fórmula do diâmetro de um círculo ($d = 2r$), ou a conversão exata 1 polegada = 2,54 cm.

Ao realizar cálculos, números exatos nunca limitam o número de algarismos significativos do resultado.

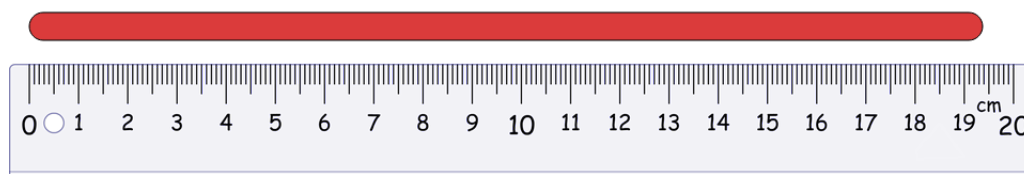
Regras para Cálculos com Algarismos Significativos

Antes de aprendermos o método rigoroso da propagação de incertezas, é útil conhecer as regras práticas para operar com algarismos significativos:

- **Multiplicação e Divisão:** O resultado final deve ter o mesmo número de algarismos significativos que o fator com o **menor número de algarismos significativos**.
 - Exemplo: $12,3$ (3 sig.) $\times$ $5,0$ (2 sig.) = $61,5 \rightarrow 62$ (2 sig.)
- **Adição e Subtração:** O resultado final deve ter o mesmo número de **casas decimais** que o termo com o **menor número de casas decimais**.
 - Exemplo: $12,345$ (3 c.d.) + $0,52$ (2 c.d.) = $12,865 \rightarrow 12,87$ (2 c.d.)

1.2.2 Representação da medida

Observe o seguinte exemplo na figura abaixo:



Neste exemplo, uma barra é medida com o uso de uma régua. É válido considerar que o comprimento da barra está entre 19,3 cm e 19,4 cm. No entanto, quando Gurjão fez a medição, ele anotou 19,3342123 cm, enquanto Praça registrou 19,3763451 cm.

Perceba que ambos concordaram nos três primeiros algarismos (1, 9 e 3), mas, a partir daí, não houve concordância — o que já indica que estavam "carteando" a medida. Ou seja, estavam chutando com base em suposições, já que é humanamente impossível determinar um comprimento com tanta precisão usando apenas uma régua simples.

Dessa forma, podemos dizer que os três primeiros algarismos são confiáveis, mas, a partir do quarto, os valores se tornam duvidosos, pois não podem ser determinados com exatidão com o instrumento utilizado.

Assim, a maneira correta de representar uma medida seria parar no primeiro algarismo "duvidoso". Nesse caso, poderia ser, por exemplo, 19,33 cm, 19,37 cm ou até 19,39 cm — desde que seja uma estimativa razoável dentro da precisão da régua.

Sabemos que a barra está entre 19,3 cm e 19,4 cm, mas o quarto algarismo já exige uma estimativa, pois não há como medi-lo com total certeza (por esse motivo é chamado de duvidoso). Por isso, seguimos a seguinte regra prática: o último algarismo de uma medida sempre será o "duvidoso", enquanto os anteriores são considerados "certos". Essa convenção nos ajuda a comunicar a precisão da medição de forma clara e confiável.

Para exemplificar, podemos criar a seguinte tabela com alguns exemplos:

Exemplos de algarismos duvidosos

Exemplo	Medida	Algarismo Duvidoso
1	1,07 cm	7
2	51,23 kg	3
3	1,202 A	2
4	4,234 m	4

Observação: A regra de que o último algarismo de uma medida é duvidoso só é válida para grandezas contínuas, obtidas por meio de medições experimentais. Em casos de grandezas discretas, como a contagem de maçãs, essa regra não se aplica, pois não há estimativa nem incerteza envolvida.

1.3 Erros e Incertezas

Como vimos anteriormente, nenhuma medida pode ser 100% precisa. Mesmo que utilizássemos um instrumento com resolução infinita, a própria natureza impõe limites fundamentais à precisão de certas medições (como demonstrado pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg).

No entanto, não é preciso recorrer a escalas quânticas para nos depararmos com incertezas. Na prática, toda medição de uma grandeza contínua — seja em escala microscópica ou macroscópica — envolve incertezas inevitáveis, resultantes das limitações dos instrumentos, do observador e do ambiente.

Assim como no exemplo da régua, em que podemos ter certeza apenas até o milímetro, em praticamente todas as medições **não é possível determinar o valor real exato da grandeza**. Com isso em mente, introduzimos o conceito de erro, definido como: "diferença, em módulo, entre o valor medido e o valor verdadeiro de uma grandeza". Entretanto, como o valor verdadeiro é desconhecido, passamos a trabalhar com a noção de incerteza, que pode ser entendida como uma "estimativa estatística do erro".

Para resumir: é impossível conhecer o valor verdadeiro de uma medida. Por isso, toda medida deve vir acompanhada de uma incerteza — ou seja, uma estimativa de quão distante (ou próxima) ela pode estar do valor real.

Dessa forma, a incerteza de uma medida indica um intervalo ao redor do valor obtido, dentro do qual há uma certa probabilidade de que o valor real da grandeza esteja situado.

1.3.1 Apresentação da incerteza

Normalmente, representamos incertezas com a letra sigma (σ) e normalmente acompanhada com um subscrito da grandeza a qual ela se refere. Por exemplo, σ_l pode representar a incerteza de um comprimento l .

A forma que a incerteza associada a uma medida é dada como:

$$\boxed{\text{medida} = (\text{valor medido} \pm \text{valor da incerteza}) [\text{unidade}]}$$

Em situações reais, as medidas são geralmente representadas da seguinte forma:

$$\boxed{m = (132,2 \pm 0,3) \text{ g}}$$

Nesse caso, o valor medido da massa é 132,2 g, e a incerteza associada (σ_m) é de 0,3 g.

Perceba que essa forma de representar a medida apresenta um $\pm$ (mais ou menos). Isso significa que o valor real da medida provavelmente está contido em um intervalo compreendido entre o valor medido menos o valor da incerteza e o valor medido mais o valor da incerteza. No exemplo da massa, seria entre $132,2 \text{ g} - 0,3 \text{ g} = 131,9 \text{ g}$ e $132,2 \text{ g} + 0,3 \text{ g} = 132,5 \text{ g}$. Esse intervalo é denominado intervalo de confiança. Note que o valor real da medida **provavelmente** está contido no intervalo, e não certamente está contido.

Além disso, uma outra regra deve ser satisfeita para que a medida seja representada corretamente: o valor da medida deve ter o mesmo número de casas decimais da incerteza.

Uma dúvida comum que pode surgir é: quantos algarismos significativos devemos usar ao representar uma medida com incerteza?

A resposta está na **forma padrão de representar incertezas**. De modo geral:

- A incerteza é representada com **apenas um algarismo significativo**;
- A medida deve ser arredondada para ter o **mesmo número de casas decimais da incerteza**.

No entanto, existe uma exceção prática: **quando o primeiro algarismo significativo da incerteza é 1 ou 2**, é comum (e aceitável) representá-la com **dois algarismos significativos**, para evitar perda excessiva de precisão.

Para exemplificar, podemos criar a seguinte tabela com alguns exemplos incorretos:

Exemplos de representações erradas de medidas

Exemplo	Medida
1	$m = (0,00022 + 0,00003) \text{ g}$
2	$l = (30,2 \pm 0,32) \text{ m}$
3	$U = 12,2 \pm 0,7 \text{ V}$
4	$k = (132,2 \pm 0,3)$
5	$T = (11,277 \pm 2,1) \text{ K}$
6	$v = 2,2241 \text{ km/s} \pm 0,3 \text{ m/s}$

- **Exemplo 1:** A apresentação da medida apresenta um $+$ ao invés de um $\pm$. A representação correta seria $m = (0,00022 \pm 0,00003) \text{ g}$
- **Exemplo 2:** A quantidade de casas decimais da medida é diferente da quantidade de casas decimais da incerteza. A representação correta seria $l = (30,2 \pm 0,3) \text{ m}$
- **Exemplo 3:** O parênteses não foi incluída na apresentação da medida. A representação correta seria $U = (12,2 \pm 0,7) \text{ V}$
- **Exemplo 4:** A unidade da medida não foi incluída na apresentação da medida. A representação correta seria $k = (132,2 \pm 0,3) \text{ N/m}$
- **Exemplo 5:** A quantidade de casas decimais da medida é diferente da quantidade de casas decimais da incerteza. A representação correta seria $T = (11,3 \pm 2,1) \text{ K}$. Perceba que para corrigir esse caso, devemos arredondar a medida.
- **Exemplo 6:** A unidade da medida e da incerteza são diferentes. A representação correta seria $v = (2224,1 \pm 0,3) \text{ m/s}$

1.3.2 Instrumentos de medida

Agora que já sabemos como representar corretamente uma medida acompanhada de sua incerteza, surge uma pergunta natural: "Como estimar uma incerteza?" Medir algo pode parecer simples — como usar uma régua para medir o comprimento de um objeto ou uma balança para determinar o peso de uma pessoa. O valor obtido pode vir de subdivisões marcadas no instrumento ou diretamente de um *display* digital. No entanto, entender e quantificar a incerteza associada a essa medida exige uma análise mais cuidadosa.

Basicamente, existem dois tipos de instrumentos de medida: **digitais** e **analógicos**. Os digitais são, como o nome sugere, aqueles que a saída é digital e que apresenta o valor medido em forma numérica (mostrada em um *display*); já os analógicos são aqueles que representam a grandeza medida de forma contínua, geralmente por meio de ponteiros sobre escalas graduadas.

Comparação entre instrumentos analógicos e digitais

Grandeza Medida	Instrumento Analógico	Instrumento Digital
Temperatura	Termômetro de mercúrio	Termômetro digital
Comprimento	Régua graduada	Paquímetro digital, trena a laser
Massa	Balança de molas	Balança digital
Tempo	Relógio de ponteiros	Relógio digital, cronômetro digital
Pressão	Manômetro de ponteiro	Manômetro digital

Incerteza em instrumentos analógicos

Ao utilizarmos instrumentos analógicos, normalmente fazemos a leitura da grandeza em uma escala graduada. Nesses casos, a incerteza associada à medição é, em geral, considerada como a metade do valor da menor divisão da escala.

Retomando o exemplo da régua utilizado por Gurjão e Praça, temos que, por se tratar de uma régua convencional (instrumento analógico), as graduações estão espaçadas de 1 mm em 1 mm. Isso indica que a menor divisão da escala para essa régua é 1 mm. Assim, aplicando a regra da incerteza mencionada anteriormente, obtemos que a incerteza associada à medição com a régua é $\sigma_x = 0,5 \text{ mm}$ ou $\sigma_x = 0,05 \text{ cm}$.

Observe que, na imagem, é amplamente aceito que a barra possui um comprimento entre 1,0 cm e 1,1 cm. Assim, conforme discutido anteriormente (seção 1.2.2), a forma correta de representar essa medida é indicar os algarismos certos (nesse caso, 1 e 0) e um algarismo duvidoso (a ser estimado). Portanto, uma forma adequada de expressar essa medida poderia ser:

$$l = (1,06 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Observação 1: Em alguns casos, assume-se que a incerteza de instrumentos analógicos é igual à menor divisão da escala, em vez de ser considerada metade dessa divisão. Essa abordagem tende a sobrestimar a incerteza. No entanto, ela é justificada pela natureza subjetiva da leitura de instrumentos analógicos, que pode ser afetada por fatores como a dificuldade de alinhar o olho com a escala ou pela variação na distância entre o ponteiro e a graduação.

Observação 2: Sempre deixe claro na prova da OBF a origem da incerteza. Você pode escrever algo como: "Por se tratar de uma régua, um instrumento analógico, sua incerteza é metade da menor divisão (neste caso, 1 mm). Logo, $\sigma_l = 0,5 \text{ mm}$."

Incerteza em instrumentos digitais

Como já foi dito anteriormente, ao utilizarmos instrumentos digitais, a leitura da grandeza é exibida diretamente em um *display* numérico. Nesses casos, a incerteza associada à medição é geralmente fornecida pelo fabricante (no manual, por exemplo). Entretanto, se nenhum manual for fornecido, considera-se que **a incerteza é igual à menor unidade do *display***

Considere agora que Patrick, durante uma de suas aulas no IFES, utilizou um multímetro digital para medir a voltagem de uma pilha. Para isso, ele selecionou a função de tensão contínua (DC) no multímetro e conectou as pontas de prova aos terminais da pilha, obtendo a seguinte leitura:

Em seguida, Patrick consultou o manual do multímetro e encontrou a seguinte informação:

VOLTAGEM DC

Faixa	Resolução	Precisão
200mV	100 μ V	$\pm 0.5\%$ of rdg + 3D)
2000mV	1mV	$\pm(0.8\%$ of rdg + 2D)
20V	10mV	
200V	100mV	
1000V	1V	$\pm(1.0\%$ of rdg + 2D)

Como o valor obtido por Patrick foi de 9,81 V, ele rapidamente identificou que essa medida se enquadrava na faixa de 20 V. Dessa forma, a precisão indicada no manual é de $\pm(0,8\%$ da leitura + 2D). Nesse contexto, *rdg* (do inglês *reading*) representa o valor lido no multímetro, enquanto *D* corresponde ao menor dígito exibido no display.

Logo, a incerteza é $\sigma_V = 0,8\% \times 9,81 + 2 \times 0,01 = 0,07848 + 0,02 = 0,09848 \approx 0,10 \text{ V}$

Portanto, o resultado final é:

$$V = (9,81 \pm 0,10) \text{ V}$$

No mesmo dia, Patrick encontrou um termômetro digital no laboratório, que indicava a seguinte leitura:

Diferentemente do caso anterior, este termômetro não vinha com manual nem qualquer informação sobre a incerteza do instrumento. Diante disso, Patrick adotou a convenção de considerar como incerteza a menor unidade exibida no visor do aparelho.

Logo, a representação correta da medida e sua respectiva incerteza é:

$$T = (27,31 \pm 0,01) \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Observação: As regras de incerteza vistas anteriormente continuam válidas, mas são incompletas. Na prática, a incerteza total de uma medida possui dois componentes principais: a incerteza instrumental (que acabamos de discutir) e a incerteza aleatória (tema da próxima seção).

1.3.3 Incerteza aleatória

Durante uma aula de óptica, tomado pelo tédio, Tavares resolveu fazer seu próprio experimento: deixou sua borracha cair da mesa e cronometrava (utilizando um cronômetro digital) o tempo que ela levava para atingir o chão. Repetiu o experimento algumas vezes e anotou os seguintes tempos:

Tempos obtidos por Tavares

Medida	1	2	3	4	5	6
Tempo (s)	1,07	1,01	1,19	1,12	1,13	1,02

Observação: Tavares é gigante! (por isso sua mesa tem uns 6 metros)

Perceba que as medidas variaram muito umas das outras, mesmo que Tavares esteja usando o mesmo instrumento, da mesma forma, sob condições parecidas.

Essa variação inevitável e imprevisível nos leva ao conceito de **incerteza aleatória**. Quase nenhum experimento é realizado sob exatamente as mesmas condições, e por isso as medições tendem a apresentar flutuações causadas por fatores fora de nosso controle — como pequenas vibrações, variações de temperatura, ruídos eletrônicos, ou até mesmo o tempo de reação do próprio observador.

Média aritmética

Ao observar os dados de Tavares, é natural que surja a pergunta: "Afim, qual é o tempo de queda a ser considerado?" É uma dúvida justa — uma vez que ele obteve mais

de um valor. A resposta para essa questão está na média aritmética, que serve justamente para representar, de forma equilibrada, o valor mais provável entre várias medições.

A definição de média aritmética para uma grandeza x qualquer é dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Onde $\sum_{i=1}^N x_i$ é o somatório de todas as medidas e N é a quantidade de medidas. Para exemplificar, podemos utilizar o exemplo do Tavares:

$$\bar{t} = \frac{1,07 + 1,01 + 1,19 + 1,12 + 1,13 + 1,02}{6} = \frac{6,54}{6} = 1,09 \text{ s}$$

Nesse caso, o somatório é a soma de todos os tempos e a quantidade de medidas é 6. Logo, $N = 6$.

Perceba que de modo geral, a média aritmética fornece um valor mais confiável do que qualquer medição isolada. Isso ocorre porque, ao considerar várias repetições, a média tende a compensar pequenas flutuações aleatórias que podem afetar cada medição individualmente — aproximando-se mais do valor real da grandeza medida.

Desvio padrão (da amostra)

Agora que já sabemos encontrar o valor da grandeza quando temos duas ou mais medidas, também é necessário encontrar sua incerteza aleatória. Para isso, utilizaremos o conceito de desvio padrão.

A definição do desvio padrão amostral para uma grandeza x qualquer é dada por:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Essa fórmula pode assustar um pouco ao ser vista inicialmente, entretanto, não é necessário memorizá-la (nem mesmo entendê-la) para OBF e outras olimpíadas, já que o desvio padrão amostral pode ser encontrado na calculadora. (Capítulo 2).

Para os curiosos, é possível entendê-la da seguinte forma:

- O termo $(x_i - \bar{x})$ é o **desvio** de cada medida em relação à média.
- Elevar ao quadrado, $(x_i - \bar{x})^2$, torna todos os desvios positivos e dá mais peso aos pontos mais distantes.
- O somatório, $\sum(x_i - \bar{x})^2$, representa a dispersão total do conjunto de dados.
- Dividir por $N - 1$ (o número de "graus de liberdade") calcula o desvio quadrático médio, conhecido como **variância**.
- A raiz quadrada final retorna a grandeza para as unidades originais, resultando no **desvio padrão**, uma medida de quão longe, em média, um ponto de dados individual tende a estar da média.

Caso você já saiba como utilizar a calculadora para encontrar o desvio padrão amostral, o valor obtido para os dados de Tavares seria: $S_x = 0,06957$ s

Basicamente, o desvio padrão é uma medida de quão espalhados estão os dados em relação à média. Ele estima a dispersão das medições individuais, ou seja, quanto cada valor tende a se afastar do valor médio. Quanto maior for o desvio padrão, mais variável e disperso é o conjunto de dados — indicando uma menor consistência entre as medições. Por isso o desvio padrão será útil para o cálculo da incerteza aleatória.

Cálculo da incerteza aleatória

Para quantificar a confiabilidade da média obtida a partir de várias medições, utilizamos o erro padrão da média. Essa grandeza representa a incerteza aleatória associada à média e indica o quanto ela pode variar caso o experimento fosse repetido.

O erro padrão da média é dado por:

$$\sigma_{x_{aleatorio}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

Essa fórmula não é oferecida nem pela OBF, nem pela calculadora. Logo, deverá ser memorizada. No exemplo do Tavares, obteríamos que: $\sigma_{t_{aleatorio}} = \frac{0,06957}{\sqrt{6}} = 0,0284$ s.

Observação: É importante não confundir S_x com $\sigma_{aleatorio}$:

- O **desvio padrão da amostra** (S_x) estima a dispersão das medições **individuais**. Se Tavares fizesse uma sétima medição, esperaríamos que ela caísse, com alta probabilidade, no intervalo $\bar{t} \pm S_x$. S_x não diminui significativamente com o aumento

de N .

- O **erro padrão da média** ($\sigma_{aleatorio}$) estima a incerteza na **própria média**. Ele responde à pergunta: "Se repetíssemos todo o experimento (as 6 medições), quão longe a nova média provavelmente estaria da primeira?". Como nossa confiança na média aumenta com mais dados, $\sigma_{aleatorio}$ diminui com $\sqrt{N}$.

1.3.4 Propagação de Incertezas

Uma dúvida que pode surgir neste ponto é: agora que aprendemos a calcular os dois tipos de incertezas — instrumental e aleatória —, qual delas devemos considerar?

A resposta é que ambas devem ser levadas em conta. No entanto, isso não significa simplesmente somá-las diretamente, pois a combinação das incertezas exige um cuidado especial.

Quando diferentes fontes de incerteza afetam uma medida, elas não se acumulam simplesmente como valores numéricos comuns, porque cada uma varia de forma independente. Em algumas medições, uma pode aumentar o valor medido, enquanto a outra pode diminuí-lo; em outras, pode ocorrer o contrário. Se somássemos diretamente os erros, estaríamos assumindo que todas as variações acontecem sempre no mesmo sentido, o que raramente é o caso. A combinação correta deve considerar essa independência, resultando em um valor menor que a soma simples.

A maneira correta de determinar a incerteza total de uma medida é usando a seguinte fórmula:

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{instrumental}^2 + \sigma_{aleatorio}^2}$$

Logo, no exemplo de Tavares, temos que a incerteza total da medida é dada por: $\sigma_{t_{total}} = \sqrt{0,01^2 + 0,0284^2} \approx 0,03011 \text{ s}$

Portanto, a forma correta de se representar a medida é:

$$t = (1,09 \pm 0,03) \text{ s}$$

Observação 1: No exemplo de Tavares, a incerteza instrumental é de 0,01 s, pois ele utilizou um cronômetro digital. Esse valor corresponde à menor unidade exibida no *display* do aparelho, o que define o limite de precisão do instrumento. Já a incerteza aleatória foi calculada acima.

Outra dúvida pode surgir neste momento: "Se não podemos somar as incertezas de maneira aritmética, como devemos proceder com as outras operações matemáticas?"

A resposta para essa pergunta pode ser encontrada em uma tabela do Anexo B da OBF. Essa tabela foi fornecida em edições anteriores, mas não foi incluída nos últimos anos.

Tabela B.3: Exemplos de expressões para cálculos de propagação de erros

$w = w(x, y, z, \dots)$	Expressão para a incerteza σ_w
$w = x \pm y \pm z \pm \dots$	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \dots$
$w = x^m$	$\sigma_w = mx^{m-1} \sigma_x \text{ ou } \left \frac{\sigma_w}{w} \right = \left m \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = ax$	$\sigma_w = a \sigma_x \text{ ou } \left \frac{\sigma_w}{w} \right = \left \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = ax \pm b$	$\sigma_w = a \sigma_x \text{ ou } \left \frac{\sigma_w}{w} \right = \left \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = axy$	$\sigma_w^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2 \text{ ou } \left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2$
$w = a \frac{x}{y}$	$\sigma_w^2 = \left(\frac{a}{y} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(a \frac{x}{y^2} \right)^2 \sigma_y^2 \text{ ou } \left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2$
$w = ax^p y^q$	$\sigma_w^2 = (apx^{p-1} y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2 \text{ ou } \left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y} \right)^2$
$w = a \sin(bx)$	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x$ – com bx e $b\sigma_x$ em radianos
$w = a \log_a(x)$	$\sigma_w = \left \frac{b}{\log_a(x)} \right \frac{\sigma_x}{x}$

As regras para multiplicação, divisão e potências apresentadas na tabela parecem distintas, mas na verdade, todas derivam de um único e poderoso princípio: **Variações relativas**. Este método é especialmente útil para qualquer fórmula que envolva **apenas multiplicações, divisões e potências**, como $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ ou $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$.

A ideia central é a seguinte: uma pequena **variação percentual** (ou relativa) em uma das grandezas de entrada causa uma variação percentual proporcional no resultado final. O fator de proporcionalidade é simplesmente o expoente da variável.

Podemos resumir a regra geral da seguinte forma:

O quadrado da incerteza relativa do resultado é a soma dos quadrados das incertezas relativas de cada variável de entrada, onde cada termo é "amplificado" pelo seu respectivo expoente.

Podemos expressar esta regra de forma matemática e geral. Para uma grandeza w calculada a partir das variáveis medidas $x_1, x_2, \dots, x_N$ através de uma relação da forma:

$$w = k \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_N^{m_N} \quad (1.1)$$

onde k é uma constante exata e m_i são os expoentes (positivos para multiplicação, negativos para divisão), o quadrado da incerteza relativa de w é dado por:

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{\sigma_{x_i}}{x_i}\right)^2 \quad (1.2)$$

Esta única equação é a ferramenta fundamental para a propagação de erros em grande parte dos experimentos de física, unificando todos os casos de produtos, quocientes e potências em uma única regra.

Vamos ver como este princípio único explica as regras da tabela. Considere a fórmula da densidade, que pode ser escrita como $\rho = m^1 V^{-1}$. Aplicando a regra geral:

$$\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(-1 \cdot \frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 \quad (1.3)$$

Note que o sinal do expoente (-1) desaparece ao elevarmos ao quadrado, o que explica por que as incertezas de termos que dividem também somam.

Compreender este princípio permite derivar a fórmula de propagação para qualquer expressão complexa que siga esse padrão, sem precisar memorizar cada caso individualmente.

Aprofundamento: Todas essas fórmulas podem ser deduzidas utilizando cálculo diferencial e integral, porém isso não é necessário para a OBF. Para o TBF e olimpíadas internacionais, é interessante saber como derivá-las.

A fórmula geral para a propagação de incertezas (ou propagação de erros) em uma função f que depende de várias variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, cada uma com incerteza σ_{x_i} , é dada por:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \sigma_{x_n}\right)^2}$$

Essa fórmula assume que as variáveis são independentes e que os erros não estão correlacionados.

Para entender melhor como utilizar essa tabela, vamos analisar dois exemplos:

Exemplo 1

Gabriel Hemétrio estava em um laboratório do MIT (Manaus Institute of Technology) quando realizou um experimento envolvendo um carro em movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Seu objetivo era determinar a velocidade do carrinho e a incerteza associada a essa medida.

Para isso, ele mediu o comprimento percorrido, obtendo:

$$x = (30,01 \pm 0,05) \text{ cm}$$

O tempo que o carro levou para percorrer essa distância foi:

$$t = (5,12 \pm 0,08) \text{ s}$$

Hemétrio é um excelente estudante de física e, como tal, sabe que a fórmula para calcular a velocidade é dada por:

$$v = \frac{x}{t}$$

Com isso, ele consegue determinar o valor da velocidade:

$$v = \frac{30,01}{5,12} \approx 5,86 \text{ cm/s}$$

Para calcular a incerteza associada a essa medida, Hemétrio consulta a tabela e percebe que a fórmula para a velocidade corresponde ao sexto exemplo da tabela $w = a \frac{x}{y}$, onde, por associação, obtemos:

- $w \rightarrow v$
- $a \rightarrow 1$
- $x \rightarrow x$
- $y \rightarrow t$

Utilizando a fórmula da tabela:

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

Substituindo os valores:

$$\left(\frac{\sigma_v}{5,86}\right)^2 = \left(\frac{0,05}{30,01}\right)^2 + \left(\frac{0,08}{5,12}\right)^2$$

$$\sigma_v = 0,092 \text{ cm/s}$$

Logo, a velocidade é dada por:

$$v = (5,86 \pm 0,09) \text{ cm/s}$$

Exemplo 2

Agora, seu professor de Física, João Kalda, pediu que ele determinasse a energia cinética associada à velocidade medida. Para isso, Hemétrio utilizou uma balança digital para medir a massa do carrinho e obteve a seguinte leitura:

Como se trata de um instrumento digital, ele considerou a incerteza padrão de $\sigma_m = 1$ g.

Assim, a massa do carrinho é:

$$m = (71 \pm 1) \text{ g}$$

Convertendo para o Sistema Internacional (SI):

$$m = (0,071 \pm 0,001) \text{ kg}$$

Hemétrio também sabe que a energia cinética é dada pela fórmula:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Com os valores de massa e velocidade em mãos, ele calculou, portanto, que a energia cinética é:

$$E_c = \frac{71 \cdot 10^{-3} \cdot (5,86 \cdot 10^{-2})^2}{2} = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Para calcular a incerteza associada a essa medida, Hemétrio consulta a tabela e percebe que a fórmula para a velocidade corresponde ao sétimo exemplo da tabela $w = ax^p y^q$, onde, por associação, obtemos:

- $w \rightarrow E_c$
- $a \rightarrow \frac{1}{2}$
- $x \rightarrow m$
- $p \rightarrow 1$
- $y \rightarrow v$
- $q \rightarrow 2$

Utilizando a fórmula da tabela:

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

Substituindo os valores:

$$\left(\frac{\sigma_{E_c}}{1,22 \cdot 10^{-4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{71}\right)^2 + \left(2\frac{0,09}{5,86}\right)^2$$

Resolvendo:

$$\sigma_{E_c} = 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Logo, a energia cinética é:

$$E_c = (1,22 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

1.4 Questões

Q.1

Uma régua com menor divisão de 1 mm é usada para medir o comprimento de uma barra. Foram obtidas as leituras:

$$18,4 \text{ cm}, \quad 18,5 \text{ cm}, \quad 18,3 \text{ cm}, \quad 18,5 \text{ cm}.$$

- (a) Determine a média;
- (b) Calcule o desvio padrão amostral;
- (c) Encontre a incerteza total (instrumental + aleatória) e apresente o resultado final corretamente.

Q.2

Mede-se a massa $m = (100,2 \pm 0,2) \text{ g}$ e o volume $V = (40,0 \pm 0,5) \text{ cm}^3$. Calcule a densidade $\rho = \frac{m}{V}$ e sua incerteza.

Q.3

Um pêndulo simples tem comprimento $L = (1,002 \pm 0,005) \text{ m}$ e período $T = (2,01 \pm 0,02) \text{ s}$. Sabendo que $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$, determine g e sua incerteza.

Q.4

Um estudante mede a velocidade de um carrinho usando o tempo para percorrer

duas distâncias diferentes:

Distância (m)	Tempo (s)
$(2,000 \pm 0,001)$	$(2,84 \pm 0,02)$
$(3,000 \pm 0,001)$	$(4,23 \pm 0,02)$

- Calcule a velocidade média para cada percurso e suas incertezas.
- Verifique se as velocidades obtidas são compatíveis dentro das incertezas (sobreposição de intervalos).
- Proponha o melhor valor para a velocidade do carrinho a partir dos dois resultados e calcule sua incerteza.

Q.5

A voltagem em um resistor é medida como $V = (12,5 \pm 0,1)$ V e a corrente que passa por ele é $I = (2,50 \pm 0,05)$ A. Calcule a resistência $R = \frac{V}{I}$ e sua respectiva incerteza.

Q.6

Um cronômetro digital que mede até centésimos de segundo é usado para medir o tempo de queda de um objeto. As seguintes medições foram obtidas:

$$1,45 \text{ s}, \quad 1,48 \text{ s}, \quad 1,42 \text{ s}, \quad 1,46 \text{ s}, \quad 1,44 \text{ s}.$$

- Calcule o tempo médio de queda.
- Determine o desvio padrão da amostra.
- Considerando a incerteza do cronômetro como metade da menor divisão, calcule a incerteza total e apresente o resultado da medição de tempo.

Q.7

A área de um retângulo é calculada a partir das medições de seu comprimento $C = (20,0 \pm 0,1)$ cm e largura $L = (10,0 \pm 0,1)$ cm. A área é dada por $A = C \times L$. Calcule a área e sua incerteza.

Q.8

Dois resistores, $R_1 = (100 \pm 2) \Omega$ e $R_2 = (200 \pm 5) \Omega$, são conectados em série. A resistência total é $R_{\text{total}} = R_1 + R_2$. Calcule a resistência total e sua incerteza.

1.5 Soluções

Solução Q.1

(a) Média: A média aritmética é a nossa melhor estimativa para o valor verdadeiro da grandeza.

$$\bar{x} = \frac{18,4 + 18,5 + 18,3 + 18,5}{4} = \frac{73,7}{4} = 18,425 \text{ cm.}$$

Guardamos todas as casas decimais neste resultado intermediário para evitar erros de arredondamento nos cálculos seguintes.

(b) Desvio Padrão Amostral e Incerteza Aleatória: Primeiro, calculamos o desvio padrão amostral (S).

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} = 0,0957 \text{ cm.}$$

A incerteza aleatória (ou desvio padrão da média) é calculada a partir do desvio padrão amostral:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \frac{0,0957}{\sqrt{4}} \approx 0,0479 \text{ cm.}$$

(c) Incerteza Instrumental, Incerteza Total e Resultado Final: A incerteza instrumental é estimada como metade da menor divisão da régua.

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{1 \text{ mm}}{2} = 0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm.}$$

A incerteza total é a combinação em quadratura das fontes de incerteza instrumental e aleatória.

$$\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{\sigma_{\text{inst}}^2 + \sigma_{\text{al}}^2} \approx \sqrt{(0,05)^2 + (0,0479)^2} \approx 0,0692 \text{ cm.}$$

Regra de arredondamento: A incerteza final deve ser expressa com um ou, no máximo, dois algarismos significativos. Arredondamos σ_{tot} para 0,07 cm. Finalmente, o valor da medida (a média) deve ser arredondado para ter o mesmo número de casas decimais que a incerteza.

$$\bar{x} = 18,425 \text{ cm} \xrightarrow{\text{arredonda para 2 casas decimais}} 18,43 \text{ cm.}$$

O resultado final é a representação da média e da incerteza total, devidamente arredondadas.

$$L = (18,43 \pm 0,07) \text{ cm}$$

Solução Q.2**Valor nominal:**

$$\rho = \frac{100,2}{40,0} = 2,505 \text{ g/cm}^3.$$

Propagação de Incertezas: Para um quociente, somamos as incertezas relativas em quadratura:

$$\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2$$

Calculando cada termo:

$$\left(\frac{0,2}{100,2}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{40,0}\right)^2 \approx (0,001996)^2 + (0,0125)^2.$$

Note que a incerteza relativa do volume (1,25%) é muito maior que a da massa (0,2%). Isso significa que a precisão da medida de volume é o fator limitante na precisão do nosso resultado final para a densidade.

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{(0,001996)^2 + (0,0125)^2} \approx 0,01266$$

Agora, para encontrar a incerteza absoluta σ_ρ , multiplicamos a incerteza relativa pelo valor nominal da densidade:

$$\sigma_\rho = \rho \cdot \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right) \approx 2,505 \cdot 0,01266 \approx 0,0317 \text{ g/cm}^3.$$

Resultado final: Arredondamos a incerteza para um algarismo significativo, $\sigma_\rho \approx 0,03 \text{ g/cm}^3$. Em seguida, arredondamos o valor nominal para que tenha o mesmo número de casas decimais (duas, neste caso).

$$\rho = 2,505 \text{ g/cm}^3 \xrightarrow{\text{arredonda para 2 casas decimais}} 2,51 \text{ g/cm}^3.$$

$$\boxed{\rho = (2,51 \pm 0,03) \text{ g/cm}^3}$$

Solução Q.3**Valor nominal:**

$$g \approx \frac{4\pi^2 \cdot 1,002}{(2,01)^2} \approx 9,791 \text{ m/s}^2.$$

Propagação de Incertezas: Para um termo elevado a uma potência, como T^2 ,

sua incerteza relativa é multiplicada pelo expoente (neste caso, 2).

$$\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_T}{T}\right)^2$$

Calculando os termos:

$$\left(\frac{0,005}{1,002}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,02}{2,01}\right)^2 \approx (0,00499)^2 + (0,0199)^2.$$

Observe o **efeito amplificador do expoente**: a incerteza relativa do período ($\approx 1\%$) é multiplicada por 2, tornando sua contribuição ($\approx 2\%$) muito mais significativa para a incerteza final do que a do comprimento ($\approx 0,5\%$).

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{(0,00499)^2 + (0,0199)^2} \approx 0,02052$$

Calculando a incerteza absoluta:

$$\sigma_g = g \cdot \left(\frac{\sigma_g}{g}\right) \approx 9,791 \cdot 0,02052 \approx 0,2009 \text{ m/s}^2.$$

Resultado final: A regra de arredondamento diz que se o primeiro algarismo significativo da incerteza for 1 ou 2, podemos mantê-la com dois algarismos para não perder precisão. Assim, $\sigma_g \approx 0,20 \text{ m/s}^2$. O valor de g é então arredondado para o mesmo número de casas decimais.

$$g = 9,791 \text{ m/s}^2 \xrightarrow{\text{arredonda para 2 casas decimais}} 9,79 \text{ m/s}^2.$$

$$\boxed{g = (9,79 \pm 0,20) \text{ m/s}^2}$$

Solução Q.4

(a) Cálculo das velocidades e incertezas

Primeiro percurso:

$$v_1 = \frac{d_1}{t_1} = \frac{2,000}{2,84} \approx 0,7042 \text{ m/s}.$$

A incerteza é calculada pela propagação de incertezas relativas para a divisão:

$$\frac{\sigma_{v_1}}{v_1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{d_1}}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t_1}}{t_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{2,000}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{2,84}\right)^2} \approx 7,06 \times 10^{-3}.$$

A incerteza absoluta é $\sigma_{v_1} = v_1 \cdot (\sigma_{v_1}/v_1) \approx 0,7042 \cdot (7,06 \times 10^{-3}) \approx 0,00497 \text{ m/s}$.

Arredondando a incerteza para um algarismo significativo ($\approx 0,005$) e ajustando a velocidade para 3 casas decimais, obtemos:

$$v_1 = (0,704 \pm 0,005) \text{ m/s}$$

Segundo percurso:

$$v_2 = \frac{d_2}{t_2} = \frac{3,000}{4,23} \approx 0,7092 \text{ m/s}.$$

$$\frac{\sigma_{v_2}}{v_2} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{3,000}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{4,23}\right)^2} \approx 4,74 \times 10^{-3}.$$

A incerteza absoluta é $\sigma_{v_2} = v_2 \cdot (\sigma_{v_2}/v_2) \approx 0,7092 \cdot (4,74 \times 10^{-3}) \approx 0,00336 \text{ m/s}$. Arredondando a incerteza para um algarismo significativo ($\approx 0,003$) e ajustando a velocidade para 3 casas decimais, obtemos:

$$v_2 = (0,709 \pm 0,003) \text{ m/s}$$

(b) Verificação de compatibilidade Duas medidas são compatíveis se seus intervalos de incerteza se sobrepõem.

$$\text{Intervalo para } v_1 : [0,704 - 0,005, 0,704 + 0,005] = [0,699, 0,709] \text{ m/s}.$$

$$\text{Intervalo para } v_2 : [0,709 - 0,003, 0,709 + 0,003] = [0,706, 0,712] \text{ m/s}.$$

A região de sobreposição é o intervalo $[0,706, 0,709]$. Como essa região não é vazia, concluímos que as medidas são **compatíveis**.

(c) Melhor estimativa da velocidade Para combinar as duas medidas, usamos a média ponderada, mas como as incertezas são próximas, a média aritmética simples é uma boa aproximação.

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0,7042 + 0,7092}{2} = 0,7067 \text{ m/s}.$$

A incerteza da média de duas medidas independentes é calculada por:

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\sqrt{\sigma_{v_1}^2 + \sigma_{v_2}^2}}{2} = \frac{\sqrt{(0,005)^2 + (0,003)^2}}{2} \approx 0,0029 \text{ m/s}.$$

Arredondando a incerteza para $\sigma_{\bar{v}} = 0,003 \text{ m/s}$ e ajustando o valor médio para a

mesma casa decimal, temos o melhor valor para a velocidade:

$$v = (0,707 \pm 0,003) \text{ m/s}$$

Solução Q.5

Valor nominal da Resistência:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{12,5}{2,50} = 5,00 \, \Omega.$$

Propagação de Incertezas: Para a divisão, somamos as incertezas relativas em quadratura.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 \\ \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 &= \left(\frac{0,1}{12,5}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{2,50}\right)^2 = (0,008)^2 + (0,02)^2 \\ \frac{\sigma_R}{R} &= \sqrt{0,000064 + 0,0004} = \sqrt{0,000464} \approx 0,02154 \end{aligned}$$

A incerteza absoluta é:

$$\sigma_R = R \cdot \left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = 5,00 \cdot 0,02154 \approx 0,1077 \, \Omega.$$

Resultado Final: Seguindo a regra de arredondamento, mantemos a incerteza com dois algarismos significativos, pois o primeiro é '1': $\sigma_R \approx 0,11 \, \Omega$. Relembrando o valor encontrado de R, obtemos:

$$R = (5,0 \pm 0,1) \, \Omega$$

Solução Q.6

(a) Tempo médio de queda:

$$\bar{t} = \frac{1,45 + 1,48 + 1,42 + 1,46 + 1,44}{5} = \frac{7,25}{5} = 1,45 \text{ s.}$$

(b) Desvio Padrão e Incerteza Aleatória: O desvio padrão amostral (S):

$$S = \sqrt{\frac{\sum(t_i - \bar{t})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{0 + (0,03)^2 + (-0,03)^2 + (0,01)^2 + (-0,01)^2}{4}} \approx 0,02236 \text{ s.}$$

A incerteza aleatória da média é:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \frac{0,02236}{\sqrt{5}} \approx 0,0100 \text{ s.}$$

(c) Incerteza Total e Resultado Final: A incerteza instrumental é metade da menor divisão (0,01 s):

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{0,01 \text{ s}}{2} = 0,005 \text{ s.}$$

A incerteza total é a combinação em quadratura:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{\sigma_{\text{al}}^2 + \sigma_{\text{inst}}^2} = \sqrt{(0,0100)^2 + (0,005)^2} \approx 0,0112 \text{ s.}$$

Arredondamos a incerteza para dois algarismos, pois o primeiro é '1': $\sigma_{\text{tot}} \approx 0,011 \text{ s}$. O valor médio já tem 3 casas decimais, então o ajustamos.

$$\bar{t} = 1,450 \text{ s.}$$

$$t = (1,450 \pm 0,011) \text{ s}$$

Solução Q.7

Valor nominal da Área:

$$A = C \times L = 20,0 \times 10,0 = 200,0 \text{ cm}^2.$$

Propagação de Incertezas: Para a multiplicação, somamos as incertezas relativas em quadratura.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 \\ \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 &= \left(\frac{0,1}{20,0}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{10,0}\right)^2 = (0,005)^2 + (0,01)^2 \\ \frac{\sigma_A}{A} &= \sqrt{0,000025 + 0,0001} = \sqrt{0,000125} \approx 0,01118 \end{aligned}$$

A incerteza absoluta é:

$$\sigma_A = A \cdot \left(\frac{\sigma_A}{A}\right) = 200,0 \cdot 0,01118 \approx 2,236 \text{ cm}^2.$$

Resultado Final: Arredondamos a incerteza para dois algarismos significativos: $\sigma_A \approx 2,2 \text{ cm}^2$. Segue a representação final, com valor correto de algarismos significativos:

$$A = (200,0 \pm 2,2) \text{ cm}^2$$

Solução Q.8

Valor nominal da Resistência Total: Para resistores em série, a resistência total é a soma das resistências individuais.

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 = 100 + 200 = 300 \, \Omega.$$

Propagação de Incertezas: Para soma ou subtração, as incertezas absolutas são somadas em quadratura.

$$\begin{aligned}\sigma_{R_{\text{total}}} &= \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2} \\ \sigma_{R_{\text{total}}} &= \sqrt{(2)^2 + (5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,385 \, \Omega.\end{aligned}$$

Resultado Final: Arredondamos a incerteza para um algarismo significativo: $\sigma_{R_{\text{total}}} \approx 5 \, \Omega$. Como a incerteza é um número inteiro, o valor da resistência total também deve ser expresso como um número inteiro.

$$R_{\text{total}} = (300 \pm 5) \, \Omega$$

Capítulo 2

O uso da calculadora

2.1 Introdução

Na análise de dados experimentais, é essencial que se utilize mecanismos de computação. Para isso, em muitas provas de olimpíada, o aluno tem acesso a um equipamento de altíssima importância: uma calculadora científica não programável.

Neste capítulo, você aprenderá sobre os principais usos e mecanismos de uma calculadora, como o cálculo de médias e regressões lineares. É importante ressaltar que as instruções e dicas de uso a seguir são feitas com base na calculadora mais comum de ser utilizada em olimpíadas, a $fx-82MS$, da Casio. Veja a figura 2.1.



Figura 2.1: Calculadora Casio $fx-82MS$

Existem outras calculadoras que conseguem fazer o que vamos mostrar nesta seção, porém por meio de comandos diferentes.

2.2 Modos da calculadora

Para usar a calculadora, deve-se compreender o uso de cada modo. Veja a tabela a seguir com os principais modos.

Tabela 2.1: Modos da calculadora

Tipo de cálculo	Teclas		Modo desejado
Cálculos aritméticos básicos	MODE	1	COMP
Desvio padrão	MODE	2	SD
Cálculos de regressão	MODE	3	REG

Agora, veremos detalhadamente as funções de cada modo.

2.2.1 Cálculos Aritméticos Básicos

Esse é o modo padrão de qualquer calculadora. Aqui você pode realizar contas operacionais comuns (adição, subtração, multiplicação e divisão), além de calcular valores de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas por meio dos vários botões que ela possui. Veja a figura 2.1.

Perceba que, em uma calculadora científica, há símbolos coloridos escritos acima de cada botão. Para usá-los, basta clicar nos botões **SHIFT** (para os amarelos) ou **ALPHA** (para os vermelhos), e após isso usar o botão desejado.

Por exemplo, para usar a exponencial e^x , seguimos os seguintes passos:

1. **SHIFT** para habilitar os comandos amarelos acima dos botões.
2. **ln** que em cima possui o símbolo de e^x em amarelo.

Uma das funções mais úteis é a de definir variáveis, que pode ser feita da seguinte maneira:

1. **SHIFT** **STO** e apertando um dos botões de variáveis (A, B, C, D, E e F) você armazena um valor numérico em uma delas
2. para usar este valor, aperte **ALPHA** e logo após o botão do valor requerido.

2.2.2 Desvio Padrão

Frequentemente, em um experimento, realizamos diversas medidas de uma mesma grandeza a fim de diminuir as incertezas aleatórias. Para analisar esse conjunto de dados,

calculamos a média e o desvio padrão. A calculadora faz isso de forma rápida e eficiente no modo **SD (Standard Deviation)**, que significa desvio padrão em inglês. Para que seja possível trabalhar com esse modo, deve-se primeiro adicionar os dados. Veja o seguinte passo a passo de como adicionar novos dados.

1. Coloque no modo SD usando **MODE** **2**
2. Sempre que for introduzir dados de uma nova tabela, é importante limpar os dados da tabela anterior. Para isso, aperte **SHIFT** **CLR** **1** **=**.
3. Agora, introduza os dados digitando-os e aperte a tecla **M+** após cada um.
4. Para inserir um valor que se repete várias vezes, em vez de digitar o mesmo número e apertar **M+** repetidamente, você pode fazer de uma só vez. Digite o valor, depois pressione **SHIFT** **,** (para ativar o separador “;”), digite o número de vezes que ele se repete (a frequência) e, por fim, pressione **M+**.
 - Exemplo: Para inserir o valor ‘10.5’ oito vezes, o comando é: ‘10.5’ **SHIFT** **,** **8** **M+**.
5. Após inserir todos os valores, você pode verificar se você não cometeu nenhum erro de digitação. Para navegar pelos dados inseridos, utilize as teclas de seta para cima e para baixo. O visor mostrará cada valor que você inseriu.
6. Se, durante a verificação, você encontrar um erro, não é preciso começar de novo.
 - **Para corrigir um valor:** Navegue com as setas até o dado errado. Com ele no visor, simplesmente digite o valor correto e pressione **=**. O valor antigo será substituído.
 - **Para apagar um valor:** Navegue até o dado que deseja remover. Com ele no visor, pressione **SHIFT** e depois **M+**, que possui a função **M-** acima dela.
7. Por fim, com os dados introduzidos, você pode acessar os seguintes valores estatísticos: n , $\sum x$, $\sum x^2$, $\bar{x}$, σ_n e σ_{n-1} . Para selecionar essas funções estatísticas, siga o passo a passo da tabela abaixo.

Esses valores são, respectivamente, a soma dos quadrados dos valores, a soma dos valores, a quantidade, a média, o desvio padrão populacional e o desvio padrão amostral.

Tabela 2.2: Dados estatísticos do desvio padrão

Valores estatísticos	Operação na calculadora		
$\sum x^2$	SHIFT	S-SUM	1
$\sum x$	SHIFT	S-SUM	2
n	SHIFT	S-SUM	3
$\bar{x}$	SHIFT	S-VAR	1
σ_n	SHIFT	S-VAR	2
σ_{n-1}	SHIFT	S-VAR	3

Observação: O σ_n (desvio padrão populacional) é usado quando temos todos os dados de uma população, o que é raro em medições experimentais. Já o σ_{n-1} (desvio padrão amostral) é usado quando temos apenas uma **amostra**, que é o caso típico em experimentos de laboratório ou olimpíadas. Portanto, para cálculos de incerteza aleatória, use σ_{n-1} . Em algumas calculadoras, o desvio padrão amostral é chamado de s_x . Você **não** precisa saber a fórmula de nenhum desses desvios (já que é possível encontrá-los facilmente pela calculadora), mas aqui estão elas:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Exemplo 1

Durante um experimento de queda livre, foram obtidos os seguintes tempos (em segundos):

1,07 1,01 1,19 1,12 1,13 1,02

Nosso objetivo é determinar o tempo médio e a incerteza aleatória dessas medições.

- Entrar no modo SD:** pressione **MODE** e selecione a opção correspondente a SD.
- Limpar dados antigos:** pressione **SHIFT** **CLR** **1** **=**.
- Inserir os dados:** digite cada valor e pressione **M+** após cada um, na ordem:

1,07 **M+**, 1,01 **M+**, 1,19 **M+** ...

4. **Verificar quantidade de dados:** pressione **SHIFT** **S-SUM** **3** e confirme que $n = 6$.

5. **Obter a média:** pressione **SHIFT** **S-VAR** **1** para encontrar:

$$\bar{t} = 1,09 \text{ s.}$$

6. **Obter o desvio padrão amostral:** pressione **SHIFT** **S-VAR** **3** para obter:

$$\sigma_{n-1} = 0,0696 \text{ s.}$$

7. **Calcular a incerteza aleatória da média:** usando

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}},$$

temos:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{0,0696}{\sqrt{6}} \approx 0,0284 \text{ s.}$$

Resultado final:

$$t = (1,09 \pm 0,03) \text{ s}$$

onde o valor após o sinal $\pm$ representa a **incerteza aleatória** calculada a partir do desvio padrão amostral.

2.2.3 Cálculos de regressão

O método de regressão linear é uma forma estatística e matemática de encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Essa "melhor reta" é aquela que minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais de cada ponto até a reta. Em outras palavras, a regressão linear encontra a reta que está "o mais próximo possível" de todos os pontos.

A nossa reta obtida será escrita da forma $y = a + bx$ e terá 3 valores que vão determiná-la:

1. "a" é o coeficiente linear da nossa equação linear.
2. "b" é o coeficiente angular da nossa equação linear.
3. "r" é o **Coefficiente de Correlação de Pearson**, uma medida estatística que indica o quão bem os pontos de dados se ajustam a uma reta (ou seja, o seu grau

de retiniedade). Um valor de 'r' próximo de 1 ou -1 indica uma correlação linear quase perfeita.

Enquanto a calculadora fornece o valor de "r" diretamente, é muito comum em relatórios científicos encontrar o seu valor ao quadrado, conhecido como **Coeficiente de Determinação (r^2)**. A diferença entre eles é sutil:

- **O coeficiente "r"** nos informa o sinal do coeficiente b (positivo, se $r > 0$, ou negativo, se $r < 0$) e a força do ajuste linear.
- **O coeficiente " r^2 "** (que varia de 0 a 1) representa a **proporção da variância** dos dados que é explicada pelo modelo linear. Em termos mais simples, ele nos dá uma porcentagem da "qualidade" do ajuste. Por exemplo, um $r^2 = 0,998$ significa que 99,8% da variação nos dados de y pode ser explicada pela variação em x , o que indica um ajuste de reta excelente.

Não é necessário lembrar as definições desses termos, mas é sempre bom recordar que, quanto melhores forem os dados do experimento, mais próximo de 1 será o r^2 .

Usando os valores estatísticos de X e Y vistos na seção passada, nós podemos calcular esses 3 valores da seguinte forma (que você **não** precisa lembrar):

$$b = \frac{N \sum(xy) - \sum x \sum y}{N \sum(x^2) - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{N}$$

$$r = \frac{N \sum(xy) - \sum x \sum y}{\sqrt{[N \sum(x^2) - (\sum x)^2][N \sum(y^2) - (\sum y)^2]}}$$

Onde:

- N é o número de pontos experimentais.
- $\sum x$ e $\sum y$ são as somas de todos os dados de x e de y , respectivamente.
- $\sum(x^2)$ é a soma de cada valor de x^2 .
- $\sum(xy)$ é a soma dos produtos de x_i por y_i , para cada dado (x_i, y_i) .

Embora o cálculo manual seja possível por meio das fórmulas acima, isso custaria bastante tempo, que é algo importantíssimo durante um experimento de física. Para ajudar nisso, a sua calculadora pode realizar a regressão linear de forma rápida e precisa, fornecendo os valores de a , b e r .

Para acessar esse modo na calculadora, você deve:

1. Coloque no modo de regressão linear, apertando **MODE** **3** **1**.
2. Sempre que for introduzir dados de uma nova tabela, é importante limpar os dados da tabela anterior. Para isso, aperte **SHIFT** **CLR** **1** **=**.
3. Agora, introduza os dados digitando-os na forma "x,y" (valor da medida de "x" e valor da medida de "y") e aperte a tecla **M+**.
4. Por fim, com os dados introduzidos, você pode acessar os seguintes valores estatísticos: $n, \sum x, \sum x^2, \sum y, \sum y^2, \sum xy, \bar{x}, \sigma_n(x), \sigma_{n-1}(x), \bar{y}, \sigma_n(y), \sigma_{n-1}(y), a, b$ e r . Para selecionar essas funções estatísticas, siga o passo a passo da tabela a seguir.

Tabela 2.3: Dados estatísticos da regressão linear

Valores estatísticos	Operação na calculadora				
$\sum x^2$	SHIFT	S-SUM	1		
$\sum x$	SHIFT	S-SUM	2		
n	SHIFT	S-SUM	3		
$\sum y^2$	SHIFT	S-SUM	→	1	
$\sum y$	SHIFT	S-SUM	→	2	
$\sum xy$	SHIFT	S-SUM	→	3	
$\bar{x}$	SHIFT	S-VAR	1		
$\sigma_n(x)$	SHIFT	S-VAR	2		
$\sigma_{n-1}(x)$	SHIFT	S-VAR	3		
$\bar{y}$	SHIFT	S-VAR	→	1	
$\sigma_n(y)$	SHIFT	S-VAR	→	2	
$\sigma_{n-1}(y)$	SHIFT	S-VAR	→	3	
a	SHIFT	S-VAR	→	→	1
b	SHIFT	S-VAR	→	→	2
r	SHIFT	S-VAR	→	→	3

Depois de conseguir os valores de a , b e r , nós podemos calcular os erros dos dois coeficientes. Eles são calculados da seguinte forma:

$$\sigma_b = |b| \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{N-2}} \quad \text{para o coeficiente angular}$$

$$\sigma_a = \sigma_b \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \quad \text{para o coeficiente linear.}$$

É importantíssimo que você memorize essas fórmulas. Com isso, podemos escrever seus valores como:

$$a' = a \pm \sigma_a$$

$$b' = b \pm \sigma_b$$

A partir disso, é possível achar os valores procurados dentro do nosso experimento, como será visto no capítulo seguinte.

Exemplo 2

Em um experimento para verificar a Lei de Ohm, foram medidos os valores de corrente I e tensão V em um resistor:

I (A)	V (V)
0,10	1,02
0,20	2,03
0,30	3,02
0,40	4,05
0,50	5,00

- Entrar no modo estatístico:** pressione **MODE** e selecione a opção correspondente a **REG** (Regressão Linear).
- Limpar dados antigos:** pressione **SHIFT** **CLR** **1** **=**.
- Inserir os dados:** digite cada par (I, V) na ordem, confirmando com **=**, por exemplo:

0,10 1,02 **=**, 0,20 2,03 **=**, ...

até inserir todos os cinco pares de valores.

- Obter os coeficientes a e b :** Pressione **SHIFT** **S-VAR** **→** **→** **1** para a e **2** para b . A calculadora retorna:

$$a \approx 0,030 \text{ V}, \quad b \approx 9,98 \, \Omega.$$

- Obter o coeficiente r :** Pressione **SHIFT** **S-VAR** **→** **→** **3**. Resultado:

$$r \approx 0,99994.$$

6. Calcular o erro de b :

$$\sigma_b = b \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}} \approx 0,07 \, \Omega.$$

7. Calcular o erro de a :

$$\sigma_a = \sigma_b \cdot \sqrt{\frac{\sum I_i^2}{N}} \approx 0,022 \text{V}.$$

8. Escrever o resultado final:

$$a = (0,030 \pm 0,022) \text{ V}, \quad b = (9,98 \pm 0,07) \, \Omega.$$

O valor teórico $b_{\text{teo}} = 10,0 \, \Omega$ está dentro do intervalo calculado, logo é compatível.

2.2.4 Linearização

Grande parte das análises experimentais na física envolve comparar dados medidos com um modelo teórico. Quando a relação entre as variáveis é **linear**, podemos aplicar diretamente a regressão linear e obter coeficientes de forma simples. No entanto, muitas leis físicas não são lineares na forma original das variáveis. Para lidar com isso, aplicamos um procedimento chamado **linearização**.

A linearização consiste em transformar a relação entre as variáveis de modo que o gráfico resultante seja uma reta. Isso pode ser feito de várias formas:

- Alterando a variável independente (x) para outra função dela (x^2 , $1/x$, $\sqrt{x}$, etc.);
- Alterando a variável dependente (y) com logaritmos ou potências;
- Aplicando transformações nos dois lados da equação ao mesmo tempo (como logaritmo em funções exponenciais);
- Dividindo toda a equação por algum termo para isolar a forma linear.

O objetivo é reescrever a equação de forma que se ajuste ao formato:

$$Y = a + bX$$

onde X e Y são variáveis possivelmente transformadas.

Ao linearizar:

1. Identifique qual grandeza precisa ser transformada;
2. Aplique a transformação de forma consistente para todos os pontos medidos;
3. Registre claramente o que X e Y representam;
4. Interprete os coeficientes a e b de volta nas variáveis originais.

Nós temos várias formas de aplicar essa ideia:

Forma 1 – Substituição direta da variável

Em muitos casos, basta redefinir a variável independente para obter linearidade.

- **Caso quadrático (queda livre):**

$$\Delta y = \frac{g}{2} \Delta t^2$$

Definindo $X = \Delta t^2$ e $Y = \Delta y$, temos $Y = bX$ com $b = g/2$.

- **Caso inverso (lei de Coulomb):**

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Definindo $X = 1/r^2$ e $Y = F$, temos $Y = bX$ com $b = kq_1 q_2$.

Note que ambos os casos são apenas mudanças de nome: medimos algo (Δt ou r), aplicamos a transformação e usamos o resultado como a nova variável no gráfico.

Forma 2 – Função exponencial

Em um circuito RC, temos a expressão:

$$V(t) = V_0 e^{-t/(RC)}$$

Para linearizar, podemos aplicar o logaritmo natural (logaritmo na base e) em ambos os lados da equação:

$$\ln V = \ln(V_0 e^{-t/(RC)})$$

Utilizando que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ e que $\log_A(A^n) = n$, temos que:

$$\ln V = \ln V_0 - \frac{t}{RC}$$

Definindo $Y = \ln V$ e $X = t$, obtemos $Y = a + bX$ com $a = \ln V_0$ e $b = -1/(RC)$. Isso pode parecer estranho, já que é impossível tirar o logaritmo de uma quantidade com unidade. Então, esses são, na verdade, os valores numéricos de V considerando uma unidade específica, normalmente as **unidades do SI**. Logo, também podemos visualizar a expressão da seguinte forma:

$$\ln \left(\frac{V}{1\text{Volt}} \right) = \ln \left(\frac{V_0}{1\text{Volt}} \right) - \frac{t}{RC}$$

Forma 3 – Função potência

Para funções do tipo:

$$y = kx^n$$

Podemos aplicar a mesma lógica da linearização anterior, mas agora com um log em uma base genérica:

$$\log y = \log k + n \log x$$

Definindo $Y = \log y$ e $X = \log x$, temos $Y = a + bX$ com $a = \log k$ e $b = n$. Normalmente, utilizamos a base 10 ao trabalharmos com essa expressão, mas não existe problema em utilizar outra base (como e).

Forma 4 – Divisão de equações

Algumas expressões apresentam soma de termos não lineares, por exemplo:

$$y = ax^2 + bx^3$$

Se dividirmos toda a equação por x^2 , temos:

$$\frac{y}{x^2} = a + bx$$

Definindo $Y = y/x^2$ e $X = x$, a relação agora é linear em X com coeficiente angular b e intercepto a .

Esse tipo de manipulação é útil quando queremos separar a contribuição de cada termo de uma expressão mais complexa.

Observações importantes

Algumas calculadoras conseguem fazer regressão entre os dados considerando alguns tipos de linearização. Normalmente, a regressão é feita com base em $y = a + bx$. Porém,

em algumas calculadoras, é possível fazer regressão considerando $y = ae^{bx}$ ou $y = ax^b$, por exemplo, obtendo da mesma maneira os coeficientes a , b e r .

Apesar disso, em provas, é importante explicar como a linearização foi feita e montar uma tabela com dados linearizados. Resoluções como "usou-se $y = ax^b$ por apresentar o maior r^2 entre as linearizações da calculadora" ou "por meio dos dados não linearizados, foi feita uma regressão $y = ae^{bx}$ na calculadora para obter os coeficientes" podem ser apenas parcialmente pontuadas.

Nem sempre a linearização que possui maior r^2 é a correta; a ideal deve ser encontrada a partir de princípios físicos ou fornecida pela prova. Fazer uma tabela com os dados transformados é algo tradicional em física experimental; se a questão pedir coeficientes da linearização, o ideal é montar uma tabela linearizada (e às vezes até um gráfico com os dados linearizados), mesmo que a questão não peça explicitamente isso. Corretores **podem** tirar pontos por não seguir essas regras.

2.3 Incertezas Instrumentais

Toda medição experimental possui uma limitação física inerente ao equipamento utilizado. Nenhum aparelho é infinitamente preciso, e essa limitação é quantificada pelo que chamamos de **incerteza instrumental** (σ_{inst}).

A forma de determinar essa incerteza depende fundamentalmente do tipo de mostrador do instrumento (analógico ou digital) e das convenções estatísticas adotadas pelo avaliador ou pelo laboratório. Abaixo, detalhamos como proceder em cada caso, baseando-nos nas literaturas mais consagradas de teoria de erros.

2.3.1 Instrumentos Analógicos

Instrumentos analógicos são aqueles que possuem escalas contínuas, geralmente com ponteiros ou marcações visuais, como réguas, paquímetros analógicos, voltímetros de ponteiro e termômetros de mercúrio.

Para esses aparelhos, a menor divisão legível na escala é chamada de **resolução** (R). A convenção universalmente aceita é que o observador consegue, com segurança, estimar visualmente até a metade dessa menor divisão.

- **Regra geral:** A incerteza instrumental é a metade da resolução.

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{R}{2}$$

- **Exemplo:** Em uma régua comum, a menor marcação é de 1 mm. Logo, a incerteza
-

instrumental ao medir o comprimento de um bloco com essa régua é de ± 0.5 mm.

2.3.2 Instrumentos Digitais

Equipamentos digitais, como cronômetros, multímetros e balanças eletrônicas, não permitem estimativa visual. O aparelho mostra um número discreto no visor e, internamente, o circuito realiza um arredondamento ou truncamento do valor real medido. É aqui que surgem diferentes convenções na literatura física.

Convenção 1: GUM (Distribuição Retangular)

O *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição* (GUM) assume que, se o visor marca 25,12 g, o valor real pode estar em qualquer lugar dentro daquele intervalo com probabilidade igual (uma distribuição de probabilidade retangular ou uniforme). Segundo o cálculo de variância contínua para essa distribuição, a incerteza padrão é dada pela resolução dividida pela raiz quadrada de 12.

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{R}{\sqrt{12}} \approx 0,29R$$

Nota: Esta é a abordagem mais rigorosa e profissional, exigida em laboratórios de metrologia e publicações de alto nível.

Convenção 2: Abordagem Conservadora

Muitas vezes, não sabemos como o software do aparelho funciona (se ele arredonda para o mais próximo ou se simplesmente corta as casas decimais extras). Por precaução, alguns autores definem que a incerteza é igual à própria resolução inteira.

$$\sigma_{\text{inst}} = R$$

Exemplo: Se uma balança digital oscila de 0.01 g em 0.01 g, assume-se o erro como ± 0.01 g.

Convenção 3: Abordagem Pragmática (Padrão de Olimpíadas)

Em exames de olimpíadas científicas, para simplificar as contas sob a pressão do tempo, é extremamente comum adotar para aparelhos digitais a **mesma regra dos aparelhos analógicos**:

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{R}{2}$$

Exemplo: Um cronômetro com resolução de 0.01 s terá incerteza instrumental de ± 0.005 s.

O que usar na prova?

Em uma prova experimental de olimpíada, siga esta hierarquia para descobrir a incerteza instrumental:

1. **Leia o enunciado:** Muitas vezes, a própria prova fornece a incerteza do equipamento impresso no caderno de questões ou no manual do aparelho. As vezes, a própria prova também fornece a convenção que deve ser usada.
2. **Na dúvida, use a convenção 3(ou até a 2):** Se nada for dito, use $\sigma_{\text{inst}} = R/2$ tanto para instrumentos analógicos quanto para digitais, e deixe uma pequena nota justificando sua escolha ("Adotou-se a incerteza como metade da menor divisão"). Os corretores costumam aceitar essa abordagem por ser um padrão didático amplamente difundido.

2.4 Boas Práticas e Erros a Evitar

A calculadora é uma ferramenta poderosa, mas ela executa exatamente o que lhe é ordenado. Para garantir que seus resultados sejam fisicamente significativos e corretos, adote as seguintes práticas e fique atento aos erros mais comuns.

1. Comece Sempre com a Memória Limpa

Este é o erro mais frequente e mais perigoso. Se você não limpar a memória estatística antes de inserir um novo conjunto de dados, os valores antigos permanecerão armazenados e serão misturados com os novos. Isso corromperá todos os cálculos subsequentes (somas, médias, desvios e coeficientes de regressão), levando a resultados completamente inválidos.

- **A Prática Correta:** Antes de qualquer cálculo estatístico, pressione **SHIFT** **CLR** **1** **=**. Crie o hábito de fazer isso como o passo número um, sempre.

2. Verifique os Dados Inseridos

Um único dígito errado ou uma vírgula no lugar errado pode criar um dado errado que distorce drasticamente a análise. Uma regressão linear, por exemplo, é muito sensível a pontos extremos, que podem "puxar" a reta de ajuste em sua direção, alterando significativamente os coeficientes a e b .

- **A Prática Correta:** Após inserir todos os seus pontos, use a função **SHIFT** **S-SUM** **3** para verificar o valor de n . Se o número de pontos na calculadora não

for igual ao número de medidas que você tomou, você cometeu um erro na inserção. Além disso, confira se seus dados estão corretamente registrados na calculadora.

3. Use o Desvio Padrão Correto: Amostral (σ_{n-1})

Em um laboratório, você mede uma *amostra* de todos os resultados possíveis, não a *população* inteira. O desvio padrão amostral (σ_{n-1} ou s_x) usa $n - 1$ no denominador, o que o torna um estimador mais preciso da verdadeira dispersão dos dados do que a versão populacional (σ_n). Para o cálculo de incertezas experimentais, o desvio padrão amostral é a escolha correta.

4. Inspeção a Linearidade Antes de Regredir

A calculadora sempre fornecerá os coeficientes de uma reta, mesmo que os dados formem uma parábola perfeita. Um valor alto de 'r' (ex: 0,99) não garante que a relação seja linear; ele apenas indica que os pontos estão pouco dispersos. A maioria das funções é linear se observadas em um intervalo muito pequeno, o que pode trazer esse erro. Se houver uma curvatura clara nos dados, o modelo linear está errado.

- **A Prática Correta:** Sempre faça um esboço rápido do gráfico y versus x (o que normalmente já é cobrado em provas da OBF). A inspeção visual é a maneira mais confiável de confirmar se a relação entre as variáveis é, de fato, linear. Se não for, aplique as técnicas de linearização.

5. Cuidado ao Trocar X por Y na Regressão

A calculadora trata o primeiro valor do par inserido (x, y) como a variável independente (eixo horizontal) e o segundo como a variável dependente (eixo vertical). Se você inserir os pares na ordem errada (y, x), a calculadora realizará uma regressão de x em função de y , resultando em coeficientes a e b que não correspondem ao seu modelo físico.

6. Não Extrapole Seus Resultados Indevidamente

O modelo linear que você encontrou é válido *dentro do intervalo* em que você realizou as medições. Extrapolar (usar a equação para prever valores muito fora desse intervalo) é perigoso. Por exemplo, a Lei de Hooke ($F = kx$) é linear para deformações pequenas de uma mola, mas para forças muito grandes a mola pode atingir seu limite elástico e deformar permanentemente, um comportamento que o seu modelo linear não prevê.

2.5 Questões

A seguir, você terá várias questões para treinar suas habilidades usando as funções da calculadora. Recomendo você fazer elas várias vezes, especialmente as de regressão linear. O fator mais decisivo em uma prova de física experimental é o **tempo**, então ganhar minutos no tempo que você leva para usar sua calculadora pode ser crucial para o seu resultado.

Q.1

Durante um experimento para determinar o período de oscilação de um pêndulo, um estudante utilizou um cronômetro digital e obteve as seguintes medidas (em segundos):

$$1,21 \quad 1,18 \quad 1,25 \quad 1,22 \quad 1,20$$

Sabendo que a resolução instrumental do cronômetro é de 0,01s, realize uma análise estatística completa.

- (a) Determine o valor médio para o período de oscilação.
- (b) Calcule o desvio padrão amostral e a incerteza aleatória (ou estatística) da média.
- (c) Combine a incerteza aleatória com a incerteza instrumental para encontrar a incerteza total e apresente o resultado final da medição de forma apropriada.

Q.2

Um estudante mede o diâmetro de uma pequena esfera de aço com um paquímetro digital de resolução 0.01 mm. As cinco medições obtidas foram:

$$5,44 \text{ mm} \quad 5,48 \text{ mm} \quad 5,45 \text{ mm} \quad 5,49 \text{ mm} \quad 5,46 \text{ mm}$$

Realize uma análise estatística para determinar o diâmetro da esfera.

- (a) Calcule o valor médio do diâmetro.
- (b) Determine o desvio padrão amostral e a incerteza aleatória da média.
- (c) Combine a incerteza aleatória com a incerteza instrumental (metade da resolução) para obter a incerteza total e apresente o resultado final.

Q.3

Para calibrar um sensor de temperatura, um técnico realiza seis medições da temperatura de ebulição da água ao nível do mar. O termômetro tem uma incerteza instrumental de $0,1^{\circ}\text{C}$. Os valores registrados foram:

$$100,1^{\circ}\text{C} \quad 99,8^{\circ}\text{C} \quad 100,3^{\circ}\text{C} \quad 99,9^{\circ}\text{C} \quad 100,2^{\circ}\text{C} \quad 99,7^{\circ}\text{C}$$

- (a) Qual é o valor médio da temperatura medida?
- (b) Calcule a incerteza aleatória associada à média das medições.
- (c) Apresente a medição final da temperatura com sua incerteza total, e verifique se o resultado é compatível com o valor teórico de $100,0^{\circ}\text{C}$.

Q.4

A massa de um pequeno objeto é medida repetidamente usando uma balança digital com resolução de $0,01\text{ g}$. As leituras obtidas foram:

$$25,12\text{ g} \quad 25,15\text{ g} \quad 25,11\text{ g} \quad 25,16\text{ g} \quad 25,13\text{ g}$$

- (a) Determine a massa média do objeto.
- (b) Calcule a incerteza aleatória da média.
- (c) Calcule a incerteza total, combinando a incerteza aleatória e a instrumental, e escreva o resultado final da medição.

Q.5

A voltagem de uma pilha AA é medida por um estudante com um multímetro de incerteza instrumental $\sigma_{\text{inst}} = 0,005\text{ V}$. As seguintes medições foram registradas:

$$1,512\text{ V} \quad 1,518\text{ V} \quad 1,515\text{ V} \quad 1,511\text{ V} \quad 1,516\text{ V} \quad 1,514\text{ V}$$

- (a) Encontre a voltagem média da pilha.
- (b) Calcule a incerteza aleatória da média.
- (c) Apresente o resultado final para a voltagem, com sua incerteza total. O fabricante afirma que a voltagem é de $1,500\text{ V}$. O resultado é compatível com essa especificação?

Q.6

Para determinar a constante elástica (k) de uma mola, um estudante coletou 10 conjuntos de dados de força vs. elongação. A Lei de Hooke é dada por $F = kx$.

Elongação x (cm)	Força F (N)
1,0	0,99
2,0	2,01
3,0	2,98
4,0	4,02
5,0	4,99
6,0	6,03
7,0	7,05
8,0	7,98
9,0	9,03
10,0	10,01

- Realize uma regressão linear dos dados de F versus x para encontrar o coeficiente angular, que corresponde à constante elástica k , em N/cm.
- Calcule a incerteza do coeficiente angular (σ_k), em N/cm.
- O fabricante da mola afirma que a constante elástica é $k_{\text{teo}} = 1,00$ N/cm. Apresente o resultado experimental para k e verifique se ele é compatível com o valor teórico.

Q.7

Em um laboratório de eletrônica, um estudante mede a tensão (V) sobre um resistor para 12 valores de corrente (I).

I (mA)	V (V)
2,0	1,10
4,0	2,20
6,0	3,29
8,0	4,39
10,0	5,48
12,0	6,59
14,0	7,71
16,0	8,82
18,0	9,88
20,0	11,03

22,0	12,15
24,0	13,22

O modelo teórico é a Lei de Ohm, $V = RI$.

- (a) Use a função de regressão linear para determinar a resistência R (o coeficiente angular), em $\text{k}\Omega$.
- (b) Calcule a incerteza σ_R , em $\text{k}\Omega$.
- (c) Um multímetro de alta precisão mediu o resistor, indicando $R_{\text{teo}} = 0,550 \text{ k}\Omega$. Verifique se o valor obtido é compatível.

Q.8

Um experimento investiga a dilatação térmica de uma barra de metal com $L_0 = 2,000 \text{ m}$. A variação no comprimento (ΔL) é medida para 15 variações de temperatura (ΔT).

ΔT (°C)	ΔL (mm)
10	0,25
20	0,48
30	0,71
40	0,95
50	1,21
60	1,45
70	1,67
80	1,91
90	2,17
100	2,41
110	2,65
120	2,89
130	3,11
140	3,35
150	3,61

O modelo teórico é $\Delta L = (\alpha L_0)\Delta T$.

- (a) Realize uma regressão linear de ΔL versus ΔT para encontrar o coeficiente angular b , em $\text{mm}/^\circ\text{C}$.
- (b) Use o coeficiente angular para determinar o coeficiente de dilatação linear α do metal, em $1/^\circ\text{C}$.
- (c) Calcule a incerteza σ_α e apresente o resultado final.

Q.9

A velocidade de um carrinho em MRUV é medida em 18 instantes de tempo.

Tempo t (s)	Velocidade v (m/s)
0,5	3,6
1,0	5,1
1,5	6,4
2,0	7,9
2,5	9,5
3,0	11,1
3,5	12,5
4,0	14,0
4,5	15,6
5,0	17,2
5,5	18,5
6,0	20,0
6,5	21,6
7,0	23,1
7,5	24,5
8,0	26,2
8,5	27,4
9,0	29,0

O modelo físico é $v = v_0 + at$.

- (a) Ajuste uma reta aos dados para encontrar a velocidade inicial v_0 (em m/s) e a aceleração a (em m/s²).
- (b) Calcule as incertezas σ_{v_0} (em m/s) e σ_a (em m/s²).
- (c) Apresente os resultados para a velocidade inicial e a aceleração com suas respectivas incertezas.

Q.10

Em um processo isobárico, o volume (V) de um gás ideal é medido em 20 temperaturas (T).

Temperatura T (K)	Volume V (L)
300	2,45
310	2,54
320	2,63
330	2,71
340	2,78
350	2,89
360	2,96
370	3,03
380	3,11
390	3,20
400	3,29
410	3,36
420	3,45
430	3,53
440	3,61
450	3,70
460	3,78
470	3,85
480	3,94
490	4,02

A Lei dos Gases Ideais se simplifica para $V = (\frac{nR}{P})T$.

- (a) Realize uma regressão linear de V versus T para encontrar o coeficiente angular b .
- (b) Sabendo que $n = 0,10$ mol e $R = 8,31$ J/(mol · K), use o coeficiente angular para estimar a pressão P .
- (c) Calcule a incerteza σ_P .

Q.11

A pressão (P) em um lago é medida em 25 profundidades (h).

Profundidade h (m)	Pressão P (kPa)
1,0	111,2
2,0	120,1
3,0	130,5
4,0	139,5
5,0	149,8
6,0	159,0
7,0	168,8
8,0	178,2
9,0	188,9
10,0	197,9
11,0	209,1
12,0	218,5
13,0	227,9
14,0	238,2
15,0	247,5
16,0	258,0
17,0	267,1
18,0	277,5
19,0	286,8
20,0	297,2
21,0	306,5
22,0	317,1
23,0	326,8
24,0	335,9
25,0	346,3

O modelo é $P = P_{atm} + \rho gh$.

- (a) Faça uma regressão linear de P versus h para encontrar P_{atm} e ρg .
- (b) Usando $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, determine a densidade ρ da água do lago.
- (c) Apresente os resultados para a pressão atmosférica e para a densidade com suas incertezas.

Q.12

Para determinar a capacitância de um capacitor, mediu-se a carga (Q) para 30 valores de tensão (V).

Tensão V (V)	Carga Q (μC)
0,5	1,08
1,0	2,15
1,5	3,28
2,0	4,45
2,5	5,52
3,0	6,55
3,5	7,71
4,0	8,85
4,5	9,88
5,0	10,95
5,5	12,11
6,0	13,18
6,5	14,33
7,0	15,45
7,5	16,48
8,0	17,63
8,5	18,75
9,0	19,81
9,5	20,85
10,0	22,03
10,5	23,08
11,0	24,25
11,5	25,31
12,0	26,44
12,5	27,55
13,0	28,62

13,5	29,71
14,0	30,85
14,5	31,93
15,0	33,01

A relação teórica é $Q = CV$.

- (a) Ajuste uma reta aos dados para encontrar a capacitância C .
- (b) Calcule a incerteza da capacitância, σ_C .
- (c) O valor nominal do capacitor é $C_{\text{teo}} = 2,20 \mu\text{F}$. O resultado experimental é compatível?

Q.13

Em um experimento de queda livre, um objeto é solto de 10 alturas diferentes e o tempo de queda (t) para cada distância percorrida (y) é registrado.

t (s)	y (m)
0,20	0,25
0,30	0,47
0,40	0,79
0,50	1,23
0,60	1,77
0,70	2,41
0,80	3,23
0,90	4,01
1,00	5,07
1,10	6,03

O modelo simplificado para o movimento é $y = y_0 + (\frac{g}{2})t^2$.

- (a) Realize a linearização dos dados e use a função de regressão da calculadora para encontrar y_0 (em m) e g (em m/s²).
- (b) Calcule as incertezas σ_a e σ_b e propague a incerteza para encontrar σ_g . Verifique se o valor teórico $g_{\text{teo}} = 9,81 \text{ m/s}^2$ é compatível com o seu resultado.

Q.14

O período de oscilação (T) de um pêndulo simples é medido para 12 comprimentos (L) do fio.

Comprimento L (m)	Período T (s)
0,20	0,90
0,30	1,11
0,40	1,27
0,50	1,42
0,60	1,55
0,70	1,68
0,80	1,80
0,90	1,91
1,00	2,01
1,10	2,10
1,20	2,20
1,30	2,29

O modelo teórico é $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

- Linearize a equação elevando ambos os lados ao quadrado para obter uma relação entre T^2 e L .
- Faça a regressão linear com os dados transformados para encontrar o coeficiente angular b .
- Use o valor de b para estimar a aceleração da gravidade g e sua incerteza σ_g .

Q.15

Um experimento sobre a Lei de Boyle investiga a relação entre a pressão (P) e o volume (V) de um gás a temperatura constante, para 14 pares de dados.

Volume V (L)	Pressão P (kPa)
5,0	50,2
7,5	33,5
10,0	24,8
12,5	20,1
15,0	16,5
17,5	14,3
20,0	12,6

22,5	11,0
25,0	10,0
27,5	9,1
30,0	8,3
32,5	7,7
35,0	7,2
37,5	6,6

O modelo é $P = \frac{k}{V}$, onde k é uma constante.

- (a) Linearize a equação para obter uma relação linear.
- (b) Realize a regressão linear para encontrar a constante k .
- (c) Calcule a incerteza σ_k e apresente o resultado final para a constante k .

Q.16

A equação das lentes delgadas, $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, é testada com 15 pares de dados (p, q) .

p (cm)	q (cm)
15,0	30,5
18,0	24,2
20,0	20,1
25,0	16,5
30,0	15,2
35,0	14,0
40,0	13,2
45,0	12,8
50,0	12,5
55,0	12,2
60,0	12,0
65,0	11,8
70,0	11,6
75,0	11,5
80,0	11,4

- (a) Linearize a equação na forma $Y = a + bX$.
- (b) Faça a regressão linear dos dados transformados e interprete os coeficientes a e b .
- (c) Determine a distância focal f e sua incerteza σ_f .

Q.17

A atividade (A) de uma amostra radioativa decai com o tempo (t) segundo a lei $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

Tempo t (dias)	Atividade A (contagens/min)
0	1020
1	780
2	615
3	470
4	370
5	295
6	225
7	180
8	140
9	110
10	85
11	65
12	50
13	40
14	30
15	24

- (a) Linearize a equação usando o logaritmo natural.
- (b) Faça a regressão linear dos dados transformados para encontrar a constante de decaimento λ (em dia^{-1}) e a atividade inicial A_0 (em contagens por minuto).
- (c) Calcule as incertezas σ_λ e σ_{A_0} .

Q.18

A Terceira Lei de Kepler ($T^2 = kR^3$) é analisada com dados de 18 luas de um planeta.

Raio R (10^6 m)	Período T (10^3 s)
100	315
110	368
120	425
130	485
140	550
150	618
160	690
170	765
180	845
190	928
200	1010
210	1100
220	1195
230	1290
240	1390
250	1495
260	1600
270	1710

O modelo pode ser escrito como $T = cR^n$.

- (a) Linearize a equação aplicando logaritmo em ambos os lados.
- (b) Determine o valor experimental de n e sua incerteza σ_n .
- (c) Verifique se o resultado é compatível com o valor teórico de $n = 3/2 = 1,5$.

Q.19

A voltagem (V) em um capacitor durante seu descarregamento é medida em 20 instantes de tempo.

Tempo t (s)	Voltagem V (V)
2	8,19
4	6,70
6	5,49
8	4,49
10	3,68
12	3,01

14	2,47
16	2,02
18	1,65
20	1,35
22	1,11
24	0,91
26	0,74
28	0,61
30	0,50
32	0,41
34	0,33
36	0,27
38	0,22
40	0,18

A equação do decaimento é $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$.

- (a) Linearize a equação usando logaritmo natural.
- (b) A partir dos coeficientes da regressão, determine a voltagem inicial V_0 e a constante de tempo τ .
- (c) Calcule as incertezas σ_{V_0} e σ_τ e apresente os resultados finais.

2.6 Soluções

Solução Q.1

(a) **Média das Medidas:** Utilizando o modo SD da calculadora com os 5 valores, obtemos diretamente a média:

$$\bar{T} = 1,212 \text{ s}$$

(b) **Incerteza Aleatória:** Na mesma tela de resultados estatísticos, a calculadora fornece o desvio padrão amostral:

$$\sigma_{n-1} = 0,0259 \text{ s}$$

A incerteza aleatória da média é, então:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0,0259}{\sqrt{5}} \approx 0,0116 \text{ s}$$

(c) Incerteza Total e Resultado Final: A incerteza instrumental é metade da resolução do cronômetro:

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{0,01 \text{ s}}{2} = 0,005 \text{ s}$$

A incerteza total é a combinação em quadratura das duas fontes de incerteza:

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\sigma_{\text{al}}^2 + \sigma_{\text{inst}}^2} = \sqrt{(0,0116)^2 + (0,005)^2} \approx 0,0126 \text{ s}$$

Apresentando o resultado final, com a incerteza arredondada para um ou dois algarismos significativos e o valor médio ajustado para a mesma casa decimal:

$$T = (1,212 \pm 0,013) \text{ s}$$

Solução Q.2

(a) Média do Diâmetro: Usando o modo SD da calculadora com os 5 valores, obtemos a média:

$$\bar{d} = 5,464 \text{ mm}$$

(b) Incerteza Aleatória: A calculadora fornece o desvio padrão amostral:

$$\sigma_{n-1} = 0,021 \text{ mm}$$

A incerteza aleatória da média é:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0,021}{\sqrt{5}} \approx 0,0094 \text{ mm}$$

(c) Incerteza Total e Resultado Final: A incerteza instrumental é metade da resolução:

$$\sigma_{\text{inst}} = \frac{0,01 \text{ mm}}{2} = 0,005 \text{ mm}$$

A incerteza total é a combinação em quadratura:

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\sigma_{\text{al}}^2 + \sigma_{\text{inst}}^2} = \sqrt{(0,0094)^2 + (0,005)^2} \approx 0,0106 \text{ mm}$$

Arredondando a incerteza para dois algarismos significativos e ajustando a média:

$$d = (5,464 \pm 0,011) \text{ mm}$$

Solução Q.3

(a) **Média da Temperatura:** Inserindo os 6 valores no modo SD, a média é:

$$\bar{T} = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

(b) **Incerteza Aleatória:** O desvio padrão amostral é $\sigma_{n-1} = 0,24 \text{ }^{\circ}\text{C}$. A incerteza aleatória é:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{0,24}{\sqrt{6}} \approx 0,098 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

(c) **Resultado Final e Compatibilidade:** A incerteza instrumental é $\sigma_{\text{inst}} = 0,1 \text{ }^{\circ}\text{C}$. A incerteza total é:

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{(0,098)^2 + (0,1)^2} \approx 0,14 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

O resultado final é:

$$T = (100,00 \pm 0,14) \text{ }^{\circ}\text{C}$$

O intervalo de confiança é $[99,86, 100,14] \text{ }^{\circ}\text{C}$. Como o valor teórico $100,0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ está neste intervalo, o resultado é compatível.

Solução Q.4

(a) **Massa Média:** A média dos 5 valores é:

$$\bar{m} = 25,134 \text{ g}$$

(b) **Incerteza Aleatória:** O desvio padrão amostral é $\sigma_{n-1} = 0,021 \text{ g}$. A incerteza aleatória é:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{0,021}{\sqrt{5}} \approx 0,0094 \text{ g}$$

(c) **Incerteza Total e Resultado Final:** A incerteza instrumental é $\sigma_{\text{inst}} = 0,01/2 = 0,005 \text{ g}$. A incerteza total é:

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{(0,0094)^2 + (0,005)^2} \approx 0,0106 \text{ g}$$

O resultado final é:

$$m = (25,134 \pm 0,011) \text{ g}$$

Solução Q.5

(a) **Voltagem Média:** A média dos 6 valores é:

$$\bar{V} = 1,514 \text{ V}$$

(b) **Incerteza Aleatória:** O desvio padrão amostral é $\sigma_{n-1} = 0,0026 \text{ V}$. A incerteza aleatória é:

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{0,0026}{\sqrt{6}} \approx 0,0011 \text{ V}$$

(c) **Resultado Final e Compatibilidade:** A incerteza instrumental é $\sigma_{\text{inst}} = 0,005 \text{ V}$. Como a incerteza instrumental é significativamente maior que a aleatória, ela é a dominante. A incerteza total é:

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{(0,0011)^2 + (0,005)^2} \approx 0,005 \text{ V}$$

O resultado final é:

$$V = (1,514 \pm 0,005) \text{ V}$$

O intervalo de confiança é $[1,509, 1,519] \text{ V}$. O valor $1,500 \text{ V}$ não está no intervalo, portanto, o resultado não é compatível com a especificação (a pilha é nova e tem voltagem ligeiramente superior).

Solução Q.6

(a) **Resultados da Regressão:** A relação $F = kx$ já tem a forma de uma reta $Y = bX$ (com $a = 0$), onde $Y = F$, $X = x$, e o coeficiente angular b é a própria constante elástica k . Inserindo os 10 pares de dados (x, F) no modo de regressão da calculadora, obtemos:

$$a \approx 0,005 \text{ N}, \quad b \approx 1,003 \text{ N/cm}.$$

O coeficiente linear a é muito próximo de zero, como esperado pelo modelo. O coeficiente angular b é a nossa estimativa experimental para a constante k .

(b) **Cálculo da Incerteza:** Com um número maior de pontos, a precisão aumenta. A calculadora fornece a incerteza do coeficiente angular:

$$\sigma_b \approx 0,003 \text{ N/cm}.$$

A incerteza da constante elástica é, portanto, $\sigma_k = \sigma_b$.

(c) Intervalo para k e Compatibilidade: O valor experimental para a constante elástica da mola, com sua incerteza, é:

$$k = (1,003 \pm 0,003) \text{ N/cm.}$$

O intervalo de confiança é $[1,000, 1,006] \text{ N/cm}$. Como o valor teórico $k_{\text{teo}} = 1,00 \text{ N/cm}$ está contido nesse intervalo, o resultado é compatível.

Solução Q.7

(a) Resultados da Regressão: A Lei de Ohm, $V = RI$, tem a forma de uma reta $Y = bX$, onde $Y = V$, $X = I$ e o coeficiente angular b é a resistência R . Inserindo os 12 pares de dados (I, V) na calculadora:

$$a \approx -0,0019 \text{ V}, \quad b \approx 0,5518 \text{ V/mA.}$$

O coeficiente linear a é desprezível, como esperado. O coeficiente b é a nossa resistência. A unidade é $\text{V/mA} = \text{k}\Omega$. Portanto, $R_{\text{exp}} \approx 0,5518 \text{ k}\Omega$.

(b) Cálculo da Incerteza: A incerteza do coeficiente angular fornecida pela calculadora é:

$$\sigma_b \approx 0,0008 \text{ k}\Omega.$$

(c) Intervalo para R e Compatibilidade: O valor experimental da resistência é:

$$R = (0,5508 \pm 0,0008) \text{ k}\Omega.$$

O intervalo de confiança é $[0,5500, 0,5516] \text{ k}\Omega$. O valor teórico $R_{\text{teo}} = 0,550 \text{ k}\Omega$ está contido neste intervalo. Logo, nosso resultado é compatível.

Solução Q.8

(a) Regressão Linear: O modelo $\Delta L = (\alpha L_0)\Delta T$ corresponde a uma reta $Y = bX$, com $Y = \Delta L$, $X = \Delta T$ e $b = \alpha L_0$. Inserindo os 15 pontos de dados na calculadora, obtemos o coeficiente angular:

$$b \approx 0,02401 \text{ mm/}^\circ\text{C}$$

(b) Determinação de α : O coeficiente de dilatação linear é obtido a partir do coeficiente angular:

$$\alpha = \frac{b}{L_0} = \frac{0,02401 \times 10^{-3} \text{ m/}^\circ\text{C}}{2,000 \text{ m}} = 1,201 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

(c) Análise de Incertezas e Resultado Final: A incerteza do coeficiente angular é $\sigma_b \approx 0,00007 \text{ mm}/^\circ\text{C}$. Propagando a incerteza para α :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_b}{L_0} = \frac{0,00007 \times 10^{-3}}{2,000} = 4 \times 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

O resultado final é:

$$\alpha = (1,201 \pm 0,004) \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

Solução Q.9

(a) Coeficientes da Regressão: O modelo $v = v_0 + at$ corresponde à reta $Y = a + bX$. A regressão dos 18 pontos de dados fornece:

$$a \approx 2,03 \text{ m/s}, \quad b \approx 3,003 \text{ m/s}^2$$

A interpretação física é: $v_0 = a$ (velocidade inicial) e $a_{\text{acel}} = b$ (aceleração).

(b) Cálculo das Incertezas: As incertezas dos coeficientes são:

$$\sigma_a \approx 0,05 \text{ m/s}, \quad \sigma_b \approx 0,009 \text{ m/s}^2.$$

(c) Resultados Finais: Apresentando os resultados com suas incertezas:

$$v_0 = (2,03 \pm 0,05) \text{ m/s}$$

$$a_{\text{acel}} = (3,003 \pm 0,009) \text{ m/s}^2$$

Solução Q.10

(a) Regressão Linear: A relação $V = (\frac{nR}{P})T$ tem a forma $Y = bX$. A regressão dos 20 pontos de dados de V versus T fornece o coeficiente angular:

$$b \approx 0,00822 \text{ L/K}$$

(b) Estimativa da Pressão: Isolando P da relação $b = nR/P$:

$$P = \frac{nR}{b} = \frac{0,10 \times 8,31}{0,00822 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{K}} \approx 101095 \text{ Pa} \approx 101,1 \text{ kPa}$$

(c) **Análise de Incertezas:** A incerteza do coeficiente angular é $\sigma_b \approx 0,00003 \text{ L/K}$. A incerteza da pressão é propagada:

$$\sigma_P = P \left(\frac{\sigma_b}{b} \right) = 101,1 \left(\frac{0,00003}{0,00822} \right) \approx 0,4 \text{ kPa}$$

O resultado final para a pressão é:

$$P = (101,1 \pm 0,4) \text{ kPa}$$

Solução Q.11

(a) **Regressão e Interpretação:** O modelo $P = P_{atm} + \rho gh$ tem a forma $Y = a + bX$. A regressão dos 25 pontos de dados fornece:

$$a \approx 100,5 \text{ kPa}, \quad b \approx 9,82 \text{ kPa/m}$$

O coeficiente linear a corresponde à pressão atmosférica P_{atm} , e o coeficiente angular b corresponde ao produto ρg .

(b) **Densidade da Água:** A densidade é calculada a partir de b :

$$\rho = \frac{b}{g} = \frac{9820 \text{ Pa/m}}{9,81 \text{ m/s}^2} \approx 1,001 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

(c) **Análise de Incertezas e Resultados:** As incertezas dos coeficientes são $\sigma_a \approx 0,2 \text{ kPa}$ e $\sigma_b \approx 0,01 \text{ kPa/m}$. A incerteza da densidade é:

$$\sigma_\rho = \rho \left(\frac{\sigma_b}{b} \right) \approx 1,0 \text{ kg/m}^3$$

Os resultados finais são:

$$P_{atm} = (100,5 \pm 0,2) \text{ kPa}$$

$$\rho = (1001 \pm 1) \text{ kg/m}^3$$

Solução Q.12

(a) **Capacitância Experimental:** A relação $Q = CV$ tem a forma $Y = bX$. A regressão linear dos 30 pontos de dados fornece o coeficiente angular:

$$b \approx 2,203 \text{ } \mu\text{C/V}$$

Este valor corresponde diretamente à capacitância, $C = 2,203 \mu\text{F}$.

(b) Incerteza da Capacitância: A incerteza do coeficiente angular é:

$$\sigma_b \approx 0,001 \mu\text{F}$$

Portanto, a incerteza da capacitância é $\sigma_C = 0,001 \mu\text{F}$.

(c) Compatibilidade: O resultado experimental é:

$$C = (2,203 \pm 0,001) \mu\text{F}$$

O intervalo de confiança é $[2,202, 2,204] \mu\text{F}$. O valor nominal $C_{\text{teo}} = 2,20 \mu\text{F}$ está fora deste intervalo. Logo, o resultado não é compatível, indicando uma pequena discrepância entre o valor medido e o nominal.

Solução Q.13

(a) Linearização e Regressão Linear:

O modelo físico é:

$$y = y_0 + \left(\frac{g}{2}\right)t^2$$

Para linearizá-lo, comparamos com a equação da reta $Y = a + bX$. Fazemos a seguinte associação de variáveis:

$$Y = y, \quad X = t^2, \quad a = y_0, \quad b = \frac{g}{2}$$

Após calcular a nova variável $X = t^2$ para cada um dos 10 pontos, inserimos os pares de dados (X, Y) no modo de regressão da calculadora. Os coeficientes obtidos são:

$$a \approx 0,003 \text{ m}$$

$$b \approx 5,00 \text{ m/s}^2$$

Assim, temos:

$$y_0 \approx 0,021 \text{ m}$$

$$g \approx 2 \cdot 5,00 \approx 10,00 \text{ m/s}^2$$

(b) Análise de Incertezas e Compatibilidade:

As incertezas dos coeficientes, fornecidas pela calculadora, são:

$$\sigma_a \approx 0,02 \text{ m}$$

$$\sigma_b \approx 0,03 \text{ m/s}^2$$

A incerteza de g é propagada a partir da incerteza de b :

$$\sigma_g = 2\sigma_b = 2 \times 0,03 = 0,06 \text{ m/s}^2$$

O resultado final para a aceleração da gravidade é:

$$g = (10,00 \pm 0,06) \text{ m/s}^2$$

O intervalo de confiança para nossa medida é $[9,94, 10,06] \text{ m/s}^2$. Como o valor teórico $g_{\text{teo}} = 9,81 \text{ m/s}^2$ não está contido neste intervalo, nosso resultado experimental é compatível.

Solução Q.14

(a) Linearização:

A equação do período do pêndulo é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Para linearizá-la, elevamos ambos os lados ao quadrado:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L$$

Esta equação tem a forma de uma reta $Y = bX$, com as seguintes associações:

$$Y = T^2, \quad X = L, \quad b = \frac{4\pi^2}{g}$$

(b) Regressão Linear:

Após calcular o valor de $Y = T^2$ para cada um dos 12 pontos, realizamos a regressão linear de Y versus X . O coeficiente angular obtido é:

$$b \approx 4,02 \text{ s}^2/\text{m}$$

(c) Estimativa de g e Incerteza:

Podemos encontrar a aceleração da gravidade a partir do coeficiente angular b :

$$g = \frac{4\pi^2}{b} = \frac{4\pi^2}{4,02} \approx 9,82 \text{ m/s}^2$$

A incerteza de b é $\sigma_b \approx 0,02 \text{ s}^2/\text{m}$. A incerteza de g é encontrada por propagação de erro:

$$\sigma_g = g \left(\frac{\sigma_b}{b} \right) = 9,82 \left(\frac{0,02}{4,02} \right) \approx 0,05 \text{ m/s}^2$$

O resultado final para a gravidade é:

$$g = (9,82 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$$

Solução Q.15

(a) Linearização:

O modelo da Lei de Boyle, $P = k/V$, pode ser linearizado na forma $Y = bX$ com a seguinte escolha de variáveis:

$$Y = P, \quad X = \frac{1}{V}$$

Nesse caso, o coeficiente angular da reta, b , será numericamente igual à constante k .

(b) Regressão Linear:

Calculamos a variável $X = 1/V$ para os 14 pontos de dados. Assim, usou-se 3 algarismos significativos para registrar tais dados em uma tabela. A regressão linear de P versus $1/V$ fornece o coeficiente angular:

$$b \approx 251,3 \text{ kPa} \cdot \text{L}$$

Portanto, a estimativa para a constante k é $k \approx 251,3 \text{ kPa} \cdot \text{L}$.

(c) Incerteza e Resultado Final:

A incerteza do coeficiente angular é $\sigma_b \approx 0,8 \text{ kPa} \cdot \text{L}$. Como $k = b$, a incerteza σ_k é igual a σ_b . O resultado final para a constante é:

$$k = (251,1 \pm 0,8) \text{ kPa} \cdot \text{L}$$

Solução Q.16

(a) Linearização:

A equação das lentes delgadas é:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Podemos rearranjá-la para a forma de uma reta, $Y = a + bX$:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

A associação de variáveis é:

$$Y = \frac{1}{q}, \quad X = \frac{1}{p}, \quad a = \frac{1}{f}, \quad b = -1$$

(b) Regressão e Coeficientes:

Após calcular os inversos de p e q para os 15 pontos, registrou-se os dados com 3 algarismos significativos. A regressão linear fornece os coeficientes:

$$a \approx 0,101 \text{ cm}^{-1}$$

$$b \approx -1,02$$

O coeficiente angular b é muito próximo de -1, como previsto teoricamente. O coeficiente linear a está relacionado à distância focal.

(c) Distância Focal e Incerteza:

A distância focal é o inverso do coeficiente linear:

$$f = \frac{1}{a} = \frac{1}{0,101} \approx 9,90 \text{ cm}$$

A incerteza de a é $\sigma_a \approx 0,0005 \text{ cm}^{-1}$. A incerteza de f é propagada:

$$\sigma_f = f \left(\frac{\sigma_a}{a} \right) = 9,90 \left(\frac{0,0005}{0,101} \right) \approx 0,05 \text{ cm}$$

O resultado final é:

$$f = (9,90 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Solução Q.17

(a) Linearização:

A lei do decaimento radioativo é:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados, obtemos a forma linearizada:

$$\ln(A) = \ln(A_0) - \lambda t$$

Esta é uma reta $Y = a + bX$ com as associações:

$$Y = \ln(A), \quad X = t, \quad a = \ln(A_0), \quad b = -\lambda$$

(b) Regressão e Parâmetros:

Após transformar os dados da Atividade ($A \rightarrow \ln A$), vamos registrar os dados com 3 algarismos significativos em uma tabela. A regressão com os 16 pontos fornece:

$$a \approx 6,92$$

$$b \approx -0,2495 \text{ dias}^{-1}$$

A atividade inicial é $A_0 = e^a = e^{6,92} \approx 1012$ contagens/min. A constante de decaimento é $\lambda = -b = 0,2495 \text{ dias}^{-1}$.

(c) Incertezas:

As incertezas dos coeficientes são $\sigma_a \approx 0,008$ e $\sigma_b \approx 0,0009 \text{ dias}^{-1}$. A incerteza de A_0 é $\sigma_{A_0} = A_0 \cdot \sigma_a = 1012 \times 0,008 \approx 8$ contagens/min. A incerteza de λ é $\sigma_\lambda = \sigma_b = 0,0009 \text{ dias}^{-1}$. Os resultados finais são:

$$A_0 = (1012 \pm 8) \text{ contagens/min}$$

$$\lambda = (0,2495 \pm 0,0009) \text{ dias}^{-1}$$

Solução Q.18

(a) Linearização:

O modelo $T = cR^n$ pode ser linearizado aplicando logaritmo em ambos os lados:

$$\log(T) = \log(c) + n \log(R)$$

Esta é uma reta $Y = a + bX$ com:

$$Y = \log(T), \quad X = \log(R), \quad a = \log(c), \quad b = n$$

(b) Regressão e Expoente:

Após transformar os dados para suas escalas logarítmicas (registrando-os com 3 algarismos significativos), a regressão com os 18 pontos fornece o coeficiente angular:

$$b \approx 1,71$$

Este valor corresponde diretamente ao expoente n . A incerteza associada, fornecida pela calculadora, é:

$$\sigma_b = \sigma_n \approx 0,01$$

(c) Compatibilidade:

O valor experimental para o expoente é:

$$n = 1,71 \pm 0,01$$

O intervalo de confiança é $[1,70, 1,72]$. Como o valor teórico $n = 1,5$ não está no intervalo, o resultado é incompatível com a Terceira Lei de Kepler.

Solução Q.19

(a) Linearização:

A equação do decaimento de tensão é:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

Aplicamos o logaritmo natural para linearizar:

$$\ln(V) = \ln(V_0) - \frac{1}{\tau}t$$

A equação tem a forma de uma reta $Y = a + bX$ com:

$$Y = \ln(V), \quad X = t, \quad a = \ln(V_0), \quad b = -1/\tau$$

(b) Regressão e Parâmetros:

A regressão dos 20 pontos de dados transformados $(t, \ln V)$ fornece os coeficientes:

$$a \approx 2,304$$

$$b \approx -0,100 \text{ s}^{-1}$$

A voltagem inicial é:

$$V_0 = e^a = e^{2,304} \approx 10,0 \text{ V}$$

A constante de tempo é:

$$\tau = -1/b = -1/(-0,100) = 10,0 \text{ s}$$

(c) Incertezas e Resultados Finais:

As incertezas dos coeficientes são $\sigma_a \approx 0,003$ e $\sigma_b \approx 0,0001 \text{ s}^{-1}$. Propagamos as incertezas para encontrar σ_{V_0} e σ_τ :

$$\sigma_{V_0} = V_0 \cdot \sigma_a = 10,0 \times 0,003 = 0,03 \text{ V}$$

$$\sigma_\tau = \tau \left(\frac{\sigma_b}{|b|} \right) = 10,0 \left(\frac{0,0001}{0,100} \right) = 0,01 \text{ s}$$

Os resultados finais são:

$$V_0 = (10,00 \pm 0,03) \text{ V}$$

$$\tau = (10,00 \pm 0,01) \text{ s}$$

Capítulo 3

Tabelas e Gráficos

3.1 Introdução

Tabelas e gráficos são ferramentas essenciais para a análise de dados. Neste capítulo, descreveremos como apresentá-los de maneira correta!

Em geral, as tabelas fornecem uma estrutura organizada que permite uma análise detalhada de cada ponto experimental. Por outro lado, os gráficos oferecem uma representação visual do padrão geral dos dados, tornando mais fácil compreender seu comportamento global.

Vale ressaltar que a elaboração de tabelas e gráficos é uma parte muito frequente e importante para OBF e, apesar de ser um tema simples, muitas pessoas cometem erros nesse aspecto.

3.2 Tabela

Certamente, você já deve ter criado uma tabela em algum momento da sua vida. No entanto, na física experimental, as abordagens podem ser um tanto distintas. Como mencionado anteriormente, as tabelas desempenham um papel crucial na representação dos dados obtidos, sendo fundamentais para apresentá-los de maneira clara e organizada.

Imagine que, para praticar suas habilidades de criação de tabelas, você realiza o seguinte experimento: em uma câmara de vácuo, eleva a altura de uma bolinha a uma distância Δy do solo. Em seguida, solta a bolinha e anota o tempo Δt que ela leva para atingir o chão a partir dessa altura específica. Ao fazer isso, registra essa altura e seu tempo de queda correspondente.

É provável que você anote os dados de forma desorganizada ou de uma maneira que possa ser facilmente confundida. Para resolver esse problema, transfira esses dados para

uma tabela.

Aqui está um exemplo de uma tabela corretamente confeccionada que você fez:

Determinação experimental da gravidade por queda livre

$(\Delta y \pm 0,05) \text{ (cm)}$	$(\Delta t \pm 0,01) \text{ (s)}$
10,00	0,14
20,00	0,21
30,00	0,25
40,00	0,29
50,00	0,32
60,00	0,35
70,00	0,38
80,00	0,40
90,00	0,43
100,00	0,45
110,00	0,47
120,00	0,49
130,00	0,51
140,00	0,53
150,00	0,55
160,00	0,57
170,00	0,59
180,00	0,61
190,00	0,62
200,00	0,64

Obs: Durante a prova, recomenda-se fazer a tabela com o uso da régua.

A tabela é construída de modo que, para um Δy , temos um Δt correspondente que se apresenta na mesma linha. Por exemplo, para altura $\Delta y = 10,00 \text{ cm}$, temos que o tempo de queda correspondente é $\Delta t = 0,14 \text{ s}$.

Como você pode ver, alguns elementos devem ser apresentados para a confecção de uma tabela correta:

- Título;
- Símbolo ou nome das variáveis;
- Unidade das variáveis;
- Medidas;

- Incertezas das medidas;
- Algarismos significativos corretos.

3.2.1 Título

Toda tabela corretamente confeccionada deve apresentar um título claro e conciso, que defina claramente o conteúdo ou o propósito do experimento.

No exemplo citado, o título é "Determinação experimental da gravidade por queda livre". Este título é apropriado, pois reflete o objetivo de determinar a gravidade a partir dos dados coletados. No entanto, outros títulos possíveis poderiam ser "Altura em função do tempo de queda", "Resultados de um experimento de queda livre" e assim por diante.

3.2.2 Símbolo ou nome e unidade das variáveis

Esses elementos da tabela são representados na 1ª linha (excluindo o título). No exemplo, os símbolos das variáveis são Δy e Δt . No entanto, também é correto representá-los na forma de nomes, como altura e tempo de queda.

As unidades das variáveis são indicadas após o símbolo ou nome, conforme a tabela. No caso, a unidade da altura (Δy) é centímetros (cm), e a unidade do tempo de queda (Δt) é segundos (s), mas a utilização de outras unidades também é correta.

3.2.3 Medidas e incerteza das medidas

As medidas são representadas nas linhas abaixo dos símbolos das variáveis, ou seja, da 2ª linha para baixo. No exemplo, as medidas para a altura (Δy) são 10,00; 20,00; 30,00; ... ; 200,00; enquanto para o tempo de queda (Δt) são 0,14; 0,21; 0,26; ... ; 0,64. Como mencionado anteriormente, cada Δy tem um Δt correspondente que é apresentado na mesma linha.

As incertezas das medidas podem ser representadas de duas maneiras: na primeira linha, se a incerteza em cada medida for a mesma, ou nas linhas subsequentes, caso as incertezas variem com as medidas. No exemplo, observe que as duas incertezas são iguais para todas as medidas de uma mesma grandeza, por exemplo, a incerteza de Δy é representada na primeira linha, pois é sempre a mesma ($\pm 0,05$ cm). Essas incertezas são constantes pois os dispositivos de medição para essa grandeza apresentam incertezas constantes e não percentuais.

Um exemplo de uma tabela incorretamente confeccionada:

Δy (cm)	Δt
10,00	$0,1 \pm 0,02$
20,00	$0,2 \pm 0,02$
30,00	$0,3 \pm 0,02$
40,00	$0,3 \pm 0,01$
50,00	$0,3 \pm 0,02$
60,00	$0,4 \pm 0,02$
70,00	$0,4 \pm 0,01$
80,00	$0,4 \pm 0,01$
90,00	$0,4 \pm 0,02$
100,00	$0,5 \pm 0,02$
110,00	$0,5 \pm 0,01$
120,00	$0,5 \pm 0,02$
130,00	$0,5 \pm 0,03$
140,00	$0,5 \pm 0,01$
150,00	$0,6 \pm 0,02$
160,00	$0,6 \pm 0,02$
170,00	$0,6 \pm 0,01$
180,00	$0,6 \pm 0,01$
190,00	$0,6 \pm 0,02$
200,00	$0,6 \pm 0,01$

A tabela está errada já que não apresenta uma série de elementos:

- Título;
- Unidade da variável tempo;
- Incerteza da variável altura;
- Algarismos significativos incorretos.

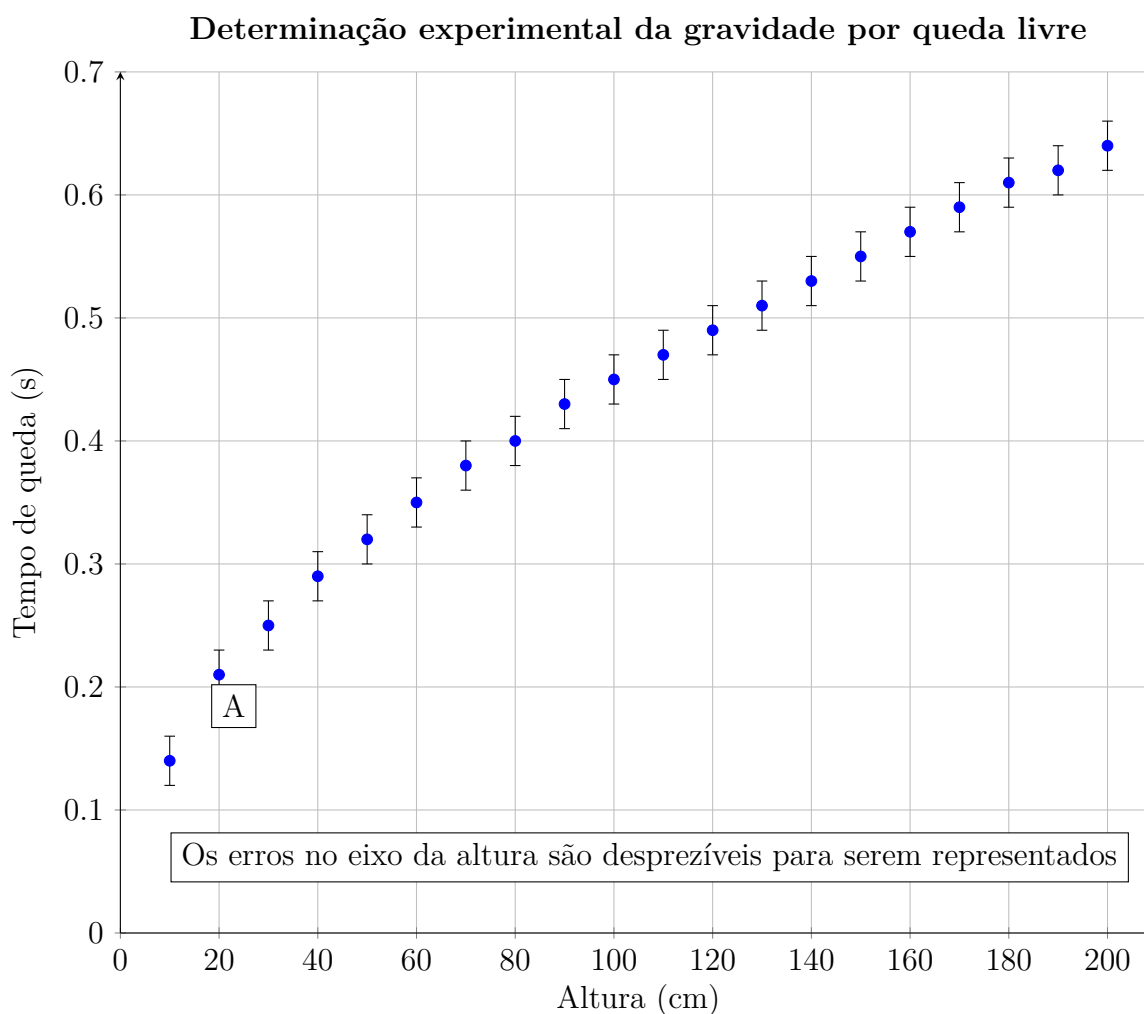
3.3 Gráfico

Mais uma vez, é bem provável que você já tenha criado ou visto um gráfico em sua vida. Entretanto, assim como nas tabelas, na física experimental existe uma maneira correta de elaborá-lo. Como mencionado anteriormente, o propósito dos gráficos é representar visualmente os dados, facilitando a compreensão do comportamento dos dados. No entanto, ao contrário das tabelas, a precisão dos dados nos gráficos não é tão detalhada.

Em resumo, as tabelas são vantajosas para uma representação precisa de cada dado, já que apresentam exatamente os valores individuais. Já os gráficos são úteis para representar o comportamento geral dos dados, de forma visual.

Vamos considerar o mesmo experimento de queda livre apresentado anteriormente, então você pode utilizar os mesmos dados. Porém, agora você deseja praticar suas habilidades de criação de gráficos.

Segue um exemplo de gráfico bem elaborado:



Obs: Geralmente é fornecido um papel de gráfico durante uma prova experimental. Contudo, recomenda-se o uso da régua para fazer os eixos.

Note que no gráfico, a representação da correlação entre as variáveis é feita da seguinte forma: para um Δy e um Δt correspondente, um ponto de coordenadas $(\Delta y, \Delta t)$ pode ser formado. Por exemplo, para a altura $\Delta y = 20,00$ cm e $\Delta t = 0,21$ s, corresponde ao ponto A.

Como você pode ver, assim como na tabela, alguns elementos devem ser apresentados para a confecção de um gráfico correto:

- Título;
- Eixos;
- Símbolo, unidade e incerteza das variáveis;
- Pontos experimentais;
- Barras de erros;
- Pontos experimentais bem distribuídos.

3.3.1 Título

Assim como na tabela, o título no gráfico deve ser conciso e deixar claramente definido o conteúdo ou o propósito do experimento.

O título deve ficar no topo; entretanto, tome cuidado para que o título não se sobreponha aos pontos.

3.3.2 Eixos

Eixos nos gráficos são as linhas que contornam o gráfico e fornecem uma referência para as medidas. Um gráfico bidimensional é composto por dois eixos: o eixo x (horizontal) e o eixo y (vertical). É importante ressaltar que cada um dos eixos representa uma variável. No exemplo dado, o eixo x representa a altura (Δy) e o eixo y representa o tempo de queda (Δt).

Os eixos, para serem corretamente elaborados, devem seguir algumas regras:

- Sua escala (intervalo entre as marcações) deve igualmente espaçada (exceto em gráficos diálog, monólogo e etc);
 - Sua escala deve caber todos os pontos experimentais;
 - Sua escala deve ter o tamanho ideal (nem tão grande, nem tão pequena) de modo que os pontos experimentais ocupem a área do gráfico uniformemente;
 - O eixo x deve representar a variável independente, ou seja, a variável que é a causa de algum efeito, aquela que se você consegue "controlar" no experimento. No exemplo, a variável independente é a altura, já que você consegue ajustá-la no experimento;
 - O eixo y deve representar a variável dependente, ou seja, a variável que é consequência da variável independente. No exemplo, a variável dependente é o tempo
-

de queda, já que uma alteração na altura causa a alteração no tempo. Entretanto, não é possível controlar esse tempo de queda;

- Escrever o símbolo e unidade da variável no final dos eixos;
- Escrever o nome da variável abaixo ou do lado dos eixos (não é uma regra, mas é recomendado).

Dicas para confecção de escala:

- A escala do gráfico não necessariamente deve começar na origem, ou seja, não é necessário que os eixos comecem em 0. Isso pode ser muito útil, principalmente quando os dados não começam em um número próximo de 0. Por exemplo, um conjunto de dados que varia entre 52 e 68 pode começar em 50 e terminar em 70, fazendo com que o conjunto dos pontos experimentais tenha uma distribuição mais uniforme do que uma escala que vá de 0 a 70;
- Uma estratégia muito interessante de se utilizar para definir a escala do gráfico é calcular a diferença entre o ponto experimental de maior valor e o de menor valor. Após isso, divida esse número pela quantidade de quadradinhos que gostaria de ser ocupado (lembrando que o papel de gráfico fornecido é quadriculado). Com o número dividido em mãos, aproxime esse valor para cima. O número obtido será a escala do seu gráfico, ou seja, quanto o valor da variável muda em um quadradinho.

3.3.3 Pontos Experimentais

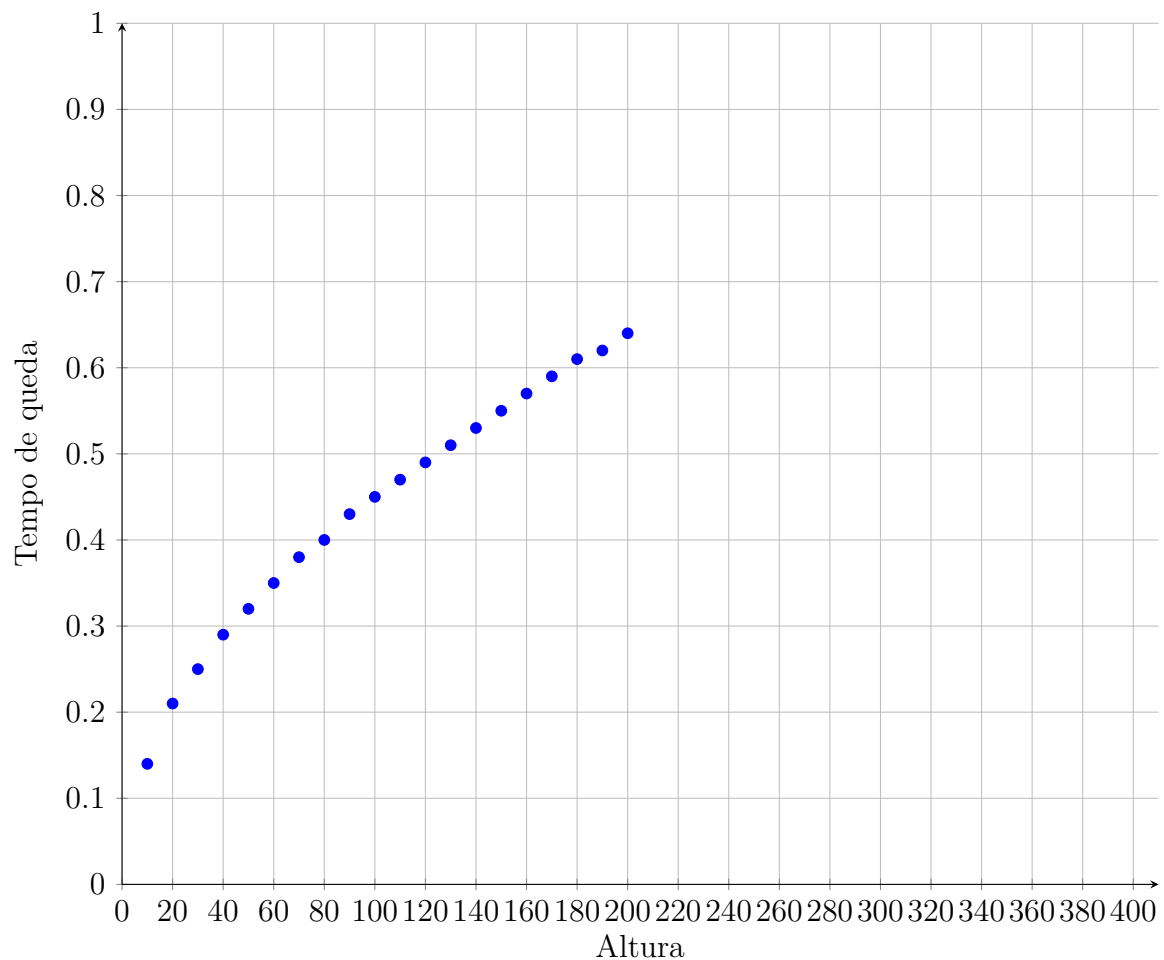
Também devemos tomar cuidado com os pontos experimentais. No geral, sua representação não é tão complicada, mas alguns erros podem ser cometidos:

- Ligar os pontos experimentais. Isso é bem comum em gráficos empresariais, de faturamento, etc. Entretanto, isso é incorreto em gráficos de física experimental;
- Não apresentar barra de erros;
- Fazer pontos muito pequenos ou muito grandes.
- Pontos cobrirem apenas uma parte do gráfico (recomenda-se que os pontos experimentais ocupem pelo menos 70% do papel milimetrado. Essa regra não é válida para papel dilog e monolog)

As barras de erro podem ser apresentadas como no exemplo da queda livre. Perceba que elas são apresentadas tanto no eixo x quanto no eixo y . Como o nome já sugere, elas representam o erro de cada ponto experimental, de modo que sua representação deve

seguir a escala do gráfico. Por exemplo, caso a escala do eixo x seja 1 quadrado para 0,50 cm e o erro/incerteza seja de 0,25 cm, a barra de erro no eixo x será de 0,5 quadrado.

Lembre-se de que o erro deve ser representado tanto no positivo quanto no negativo, ou seja, a barra de erro será representada tanto na "frente" como "atrás" do ponto. Além disso, caso o erro seja muito pequeno para ser representado, pode-se escrever na legenda do gráfico que a incerteza é desprezível para ser representada e, portanto, não é necessário representar as barras de erro. No entanto, é fundamental que você escreva isso na legenda. Um exemplo de gráfico incorretamente confeccionado:



O gráfico está errado pois não apresenta uma série de elementos:

- Título;
- Barra de erros;
- Unidade nos eixos;
- Legenda(caso a barra de erro não possa ser representada na escala);
- Pontos experimentais bem distribuídos.

3.4 Determinando coeficientes

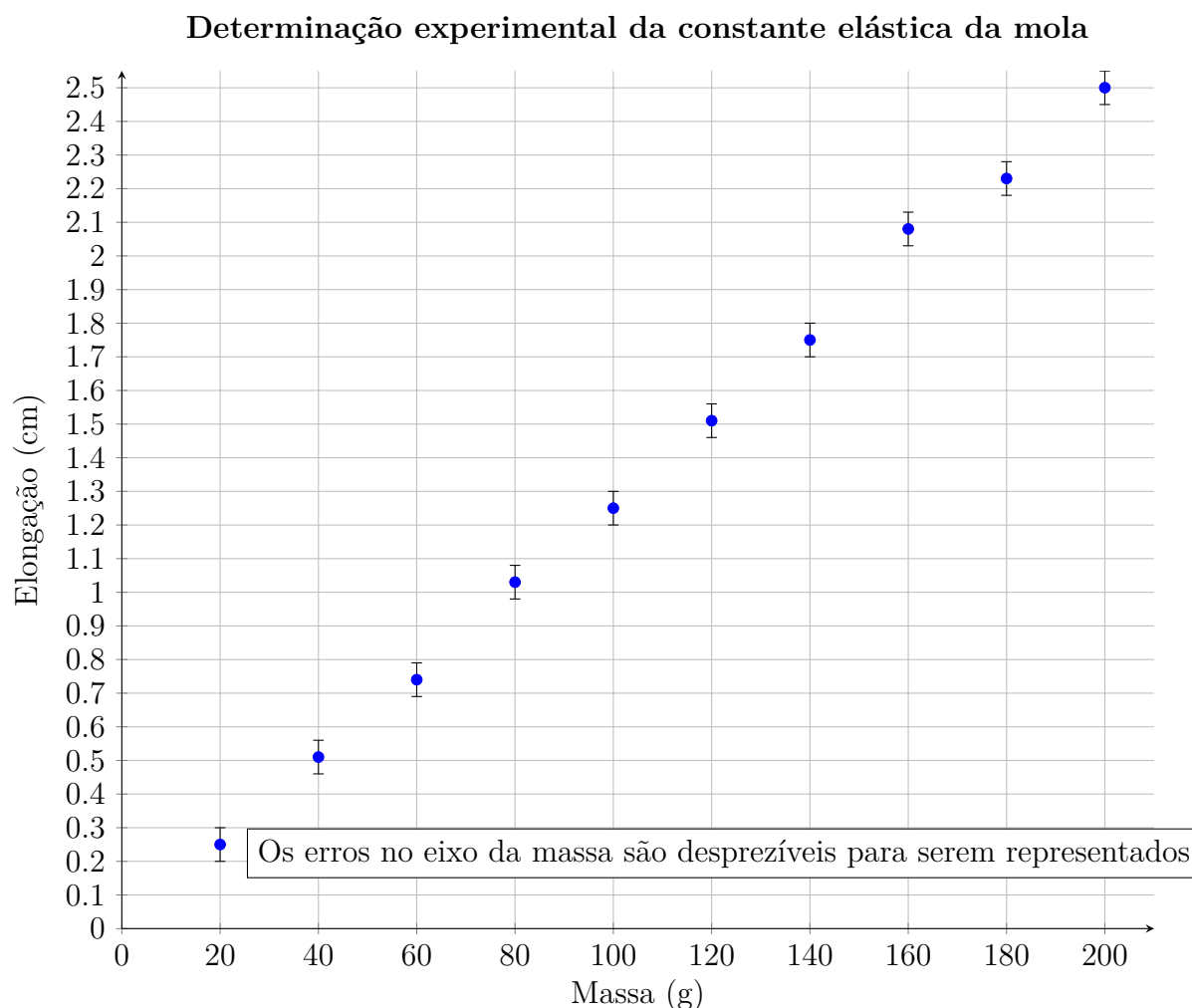
Agora, considere outro experimento que você realiza. Imagine que você suspenda uma mola na vertical para estudar um pouco mais sobre a Lei de Hooke e calcular a constante elástica de uma mola. Para isso, você adiciona massas na outra extremidade da mola, fazendo com que a mola se alongue. Em seguida, você mede a elongação da mola. Realizando esse processo utilizando diferentes massas, você obtém a seguinte tabela:

Determinação experimental da constante elástica da mola

m (g)	($\Delta x \pm 0,05$) (cm)
20,0 $\pm$ 0,1	0,25
40,0 $\pm$ 0,2	0,51
60,0 $\pm$ 0,3	0,74
80,0 $\pm$ 0,4	1,03
100,0 $\pm$ 0,5	1,25
120,0 $\pm$ 0,6	1,51
140,0 $\pm$ 0,7	1,75
160,0 $\pm$ 0,8	2,08
180,0 $\pm$ 0,9	2,23
200,0 $\pm$ 1,0	2,50

Depois de pensar/analisar um pouco, você percebe que a relação entre a massa e o alongamento da mola segue uma função linear. Para provar isso, você recorre à física teórica e lembra que, nesse caso, a força da mola precisa se equilibrar com a força peso. Logo, $k\Delta x = mg \rightarrow \Delta x = \frac{g}{k}m$. Então, Δx cresce linearmente com a massa!

Após essa análise, você decide plotar seus dados experimentais em um gráfico e obtém o seguinte:



E como, já era de se esperar, os pontos experimentais parecem seguir uma reta. Como você já tinha visto na teoria, $\Delta x = \frac{g}{k}m$ e portanto, caso você trace uma reta no gráfico que siga os pontos, a tangente desse gráfico representará $\frac{g}{k}$, uma vez que a função de reta é dada por $y = a + bx$ e a equação obtida pela teoria era $\Delta x = \frac{g}{k}m$. Pelo gráfico, a elongação encontra-se no eixo y e a massa no eixo x . Logo, substituindo essas duas variáveis na equação da reta, obtém-se $\Delta x = a + bm$. Substituindo isso na equação da teoria, temos que: $\frac{g}{k}m = a + bm$. Como a função obtida pela teoria não possui nenhum termo linear, temos que, de forma teórica, $a = 0$. Logo, $\frac{g}{k}m = bm \rightarrow b = \frac{g}{k}$. Portanto, a tangente da reta (coeficiente b) obtida a partir dos pontos é dada por $\frac{g}{k}$ nesse exemplo. Agora, precisamos usar nossa tabela e nosso gráfico para descobrir o valor desses coeficientes.

3.4.1 Regressão Linear

achando os coeficientes da regressão linear da forma que aprendemos no capítulo passado, chegamos aos valores:

$$a = (0,005 \pm 0,020) \text{ cm} = (0,00005 \pm 0,00020) \text{ m}$$

$$b = (0,01255 \pm 0,00016) \text{ cm/g} = (0,1255 \pm 0,0016) \text{ m/kg}$$

Podemos ver que $\sigma_a > a$, então a pode ser considerado zero, assim como previsto pela nossa análise teórica. agora usando nossa análise teórica para b

$$b = \frac{g}{k} \Rightarrow k = \frac{g}{b} = 78,1 \text{ N/m}$$

Pela propagação de erros vista no capítulo 1:

$$\sigma_k = g \frac{\sigma_b}{b^2} = 1,0 \text{ N/m}$$

Então o valor final de k fica:

$$k = (78,1 \pm 1,0) \text{ N/m}$$

3.4.2 Método Gráfico

O método gráfico é uma alternativa para a determinação dos coeficientes de uma reta quando não se tem acesso a uma calculadora para realizar regressão linear. Entretanto, o seu resultado não deve ser muito discrepante do alcançado pela regressão.

A seguir, apresentamos o procedimento para aplicar o método gráfico:

1. **Calcule o ponto médio:** Obtenha o valor médio dos valores de x ($\bar{x}$) e o valor médio dos valores de y ($\bar{y}$) a partir dos seus dados experimentais. No gráfico, localize o ponto equivalente a $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. **Desenhe a reta média:** Apoie uma régua no ponto médio $(\bar{x}, \bar{y})$ e gire-a até que aproximadamente 50% dos pontos experimentais fiquem acima da régua e 50% fiquem abaixo. Trace esta reta, que será a reta média.
3. **Desenhe as retas de inclinação máxima e mínima:**
 - **Inclinação máxima:** Apoie a régua no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ e gire-a até que aproximadamente 16% dos pontos fiquem acima da reta e 84% fiquem abaixo. A equação desta reta é $y = \bar{y} + b_{max}(x - \bar{x})$.
 - **Inclinação mínima:** Da mesma forma, gire a régua em torno do ponto médio até que 16% dos pontos fiquem abaixo e 84% fiquem acima da reta. A equação desta reta é $y = \bar{y} + b_{min}(x - \bar{x})$.

A região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima contém aproximadamente 68% dos pontos experimentais, o que é consistente com o conceito de desvio padrão para uma distribuição normal.

Os valores do coeficiente linear (a), do coeficiente angular (b) e seus respectivos erros (Δa , Δb) são calculados a partir dos valores obtidos pelas retas de inclinação máxima e mínima, utilizando as seguintes fórmulas:

$$a = (a_{max} + a_{min})/2$$

$$b = (b_{max} + b_{min})/2$$

$$\Delta a = [a_{max} - a_{min}]/(2\sqrt{N})$$

$$\Delta b = [b_{max} - b_{min}]/(2\sqrt{N})$$

3.5 Tabelas e Gráficos Linearizadas

Como foi visto no capítulo anterior, nós podemos linearizar equações que ainda não são lineares para que seja possível extrair informações delas utilizando a regressão linear.

Utilizando como exemplo o experimento de queda livre, nós temos $\Delta y = \frac{g}{2}\Delta t^2$. Linearizando para $y = a + bx$, nós temos:

- $y \rightarrow \Delta y$
- $x \rightarrow \Delta t^2$
- $a \rightarrow 0$
- $b \rightarrow \frac{g}{2}$

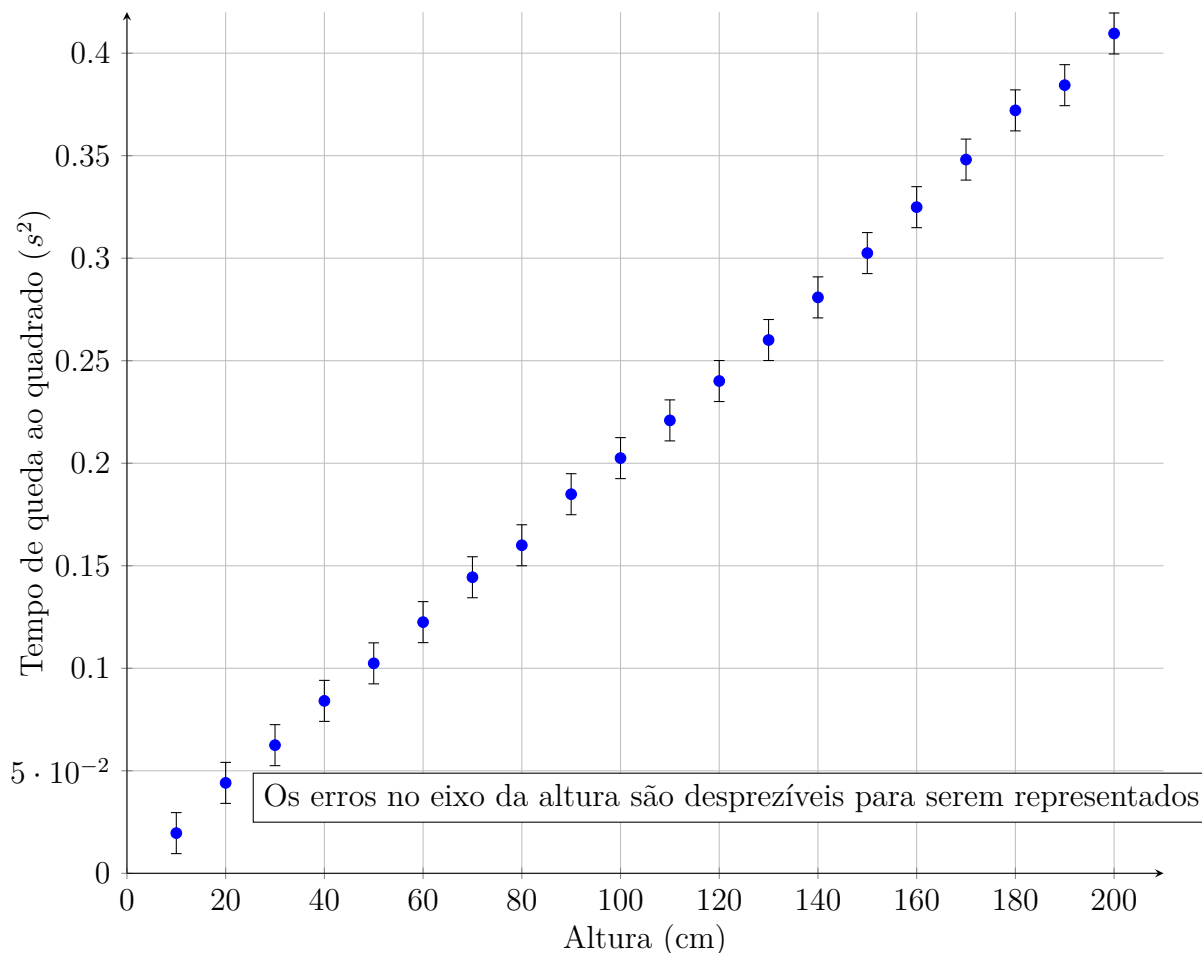
Então, para nós descobrirmos o valor da gravidade para esse experimento, é necessário refazer a nossa tabela com variáveis Δy e Δt^2 , além de plotar um gráfico de Δy vs Δt^2 . Refazendo a tabela:

Determinação experimental da gravidade por queda livre

$(\Delta y \pm 0,05) \text{ (cm)}$	$(\Delta t^2 \pm 0,01) \text{ (s}^2\text{)}$
10,00	$0,020 \pm 0,006$
20,00	$0,044 \pm 0,008$
30,00	$0,063 \pm 0,010$
40,00	$0,084 \pm 0,006$
50,00	$0,102 \pm 0,013$
60,00	$0,123 \pm 0,014$
70,00	$0,144 \pm 0,008$
80,00	$0,160 \pm 0,008$
90,00	$0,185 \pm 0,017$
100,00	$0,203 \pm 0,018$
110,00	$0,221 \pm 0,009$
120,00	$0,240 \pm 0,020$
130,00	$0,260 \pm 0,031$
140,00	$0,281 \pm 0,011$
150,00	$0,303 \pm 0,022$
160,00	$0,325 \pm 0,023$
170,00	$0,348 \pm 0,012$
180,00	$0,372 \pm 0,012$
190,00	$0,384 \pm 0,025$
200,00	$0,410 \pm 0,013$

E, portanto, o seguinte gráfico:

Determinação experimental por regressão linear da gravidade por queda livre



É possível perceber que o comportamento da função é realmente linear. Portanto, pode-se realizar algum dos métodos vistos na seção passada para concluir nosso experimento. achando os coeficientes da regressão linear, chegamos aos valores:

$$a = (0,011 \pm 0,007) \text{ m}$$

$$b = (4,910 \pm 0,029) \text{ m/s}^2$$

Primeiramente, podemos ver que $a > \sigma_a$, sendo que pela nossa teoria, teríamos $a = 0$, o que indica que algumas medições não foram muito precisas. Pelo nosso gráfico, é possível perceber que os últimos pontos desviam da nossa reta esperada. Em um experimento, você pode (ou **deve**) perceber coisas assim e retirar esses dados problemáticos, porém, eles foram mantidos aqui para mostrar que nem sempre você terá pontos bons.

Agora, voltando a tentar descobrir o valor da gravidade, temos:

$$b = \frac{g}{2} \Rightarrow g = 2b = 9,820 \text{ m/s}^2$$

Pela propagação de erros:

$$\sigma_g = 2\sigma_b = 0,058 \text{ m/s}^2$$

Então o valor final de g fica (agora o erro só terá uma casa decimal, porque o primeiro algarismo significativo não é mais 2):

$$k = (9,82 \pm 0,06) \text{ m/s}^2$$

3.6 Dilog e Monolog

Uma outra forma de linearização é por meio da mudança da escala dos eixos do gráfico. As duas formas mais conhecidas de fazer isso são utilizando o papel dilog e o papel monolog.

Essas escalas são principalmente utilizadas para representar comportamentos exponenciais de parâmetros físicos. A base para esta técnica de linearização é a propriedade dos logaritmos de transformar multiplicações em somas e potenciações em multiplicações.

Para uma **função de potência**, da forma $y = Cx^D$:

$$\begin{aligned}\log(y) &= \log(Cx^D) \\ \log(y) &= \log(C) + \log(x^D) \\ \underbrace{\log(y)}_Y &= D \underbrace{\log(x)}_X + \underbrace{\log(C)}_a\end{aligned}\tag{3.1}$$

Esta é a equação de uma reta, $Y = DX + a$, em um gráfico onde os eixos são $\log(y)$ e $\log(x)$. Um gráfico com ambos os eixos em escala logarítmica é chamado de **gráfico dilog**. O coeficiente angular da reta neste gráfico nos dá o expoente D .

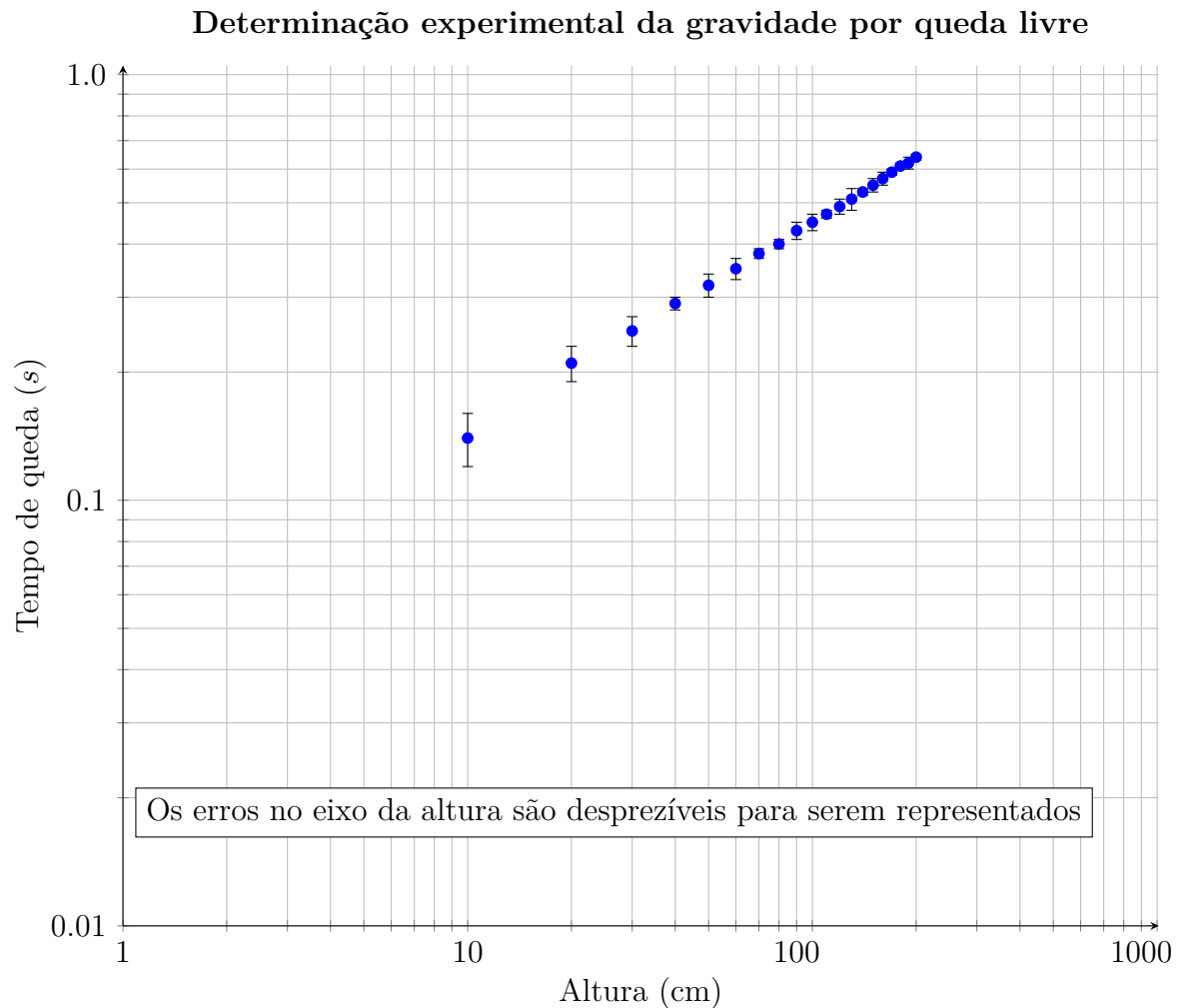
Para uma **função exponencial**, da forma $y = Cd^x$:

$$\begin{aligned}\log(y) &= \log(Cd^x) \\ \log(y) &= \log(C) + \log(d^x) \\ \underbrace{\log(y)}_Y &= (\log d) \underbrace{x}_X + \underbrace{\log(C)}_a\end{aligned}\tag{3.2}$$

Esta é a equação de uma reta, $Y = (\log d)X + a$, em um gráfico onde o eixo vertical está em escala logarítmica ($\log(y)$) e o eixo horizontal está em escala linear (x). Este tipo de gráfico é chamado de **gráfico monolog** ou semi-log.

3.6.1 Dilog

Voltando para o exemplo da queda livre, podemos obter o seguinte gráfico no papel dilog:



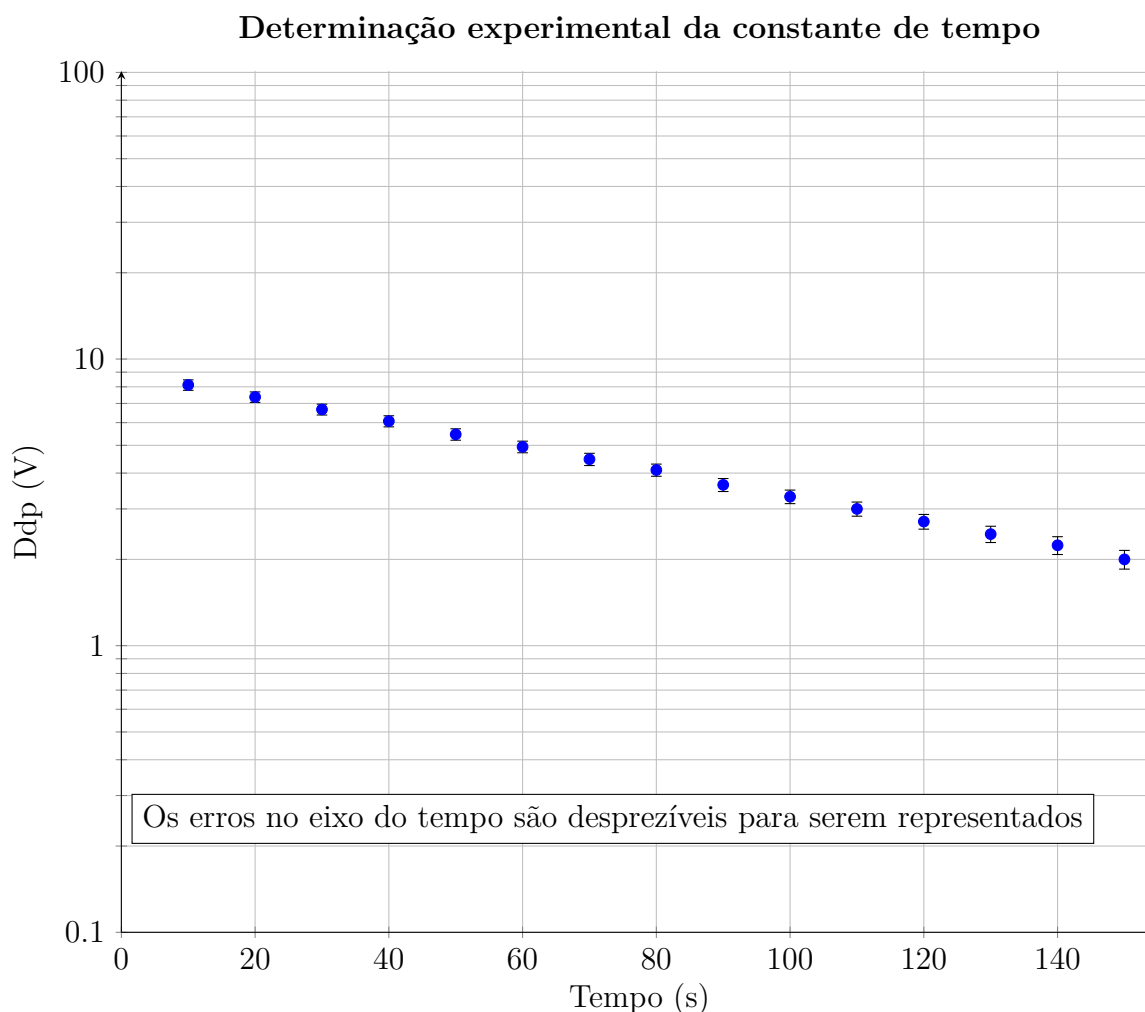
Perceba que a representação em escala decimal era parabólica; entretanto, utilizando o papel dilog, a representação torna-se linear!

Uma observação importante de se fazer aqui é que o comportamento dos dados experimentais ainda é o mesmo, mas apenas sua representação é diferente.

3.6.2 Monolog

Como já foi dito, o gráfico monolog é bem parecido com o dilog, com a exceção de que um dos eixos será linear, e o outro logarítmico.

Considerando um experimento de um circuito RC, cuja ddp é dada por: $V = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Portanto, podemos representar seus dados da seguinte forma:

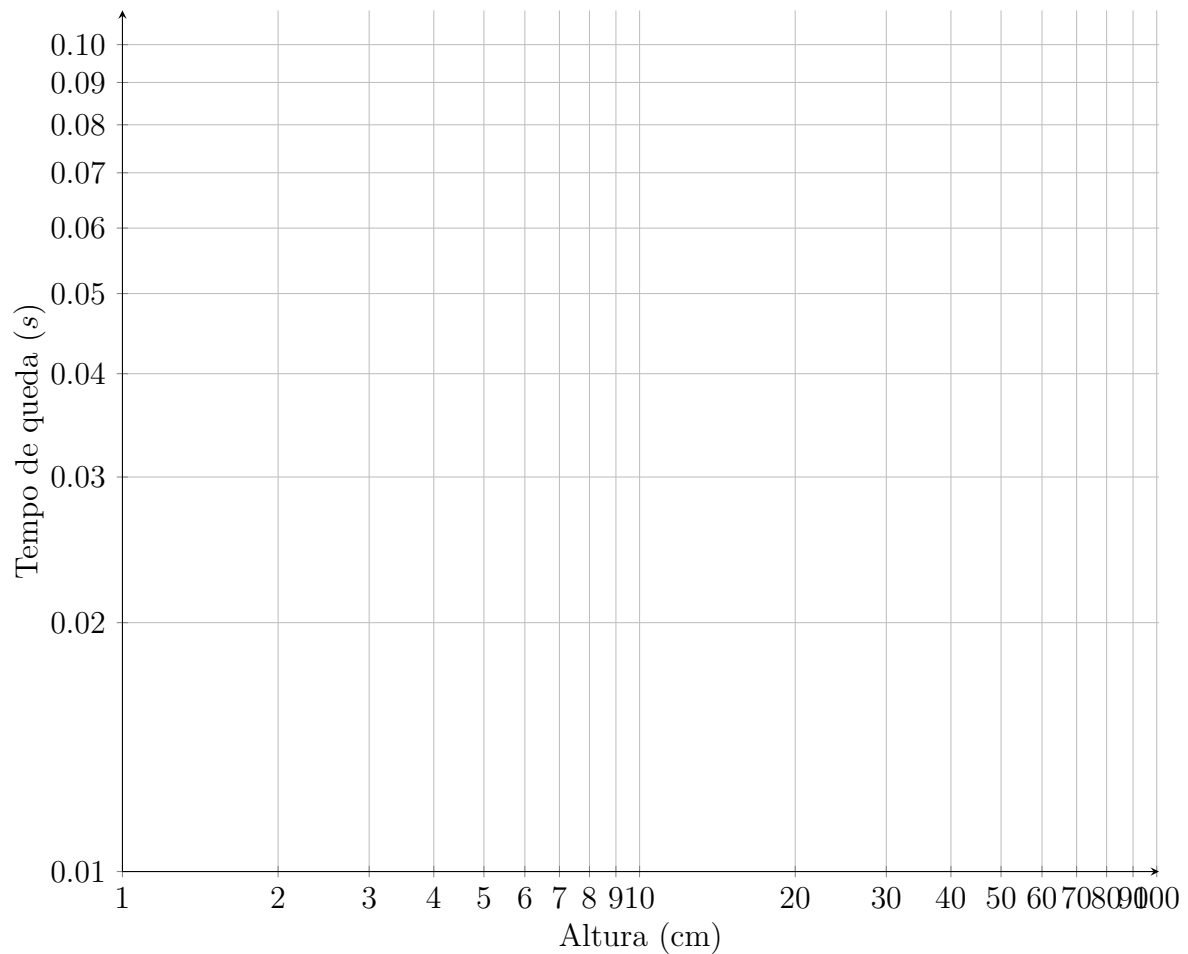


3.6.3 Pontos Experimentais

Nesses casos, é especialmente importante tomar cuidado com os pontos experimentais, já que não estamos acostumados a utilizar escalas desse tipo.

Para plotar os dados no gráfico, é fundamental entender a escala utilizada. Normalmente, o papel fornecido no dia da prova será muito semelhante ao do exemplo, porém sem os valores ou nomes nos eixos. Note que, no papel dilog, por exemplo, tanto o eixo x quanto o eixo y seguem um ciclo que se repete a cada multiplicação por 10, com subdivisões entre os principais valores. Cada subdivisão representa os valores intermediários, ou seja, entre 1 e 10, temos as subdivisões 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Entre 10 e 100, as subdivisões são 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, e assim por diante.

Obs: O mesmo vale para o eixo logaritimizado do papel monolog Para fins didáticos, aqui está um exemplo considerando apenas um ciclo(o ciclo da parte inferior esquerda) do gráfico:



Entretanto, essas subdivisões normalmente não são explicitadas devido a falta de espaço e para a escala não ficar poluída.

Sabendo disso, plotar os dados experimentais no gráfico torna-se uma tarefa mais simples, entretanto, também é preciso tomar cuidado com as barras de erro, já que ela pode ser maior em uma das direções.

Uma observação importante é que nem sempre os dados experimentais estarão bem distribuídos nas escalas utilizadas, como ocorre no exemplo do diolog. Muitas vezes, os pontos ocuparão uma porcentagem muito pequena do gráfico. Por exemplo, imagine que você tenha coletado 20 dados experimentais para alturas entre 800 cm e 1000 cm no contexto da queda livre. A variação dos valores é de 200 cm, assim como entre 0 cm e 200 cm. Entretanto, no primeiro caso, todos os 20 pontos estariam confinados em um espaço minúsculo (as duas últimas subdivisões do gráfico diolog), em comparação com o segundo caso. Portanto, não há penalização por não cumprir o critério de preencher 70% do espaço nesses casos.

3.7 Checklist de Boas Práticas

Ao construir tabelas e gráficos para seus relatórios de laboratório ou para provas, use a checklist a seguir como um guia rápido para garantir que seu trabalho seja claro, completo e correto.

Para Tabelas

- **Título:** A tabela possui um título claro e informativo, posicionado acima dela?
- **Cabeçalho:** Cada coluna tem um cabeçalho que indica a variável (ex: Δy) e sua unidade (ex: cm)?
- **Incertezas:** As incertezas das medições estão claramente indicadas?
- **Algarismos Significativos:** Os valores e suas incertezas estão com o número correto de algarismos significativos?
- **Organização:** Os dados estão organizados de forma lógica?
- **Clareza Visual:** A tabela é "limpa", sem excesso de linhas e bordas?

Para Gráficos

- **Título:** O gráfico possui um título que descreve o experimento?
 - **Rótulos dos Eixos:** Ambos os eixos (X e Y) estão rotulados com a variável e a unidade?
 - **Variáveis nos Eixos:** A variável independente está no eixo X e a dependente no eixo Y?
 - **Escala:** A escala foi escolhida para que os pontos ocupem a maior parte da área do gráfico?
 - **Pontos Experimentais:** Os pontos estão marcados de forma clara e visível?
 - **Barras de Erro:** As barras de erro foram desenhadas para cada ponto?
 - **Ajuste de Curva:** Foi desenhada a **curva de melhor ajuste** (reta de regressão) em vez de simplesmente ligar os pontos um a um?
 - **Legenda:** Há uma legenda explicando os símbolos e as curvas?
-

Para Análise de Dados

- **Interpretação dos Coeficientes:** Os coeficientes da regressão (ex: b) foram relacionados com os parâmetros físicos do modelo teórico (ex: $b = g/k$)?
 - **Cálculo do Resultado:** O valor final da grandeza física desejada (ex: k) foi calculado a partir dos coeficientes?
 - **Propagação de Incertezas:** A incerteza do resultado final foi calculada, propagando as incertezas dos coeficientes?
 - **Análise do Ajuste:** Foi verificado se o ajuste é bom? (Ex: O coeficiente linear a é compatível com zero?).
 - **Resultado Final:** O resultado é apresentado corretamente como (valor $\pm$ incerteza) unidade?
-

Capítulo 4

Instrumentos de medidas

Para realizar a coleta de dados em experimentos científicos, é essencial contar com instrumentos adequados de medição. Pense, por exemplo, na seguinte situação: você deseja medir as dimensões de um pacote que pretende enviar pelo correio. Nesse caso, provavelmente utilizaria uma régua, que é um instrumento para medir comprimentos. Já se a sua intenção fosse acompanhar o seu "peso", a escolha seria uma balança, instrumento destinado à medição de massa.

Da mesma forma, em ciência, cada grandeza física exige um instrumento específico para ser corretamente medida. Veja alguns exemplos:



Régua
Comprimento



Cronômetro
Tempo



Balança
Massa



Transferidor
Ângulo



Termômetro
Temperatura



Multímetro
Tensão, resistência e
corrente elétrica

Figura 4.1: Exemplos de instrumentos de medição e as respectivas grandezas físicas medidas.

No entanto, mesmo dentro de uma mesma categoria, não existe um único instrumento universal. A régua, por exemplo, é ótima para medir comprimentos pequenos e retos, mas não seria prática para medir a circunferência de um objeto ou a distância sobre uma superfície curvada; nesses casos, uma fita métrica seria mais apropriada. E se o objetivo fosse medir alguns metros em vez de poucos centímetros, o ideal seria usar uma trena. Assim, cada situação de medida exige um instrumento que se adapte melhor ao contexto. Veja os instrumentos mais populares usados para medir distâncias e comprimentos:

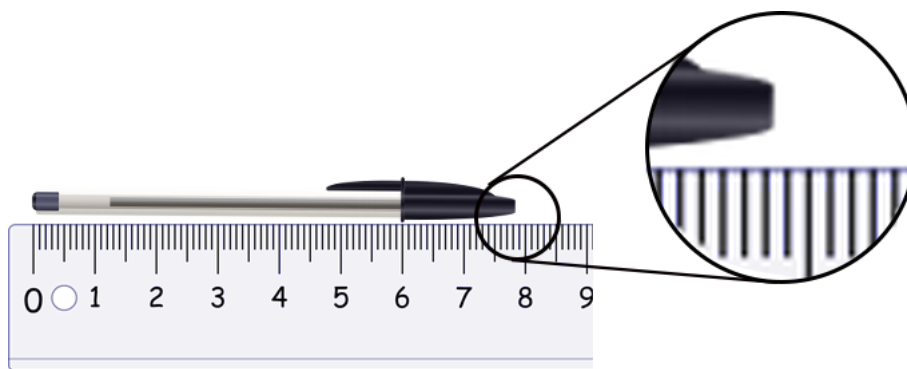


Figura 4.2: Exemplos de instrumentos de medição de comprimento.

Neste capítulo, vamos nos aprofundar no tema apresentado na seção 1.3.3, analisando as particularidades dos diferentes instrumentos de medição usados em provas experimentais de olimpíadas científicas. Além disso, exploraremos alguns simuladores virtuais, que permitirão a você praticar o uso desses instrumentos mesmo fora do laboratório.

4.1 A incerteza experimental

Vamos fazer um breve experimento. Tente medir o comprimento de seu lápis, lapiseira ou caneta com uma régua. Para isso, coloque uma extremidade desse objeto na marcação 0 de sua régua e veja até onde a outra extremidade alcança. Essa marcação será o comprimento desse objeto. Porém, é muito provável que a outra extremidade desse objeto fique entre duas marcações sucessivas da régua, de modo que você fique em dúvida qual seja seu real comprimento. Na figura abaixo, você consegue ver que é possível medir com precisão um comprimento 7,8 cm da caneta, mas ela passa da marcação um por comprimento desconhecido.



Isso ocorre, pois todos os instrumentos de medida possuem sua respectiva incerteza experimental. A régua escolar utilizada no exemplo anterior tem uma divisão milimetrada, ou seja, consegue medir de 1 em 1 milímetro. Por causa disso, você nunca conseguirá realizar medidas com uma régua escolar de modo a determinar exatamente frações menores do que esse valor apenas pela leitura direta. Essa limitação da resolução do instrumento é justamente o que dá origem à incerteza experimental associada à medida.

Os instrumentos de medida podem ser divididos em duas categorias, analógico e digital, em que cada uma possui sua própria forma de calcular a incerteza experimental.

4.2 Instrumentos analógicos

Instrumentos analógicos são aqueles que mostram as medições sem o uso de telas ou visores. As medidas são apresentadas ao longo do próprio instrumento, por meio de marcações graduadas ou ponteiros. A régua utilizada no experimento anterior é um instrumento analógico, bem como termômetros de mercúrio, balanças de prato, relógios de ponteiro etc.

De modo geral, considera-se que a incerteza experimental de instrumentos analógicos corresponde a metade da menor divisão da escala. Isso acontece porque, ao realizar a leitura, é possível estimar valores entre duas marcações consecutivas, mas essa estimativa nunca é exata. Assim, o valor medido pode estar deslocado tanto um pouco para mais quanto um pouco para menos em relação à marcação mais próxima. Tomar metade da menor divisão como incerteza é, portanto, uma forma de representar essa limitação natural da leitura.

Imagine, por exemplo, que você esteja medindo o comprimento de um objeto com uma régua graduada em milímetros. A ponta do objeto cai entre 12 mm e 13 mm. É possível “chutar” que esteja em torno de 12,5 mm, mas talvez seja 12,3 mm ou 12,9 mm. Como não há como garantir com exatidão, convencionou-se adotar como incerteza justamente metade da menor divisão:

No caso de sua régua milimetrada, a menor divisão apresentada é 1 mm. Logo, sua

incerteza experimental é $\sigma = 0,5$ mm. Essa regra é válida para a grande maioria dos instrumentos analógicos existentes, então você pode utilizá-la sem preocupações durante uma prova experimental.

Agora, você aprenderá a utilizar os instrumentos analógicos mais comuns de se encontrarem durante uma prova experimental ou em laboratório. São eles a régua, o paquímetro e o micrômetro.

4.2.1 Como usar uma régua ou fita métrica

A régua é um dos instrumentos de medida mais antigos e populares. Ela serve para medir comprimentos pequenos ou médios, geralmente de alguns centímetros até alguns decímetros. Além disso, é muito utilizada para traçar linhas retas e auxiliar em construções geométricas.

As réguas mais comuns possuem escala graduada em milímetros e centímetros. A cada 10 mm, encontramos uma marcação maior que indica 1 cm. Em alguns modelos, pode haver também divisões em polegadas, dependendo do sistema de unidades adotado.

Para utilizar uma régua/fita métrica corretamente, siga os seguintes passos:

- 1. Comece pelo zero da escala:** Toda régua ou fita métrica possui uma marca inicial que representa o zero. Em alguns modelos, o zero coincide exatamente com a borda do instrumento; em outros, ele está um pouco afastado. Por isso, nunca presume que a borda já corresponde ao zero, portanto, sempre verifique antes de começar.
 - 2. Alinhe a régua/fita métrica ao objeto:** O objeto deve estar paralelo à régua ou à fita. Se você estiver usando a fita métrica em uma superfície maior, como uma parede ou mesa, mantenha-a bem esticada, sem dobras ou folgas. Esse é um erro bem comum que pode gerar uma perda de acurácia no seu experimento.
 - 3. Estime o comprimento do objeto:** Olhe para a outra extremidade do objeto e veja em qual marcação da escala ele termina. Se a ponta do objeto cair entre duas divisões consecutivas, você pode estimar o valor intermediário.

Por exemplo, suponha que o objeto esteja entre 10,00 cm e 10,10 cm, mas mais próximo de 10,10 cm. Nesse caso, você pode estimar seu comprimento em torno de 10,07 cm. Observe que o último algarismo registrado deve ser sempre o *algarismo duvidoso* (ver Seção 1.2.2).
 - 4. Inclua a incerteza:** Como a régua e a fita métrica são instrumentos analógicos, a incerteza experimental é sempre igual à metade da menor divisão da escala.
-

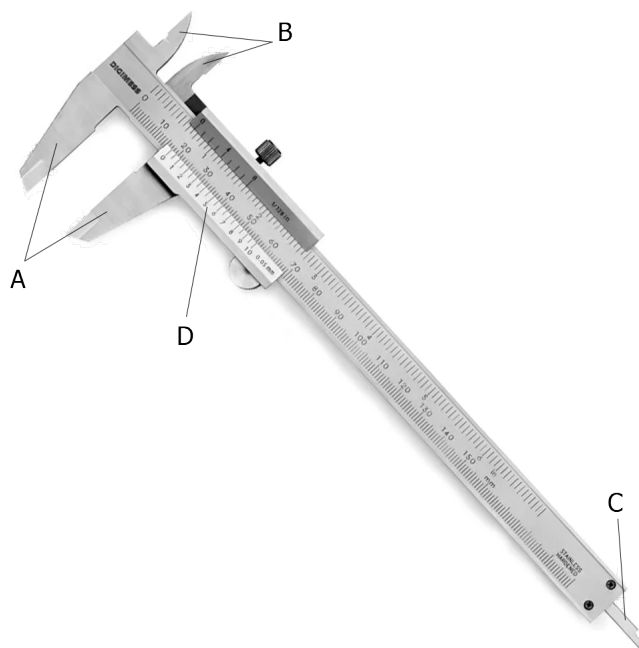
Caso a régua seja graduada em milímetros (1 mm), a incerteza será de $0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm}$. Assim, se você mediu $10,07 \text{ cm}$, deve registrar o valor como:

$$L = (10,07 \pm 0,05) \text{ cm}$$

4.2.2 Como usar um paquímetro

O paquímetro é um instrumento de medição analógico que permite determinar dimensões com maior precisão do que uma régua comum. Ele é capaz de medir comprimentos externos, internos e profundidades, sendo muito útil em experimentos de laboratório, especialmente para comprimentos pequenos ou que exigem muita precisão.

1. Conhecendo as partes do paquímetro:



Pela figura, pode-se ver que um paquímetro tradicional possui:

- **A. Mandíbulas externas:** usadas para medir dimensões externas, como o diâmetro de um cilindro.
- **B. Mandíbulas internas:** utilizadas para medir dimensões internas, como o diâmetro de um furo.
- **C. Haste de profundidade:** usada para medir a profundidade de cavidades.
- **D. Nãoio (ou vernier):** escala auxiliar que permite realizar leituras com maior precisão do que a escala principal.

2. Posicionamento do objeto: Dependendo do que deseja medir:

- Para **medidas externas**, posicione o objeto entre as mandíbulas externas. Exemplo: medir o diâmetro de um tampinha de refrigerante.
- Para **medidas internas**, insira as mandíbulas internas no espaço a ser medido e abra até encostar nas paredes. Exemplo: medir o diâmetro interno de um tubo de ensaio.
- Para **profundidades**, apoie a base do paquímetro na borda da cavidade e deslize a haste até o fundo. Exemplo: medir a profundidade de um copo.

3. Leitura no paquímetro analógico: No paquímetro analógico, a leitura é feita em duas etapas:

1. **Escala principal:** observe o valor inteiro (em mm ou cm) imediatamente à esquerda do zero do nônio.
2. **Nônio:** identifique qual das divisões do nônio coincide exatamente com uma marcação da escala principal. Esse valor representa a parte fracionária da medida.

Exemplo: suponha que o zero do nônio esteja logo após a marca de 12 mm na escala principal, e que a quinta divisão do nônio coincida com uma marcação da escala. Nesse caso, a medida é:

$$L = 12,0 \text{ mm} + 0,05 \times 5 = 12,25 \text{ mm}.$$

4. Inclua a incerteza: A incerteza experimental em um paquímetro analógico geralmente é de 0,05 mm, correspondente à menor divisão possível no nônio. Perceba que a incerteza experimental é menor do que a da régua (0,5 mm)

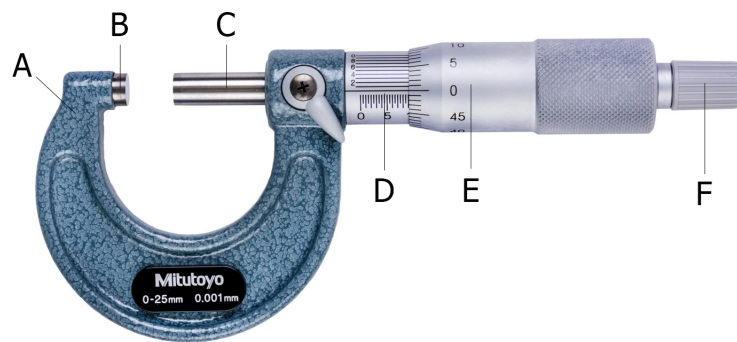
Assim, a medida do exemplo anterior deve ser registrada como:

$$L = (12,25 \pm 0,05) \text{ mm}$$

4.2.3 Como usar um micrômetro

O micrômetro é um instrumento de medição analógico que permite determinar dimensões com uma precisão ainda maior do que o paquímetro, geralmente da ordem de centésimos de milímetro (0,01 mm). Ele é amplamente utilizado em experimentos e oficinas mecânicas para medir espessuras, diâmetros de fios, pequenas peças cilíndricas, entre outros.

1. Conhecendo as partes do micrômetro



Pela figura, pode-se ver que um micrômetro tradicional possui:

- **A. Arco:** estrutura em forma de “C” que sustenta o instrumento.
- **B. Batente** parte fixa onde o objeto a ser medido é apoiado.
- **C. Fuso:** parte móvel que se desloca em direção à batente ao girar o tambor.
- **D. Manga (ou bainha):** contém a escala principal, graduada em milímetros.
- **E. Tambor:** parte giratória com a escala auxiliar, usada para determinar a fração da medida.
- **F. Catraca (ou trinco):** mecanismo que limita a força aplicada, garantindo que a pressão sobre o objeto seja adequada.

2. Posicionamento do objeto: Coloque o objeto entre a batente e o fuso. Em seguida, gire o tambor até que o fuso encoste suavemente no objeto. Finalize o aperto usando a catraca, que emite um clique característico quando a pressão correta é atingida.

3. Leitura: A leitura é feita combinando os valores da escala da manga com a escala do tambor:

1. **Escala da manga:** indica os milímetros e meios milímetros.
2. **Escala do tambor:** cada divisão corresponde a 0,01 mm. Multiplique a divisão coincidente pelo valor da menor divisão para obter a parte fracionária.

Exemplo: suponha que a escala da manga indique 12,5 mm e que a marca do tambor esteja entre 28 e 29, porém, mais próximo de 28. Nesse caso, a leitura está mais próxima de algo como:

$$L = 12,5 \text{ mm} + 0,01 \times 28,3 = 12,783 \text{ mm}.$$

Onde 28,3 indica que ela está a 28 marcas + uma pequena fração de marca, estimada a olho por quem mediu.

4. **Inclua a incerteza:** A incerteza pode variar segundo especificações do fabricante, mas seu valor para um micrômetro analógico comum geralmente é de 0,005 mm, correspondente à metade da menor divisão do tambor. Assim, a medida anterior deve ser registrada como:

$$L = (12,783 \pm 0,005) \text{ mm}$$

4.3 Instrumentos digitais

Instrumentos digitais são aqueles que apresentam os valores medidos diretamente em uma tela ou visor eletrônico (*display*). Diferente dos analógicos, em que a leitura depende da interpretação de marcações graduadas ou da posição de um ponteiro, nos digitais o resultado aparece de forma imediata e numérica. Exemplos de instrumentos digitais incluem **multímetro**, **cronômetros digitais** e **balança eletrônica**.

Uma das principais vantagens dos instrumentos digitais é a **facilidade de leitura**, já que não é necessário estimar valores entre divisões da escala. O visor fornece diretamente o número correspondente à medida. Isso reduz a possibilidade de erro de paralaxe e torna a medição mais rápida e prática.

No entanto, mesmo instrumentos digitais apresentam incerteza experimental. Nesse caso, a incerteza não é determinada pela metade da menor divisão da escala, mas sim pela resolução do visor (isto é, a menor variação que o instrumento consegue exibir) e pelas especificações fornecidas pelo fabricante.

Exemplo 1: imagine que você esteja medindo a massa de um objeto em uma balança digital que apresenta valores com duas casas decimais em gramas. Se o visor mostra 135,31 g, isso significa que a menor variação detectável é de 0,01 g. Portanto, a incerteza experimental associada será de

$$\sigma = \pm 0,01 \text{ g.}$$

Entretanto, na maioria das situações, a incerteza será especificada pelo manual do fabricante. Isto é, o manual do equipamento fornecerá orientações sobre como você pode estimar a incerteza.

Exemplo 2: Durante a OBOFE, Globig está realizando um experimento de circuitos e, ao utilizar o multímetro para medir a *ddp* de uma pilha, obtém a leitura de uma tensão contínua de 9,73 V. Consultando o manual do multímetro, ele encontra o seguinte:

VOLTAGEM DC

Faixa	Resolução	Precisão
200mV	100 μ V	$\pm 0.5\%$ of rdg + 3D)
2000mV	1mV	$\pm (0.8\%$ of rdg + 2D)
20V	10mV	
200V	100mV	
1000V	1V	$\pm (1.0\%$ of rdg + 2D)

Como o valor obtido por Globig foi de 9,73 V, ele rapidamente identificou que essa medida se enquadrava na faixa de 20 V (será explicado o motivo posteriormente). Dessa forma, a precisão indicada no manual é de $\pm(0,8\%$ da leitura + 2D). Nesse contexto, *rdg* (do inglês *reading*) representa o valor lido no multímetro, enquanto *D* corresponde ao menor dígito exibido no display.

Logo, a incerteza é $\sigma_V = 0,8\% \times 9,73 + 2 \times 0,01 = 0,07784 + 0,02 = 0,09784 \approx 0,10$ V

Portanto, o resultado final é:

$$V = (9,81 \pm 0,10) \text{ V}$$

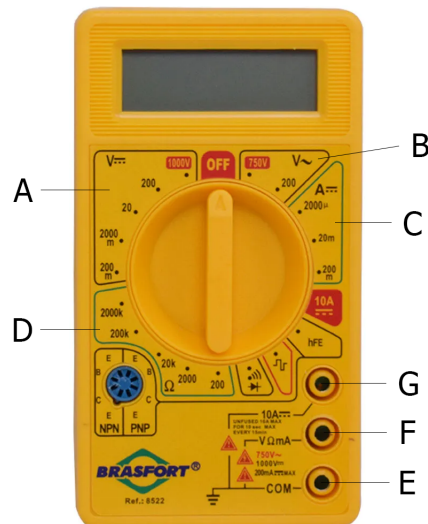
De modo geral, quando não temos acesso ao manual do equipamento ou a informações adicionais, podemos adotar a resolução do visor como estimativa da incerteza de um instrumento digital. Entretanto, sempre que possível, é preferível utilizar os valores fornecidos pelo fabricante ou aplicar o método de cálculo de incerteza indicado no manual.

A seguir, você aprenderá a utilizar o instrumento digital mais comum em provas experimentais e laboratórios, o **multímetro digital**.

4.3.1 Como usar um multímetro

O multímetro digital é um dos instrumentos mais versáteis em um laboratório ou prova experimental, pois permite medir diversas grandezas elétricas: tensão (voltagem), corrente elétrica e resistência. Além disso, alguns modelos oferecem funções adicionais, como teste de continuidade, capacitância ou frequência. Entretanto, para OBF cabe apenas saber como medir as grandezas elétricas mais clássicas.

- 1. Selecionando a grandeza correta** No seletor central do multímetro, escolha a grandeza que deseja medir:



- **A.** V ou V $\overline{\text{---}}$ para tensão contínua (DC).
- **B.** V $\sim$ ou V AC para tensão alternada (AC).
- **C.** A ou A $\overline{\text{---}}$ para corrente contínua.
- **D.** Ω para resistência elétrica.

2. Conexão das pontas de prova:

- **E.** O fio **preto** deve sempre ser conectado ao terminal **COM** (comum).
- O fio **vermelho** deve ser conectado ao terminal apropriado, de acordo com a grandeza medida:
 - * **F.** Terminal marcado como V/ Ω /mA para tensões, resistências e correntes de baixa intensidade (maioria dos casos).
 - * **G.** Terminal específico (10A ou 20A) para correntes mais altas.

3. Escolhendo a faixa de medição: A faixa de medição representa o maior valor que pode ser lido naquela configuração do multímetro.

- Se você selecionar a faixa de 200 mV, isso significa que o multímetro consegue medir valores entre 0 e 200 mV, com resolução de 0,1 mV.
- Na faixa de 20 V, o instrumento mede valores entre 0 e 20 V, com resolução de 0,01 V.

A escolha da faixa é crucial:

- Sempre selecione a menor faixa que ainda comporte o valor esperado, para obter maior precisão.
- Exemplo: se você espera medir aproximadamente 9 V, deve usar a faixa de 20 V, e não a de 200 V.

4. Escala da leitura: Algumas faixas do multímetro exibem o resultado em unidades diferentes da grandeza final.

- Na faixa de 200 mV, o visor mostra o valor diretamente em milivolts. Assim, se o visor indicar 157.2, isso significa $157,2 \text{ mV} = 0,1572 \text{ V}$.
- Já na faixa de 20 V, a leitura aparece diretamente em volts, com duas casas decimais.

A mesma coisa acontece para a medida de corrente e resistência elétrica. Portanto, é importante sempre relacionar a leitura ao prefixo da faixa escolhida, para evitar erros de interpretação.

5. Realizando a medição:

- Para medir **tensão**, conecte as pontas de prova em paralelo com o componente ou fonte.
- Para medir **corrente**, abra o circuito e conecte o multímetro em série.
- Para medir **resistência**, conecte as pontas diretamente no resistor (sempre com o circuito desligado).

6. Incerteza da medida: Nos multímetros digitais, a incerteza depende da resolução do visor e da precisão informada pelo fabricante.

- Quando o manual não está disponível, adota-se como incerteza a própria resolução do visor.
Exemplo: se a leitura é 9,12 V na escala de 20 V, e o visor apresenta duas casas decimais, a incerteza pode ser tomada como $\pm 0,01 \text{ V}$.
- Quando o manual está disponível, adota-se como incerteza as instruções do manual (como foi explicado anteriormente no exemplo)

7. Cuidados práticos:

- Nunca meça resistência em um circuito energizado, pois isso pode danificar o aparelho.
 - Meça a corrente sempre com o circuito em série
 - Meça a tensão sempre com o circuito em paralelo
 - Comece sempre por uma faixa maior e reduza conforme necessário, para evitar sobrecarga.
 - Use o terminal de alta corrente (10A/20A) apenas quando tiver certeza de que a corrente é elevada.
-

- Mantenha as pilhas internas do multímetro em bom estado, pois medições incorretas podem ocorrer quando a bateria está fraca.

Capítulo 5

Dicas gerais

5.1 Instruções iniciais

Esse capítulo destina-se a apresentar um passo a passo que você pode seguir ao iniciar uma prova experimental. Apesar de esse ser o objetivo inicial, é importante deixar claro que cada estudante se adapta melhor a um método de resolução de prova, que não necessariamente é o apresentado aqui. Por isso, convém que, ao ler esse capítulo, você filtre aquilo que mais se adequa ao seu contexto, adaptando dicas que, de fato, são válidas e testadas por dezenas de ex-olímpicos, mas que podem não se enquadrar perfeitamente no seu perfil.

Inicialmente, devemos identificar os objetivos avaliativos de uma prova experimental. Leia o que consta no Syllabus da IPhO:

"Os problemas experimentais devem conter pelo menos algumas tarefas nas quais o procedimento experimental (montagem, a lista de todas as quantidades sujeitas a medições diretas e as fórmulas a serem usadas nos cálculos) não seja descrito em detalhes completos.

Os problemas experimentais podem conter tarefas teóricas implícitas (como a dedução de fórmulas necessárias para os cálculos); no entanto, não devem incluir tarefas teóricas explícitas, a menos que testem a compreensão dos princípios de funcionamento do experimento dado ou da física dos fenômenos a serem estudados, sem envolver cálculos matemáticos longos.

O número esperado de medições diretas e o volume de cálculos numéricos não devem ser tão grandes a ponto de consumir a maior parte do tempo disponível: o exame deve testar a criatividade experimental, em vez da velocidade com que os estudantes realizam tarefas técnicas."

Há alguns pontos importantes em cada parágrafo desse trecho: (i) os procedimentos

não serão descritos em detalhes na prova, você é responsável por planejá-los; (ii) a teoria talvez não esteja explícita na prova; apesar de ser uma prova experimental, você é responsável por compreender as nuances envolvendo os fenômenos físicos estudados; (iii) como dito, a prova é experimental e, por isso, apesar de envolver o entendimento dos fenômenos físicos, não pode exigir análises teóricas tão longas que ofusquem a avaliação da criatividade e acurácia experimental.

Obviamente, isso é apenas um comportamento esperado por parte da prova e da comissão avaliadora; infelizmente, sabemos que nem sempre é o que é cobrado. Diante disso, a primeira dica se aplica na hora do pré-prova: esteja preparado para o que vier. Não adianta estar preparado na média de todas as provas anteriores e ser surpreendido na sua vez; por isso, prepare-se sempre um nível acima daquilo que está de fato proposto para ser cobrado. Porém, também não adianta estar preparado muitos níveis acima, sacrificando horas preciosas de estudo em outras áreas ou lazer.

O mais importante é ter uma preparação sólida, que te garanta não ser afetado por provas não esperadas ou mal feitas. Outro mecanismo importante de defesa entra em ação na hora da prova: o psicológico. Entender que esse tipo de prova prejudica todos os competidores e tranquilizar-se nisso te impede de perder pontos que poderiam ser ganhos, possibilitando obter o maior rendimento possível.

5.2 Dicas práticas

Agora podemos ir para um rascunho de passo a passo prático na hora da avaliação experimental:

- **Primeira passo:** Antes de iniciar os procedimentos experimentais, **leia a prova em sua totalidade**. Isso te beneficiará em três aspectos principais: (i) te ajuda a compreender melhor os procedimentos a serem empregados; (ii) adianta possíveis medições que podem ser obtidas simultaneamente com outras, economizando tempo; (iii) possibilita adiantar partes que são relativamente mais simples.
 - **Segunda passo:** Montar o experimento. Nessa parte é importante tomar alguns cuidados: (i) **não seja destrutivo!** Tome muito cuidado e preserve ao máximo todas as partes do kit fornecido; (ii) **seja organizado** com suas folhas, materiais e partes do kit. Você não irá querer passar as próximas horas sob pressão da prova em um ambiente de trabalho desorganizado.
 - **Terceiro passo:** Medir. Aqui existem algumas dicas muito importantes, por que
-

medir é o coração de uma prova experimental. (i) Antes de medir, **teste diferentes métodos**, buscando sempre a equilibrar rapidez, precisão e *range* possível; (ii) **planeje-se** para obter um número razoável de medidas; por exemplo, se seu range vai de 0 a 60 mA e é possível (em termos de tempo) coletar 12 medidas, meça de 5 em 5 mA. Nunca meça em intervalos aleatórios, isso vai te ajudar a fazer gráficos, análise de dados e organização de tabelas; (iii) **colete o máximo de medidas** possível; o número de medidas ideal para um experimento varia com a facilidade e velocidade para pegar medidas nele; um bom número para ter como referência é 12 medidas – dificilmente serão cobradas mais. Porém, se não for possível obter essa quantidade, meça o que for possível!(iv) A última recomendação é, antes de passar para a folha de soluções, **anote suas medidas no rascunho**. Isso te ajuda a achá-las mais fácil e te permite errar e voltar atrás sem rasurar.

- **Quarto passo:** Ao escolher métodos estatísticos para tratar os dados obtidos, opte por aqueles que forneçam a maior precisão possível. Sempre que for possível montar uma relação (de preferência linearizada) entre duas variáveis que determina alguma grandeza exigida pela prova e esta não determinar o procedimento a ser realizado, **não existe em construir um gráfico e realizar uma regressão**. Por exemplo, o avaliador te fornece água, uma proveta e uma balança e te pede para determinar a densidade da água. Que procedimento será realizado? (i) Medir um valor de massa e um valor de volume e obter a densidade; (ii) medir 12 pares e tirar uma média das densidades; (iii) medir 12 pares, construir um gráfico de $m \times V$ e fazer uma regressão linear. Pela simplicidade do experimento, talvez (ii) e (iii) não apresentem diferença significativa, mas são métodos claramente superiores que (i). Porém, entre (ii) e (iii), (iii) pode ser um método mais preciso por tolerar imprecisões sistemáticas que se manifestam como coeficiente linear na reta de melhor ajuste. Em (ii), você "mata" um coeficiente, forçando-o a ser zero, o que diminui a precisão do resultado final. Ou seja, **a construção de gráficos faz parte do procedimento experimental**.
 - **Quinto passo:** Escrevendo soluções. (i) Inicialmente, é fundamental ter **organização e clareza** naquilo que é passado para o avaliador. Por isso, preocupe-se com caligrafia e disposição das informações na página, a fim de facilitar o máximo possível a correção. Se possível, opte por canetas esferográficas ou lapiseiras escuras e relativamente finas que não borrem. (ii) **Escreva apenas o essencial, mas não menos que isso**. Algumas perguntas que o avaliador pode fazer é: "como os erros foram propagados?"; "como a equação da reta foi obtida?"; "que linearização foi utilizada?"; "quais dados foram utilizados"... Por isso, não existe em registrar todos esses procedimentos através de breves textos e/ou fórmulas e tabelas auxiliares. Isso te ajuda a ganhar pontos parciais e evita injustiças na correção. Lembre-se, o corretor não avaliará o que você fez, e sim o que disse que fez, por isso, registre tudo
-

aquilo que você faz que pode ser avaliado; (iii) nunca esqueça de localizar o corretor colocando títulos e legendas nas tabelas e gráficos.

5.3 Cuidados na montagem

Diferentes *setups* exigem diferentes cuidados para que a precisão do experimento não seja afetada. Nessa parte exploraremos os cuidados principais a serem tomados. Antes disso, é importante lembrar que existem basicamente 4 tipos de experimentos a serem cobrados em competições *presenciais*: mecânica, óptica, elétrica e termologia.

5.3.1 Mecânica

Talvez esse seja o tipo de experimento mais simples de se montar e por isso é um dos que mais aparecem nas avaliações. Quais são seus principais problemas? Experimentos de mecânica quase sempre dependem de medições de tempo que, devido ao tempo de reação do ser humano costumam ser muito imprecisas. Além disso, imprecisões relacionadas a irregularidades na montagem do experimento sempre estão presentes e interferem na obtenção dos resultados.

Para prevenir-se desses problemas alguns métodos podem ser empregados:

- Para medidas de ordem comparável com a menor divisão do seu instrumento, opte por "aglutinar" várias em uma só medição. Por exemplo, ao medir o período de 1 s de um pêndulo, meça o tempo de 10 oscilações (~ 10 s) e divida por 10, obtendo ~ 1 s. Ou ao medir a espessura de uma folha de papel alumínio de 0,10 mm, opte por dobrá-lo 6 vezes, obtendo uma medida de $\sim 1,28$ cm, que dividido por $2^6 = 128$ é $\sim 0,10$ mm. Veja a figura 1.
 - Nunca realize apenas uma "cópia" de determinada medida. Por exemplo, ao medir o período de um pêndulo, além de medir 10 oscilações, meça-as 10 vezes, para que o valor medido seja a média final. Ao medir o diâmetro de uma bolinha de papel, meça-o em 10 posições diferentes, pois, além da bolinha ser imperfeita, nada te garante estar medindo exatamente um diâmetro, por isso o procedimento mais preciso é tirar uma média de vários valores. Veja a figura 2.
 - Outro cuidado importante é: interfira e toque o mínimo possível no *setup*. Mesmo que não pareça, nossas mãos tremem bastante e seus movimentos não são tão firmes quanto o necessário para controlar um experimento. Por isso, evite tocar diretamente no aparato, se for necessário soltar um pêndulo, por exemplo, apoie-o em uma régua e solte-o, evitando dar impulsos ou provocar movimentos de giro e oscilações em direções indesejadas. Veja a figura 3.
-



Figura 5.1: Medida da espessura de uma folha de alumínio dobrada 6 vezes

Garantir esses cuidados iniciais é o primeiro passo para evitar erros sistemáticos. No entanto, durante a coleta de dados, você pode se deparar com resultados que possuem uma grande dispersão, mesmo ao repetir medições que deveriam ser consistentes. Quando isso acontecer, em vez de simplesmente tirar a média de dados ruins, inicie um diagnóstico sistemático da sua montagem.

A primeira verificação deve ser a **estabilidade mecânica** de todo o aparato. Um suporte que balanceie, uma base que não esteja firme na bancada ou um plano inclinado que pode se mover introduz vibrações e desalinhamentos que afetam qualquer medida, desde tempos de queda até posições de equilíbrio. Antes de prosseguir, garanta que toda a sua montagem esteja o mais rígida e estável possível. Use os pesos disponíveis para prender a base do seu aparato à mesa, se necessário.

Em seguida, investigue fontes de **atrito não controlado ou inconsistente**. O atrito é frequentemente a principal fonte de resultados que não correspondem à teoria ideal. Em um experimento de dinâmica com um plano inclinado, a superfície está limpa e uniforme? Em um sistema com eixos ou polias, a rotação está livre ou há pontos em que ela “prende”? Em um experimento de estática, os fios que sustentam os corpos estão livres e não roçam em outras partes da montagem? Tente minimizar o atrito e, mais importante, garantir que ele seja o mais constante possível durante o experimento.

Por fim, reavalie seu **procedimento de medição e interação** com o aparato. Ao soltar um objeto para medir um tempo de queda ou de rolamento, você está garantindo que ele parta consistentemente do repouso, sem receber um impulso acidental? Ao medir

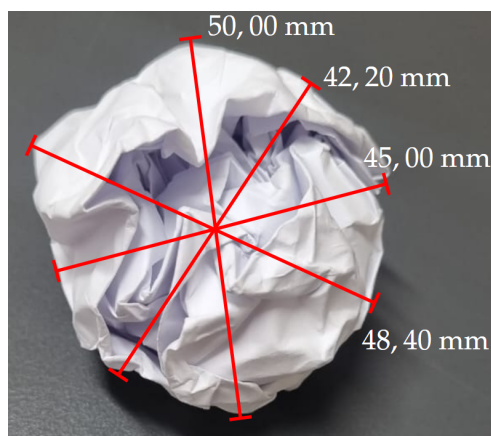


Figura 5.2: Várias medidas do diâmetro de uma bolinha irregular

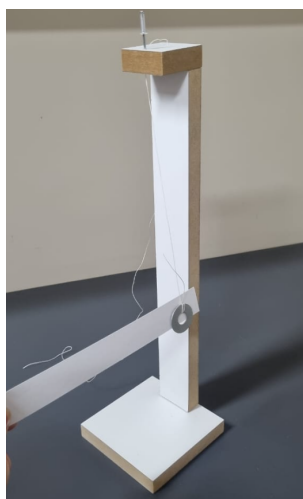


Figura 5.3: Pêndulo da OBF

distâncias ou ângulos, sua linha de visão está sempre perpendicular à escala do instrumento para evitar o erro de paralaxe? A consistência no seu método de interagir com o experimento é tão importante quanto a qualidade da montagem em si.

5.3.2 Óptica

Por mais relativo que seja, os experimentos de óptica costumam ser os que mais exigem criatividade. Primeiro de tudo, é útil para todos aqueles experimentos que usam laser lembrar que ele é "a coisa mais reta" que você pode ter no seu aparato experimental, afinal, não é de costume que a luz faça curvas (ou, pelo menos, se você não está nas proximidades de *sagitário A**...). Por causa disso, o alinhamento da montagem é fundamental, ou seja, pequenas inclinações podem acarretar em grandes imprecisões nos resultados finais. Além disso, a paralaxe será uma grande inimiga, porque basicamente todas as medidas dependem da nossa visão, que é afetada pela perspectiva. Devemos, portanto, pensar em mecanismos de defesa contra esses tipos de problema.

- Para o alinhamento, você pode, sempre que há reflexão, usar o próprio laser. Não confie em réguas nem em traçados. Como dissemos, o laser é bem mais reto que eles. Se o feixe, ao ser refletido, volta sobre ele mesmo, significa que a montagem reflexiva está perpendicular ao laser, o que, geralmente, é o mais adequado. Veja a figura 4.

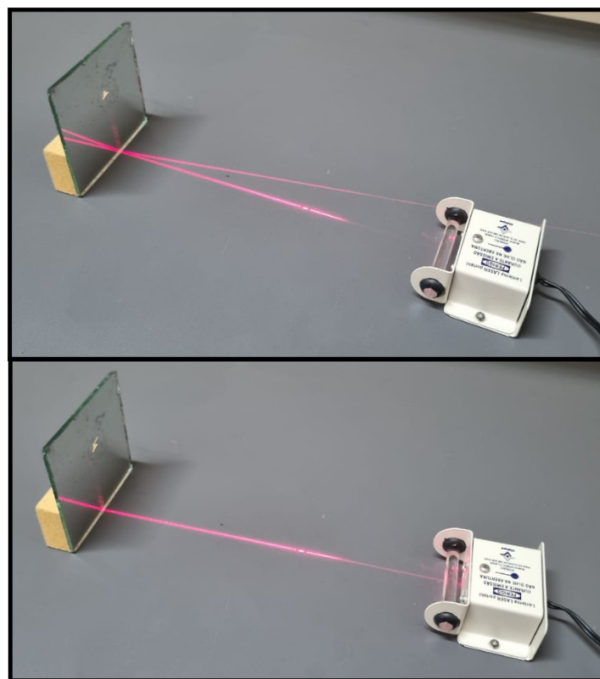


Figura 5.4: Montagem reflexiva desalinhada e alinhada

- Contudo, mesmo com esses cuidados, é comum que a montagem não funcione de primeira. Se o feixe de laser não chega ao anteparo ou a imagem esperada não se forma, evite o impulso de ajustar todos os componentes aleatoriamente. Aplique a **técnica da verificação sequencial do feixe**:
 1. Utilize uma folha de papel branca como um detector móvel para visualizar o feixe.
 2. Posicione-a logo após a fonte de luz para confirmar que o feixe está sendo emitido corretamente.
 3. Mova o papel para a posição imediatamente após o primeiro componente óptico (lente, espelho, prisma). O feixe está passando pelo centro dele? Se não, ajuste *apenas este componente* até que esteja correto.
 4. Repita o processo para cada elemento do sistema, um por um, seguindo o caminho da luz. Este método é infalível para encontrar o ponto exato onde o alinhamento foi perdido.
- Outra de forma de combater o problema do desalinhamento é, se houver uma suposta simetria – exemplo, um círculo luminoso ou máximos simétricos –, meça a distância

de uma ponta até a outra – no caso do exemplo, o diâmetro do círculo e a distância entre máximos simétricos. Isso fornecerá resultados muito mais precisos do que medindo da referência (ponta do laser) até a extremidade. Veja a figura 5.

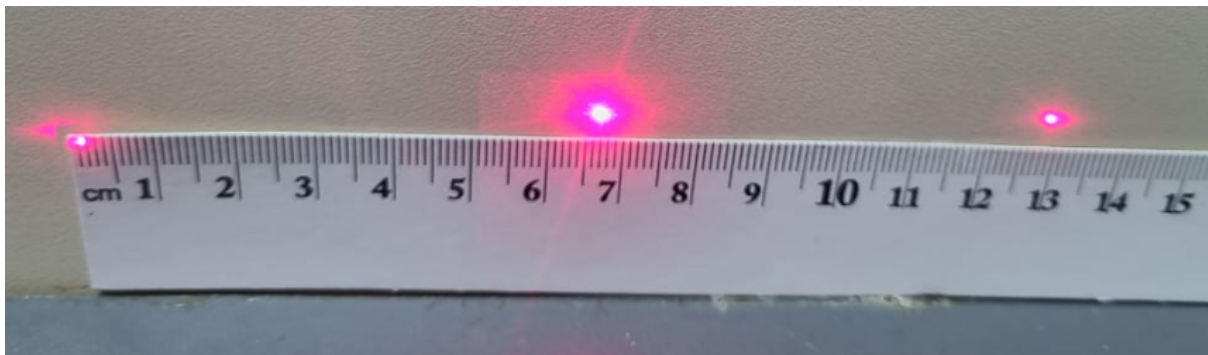


Figura 5.5: Montagem simétrica

- Se uma imagem ou padrão de difração está presente, mas encontra-se **borrado ou com pouco contraste**, as causas prováveis são outras. Primeiro, inspecione as superfícies ópticas. Uma simples marca de dedo, poeira ou arranhão em uma lente ou fenda pode destruir a nitidez do resultado. Segundo, ao trabalhar com lentes, verifique se a distância entre os componentes e o anteparo é compatível com a formação de uma imagem nítida, ajustando cuidadosamente a posição do anteparo para encontrar o ponto de foco ideal.
- Ao marcar o ponto onde o laser entra ou sai de um determinado aparato óptico (pode ser um prisma, cilindro etc.), você pode usar um pequeno papel com um traço de caneta, marcando o ponto exato onde ele bate nas paredes do aparato. Outra coisa interessante é desenhar o aparato em uma folha de papel e marcar dois pontos que definam os raios de luz importantes. Assim, você pode esboçar o *setup* e realizar as medidas sem problemas de alterar minimamente o caminho do laser. Veja a figura 6.

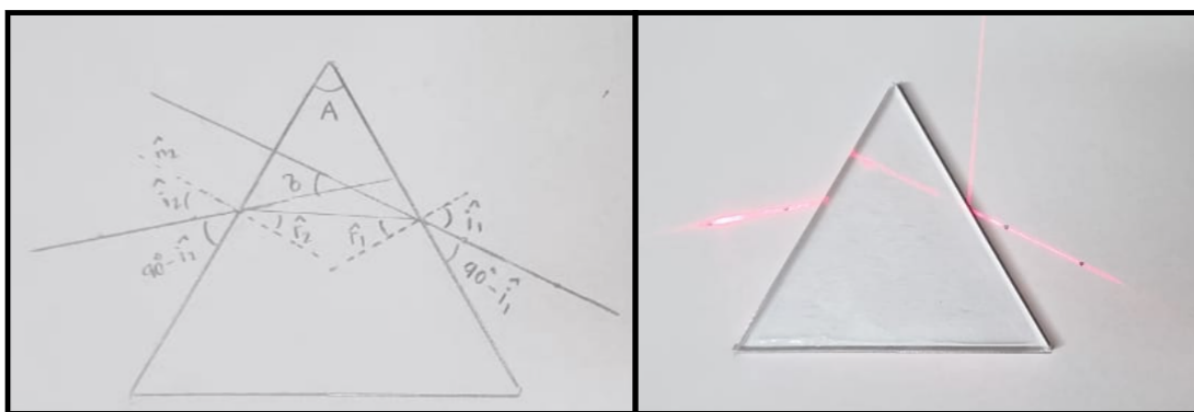


Figura 5.6: Esboço do caminho do raio de luz

5.3.3 Elétrica

Os experimentos de elétrica costumam ser operacionalmente simples, porém de difícil compreensão teórica. A dificuldade frequentemente não está em realizar as medições, mas elaborar e montar um circuito útil e não-destrutivo! Seguem dicas à respeito dos cinco principais desafios encontrados: elaboração, desenho, montagem, medição e como não destruir os componentes:

Elaboração

- Sempre desenhe seu circuito antes de montá-lo! Além de ser frequentemente um requisito para pontuar, diminuirá drasticamente o risco de erros de montagem.
- Abomine conexões de baixa resistência entre os terminais da fonte ("curto-circuitos").
- Não projete nada que possa queimar um componente.
- Evite deixar terminais desconectados, pois eles adicionam ruído as suas medições. Isso é especialmente importante para potenciômetros.
- Verifique que as duas configurações extremas de cada potenciômetro mantêm a validade do circuito. **NÃO** confie na sua habilidade de não girá-lo até o final.
- Considere sempre como você medirá suas grandezas. As vezes, um circuito é melhor do que o outro em termos de variação ou ajuste de algum parâmetro.
- Evite circuitos que gerem contas complicadas para a determinação de valores de potenciômetros e similares.
- Tente não utilizar resistências internas de fontes como elementos cruciais do funcionamento de seu circuito.

Desenho

- Faça desenhos limpos e organizados, preferencialmente em folha separada, com fluxos claros de informação, componentes alinhados e indicadores de conexão.
 - Prefira com que as entradas do circuito fiquem na esquerda, e as saídas, na direita (fluxo de informação horizontal).
 - Marque conexões entre fios com uma bolinha. Não use a convenção antiga de passar um fio "por cima" do outro com uma meia-lua.
-

- Sempre coloque conexões ao terminal positivo (+V) da fonte em cima, e as ao terminal negativo (GND) em baixo. Caso você desenhe a fonte, faça grandes linhas horizontais de alimentação acima e abaixo do circuito para facilitar o desenho e a compreensão.
- Considere usar a notação de trilhas para indicar a alimentação dos componentes pela fonte. Similarmente, pense em nomear nodos para simplificar suas conexões.
- Especificamente para transistores, sempre os desenhe verticalmente, de tal maneira que a corrente flua de cima para baixo. No caso de transistores BJT, coloque os emissores dos NPN em baixo, e os dos PNP em cima. Em transistores FET, a recomendação é a mesma, mas com o terminal S (source) em baixo para canal N, e em cima para canal P.
- Lembre-se de representar capacitores eletrolíticos (polarizados) indicando seus terminais positivos e negativos para evitar confusão.

5.3.4 Termodinâmica

As práticas de termodinâmica costumam ser as mais... *polêmicas*. Isto porque, além de ser certamente a mais delicada no aspecto teórico, uma prática de termodinâmica pode ser severamente afetada por inúmeros fatores externos: mudanças na temperatura, umidade, isolamento parcial, contatos térmicos, etc. Por isso, se mal elaborada, a prática se torna uma loteria, onde acerta mais quem estima melhor os parâmetros necessários. Porém, existem alguns mecanismos para se prevenir disso e buscar obter boas medidas.

- Busque isolar o máximo possível seu sistema do mundo externo. A nível de exemplo, observe o setup abaixo:

Isolamos todos os possíveis contatos da parte interna com o meio externo com isopor, minimizando as perdas de calor. Agora, basta confiar na baixa condutividade térmica do isopor!

- Aqui também é importante analisar o maior range possível de dados, uma vez que podem haver intervalos onde as *considerações* feitas na análise teórica da situação funcionam melhor.
 - Além disso, atente-se ao relógio, uma vez que a coleta de dados pode demorar um pouco e talvez seja conveniente realizar outros procedimentos enquanto o sistema entra em equilíbrio ou passa um tempo necessário para a coleta de dados.
-



Figura 5.7: Experimento de termodinâmica

5.4 Outras materiais de estudo

Além da leitura deste livro, recomenda-se treinar física experimental por meio das provas da **OBOFE**(Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental, produzida pelo NOIC), pelos **desafios experimentais** produzidos no site do NOIC e por meio de outros professores de física experimental. Caso queira fazer experimentos na prática, ao invés de usar simuladores, existem materiais que ensinam práticas de nível olímpico com o uso de componentes baratos. Os principais exemplos são os desafios experimentais do NOIC e o livro "Física em Nível Olímpico - Volume 3"(produzido pelo professor Ivan Guilhon).

Capítulo 6

Experimentos de Mecânica

6.1 Introdução

Este capítulo serve como o ponto de partida prático para o desenvolvimento de habilidades experimentais. Aqui, você aplicará os conceitos fundamentais da Mecânica em aparatos reais, aprendendo a lidar com as imperfeições que não existem nos modelos teóricos. Os experimentos abordam o movimento de projéteis, a oscilação de sistemas massa-mola e o comportamento de diversos tipos de pêndulos, contendo em sua maioria experimentos que podem ser realizados sem o uso de simuladores (mas nem todos). Aqui, começaremos a usar todo o desenvolvimento que foi mostrado nos capítulos anteriores.

6.2 Experimentos

6.2.1 Lançamento - Dificuldade média - 3h

Introdução

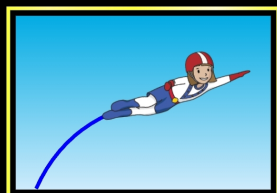
Nessa primeira seção, analisaremos o movimento de um corpo sobre a ação do campo gravitacional da Terra, estudando a influência da gravidade no alcance, altura máxima e no movimento oblíquo como um todo.

Não recomendamos fazer o experimento a seguir na vida real, pois alguns elementos que fogem do caso ideal podem deixar suas medidas imprecisas, como a presença da resistência do ar ou a difícil medição da rapidez inicial. Por isso, utilizaremos o [simulador PhET de Lançamentos](#), cujas especificações e funcionamento serão explicados a seguir.

Sobre o Simulador

Ao entrar no site, selecione o modo "Intro". Não altere nenhum parâmetro a não ser que seja solicitado pelo enunciado. Após alteração, retorne aos parâmetros originais.

Movimento de Projétil



Intro



Vetores



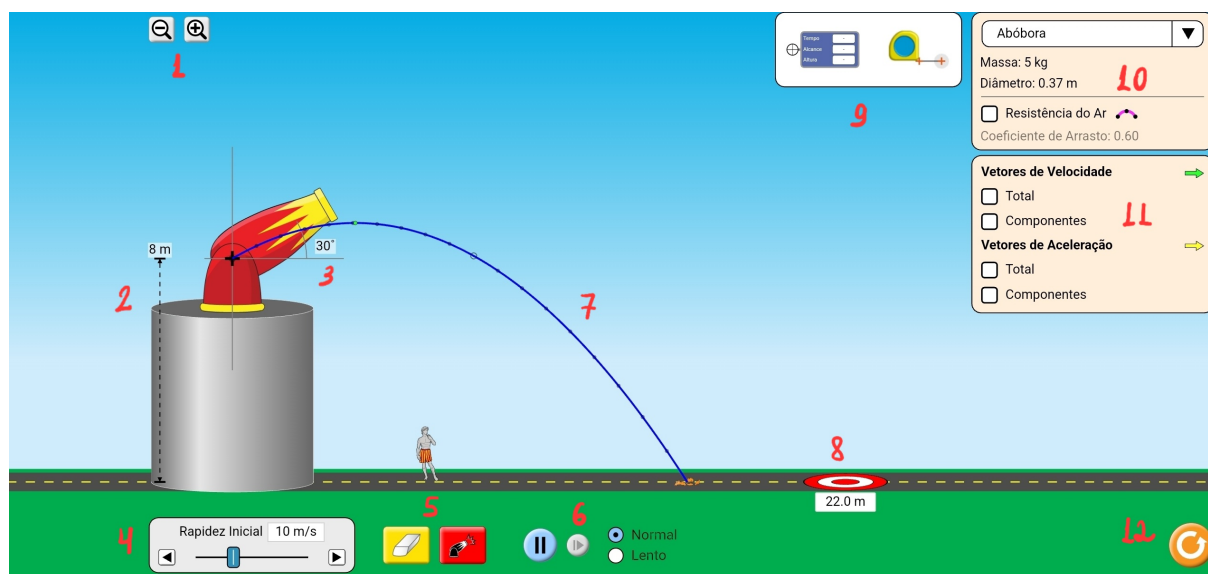
Arrasto



Lab

PHET:

Note que no modo "Intro" do simulador é mostrado um canhão que está fixado sobre uma base cinza e uma pista de lançamento com um alvo móvel. A seguir, temos as especificações de todas as funções dessa simulação.



Legenda:

1. Zoom In e Zoom Out para melhor visão do Lançamento
2. Regulador de Altura: Para regular essa altura, basta clicar sobre o valor numérico e arrastar para cima ou para baixo.
3. Regulador de Ângulo: O ângulo de inclinação do canhão em relação à horizontal

também pode ser modificado. Para isso basta clicar sobre a boca do canhão e girá-la, obtendo assim alguns ângulos para a análise de alguns parâmetros físicos.

4. Regulador de Rapidez Inicial: Arrastando o ponteiro para esquerda e direita, podemos alterar essa condição inicial do Lançamento.
5. Botões de "Iniciar" e "Apagar": Para fazer um determinado lançamento, basta, depois das condições iniciais estarem satisfeitas, clicar no botão vermelho onde se encontra a imagem de um canhão. Para apagar o lançamento, basta clicar em um botão amarelo, onde há o símbolo de uma borracha.
6. Botões de Regulagem da Passagem do Tempo: Utilize caso queira parar no tempo em algum momento específico ou deixar o lançamento mais lento (*Obs.: Isso não afeta nenhum parâmetro cinemático do processo, sua função é apenas melhorar a visualização do usuário*)
7. Curva de Lançamento: Mostra a trajetória do projétil durante todo o tempo de voo.
8. Alvo Móvel: Pode ser movido similarmente ao Regulador de Rapidez Inicial.
9. Lupa e Trena: Para fazer medidas de comprimento, sejam de altura ou de alcance. Para usar essa trena basta arrastá-la para onde desejar. Note que ela possui duas cruzes (uma é o zero da trena e a outra deve estar sobre a medida a ser realizada). A trena pode ser girada ao clicar sobre a última cruz, rotacionando esta. **ATENÇÃO: Não utilize a ferramenta de lupa (encontrada ao lado da trena) durante suas medições, a ideia é achar os parâmetros requeridos sem a necessidade do uso desse equipamento!**
10. Interface do Projétil: Altera o objeto em uso no lançamento (*Obs.: Não utilize modo resistência do ar a não ser se requerido pelo enunciado*)
11. Vetores Aceleração e Velocidade: Sem uso prático no experimento, mas uma bela simulação do comportamento desses parâmetros.
12. Botão de Reinício: Reinicia a Simulação e seus parâmetros.

OBS.: No que se segue, considere o erro experimental da trena como $\sigma_x = \pm 0,01$ m. Desconsidere o erro do ângulo de lançamento e de todos os parâmetros medidos pela lupa na **Parte D**.

Parte A: Determinando a gravidade com o alcance

A.1 Utilize a trena e mantenha os parâmetros: velocidade inicial $v_0 = 15$ m/s, altura do canhão $h = 0$ m e utilizando uma bola de futebol como projétil. Varie os ângulos de lançamento e meça o alcance atingido pelo projétil. Durante a medição, alinhe uma cruz da trena com a cruz do canhão e mantenha o comprimento da trena alinhado com o pontilhado amarelo do chão. O alvo vermelho não será utilizado.

A.2 Encontre uma relação teórica que relacione o alcance A com o ângulo de lançamento θ , a velocidade inicial v_0 e a aceleração da gravidade g . Para qual ângulo inicial o alcance é máximo?

A.3 Construa uma tabela de A versus $\sin(2\theta)$ a partir dos dados obtidos no item **A.1** com suas respectivas incertezas. Construa também um gráfico de A versus $\sin(2\theta)$ e a reta média que melhor se ajusta aos pontos do gráfico e inclua seus parâmetros (coeficiente angular e linear) e a incerteza destes.

A.4 A partir do gráfico da questão anterior, obtenha o valor da aceleração da gravidade e a sua incerteza. Compare o valor obtido com o valor teórico $g_{teo} = 9,81$ m/s².

Parte B: Determinando a gravidade com a altura máxima

B.1 Utilize a trena e mantenha os parâmetros: $v_0 = 15$ m/s, altura inicial do canhão $h = 0$ m e utilizando uma bola de futebol como projétil. Varie os ângulos de lançamento e meça a altura máxima atingida pelo projétil. O alvo vermelho não será utilizado.

B.2 Encontre uma relação teórica que relacione a altura máxima H com o ângulo de lançamento θ , velocidade inicial v_0 e a aceleração da gravidade g .

B.3 Construa uma tabela de H versus $\sin^2(\theta)$ a partir dos dados obtidos no item **B.1** com suas respectivas incertezas. Construa também um gráfico de H versus $\sin^2(\theta)$ e trace a reta média que melhor se ajusta aos pontos do gráfico e calcule seus parâmetros (coeficiente angular e linear) e a incerteza destes.

B.4 A partir do gráfico da questão anterior, obtenha o valor da aceleração da gravidade e a sua incerteza. Compare o valor obtido com o valor teórico $g_{teo} = 9,81 \text{ m/s}^2$. Se houve alguma diferença entre os valores obtidos, qual método (**Parte A** ou **Parte B**) foi melhor sucedido ao determinar a aceleração gravitacional? Justifique.

Parte C: Altura inicial diferente de zero

C.1 Quando a altura inicial de lançamento é não-nula, o alcance máximo obtido assume um valor diferente do caso $h = 0 \text{ m}$, no qual o ângulo para o qual o alcance é máximo foi determinado em **A.2**. Nesta parte, iremos investigar isso. Mantendo os parâmetros: $v_0 = 15 \text{ m/s}$ e $h = 10 \text{ m}$, preencha uma tabela com os valores de alcance obtidos variando-se o ângulo de lançamento inicial.

C.2 Faça um gráfico do alcance versus ângulo inicial de lançamento e estime, a partir do seu gráfico, o ângulo de lançamento para o qual o alcance obtido é máximo (θ_{max}).

C.3 Sabe-se que esse ângulo se relaciona com a velocidade inicial, altura inicial e aceleração da gravidade por meio da equação

$$\tan(\theta_{max}) = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

O ângulo que você obteve em **C.2** satisfaz a relação acima? Apresente seus cálculos. Use $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Parte D: Resistência do ar

Até agora, analisamos o movimento de um projétil no vácuo, sem a presença de um fluido no qual ele se desloca. Ao se locomover em um fluido (como o ar, no nosso caso), o projétil sofre uma força de resistência (também chamada de força de arrasto), o que pode alterar de forma bem apreciável o movimento, a depender de certos parâmetros. Essa força pode ser modelada de diferentes formas, e, nessa parte, investigaremos qual modelo melhor se adequa à nossa simulação. Para esse fim, estudaremos a velocidade terminal atingida pelo projétil em um lançamento, utilizando um método aproximado.

A partir de agora, utilize o modo "Arrasto". Neste modo aparecerá uma janela cinza à direita, como mostra a figura a seguir. Nessa janela poderemos regular a massa do projétil e o arrasto (uma "medida" do atrito com o ar durante o movimento).



Padronize: Coeficiente de arrasto = 1.00, Diâmetro = 1 m, Altitude = 0 m, Rapidez inicial = 30 m/s, ângulo de lançamento = 85°, Altura do canhão = 0 m e também coloque o zoom (canto superior esquerdo) preferivelmente no máximo.

A força de arrasto sempre possui direção igual, porém sentido oposto ao vetor velocidade instantânea do corpo, e sua intensidade depende do módulo da velocidade v e de características do corpo e do meio. Adotaremos dois modelos para a força de arrasto. No primeiro modelo (1), sua intensidade segue a lei

$$F_{ar} = K_1 v$$

enquanto no segundo modelo (2), vale que

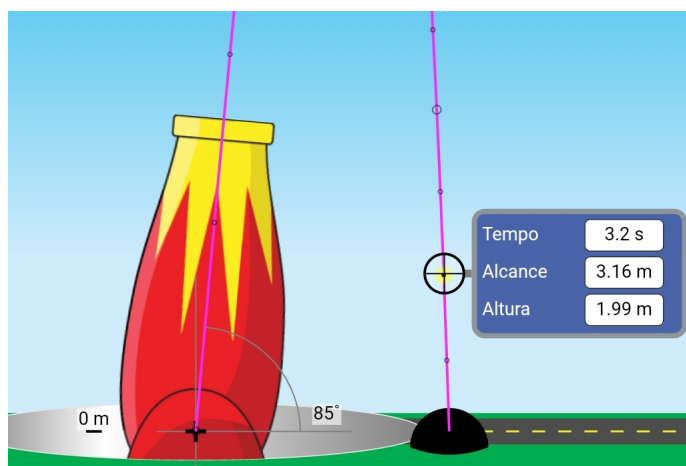
$$F_{ar} = K_2 v^2$$

Onde K_1 e K_2 são constantes que dependem de características do corpo e do meio, e são chamadas de coeficientes de arrasto. Imagine que um corpo de massa m é abandonado no ar, e cai em linha reta sob ação da força peso e da força de arrasto do ar, somente.

Veja que, segundo qualquer um dos modelos, a força de arrasto aumenta de intensidade conforme o corpo ganha velocidade.

D.1 Em determinado instante, a força de arrasto é suficiente para cancelar o peso, e a força resultante no corpo torna-se nula. A partir daí o objeto se move com velocidade constante, que chamaremos de velocidade terminal (de módulo V_{term}). Determine a expressão de V_{term} para o modelo 1 em função de m , g e K_1 e a expressão de V_{term} para o modelo 2 em função de m , g e K_2 .

A partir de agora, utilizaremos o medidor azul do canto superior direito. Você já deve ter percebido que, ao lançar um projétil, existem diversos pequenos círculos espalhados pela sua trajetória. Ao colocar a mira do medidor em cima de um desses círculos, você obterá informações de tempo desde o lançamento, distância horizontal do ponto de lançamento e altura em relação ao solo associadas aquele ponto da trajetória. Abaixo temos um lançamento com $m = 7$ kg, com o medidor mostrando as informações de um dos pontos da trajetória.



Vamos assumir que, em seu movimento descendente, o corpo atinge a velocidade terminal pouco antes de tocar o solo. Para obter a velocidade terminal, precisamos usar um método aproximado. Utilizaremos os últimos dois pontos da trajetória (isto é, sem contar com o ponto de impacto do projétil com o solo). A palavra "alcance" no medidor onde se encontra a lupa está associada à abscissa, enquanto a palavra "altura" está associada à ordenada.

D.2 Calcule a velocidade terminal $V_{term} = \Delta R / \Delta t$ (sendo ΔR a distância percorrida pelo projétil entre os últimos dois pontos e Δt o intervalo de tempo entre os últimos dois pontos), e V_{term}^2 , e anote seus valores em uma tabela. Repita o procedimento para várias massas.

D.3 Construa, em dois gráficos separados, V_{term} versus m e V_{term}^2 versus m . Trace, em ambos os gráficos, a curva que melhor se ajusta aos pontos experimentais, e calcule os seus parâmetros.

D.4 Pela análise dos dois gráficos construídos na questão anterior, qual modelo para a força de arrasto do ar (1 ou 2) melhor se adequa à simulação? Justifique a sua resposta.

D.5 Determine o coeficiente de arrasto para o modelo correto, com a sua respectiva incerteza e unidade correta.

6.2.2 Massa-mola - Dificuldade média - 5h

Introdução

O sistema massa-mola, como o nome sugere, é um sistema em que há uma mola com uma massa acoplada em sua ponta. Esse sistema geralmente é tratado de duas formas diferentes: horizontal e vertical.

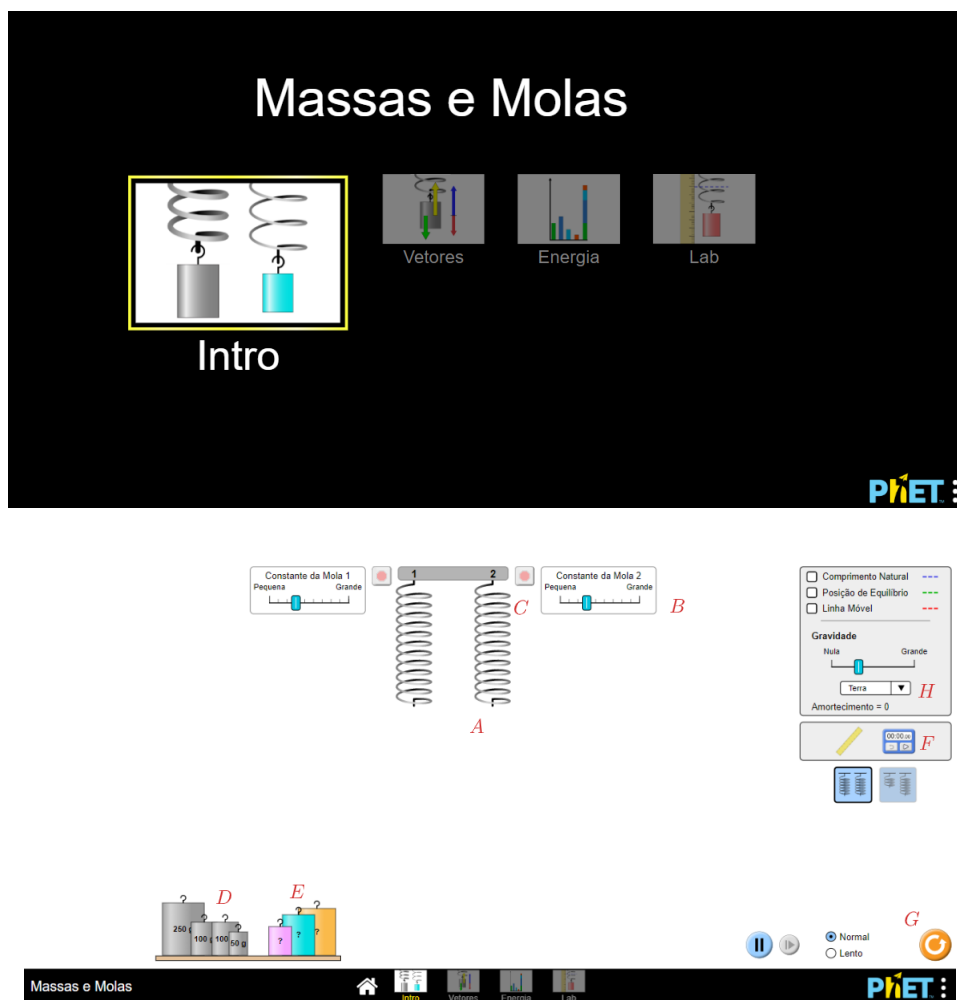
Ambos os sistemas são parecidos, porém, o sistema massa-mola vertical possui uma peculiaridade: a ação da gravidade ao longo de seu movimento. E o único efeito que a gravidade gera no sistema é um deslocamento da posição de equilíbrio.

Tendo isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema de oscilações utilizando um simulador.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do PhET que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Agora, você deve clicar em "Intro" para continuar. Após isso, você chegará na interface do simulador, como é mostrado na figura abaixo:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

A. Essa é a mola para a realização do experimento. Para o seu uso, basta arrastar algum peso para a sua extremidade. Caso você dê uma pequena deformação para a mola, ela começará a oscilar;

B. Ajuste da constante elástica na mola. Perceba que nesse ajuste há 10 "níveis" diferentes, sendo o nível 1 o nível da mola pequena e o nível 10 o nível da mola grande. Quanto maior for o nível, maior será a constante elástica. Para o ajuste do nível, basta arrastar a barra para o lado;

C. Esse botão é o botão de parar. Caso você o pressione, a mola vai parar de oscilar;

D. Aqui estão os pesos em que suas massas são conhecidas. Para a realização do experimento, considere que a incerteza da medida dessa massas é de 1%;

E. Aqui estão os pesos com massas desconhecidas;

F. Aqui estão alguns equipamentos de medição, a régua e o cronômetro. Para poder utiliza-los, basta arrastá-los para o lado;

G. Aqui está o botão de reinicializar. Caso você aperte, o simulador voltará para as

configurações iniciais;

H. Aqui você poderá controlar a gravidade em que o experimento ocorre. Ela pode ser a da Lua, da Terra, de Júpiter, do Planeta X, ou de qualquer uma de sua escolha.

Parte A: Determinação das constantes elásticas

Nessa parte vamos determinar a constante elástica de três molas diferentes utilizando apenas o cronômetro e as massas conhecidas. Para a propagação de erros, considere que a incerteza de cada massa conhecida seja de 1%.

A.1 Escreva uma expressão para o período do sistema e linearize a equação para $k(T)$

A.2 Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando diferentes massas com seus respectivos períodos seguindo o modelo da tabela abaixo da **Tabela 1**. Utilize quantos intervalos de período você julgar necessário

Tabela 1: Título

Massa (g)	$10\Delta T_1$ (s)	$10\Delta T_2$ (s)	...	$10\Delta T_n$ (s)	$\overline{T}$ (s)	$\overline{T}^2$ (s ²)
			...			

A.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e , a partir dele, determine o valor da constante elástica da mola do **nível 1** (mola pequena) e sua respectiva incerteza.

A.4 Agora, construa a **Tabela 2** com os dados experimentais obtidos utilizando todos os níveis das molas e especifique a massa utilizada. Utilize quantos intervalos de período você julgar necessário.

A.5 Utilizando apenas a calculadora, complete os dados da **Tabela 3**

Tabela 2: Título

Nível	$10\Delta T_1$ (s)	$10\Delta T_2$ (s)	$\dots$	$10\Delta T_n$ (s)	$\overline{(T)}$ (s)	$\overline{T^2}$ (s ²)
1						
2						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9						
10						

Tabela 3: Título

Nível	$(k \pm \sigma_k)$ N/m
1	
2	
$\vdots$	$\vdots$
9	
10	

Parte B: Determinação das massas

Agora, vamos determinar o valor das massas desconhecidas utilizando as constantes elásticas descobertas anteriormente.

B.1 Utilizando a **massa 1**, faça uma tabela que contenha o período médio para cada constante elástica. Essa será a sua **Tabela 4**.

B.2 Agora, com os dados da tabela **Tabela 4**, faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor da **massa 1** com sua respectiva incerteza.

B.3 De modo análogo, repita o mesmo procedimento dos itens **B.1)** e **B.2)** para as **massas 2** e **3**.

Parte C: Determinação da gravidade dos planetas

Por fim, com as passas descobertas na **Parte B**, Vamos descobrir a aceleração da gravidade dos planetas disponíveis no simulador.

C.1 Descreva um método experimental capaz de determinar a gravidade local. Descreva também como os erros serão propagados.

C.2 Com os seu método, calcule a gravidade da Terra com sua respectiva incerteza utilizando cada uma das massas descobertas na **Parte B**.

C.3 Repita o mesmo procedimento para as gravidades de Júpiter, da Lua e do Planeta X.

6.2.3 Pêndulo simples - Dificuldade iniciante - 1h30m

Introdução

O experimento de pêndulo simples é um dos mais clássicos experimentos de mecânica. Ele consiste em permitir que um objeto oscile em movimento pendular, realizando um MHS. Ele é muito interessante, pois pode ser utilizado para estimar a gravidade local como base no seu período de oscilação.

Nesse experimento, vamos analisar o impacto de diferentes parâmetros no período de oscilação de um pêndulo simples, assim como determinar a gravidade da Terra e sua respectiva incerteza.

Para a realização do experimento a seguir, utilize que o período de oscilações de um pêndulo simples para pequenos ângulos segue a seguinte fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Materiais necessários:

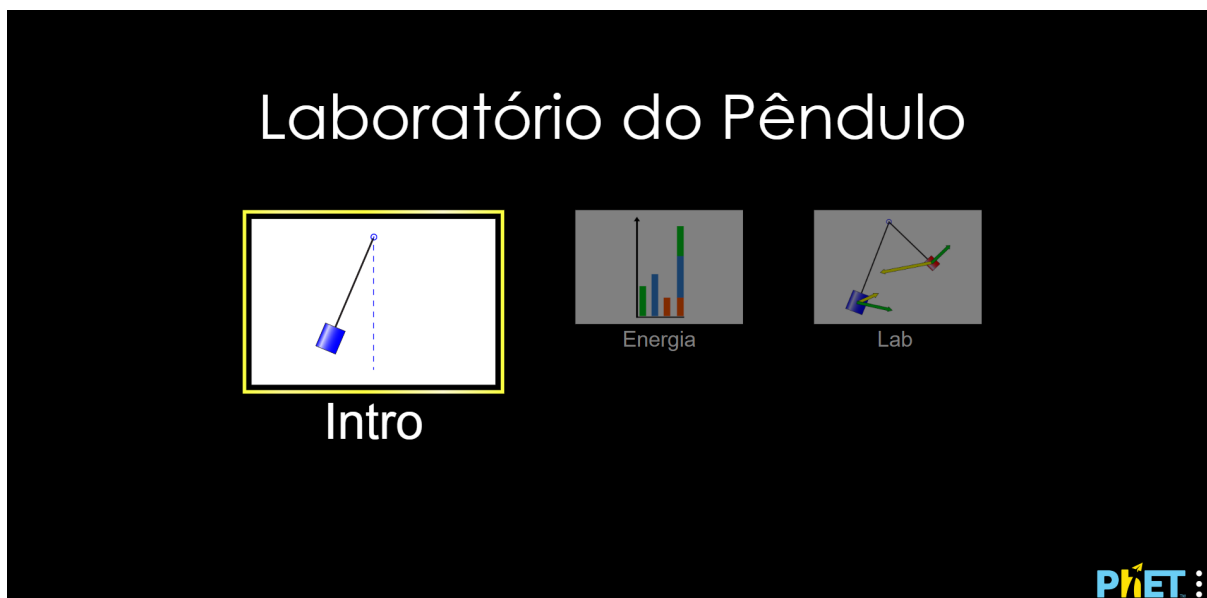
Caso você consiga realizar o experimento em casa, segue a lista de materiais necessários:

1. Régua;
2. Fio com comprimento variável (exemplo: barbante);
3. Massa (de preferência algo denso, para mitigar a influência da resistência do ar);
4. Cronômetro (pode ser o do celular);
5. Suporte para o pêndulo;

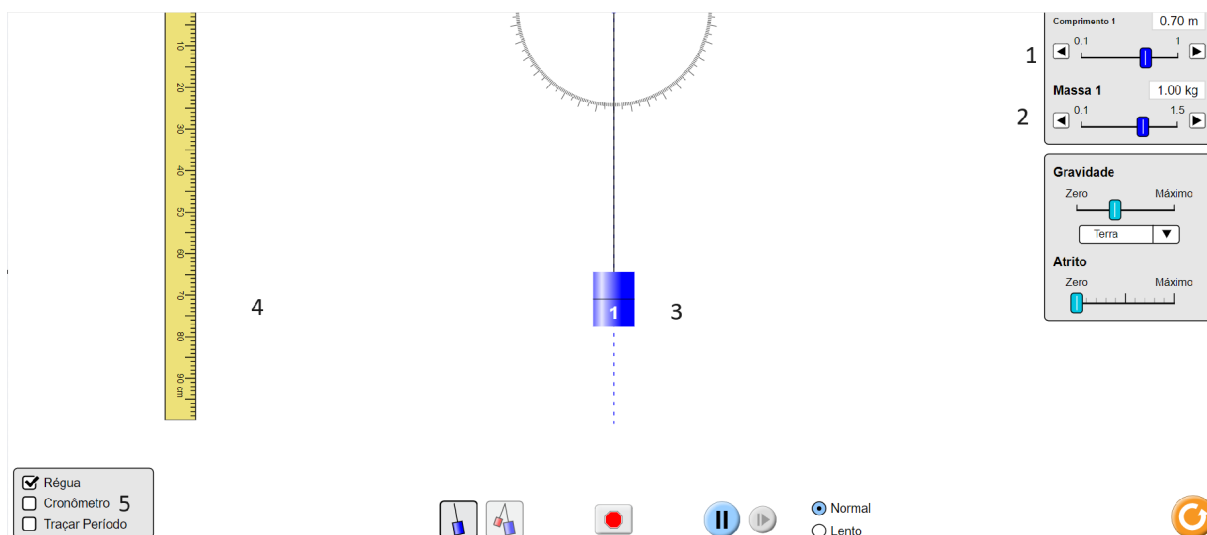
Caso não seja possível a utilização desses materiais, as medidas podem ser tomadas no [simulador do PHET](#) (detalhes do simulador serão apresentados à seguir).

Sobre o simulador

À seguir, iremos apresentar algumas características do simulador.



Ao entrar no site, você irá se deparar com a figura acima. Neste experimento, apenas usaremos a opção "Intro".



Legenda:

1. Aqui você pode variar o comprimento do fio
2. Aqui você pode variar a massa do objeto

3. Com o mouse, você pode arrastar o bloco para iniciar uma oscilação
4. Aqui você pode usar a régua
5. Use o botão para "criar" um cronômetro que deverá ser usado para as medições de período

OBSERVAÇÃO: Durante todo o experimento utilize ângulos pequenos

Parte A: Cálculo de vários períodos com o mesmo comprimento.

Nessa parte, vamos aprender um procedimento padrão para a realização de medidas de um pêndulo simples.

A.1 Meça com a régua o comprimento do fio e calcule sua respectiva incerteza.

A.2 Monte uma tabela com no mínimo 7 medições de 10 períodos*. Ao lado, coloque os valores de cada período (divida por 10 a medida de 10 períodos).

*Medir apenas um período é bastante impreciso, medindo 10 de uma vez reduzimos bastante nossa incerteza.

A.3 Com a tabela de A.2, calcule o período médio com sua respectiva incerteza.

Parte B: Cálculo de períodos com diferentes comprimentos.

Agora, vamos variar o comprimento do fio para que possamos obter parâmetros importantes sobre o experimento, como a gravidade da Terra.

B.1 Monte uma tabela com, no mínimo, 5 medições de 10 períodos para cada comprimento de fio escolhido. Escolha pelo menos 7 comprimentos de fio.

B.2 Com a tabela de B.1, calcule o período médio para cada comprimento de fio e os apresente em uma nova tabela.

B.3 Com a tabela de B.2, faça um gráfico no papel milimetrado do período em função do comprimento do fio. Esse gráfico é uma reta?

B.4 Linearize a expressão do período e faça um gráfico linearizado no papel milimetrado.

B.5 Encontrando os valores de coeficiente linear da melhor reta, estime o valor da gravidade com sua respectiva incerteza.

B.6 Verifique se o valor é compatível com o valor da gravidade local.

6.2.4 Pêndulo físico - Dificuldade média - 4h45m

Introdução

O pêndulo físico é um sistema que descreve o movimento oscilatório de um corpo rígido preso por um ponto fora de seu centro de massa. Ao oscilar sob a ação da gravidade, seu comportamento pode ser analisado com base na relação entre torque, momento de inércia e aceleração angular. A partir dessa relação, é possível determinar propriedades características do sistema, como o momento de inércia e o período de oscilação.

Com isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do Laboratório Virtual de Física da UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Esse objeto verde é o pêndulo físico, objeto de estudo para esse experimento.
2. Ao clicar no botão "Oscilar", o pêndulo físico entrará em movimento. Já ao clicar em "Mostrar régua", uma régua aparecerá na tela.
3. Clicando no botão "Acionar cronômetro", o tempo começará a contar. Você também pode pausar e zerar o cronômetro utilizando os botões correspondentes.

Gravidade

☒ Terra
☐ Lua
☐ Marte

Cronômetro

0 : 00 : 00

Acionar Cronômetro

Pausar

Zerar Cronômetro

Oscilar Reiniciar

Mostrar Régua



Barra 1
Barra 2
Barra 3

Massa da Barra : 220 g

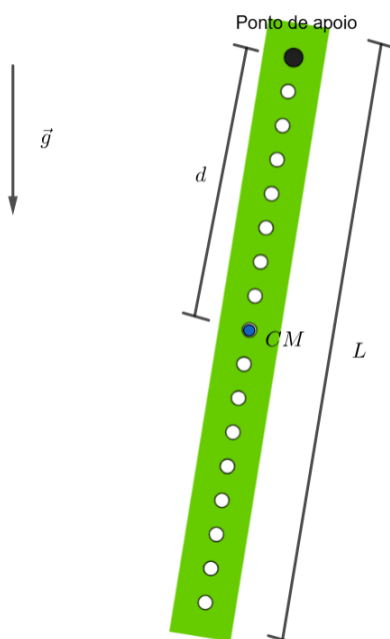
Ponto de Oscilação

☐ 0
☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ 4
☐ 5
☐ 6
☐ 7
☒ 8

Pêndulo Físico

4. Neste controle, é possível variar o ponto de oscilação do pêndulo físico. No experimento, identificaremos esse ponto como n (no exemplo, $n = 8$, já que o ponto de oscilação está no 8)
5. Neste campo, você pode alterar a massa da barra.

Fundamento Teórico



Utilizando a segunda Lei de Newton para rotações e a definição do momento de inércia, podemos provar que o período de uma oscilação para o pêndulo físico é dada por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Onde I é o momento de inércia, d é a distância entre o ponto de apoio e o centro de massa da barra (localizado em seu centro), e g é a aceleração da gravidade, m é a massa da barra.

Observações

Em todos os itens, propague as incertezas. Além disso, as partes do problema não são independentes, portanto, não é recomendado pular questões. Não é necessário saber o que é momento de inércia para realizar o experimento.

Parte A: Determinação experimental do momento de inércia I

Nessa parte vamos determinar o momento de inércia I e sua dependência com parâmetros relevantes (lembre-se de determinar a incerteza em todos os itens).

Para isso, siga os seguintes passos:

- Selecione a barra 1 (massa 220 g)
- Selecione a gravidade da Terra ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)
- Selecione o ponto de oscilação no $n = 8$ (isso pode alterar caso o enunciado peça)
- Clique em oscilar
- Utilize o cronômetro para medir o período de uma oscilação

A.1 Meça o comprimento total da barra L e a distância entre dois pontos de oscilação vizinhos D . Além disso, derive uma relação entre d , D e a identificação do ponto de oscilação n .

A.2 Escreva uma equação para o momento de inércia I em função do período T , massa m , gravidade g , distância d .

A.3 Siga os passos descritos acima para obter os dados experimentais e organize-os em uma tabela que relacione o período T com a distância d e o momento de inércia I , conforme o modelo apresentado abaixo da **Tabela 1**.

Tabela 1: $d \times T \times I$

d (m)	T (s)	I (SI)

A.4 A partir dos dados da **Tabela 1**, trace em papel milimetrado o **Gráfico 1: $I \times d$**

Perceba que o **Gráfico 1** não é linear! Isso acontece, pois o momento de inércia também depende da distância d . De acordo com a seguinte fórmula:

$$I = \frac{L^2}{k_1} + k_2 d^2$$

Onde k_1 e k_2 são constantes a serem determinadas.

A.5 A partir da fórmula apresentada, derive uma equação linearizada que relacione o momento de inércia I com a distância d . Para facilitar, introduza uma nova variável x adequada à linearização. Dica: a equação linearizada deve ser do tipo $I = a + bx$

A.6 Utilizando os dados da **Tabela 1**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela seguindo o modelo da **Tabela 2**.

Tabela 2: $d \times x \times I$

d (m)	x (?)	I (SI)

A.7 Utilizando os dados da **Tabela 2**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, determine os valores de k_1 e k_2 e sua respectiva incerteza.

Parte B: Diferentes massas

Agora, vamos investigar o comportamento do pêndulo físico para diferentes massas (utilizando as barras 2 e 3). Lembre-se de propagar as incertezas em todas os itens!

Para isso, selecione a barra 2 ou 3.

B.1 Repita o exercício **A.3**, entretanto, utilizando a barra 2 e 3

Tabelas 3: $d \times T \times I$

d_2 (m)	T_2 (s)	I_2 (SI)

(a) Tabela 3.1: barra 2

d_3 (m)	T_3 (s)	I_3 (SI)

(b) Tabela 3.2: barra 3

B.2 Repita o exercício **A.6** e **A.7**, entretanto, utilizando a barra 2 e 3

Tabelas 4: $d \times x \times I$

d_2 (m)	x_2 (?)	I_2 (SI)

(a) Tabela 4.1: barra 2

d_3 (m)	x_3 (?)	I_3 (SI)

(b) Tabela 4.2: barra 3

B.3 Sabendo que o período de oscilação do pêndulo físico depende da massa da barra segundo a relação $T \propto m^\alpha$, determine o valor do expoente α .

Para isso, utilize um gráfico em escala log-log (papel di-log) ou aplique métodos de linearização apropriados. Arredonde o valor de α para o inteiro mais próximo.

Não se preocupe caso o gráfico contenha poucos pontos experimentais — o objetivo é identificar o comportamento da relação entre T e m com base apenas nas massas utilizadas neste experimento.

B.4 Sabendo que a constante k_1 varia com a massa da barra segundo a relação $k_1 \propto m^\beta$, e que a constante k_2 obedece $k_2 \propto m^\gamma$, determine experimentalmente os valores dos expoentes β e γ . Para isso, utilize gráficos em papel di-log ou utilize métodos de linearização para isso. Arredonde β e γ para o inteiro mais próximo.

B.5 Utilizando os resultados obtidos na questão **B.4**, determine os valores de C_1 e C_2 , considerando que $k_1 = C_1 m^\beta$ e $k_2 = C_2 m^\gamma$. Arredonde os valores de C_1 e C_2 para o inteiro mais próximo.

B.6 Escreva a fórmula do período em função da gravidade g , distância d , e comprimento L .

Parte C: Determinação experimental da gravidade

Agora que já sabemos como o período varia com os parâmetros relevantes, podemos encontrar a gravidade na Lua e em Marte.

Para isso, selecione a barra 1.

C.1 Selecione a gravidade da Lua e obtenha dados experimentais e organize-os em uma tabela que relacione o período T com a distância d , conforme o modelo apresentado abaixo da **Tabela 5**.

Tabela 5: $d \times T$

d (m)	T (s)

C.2 Escreva uma equação linearizada que relaciona o período, gravidade g , distância d e outro(s) parâmetro(s) constante(s). Para facilitar, introduza uma nova variável y adequada à linearização.
Dica: a equação linearizada deve ser do tipo $T = a + by$

C.3 Utilizando os dados da **Tabela 5**, faça outra tabela com os dados necessários para a equação linearizada.

C.4 Utilizando os dados da **Tabela 6**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor da gravidade na Lua g_{Lua} e sua respectiva incerteza.

Tabela 6: $d \times y \times T$

d (m)	y (?)	T (s)

C.5 Repita o mesmo procedimento, mas agora com o objetivo de encontrar a gravidade de Marte.

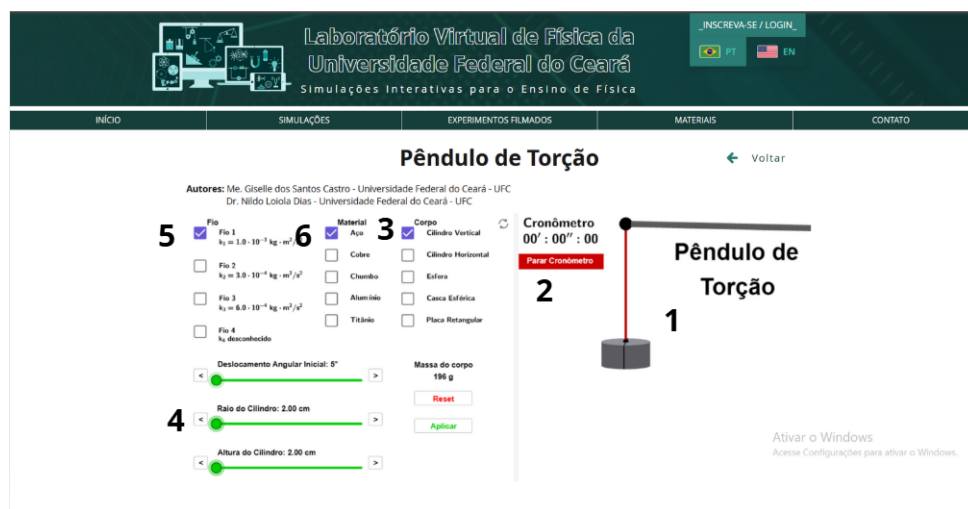
6.2.5 Pêndulo de torção - Dificuldade média - 1h45m

Introdução

Neste experimento, vamos estudar o chamado "pêndulo de torção", muito importante para um entendimento mais aprofundado sobre pêndulos no geral.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos um simulador do Laboratório virtual que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Aqui está o pêndulo de torção do qual você deve obter medidas.
2. Aqui está o cronômetro do simulador, que pode ser bem útil para medir períodos. Porém, tenha cuidado se o seu dispositivo estiver meio travado; talvez isso gere atrasos em suas medidas.

3. Aqui, você muda o formato do corpo no fio.
4. Por meio dessa área, você pode alterar o deslocamento angular inicial do pêndulo e propriedades geométricas do corpo. NÃO altere o deslocamento angular inicial ao longo do experimento.
5. Nessa Nessa área, você pode mudar o tipo de fio utilizado, alterando a "constante torcional do fio".
6. Aqui, temos o material do fio, que será mantido como de aço ao longo do experimento.

Sabe-se que o momento de inércia de um corpo depende apenas de sua massa e de fatores geométricos de um objeto. Ele possui dimensões no SI de kgm^2 . É importante notar que, ao mudar comprimentos em um mesmo corpo do simulador, a densidade ainda se mantém praticamente a mesma.

Não é necessário realizar análise de erros ao decorrer do experimento.

Parte A: Momento de inércia

Nessa parte, vamos estudar a relação entre o período de um pêndulo e o momento de inércia do corpo.

A.1 Coloque o corpo como sendo "esfera". Faça medições de períodos para diferentes raios de esferas e coloque os resultados em uma tabela.

Tabela 1: Raio x T

Raio (m)	T_1 (s)	T_2 (s)	$\dots T_n$ (s)	$T_{\text{médio}}$ (s)

A.2 Sabe-se que o período de um pêndulo de torção depende de uma potência do momento de inércia. Então, encontre a melhor linearização para determinar o expoente n experimentalmente e faça uma tabela com as funções linearizadas do raio e do período médio.

Tabela 2: $g(R)$ x $f(T)$

$g(R)$	$f(T)$

A.3 A partir disso, faça um gráfico com os dados linearizados. Assim, calcule a potência do momento de inércia I que é proporcional ao período do pêndulo.

A.4 Por meio da relação encontrada, podemos também determinar a relação entre alguns momentos de inércia. Mude o corpo para "Casca esférica". Faça medições de períodos para diferentes raios de cascas esféricas e coloque os resultados em uma tabela.

Tabela 3: Raio x T

Raio (m)	T_1 (s)	T_2 (s)	$\dots T_n$ (s)	$T_{\text{médio}}$ (s)

A.5 Faça uma tabela com as funções linearizadas do raio e do período médio.

Tabela 4: $g(R)$ x $f(T)$

$g(R)$	$f(T)$

A.6 A partir disso, faça um gráfico com os dados linearizados. Assim, determine a razão entre o momento de inércia de uma casca esférica (I_c) e o momento de inércia de uma esfera (I_e) para esferas de mesmo raio e massa. Para isso, assuma que o período depende do raio da mesma maneira que a encontrada no item A.3. Não estranhe se seu resultado estiver um pouco distante do esperado.

Parte B: Constante torcional

A constante torcional de um fio (k) também é muito relevante para a determinação do período de um pêndulo de tração (T). É conhecido que tal período é proporcional a $k^{-1/2}$

B.1 Escolha um cilindro vertical como o corpo do pêndulo com o tamanho padrão da simulação, tendo altura e raio de 2cm. Faça medições de períodos em fios com diferentes constantes torcionais. Não escolha a opção de constante torcional desconhecida.

Tabela 5: k x T

$k(\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2)$	T_1 (s)	T_2 (s)	$\dots T_n$ (s)	$T_{\text{médio}}$ (s)

B.2 Faça uma tabela linearizada de $T_{\text{médio}}$ por $k^{-1/2}$

Tabela 6: $k^{-1/2}$ x $T_{\text{médio}}$

$k^{-1/2}(\text{s}/(\text{m} \cdot \sqrt{\text{kg}}))$	$T_{\text{médio}}(\text{s})$

B.3 Por meio de uma regressão linear ou pelo método gráfico, determine a constante de proporcionalidade entre $T_{\text{médio}}$ e $k^{-1/2}$.

6.2.6 Pêndulo duplo com mola - Dificuldade média - 1h

Introdução

Neste experimento, vamos estudar um pêndulo duplo com mola e como seu movimento é influenciado pelas posições iniciais e outros parâmetros relevantes. AVISO: você também terá que usar um cronômetro externo ao experimento para medir períodos de tempo. Recomenda-se usar um cronômetro de celular.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos um simulador do "Walter Fendt" que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Coupled Pendula

This simulation shows two pendula coupled by a spring which has a small spring constant (weak coupling). For such systems it is characteristic that the oscillation's energy permanently moves from one partial system to the other.

The "Reset" button brings the system to its initial position. You can start or stop and continue the simulation with the other button. If you choose the option "Slow motion", the movement will be ten times slower. It is possible to change the initial positions of the two pendula by using the corresponding text fields. A positive (negative) angle means an elongation to the right (left) side.

You can get the harmonics of the system as follows:

- If you write two equal numbers into the text fields (e.g. twice 10°), the two pendula will always have same phases.
- By choosing two opposite numbers (e.g. 8° and -8°), you can get an oscillation with opposite phases.

If you write 0° into one of the text fields for the initial positions, the entire energy of the oscillation will alternately be transferred to one of the pendula: That pendulum which first was in the mid-position

Ativar o Windows
Acesse Configurações para ativar o Windows.

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Aqui, temos o setup da abordagem pela simulação, que é formado por dois pêndulos ligados por uma mola.
2. Nessas opções, você pode reiniciar a simulação em "reset" e começar a simulação em "start".
3. Nesses dois retângulos, você pode escolher a posição angular inicial de cada um dos pêndulos. É importante tentar realizar todo o experimento em pequenos ângulos, já que é nesse regime onde podemos utilizar aproximações para o período do pêndulo.
4. Aqui, podemos ver os gráficos das posições angulares de cada pêndulo como função do tempo.
5. Apertando esse botão, você pode colocar o experimento em "slow motion", o que significa deixar a simulação bem mais lenta. **Não** ative essa opção, já que ela vai gerar medidas de tempo diferentes do esperado.

Durante os itens e suas soluções, vamos assumir que m representa a massa de objeto, k é a constante elástica da mola, l é o comprimento dos fios e g é a gravidade local.

Parte A: Pêndulo duplo com mola

Nessa parte, vamos tentar demonstrar a equação da continuidade, muito relevante na hidrodinâmica.

A.1 Descreva como devem ser as posições iniciais de cada bloco para que as ondas tenham **sempre** as mesmas amplitudes ao longo do tempo. Em que situações elas estão em fase e em quais elas estão em oposição de fase?

A.2 Por meio de dados experimentais, obtenha o período médio do pêndulo, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (o mesmo período que haveria caso não existisse mola). Para isso, coloque os blocos em fase. Apresente seu resultado acompanhado com a incerteza aleatória.

Tabela 1: Medidas para obter $T_{\text{médio}}$

T_1 (s)	T_2 (s)	$\dots T_n$ (s)	$T_{\text{médio}}$ (s)

A.3 Considerando que $g = 9,81\text{m/s}^2$, calcule o valor de l junto com sua incerteza. Saiba que, para uma função no formato de $y = kx^2$, a incerteza será de $y = 2kx\sigma_x$.

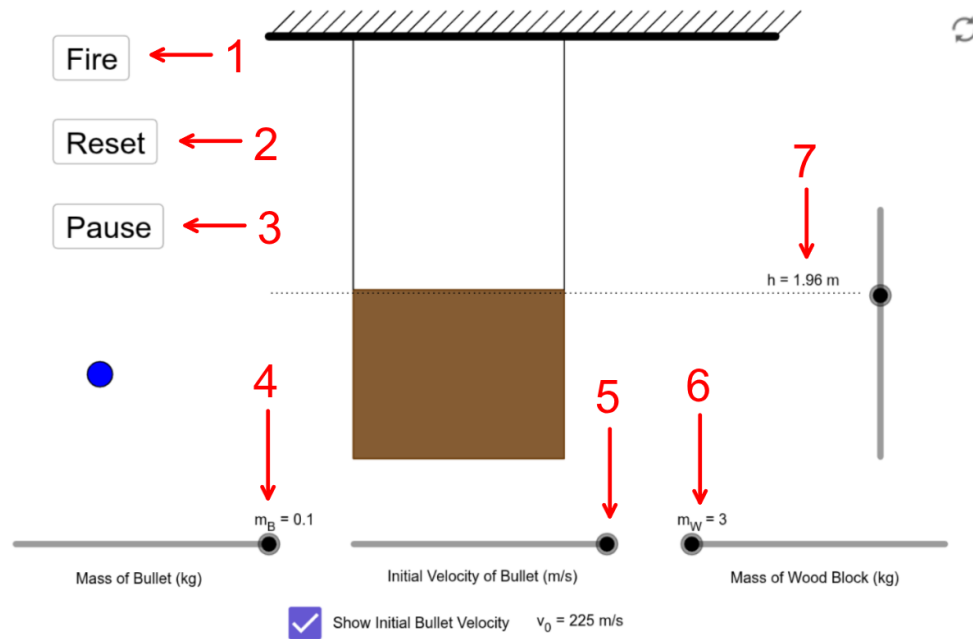
A.4 Agora, considere o caso de oposição de fase. Aqui, como podemos descrever o período como função de g, l, k e m ? Aqui, você pode aproximar $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ e $\text{cos}(\theta) \approx 1$ para θ muito pequeno.

A.5 Por meio de medidas experimentais e seus resultados, determine a razão $r = k/m$.

6.2.7 Pêndulo balístico - Dificuldade média - 1h15m

Introdução

O **pêndulo balístico** é um dispositivo que permite o estudo da conservação da quantidade de movimento e a estimativa da velocidade de um objeto muito rápido (como uma bala) em colisão. Esse dispositivo é composto por um bloco conectado por dois fios leves.



Apresentando o simulador

Para realizar este experimento, utilizaremos uma simulação do site *oPhysics* disponível [neste link](#) (tela cheia).

Para essa interface, podemos encontrar as seguintes ferramentas:

1. Botão de disparo
2. Botão para reiniciar a simulação
3. Botão para pausar a simulação
4. Ajuste da massa da bala
5. Ajuste da velocidade da bala
6. Ajuste da massa do bloco
7. Régua

Estudo do fenômeno

A.1 Encontre, em termos de m_B , m_W , g e v_0 , a variação máxima de altura Δh atingida pelo conjunto.

A.2 Meça a altura para diferentes valores de um parâmetro X de modo a minimizar o erro experimental ($X = m_B, m_W$ ou v_0). Monte uma tabela seguindo o modelo da **Tabela 1** e um gráfico. Indique as barras de erro no gráfico, se necessário.

Tabela 1: X x h

X	h

A.3 Determine a aceleração da gravidade g , com sua respectiva incerteza. Construa quaisquer gráficos e tabelas que julgar necessário.

6.3 Soluções

6.3.1 Lançamento

Parte A: Determinando a gravidade com o alcance

Solução A.1

Tabela 1: Amplitude (m) e $\sin(2\theta)$ por $\theta(^{\circ})$.

$\theta(^{\circ})$	$(A \pm 0,01)$ m	$\sin(2\theta)$
25	17,55	0,77
30	19,95	0,87
35	21,53	0,94
40	22,59	0,98
45	22,92	1,00
50	22,63	0,98
55	21,51	0,94
60	19,82	0,87
65	17,57	0,77
70	14,75	0,64

OBS 1: Não há erro associado ao valor de θ , visto que o parâmetro utilizado para definir o ângulo no simulador é exato e preciso. Assim, também não há propagação de

erro para $\text{sen}(2\theta)$, então escolhemos arbitrariamente 2 algarismos significativos após a vírgula para essas medidas.

OBS 2: Vale lembrar que a incerteza da trena nesse experimento é 0,01 m.

OBS 3: Perceba que nos casos em que aparecem a mesma incerteza experimental, você pode escrevê-la no topo da tabela, junto com a unidade. Fazendo isso, a tabela ficará menos "poluída".

Solução A.2

Decompondo o movimento em X e Y, tem-se:

$$A = v_x \cdot t = (v_0 \cdot \cos \theta) \cdot (2t_{\text{subida}})$$

$$g \cdot t_{\text{subida}} = v_y = v_0 \cdot \text{sen} \theta$$

Isolando A , temos que:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \cdot (2\text{sen} \theta \cos \theta)$$

Usando que $2\text{sen} \theta \cos \theta = \text{sen}(2\theta)$:

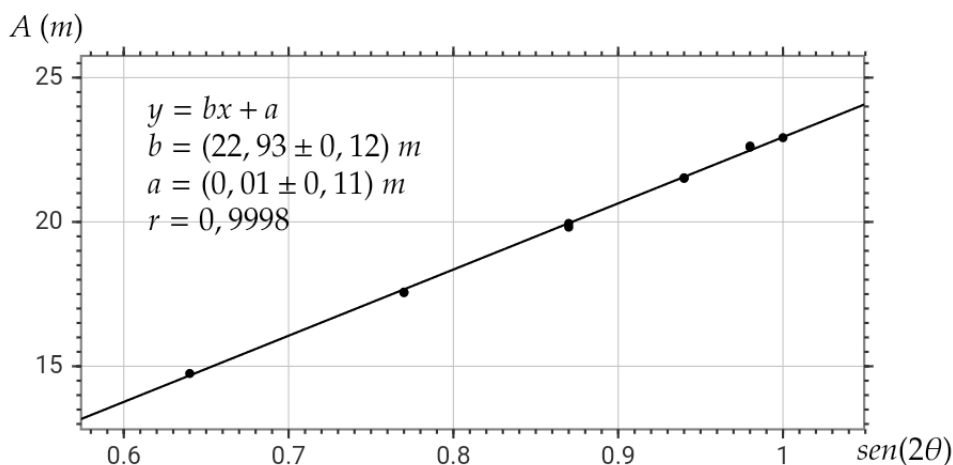
$$A = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta)$$

Que é linear quando a variável é $\text{sen}(2\theta)$. Para o alcance máximo, a função $\text{sen}(2\theta)$ deve ser máxima, que ocorre quando $2\theta = 90^\circ$, ou seja: quando $\theta_{\text{max}} = 45^\circ$

$$\theta(A_{\text{max}}) = 45^\circ$$

Solução A.3

OBS 4: A tabela de A versus $\text{sen}(2\theta)$ foi construída em A.1 junto com a tabela de A versus θ , de forma a agilizar a solução e estratégia para ganhar tempo de prova. Por isso, é essencial uma leitura sucinta da prova antes de iniciar a resolução, a fim de procurar maneiras de economizar tempo de prova.

Gráfico 01: $A \text{ (m)}$ por $\text{sen}(2\theta)$ **Solução A.4**

Pela equação linearizada e pelos coeficientes da reta obtida, têm-se:

$$b = \frac{v_0^2}{g} \implies \sigma_g = \pm \sigma_b \cdot \frac{v_0^2}{b^2} = \pm 0,05$$

Acima, usou-se as regras para a propagação do erro de uma medida. Enfim, calculando o valor da gravidade, temos que:

$$g = (9,81 \pm 0,05) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Que é um ótimo valor para a gravidade, pois pegando um dos valores limites para a gravidade experimental ($g_{exp} = (9,81 + 0,02) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) e calculando o erro percentual, temos:

$$\sigma = \left| \frac{g_{exp} - g_{teo}}{g_{teo}} \right| \cdot 100\% = 0,2\%$$

Que é muito pequeno. Um ótimo intervalo de valores para g_{exp} é entre $8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $10,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; se sua resposta estiver dentro desse intervalo, provavelmente ganharia a pontuação total da questão.

Parte B: Determinando a gravidade com a altura máxima

Solução B.1Tabela 2: Altura (m) e $\text{sen}^2(\theta)$ por $\theta(^{\circ})$.

$\theta(^{\circ})$	$(H \pm 0,01) \text{ m}$	$\text{sen}^2(\theta)$
25	2,05	0,18
30	2,87	0,25
35	3,77	0,33
40	4,74	0,41
45	5,73	0,50
50	6,73	0,59
55	7,69	0,67
60	8,60	0,75
65	9,42	0,82
70	10,13	0,88

OBS 1: Não há erro associado ao valor de θ , visto que o parâmetro utilizado para definir o ângulo no simulador é exato e preciso. Assim, também não há propagação de erro para $\text{sen}^2(\theta)$, então escolhemos arbitrariamente 2 algarismos significativos após a vírgula para essas medidas.

OBS 2: Vale lembrar que a incerteza da trena nesse experimento é 0,01 m.

OBS 3: Perceba que nos casos em que aparecem a mesma incerteza experimental, você pode escrevê-la no topo da tabela, junto com a unidade. Fazendo isso, a tabela ficará menos "poluída".

Solução B.2

Decompondo o movimento em X e Y, tem-se:

$$H = \frac{g \cdot t_{\text{queda}}^2}{2} = \frac{g \cdot t_{\text{subida}}^2}{2} = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$g \cdot t = v_0 \cdot \text{sen}(\theta)$$

Isolando H , temos que:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \text{sen}^2(\theta)$$

Que é linear quando a variável é $\text{sen}^2(\theta)$.

Solução B.3

OBS 4: A tabela de A versus $\text{sen}^2(\theta)$ foi construída em B.1 junto com a tabela de A versus θ , de forma a agilizar a solução e estratégia para ganhar tempo de prova. Por isso, é essencial uma leitura sucinta da prova antes de iniciar a resolução, a fim de procurar maneiras de economizar tempo de prova.

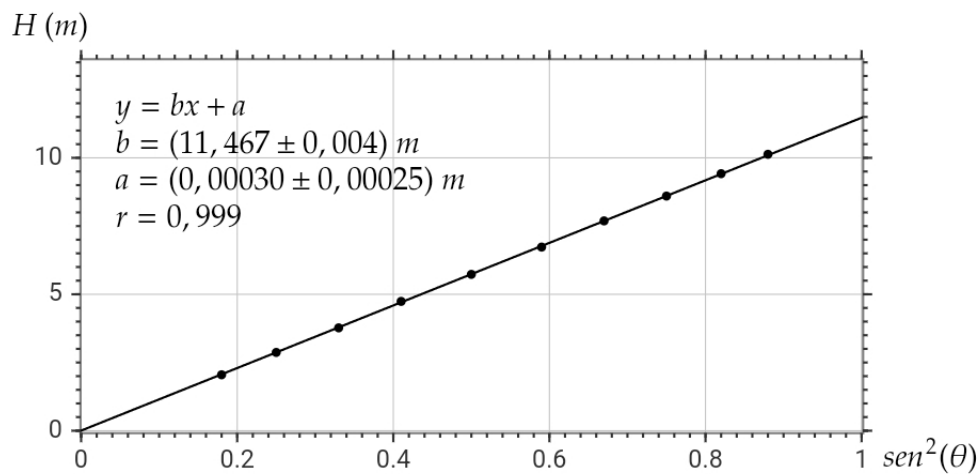


Gráfico 02 : $H \text{ (m)}$ por $\text{sen}^2(\theta)$

Solução B.4

Pela equação linearizada e pelos coeficientes da reta obtida, têm-se:

$$b = \frac{v_0^2}{2g} \implies \sigma_g = \pm \sigma_b \cdot \frac{v_0^2}{2b^2} = \pm 0,003$$

Acima, usou-se as regras para a propagação do erro de uma medida. Enfim, calculando o valor da gravidade, temos que:

$$g = (9,811 \pm 0,003) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Que é um ótimo valor para a gravidade, pois pegando um dos valores limites para a gravidade experimental ($g_{exp} = 9,811 + 0,003 = 9,814$) e calculando o erro percentual, temos:

$$\sigma = \left| \frac{g_{exp} - g_{teo}}{g_{teo}} \right| \cdot 100\% = 0,04\%$$

Que é muito pequeno. Um ótimo intervalo de valores para g_{exp} é entre $8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $10,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; se sua resposta estiver dentro desse intervalo, provavelmente ganharia a pontuação total da questão.

Comparando com os valores para g_{exp} obtidos nas partes A e B, ambos os métodos são muito precisos e serviram bem.

Parte C: Altura inicial diferente de zero

Solução C.1

Dessa vez, para $h = 10 \text{ m}$ e $v_0 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, têm-se:

Tabela 3: Alcance (m) por $\theta(^{\circ})$.

$\theta(^{\circ})$	$(A \pm 0,01) \text{ m}$
25	30,09
30	30,97
35	31,37
40	31,21
45	30,46
50	29,10
55	27,12
60	24,54
65	21,40
70	17,76

OBS 1: Não há erro associado ao valor de θ , visto que o parâmetro utilizado para definir o ângulo no simulador é exato e preciso.

OBS 2: Vale lembrar que a incerteza da trena nesse experimento é $0,01 \text{ m}$.

OBS 3: Perceba que nos casos em que aparecem a mesma incerteza experimental, você pode escrevê-la no topo da tabela, junto com a unidade. Fazendo isso, a tabela ficará menos "poluída".

Solução C.2 Para descobrir o θ para o qual A é máximo (θ_{max}), vamos plotar o gráfico $A(\theta)$ versus θ e procurar o ponto onde A é máximo (ponto de pico).

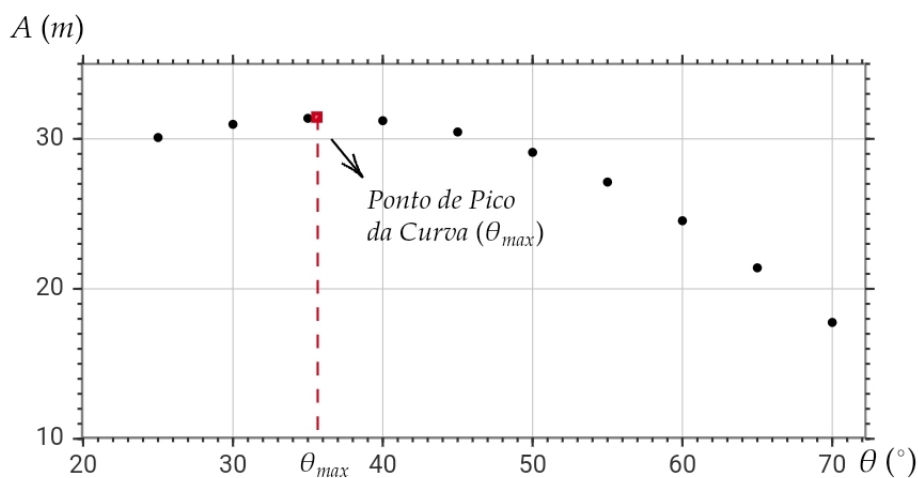


Gráfico 03: A (m) por θ ($^{\circ}$)

Graficamente, encontra-se que θ_{max} é, aproximadamente:

$$\theta_{max_E} = 35,6^{\circ}$$

Um ótimo intervalo de valores para θ_{max_E} é entre 33° e 39° ; se sua resposta estiver dentro desse intervalo, provavelmente ganharia a pontuação total da questão.

Solução C.3

Aplicando a fórmula de $tg(\theta_{max})$ fornecida para $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $v_0 = 15 \text{ m/s}$ e $h = 10 \text{ m}$:

$$tg(\theta_{max}) = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = 0,731$$

Agora, usando a função arco tangente na calculadora, temos, aproximadamente:

$$\theta_{max_T} = 36,2^{\circ}$$

(Aqui, nenhuma das grandezas possuía erro relacionado, inviabilizando a propagação de erro)

Calculando o desvio percentual do θ_{max} experimental (θ_{max_E}) com o valor teórico (θ_{max_T}), têm-se:

$$\sigma = \left| \frac{\theta_{maxE} - \theta_{maxT}}{\theta_{maxT}} \right| \cdot 100\% = 1,6\%$$

Ou seja, o valor obtido experimentalmente pela análise do gráfico está dentro da margem esperada pelo valor teórico.

Parte D: Resistência do ar

Solução D.1

No estado de velocidade terminal, podemos assumir o equilíbrio da força peso com a força de arrasto, pois nesse instante há a transferência (aproximadamente) total de potência instantânea das duas forças:

$$P_{mg} = P_{F_{ar}} \implies (mg) \cdot v = (F_{ar}) \cdot v \implies F_{ar} = mg$$

Logo, para o Modelo 1 ($F_{ar} = K_1 \cdot v_{term}$):

$$v_{term} = \frac{mg}{K_1}$$

E para o Modelo 2 ($F_{ar} = K_2 \cdot v_{term}^2$):

$$v_{term} = \sqrt{\frac{mg}{K_2}}$$

Solução D.2

Podemos resolver essa parte se aproveitando do fato de que as medidas da lupa são muito exatas e precisas e não possuem erro associado às medidas, como no uso da trena. Assim, Podemos utilizar as medidas sem se preocupar com a programação de erro de ΔR e de Δt .

Para encontrar ΔR , nos aproveitaremos das coordenadas (x, y) dos 2 últimos pontos (Alcance e Altura na lupa, respectivamente) com a seguinte fórmula da distância entre dois pontos da geometria analítica:

$$\Delta R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Onde os índices 2 e 1 indicam a qual dos 2 pontos adjacentes as respectivas coordenadas estão se referindo. Já Δt será constante para todas as medidas, pois o simulador cria

os pontos da trajetória a cada 0,1 s, logo, $\Delta t = 0,1$ s.

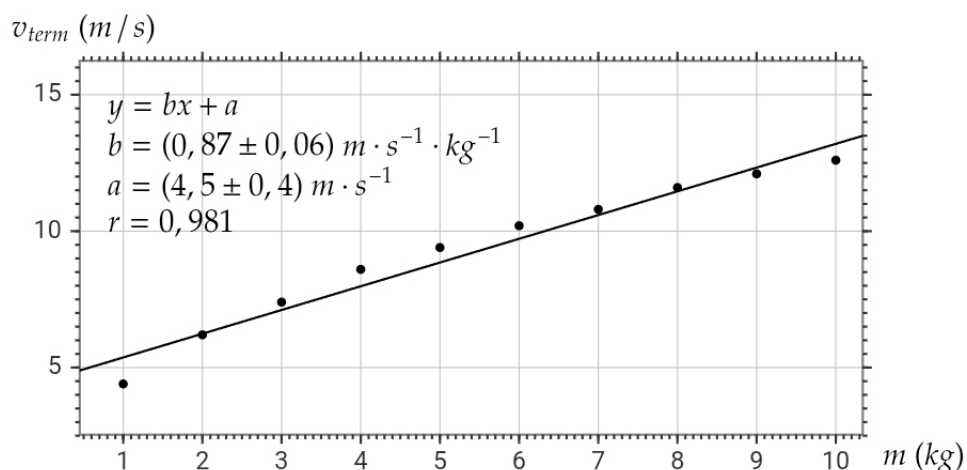
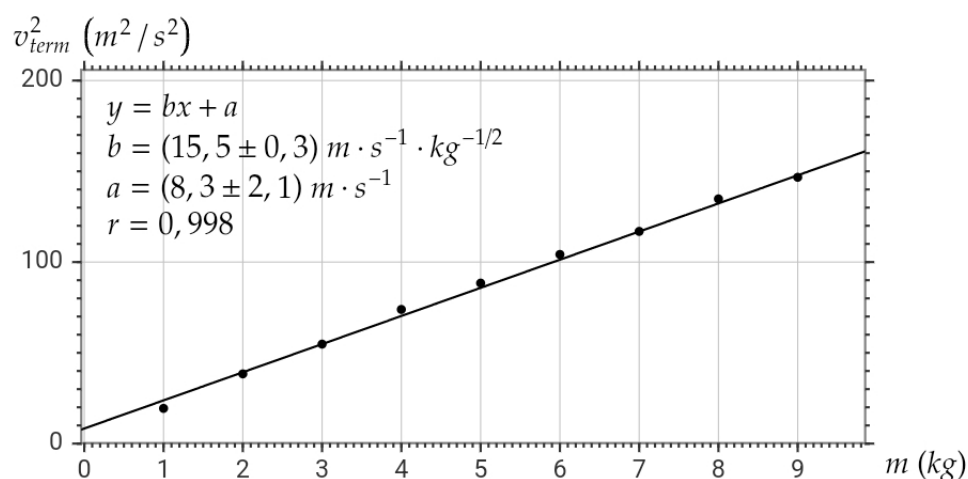
Enfim, como $v_{term} = \frac{\Delta R}{\Delta t}$, implica em $v_{term} = 10 \cdot \Delta R$. Calculando o requisitado para cada massa:

Tabela 4: v_{term} (m/s) e v_{term}^2 (m²/s²) por m (kg).

m (kg)	v_{term} (m/s)	v_{term}^2 (m ² /s ²)
1	4,4	19,4
2	6,2	38,4
3	7,4	54,8
4	8,6	73,9
5	9,4	88,4
6	10,2	104,2
7	10,8	116,9
8	11,6	134,8
9	12,1	146,7
10	12,6	159,0

OBS 1: Não há erro associado aos valores de m , Δt e ΔR , visto que o parâmetro utilizado para defini-los no simulador é exato e preciso. Assim, também não há propagação de erro para v_{term} e v_{term}^2 .

OBS 2: Outro jeito de obter as medidas é encontrando ΔR com o uso da trena, mas isso acarreta em propagação de erro devido à incerteza associada à trena, deixando o problema mais complicado e com ainda mais cálculos a se fazer.

Gráfico 04: v_{term} (m/s) por m (kg)Gráfico 05: v_{term}^2 (m^2/s^2) por m (kg)**Solução D.4**

É notável que o gráfico v^2 versus m (força do tipo $F_{ar} = K_2 \cdot v^2$) mostra comportamento mais linear, devido ao coeficiente r mais próximo de 1, que indica que os pontos experimentais são mais compatíveis com a equação da reta gerada pela regressão linear.

Solução D.5

O coeficiente angular do gráfico v^2 versus m vale:

$$b = (15,5 \pm 0,3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1/2}$$

Veja que, elevando a equação de v_{term} para forças do tipo $F_{ar} = K_2 \cdot v^2$ obtida em **D.1**, temos uma equação linear em m :

$$v_{term}^2 = \left(\frac{g}{K_2} \right) \cdot m$$

Logo, fica claro que $b = g/K_2$. Isolando K_2 e aplicando as regras para a propagação do erro de K_2 devido a b :

$$\sigma_{K_2} = \pm \sigma_b \cdot \frac{g}{b^2} = \pm 0,012$$

Finalmente, utilizando o valor de b encontrado e que $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, encontra-se:

$$K_2 = (0,633 \pm 0,012) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

6.3.2 Massa-mola

Parte A: Determinação das constantes elásticas

Solução A.1

Seja m a massa em oscilação, k a constante elástica da mola, g a a aceleração gravitacional local, tem-se que, segundo a lei de Newton:

$$ma = -k(l - l_0) + mg$$

$$a = -\frac{k}{m}(l - l_0) + g$$

Definindo a variável $x = l - l_0 - \frac{mg}{k}$, percebe-se que a equação de movimento para x é a mesma do oscilador harmônico:

$$a = -\frac{k}{m}x$$

O que indica que o sistema oscila ao redor da coordenada $l_0 + \frac{mg}{k}$ com período dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Isolando o k dessa equação:

$$k = \frac{4\pi^2}{m} T^2$$

Solução A.2

Tabela 1: Períodos de oscilação para cada massa.

Massa (g)	$(10\Delta T_1 \pm 0, 20)$ s	$(10\Delta T_2 \pm 0, 20)$ s	$(10\Delta T_3 \pm 0, 20)$ s
$250,0 \pm 2,5$	18,23	18,30	18,18
$100,0 \pm 1,0$	11,42	11,34	11,38
$50,0 \pm 0,5$	8,24	8,20	8,21

Tabela 2: Períodos de oscilação para cada massa.

Massa (g)	$\bar{T}$ (s)	$\bar{T}^2$ (s ²)
$250,0 \pm 2,5$	$1,82 \pm 0,04$	$3,33 \pm 0,15$
$100,0 \pm 1,0$	$1,14 \pm 0,03$	$1,30 \pm 0,07$
$50,0 \pm 0,5$	$0,822 \pm 0,023$	$0,68 \pm 0,04$

OBS 1: Propagação de erro para $\bar{T}^2$:

$$\sigma_{\bar{T}^2} = 2\bar{T}\sigma_{\bar{T}}$$

OBS 2: Propagação de erro para $\bar{T}$:

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\sigma_{\text{reação}}^2 + \sigma_{\text{aleat}}^2}$$

$$\sigma_{\text{aleat}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

OBS 3: Vale lembrar que a incerteza do cronômetro nesse experimento é o seu tempo de reação. Mas você pode usar a média de 0,2 s

OBS 4: Perceba que nos casos em que aparecem a mesma incerteza experimental, você pode escrevê-la no topo da tabela, junto com a unidade. Fazendo isso, a tabela ficará menos "poluída"

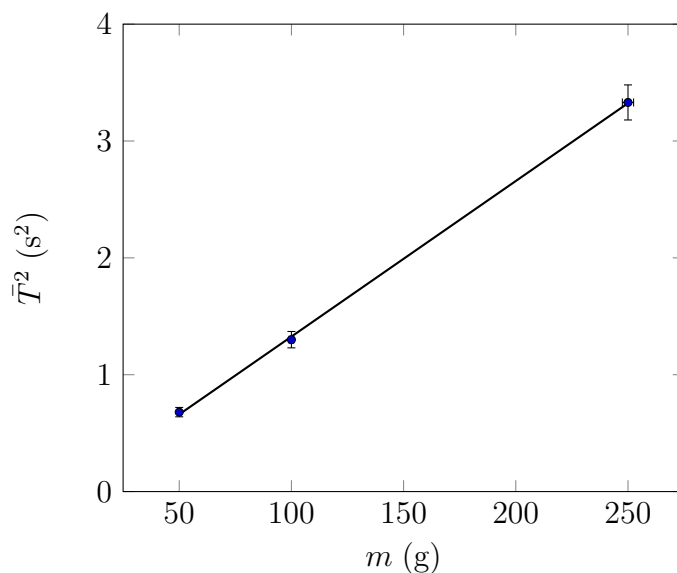
Solução A.3

Gráfico 1: Período para cada massa

$$Y = A + BX$$

$$A = -(5,3846 \pm 36) \times 10^{-3}$$

$$B = (1,332 \pm 0,023) \times 10^{-2}$$

$$r = 0,9999$$

Isolando $T^2(m)$ do item **A.1**, tem-se:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m$$

Comparando a equação anterior com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$\bar{T}^2 \rightarrow Y ; m \rightarrow X ; \frac{4\pi^2}{k} \rightarrow B$$

Assim, isolando o k do B e calculando sua incerteza associada:

$$k = \frac{4\pi^2}{B} ; \sigma_k = \frac{4\pi^2}{B^2} \sigma_B$$

Portanto, substituindo os valores:

$$k_1 = (29,6 \pm 0,5) \cdot 10^2 \text{ g/s}^2$$

Convertendo as unidades para o S.I.:

$$k_1 = (29,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-1} \text{ N/m}$$

Solução A.4

A fim de poupar tempo com medidas de tempo, e, ao mesmo tempo, evitar perda excessiva de precisão, foi usada uma massa de 100 g.

Tabela 1: Períodos de oscilação para cada nível.

Nível	$(10\Delta T_1 \pm 0,20) \text{ s}$	$(10\Delta T_2 \pm 0,20) \text{ s}$	$(10\Delta T_3 \pm 0,20) \text{ s}$
1	11,42	11,34	11,38
2	9,85	9,85	9,88
3	9,02	8,82	8,77
4	8,13	8,10	8,02
5	7,50	7,53	7,53
6	7,00	7,13	6,98
7	6,67	6,52	6,58
8	6,25	6,23	6,25
9	5,93	6,03	6,00
10	5,80	5,79	5,87

Tabela 2: Períodos médios para cada nível.

Nível	$\bar{T} \text{ (s)}$	$\bar{T}^2 \text{ (s}^2\text{)}$
1	$1,138 \pm 0,021$	$1,30 \pm 0,05$
2	$0,986 \pm 0,022$	$0,97 \pm 0,04$
3	$0,89 \pm 0,08$	$0,79 \pm 0,14$
4	$0,81 \pm 0,04$	$0,65 \pm 0,06$
5	$0,754 \pm 0,022$	$0,57 \pm 0,03$
6	$0,70 \pm 0,05$	$0,50 \pm 0,07$
7	$0,66 \pm 0,07$	$0,43 \pm 0,09$
8	$0,624 \pm 0,021$	$0,39 \pm 0,03$
9	$0,60 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,04$
10	$0,58 \pm 0,03$	$0,34 \pm 0,04$

Solução A.5

Aqui, a fim de poupar tempo e evitar subestimar a incerteza, como no caso da regressão, usaremos os dados de $\bar{T}^2$ para calcular diretamente k , lembrando que o erro relativo se preserva:

Tabela 1: Constantes elásticas

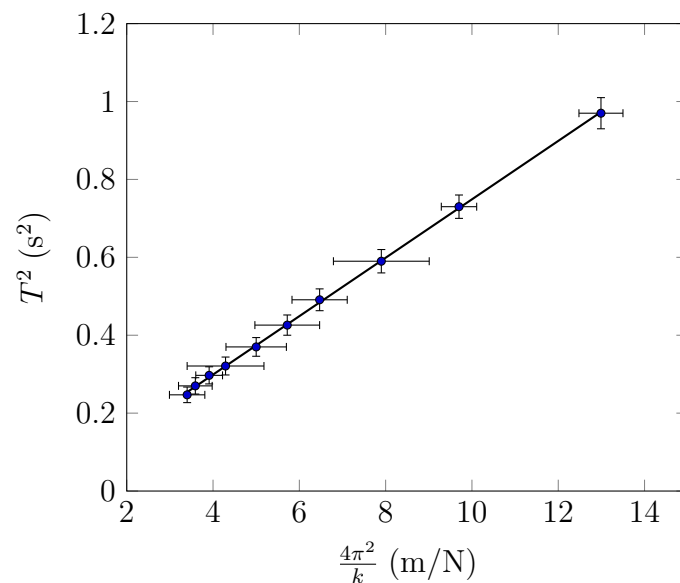
Nível	$(k \pm \sigma_k)$ N/m
1	$3,04 \pm 0,12$
2	$4,07 \pm 0,17$
3	$5,0 \pm 0,7$
4	$6,1 \pm 0,6$
5	$7,0 \pm 0,4$
6	$7,90 \pm 1,1$
7	$9,2 \pm 1,9$
8	$10,1 \pm 0,8$
9	$11,0 \pm 1,2$
10	$11,6 \pm 1,4$

Parte B: Determinação das massas**Solução B.1**Tabela 1: Valores de $\frac{4\pi^2}{k}$

Nível	$\left(\frac{4\pi^2}{k} \pm \sigma\right)$ m/N
1	$12,99 \pm 0,51$
2	$9,70 \pm 0,41$
3	$7,90 \pm 1,11$
4	$6,47 \pm 0,64$
5	$5,72 \pm 0,75$
6	$5,00 \pm 0,70$
7	$4,29 \pm 0,89$
8	$3,91 \pm 0,31$
9	$3,59 \pm 0,39$
10	$3,40 \pm 0,41$

Tabela 2: Períodos médios para cada nível.

Nível	$\bar{T}$ (s)	$\bar{T}^2$ (s ²)
1	$0,987 \pm 0,020$	$0,97 \pm 0,04$
2	$0,855 \pm 0,020$	$0,73 \pm 0,03$
3	$0,765 \pm 0,020$	$0,59 \pm 0,03$
4	$0,701 \pm 0,020$	$0,491 \pm 0,028$
5	$0,653 \pm 0,020$	$0,426 \pm 0,026$
6	$0,608 \pm 0,020$	$0,370 \pm 0,024$
7	$0,567 \pm 0,020$	$0,321 \pm 0,023$
8	$0,545 \pm 0,020$	$0,297 \pm 0,022$
9	$0,520 \pm 0,020$	$0,270 \pm 0,021$
10	$0,497 \pm 0,020$	$0,247 \pm 0,020$

Solução B.2Gráfico 2: Período ao quadrado em função de $\frac{4\pi^2}{k}$

$$Y = A + BX$$

$$A = -(1,0 \pm 3,4) \times 10^{-3}$$

$$B = (7,50 \pm 0,05) \times 10^{-2}$$

$$r = 0,9998$$

Usando a igualdade do item A.3, nosso coeficiente angular agora é igual à massa

em kg:

$$m_1 = (7,50 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

Solução B.3

Tabela 1: Períodos médios e quadrados para a massa 2

Nível	$\bar{T}$ (s)	$\bar{T}^2$ (s ²)
1	$1,393 \pm 0,020$	$1,940 \pm 0,056$
2	$1,215 \pm 0,020$	$1,476 \pm 0,049$
3	$1,090 \pm 0,020$	$1,188 \pm 0,044$
4	$0,992 \pm 0,020$	$0,984 \pm 0,040$
5	$0,917 \pm 0,020$	$0,841 \pm 0,037$
6	$0,857 \pm 0,020$	$0,734 \pm 0,034$
7	$0,808 \pm 0,020$	$0,653 \pm 0,032$
8	$0,765 \pm 0,020$	$0,585 \pm 0,031$
9	$0,723 \pm 0,020$	$0,523 \pm 0,029$
10	$0,698 \pm 0,020$	$0,487 \pm 0,028$

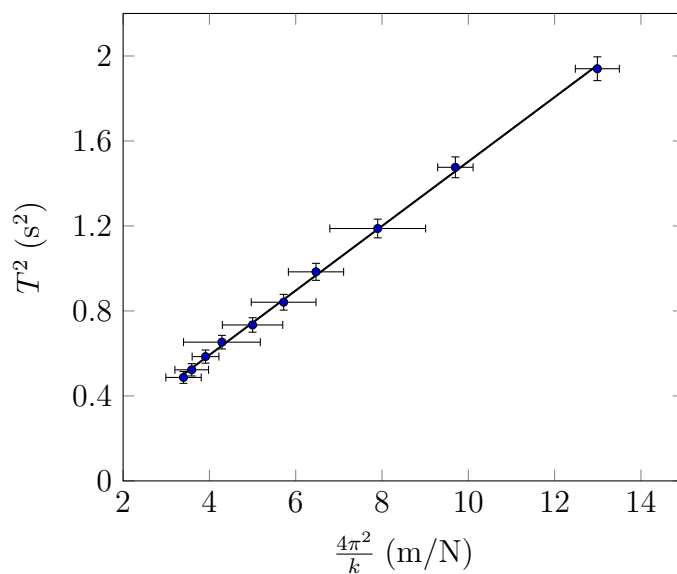
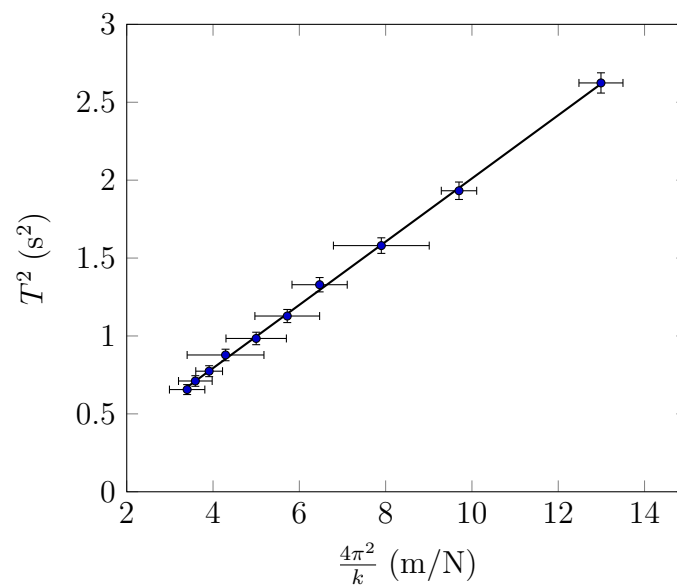


Gráfico 3: Período ao quadrado em função de $\frac{4\pi^2}{k}$ (Massa Desconhecida)

$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 A &= -(1,4 \pm 1,1) \times 10^{-2} \\
 B &= (1,517 \pm 0,016) \times 10^{-1} \\
 r &= 0,9996
 \end{aligned}$$

Tabela 2: Períodos médios e quadrados para a massa 3

Nível	$\bar{T}$ (s)	$\bar{T}^2$ (s ²)
1	$1,620 \pm 0,020$	$2,624 \pm 0,065$
2	$1,390 \pm 0,020$	$1,932 \pm 0,056$
3	$1,257 \pm 0,020$	$1,580 \pm 0,050$
4	$1,153 \pm 0,020$	$1,329 \pm 0,046$
5	$1,062 \pm 0,020$	$1,128 \pm 0,042$
6	$0,992 \pm 0,020$	$0,984 \pm 0,040$
7	$0,937 \pm 0,020$	$0,878 \pm 0,037$
8	$0,880 \pm 0,020$	$0,774 \pm 0,035$
9	$0,843 \pm 0,020$	$0,711 \pm 0,034$
10	$0,810 \pm 0,020$	$0,656 \pm 0,032$

Gráfico 4: Período ao quadrado em função de $\frac{4\pi^2}{k}$ (Terceira Massa)

$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 A &= -(1,8 \pm 1,4) \times 10^{-2} \\
 B &= (2,029 \pm 0,020) \times 10^{-2} \\
 r &= 0,9996
 \end{aligned}$$

$$m_2 = (1,517 \pm 0,016) \cdot 10^{-1} \text{ kg}$$

$$m_3 = (2,029 \pm 0,020) \cdot 10^{-1} \text{ kg}$$

Parte C: Determinação das gravidades dos planetas

Solução C.1

Perceba que a posição de equilíbrio está ligada à gravidade, massa e à constante elástica, por meio da relação deduzida no primeiro item:

$$\Delta x = \frac{mg}{k}$$

A melhor estratégia, sabendo que as incertezas das massas são menores, é fazer uma regressão com k constante e igualar o coeficiente a $\frac{g}{k}$, aqui, usaremos o valor para o primeiro nível k do A.3; comparando com a equação da reta:

$$\Delta x \rightarrow Y ; m \rightarrow X ; \frac{g}{k} \rightarrow B$$

$$g = kB ; \sigma_g = g \sqrt{\frac{\sigma_k^2}{k^2} + \frac{\sigma_B^2}{B^2}}$$

Solução C.2

Tabela 5: Deslocamento da mola (Nível 1) em função da massa suspensa.

Medição	Massa m (kg)	Deslocamento Δx (m)
1	$0,0500 \pm 0,0005$	$0,164 \pm 0,005$
2	$0,0750 \pm 0,0008$	$0,248 \pm 0,005$
3	$0,1000 \pm 0,0010$	$0,329 \pm 0,005$
4	$0,1517 \pm 0,0016$	$0,490 \pm 0,005$
5	$0,2029 \pm 0,0020$	$0,652 \pm 0,005$
6	$0,2500 \pm 0,0025$	$0,817 \pm 0,005$

$$Y = A + BX$$

$$A = -(3,3 \pm 4,5) \times 10^{-3}$$

$$B = (3,23 \pm 0,03)$$

$$r = 0,9998$$

$$g = kB = 9,82 \text{ m/s}^2 ; \sigma_g = 9,82 \sqrt{\frac{0,12^2}{3,04} + \frac{0,03^2}{3,23}} = 0,4 \text{ m/s}^2$$

$$g_t = (9,8 \pm 0,4) \text{ m/s}^2$$

Solução C.3 Para a gravidade de Júpiter, o nível de mola deve ser aumentado para o nível 5 para melhorar o range de medidas:

Tabela 6: Deslocamento da mola (Nível 5) em função da massa suspensa em Júpiter.

Medição	Massa m (kg)	Deslocamento Δx (m)
1	$0,0500 \pm 0,0005$	$0,179 \pm 0,005$
2	$0,0750 \pm 0,0008$	$0,267 \pm 0,005$
3	$0,1000 \pm 0,0010$	$0,356 \pm 0,005$
4	$0,1517 \pm 0,0016$	$0,532 \pm 0,005$
5	$0,2029 \pm 0,0020$	$0,710 \pm 0,005$
6	$0,2500 \pm 0,0025$	$0,886 \pm 0,005$

$$Y = A + BX$$

$$A = (3,1 \pm 3,7) \times 10^{-3}$$

$$B = (3,512 \pm 0,025)$$

$$r = 0,9999$$

$$g_J = k_5 B = 24,59 \text{ m/s}^2 ; \sigma_g = 24,59 \sqrt{\frac{0,025^2}{3,512} + \frac{0,3^2}{7,0}} = 1,1 \text{ m/s}^2$$

$$g_J = (24,6 \pm 1,1) \text{ m/s}^2$$

Tabela 7: Deslocamento da mola (Nível 1) em função da massa suspensa na Lua.

Medição	Massa m (kg)	Deslocamento Δx (m)
1	$0,0500 \pm 0,0005$	$0,028 \pm 0,005$
2	$0,0750 \pm 0,0008$	$0,040 \pm 0,005$
3	$0,1000 \pm 0,0010$	$0,054 \pm 0,005$
4	$0,1517 \pm 0,0015$	$0,080 \pm 0,005$
5	$0,2029 \pm 0,0020$	$0,107 \pm 0,005$
6	$0,2500 \pm 0,0025$	$0,135 \pm 0,005$

$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 A &= (1,3 \pm 1,1) \times 10^{-3} \\
 B &= (0,532 \pm 0,007) \\
 r &= 0,9996
 \end{aligned}$$

$$g_L = k_1 B = 1,616 \text{ m/s}^2 ; \sigma_g = 1,616 \sqrt{\frac{0,007^2}{0,532} + \frac{0,12^2}{3,04}} = 0,07 \text{ m/s}^2$$

$$g_L = (1,62 \pm 0,07) \text{ m/s}^2$$

Tabela 8: Deslocamento da mola 2 em função da massa suspensa no Planeta X.

Medição	Massa m (kg)	Deslocamento Δx (m)
1	$0,0500 \pm 0,0005$	$0,179 \pm 0,005$
2	$0,0750 \pm 0,0008$	$0,267 \pm 0,005$
3	$0,1000 \pm 0,0010$	$0,356 \pm 0,005$
4	$0,1517 \pm 0,0015$	$0,533 \pm 0,005$
5	$0,2029 \pm 0,0020$	$0,710 \pm 0,005$
6	$0,2500 \pm 0,0025$	$0,888 \pm 0,005$

$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 A &= (3,0 \pm 4,1) \times 10^{-3} \\
 B &= (3,520 \pm 0,027) \\
 r &= 0,9999
 \end{aligned}$$

$$g_X = k_2 B = 14,33 \text{ m/s}^2 ; \sigma_g = 14,33 \sqrt{\frac{0,027^2}{3,520} + \frac{0,17^2}{4,07}} = 0,61 \text{ m/s}^2$$

$$g_X = (14,3 \pm 0,6) \text{ m/s}^2$$

6.3.3 Pêndulo Simples

Parte A: Cálculo de vários períodos com o mesmo comprimento.

Solução A.1 Para a régua, as marcações são graduadas a cada centímetro, então, a incerteza deve ser metade da graduação ($\sigma_L = 0,5 \text{ cm}$)

Realizando uma medida direta com a régua, temos para essa solução o seguinte comprimento:

$$L = (30,0 \pm 0,5) \text{ cm}$$

Solução A.2 Realizando as medidas dos períodos, considerando incerteza $\sigma_{10T} = 0,2 \text{ s}$ devido ao tempo de reação, chegamos na seguinte tabela:

Tabela 01: Períodos de oscilação para $L = 30 \text{ cm}$

$(10T \pm 0,20) \text{ (s)}$	$(T \pm 0,020) \text{ (s)}$
10,94	1,094
11,02	1,102
10,98	1,098
11,00	1,100
11,01	1,101
10,92	1,092
10,93	1,093

Solução A.3 Utilizando o modo SD da calculadora, encontramos que o período médio será:

$$\langle T \rangle = 1,0971 \text{ s}$$

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\sigma_{\text{reação}}^2 + \frac{S_x^2}{N}} = \sqrt{0,02^2 + 0,00155^2} \approx 0,020 \text{ s}$$

$$\bar{T} = 1,097 \pm 0,020 \text{ s}$$

Parte B: Cálculo de períodos com diferentes comprimentos.

Solução B.1

Realizando as medidas no simulador, obtém-se a seguinte tabela:

Tabela 02: Período de oscilações para diferentes comprimentos

L (cm)	10T (s)	10T (s)	10T (s)	10T (s)	10T (s)
10,0	6,31	6,41	6,37	6,33	6,32
15,0	7,79	7,75	7,74	7,75	7,78
20,0	8,98	8,99	9,01	8,97	8,96
25,0	10,03	10,01	10,08	10,03	10,04
30,0	10,94	11,02	10,98	10,93	11,01
35,0	11,86	11,87	11,88	11,90	11,84
40,0	12,68	12,69	12,66	12,71	12,72

OBS: Lembre de colocar a incerteza experimental na sua tabela. A incerteza não foi colocada aqui devido à formatação da página, mas deve-se utilizar a incerteza de $\sigma_{10T} = 0,20 \text{ s}$ e $\sigma_L = 0,05 \text{ cm}$

Solução B.2

Tabela 03: Período médio de oscilações para diferentes comprimentos

$(L \pm 0,05) \text{ cm}$	$(\bar{T} \pm 0,020) \text{ s}$
10,0	0,635
15,0	0,776
20,0	0,898
25,0	1,004
30,0	1,098
35,0	1,187
40,0	1,269

OBS 2: Como a incerteza do tempo foi propagada, lembre-se do uso da regra do 1 ou 2 para os algarismos significativos.

Solução B.3 O gráfico não é uma reta, como esperado pela fórmula de período fornecida.

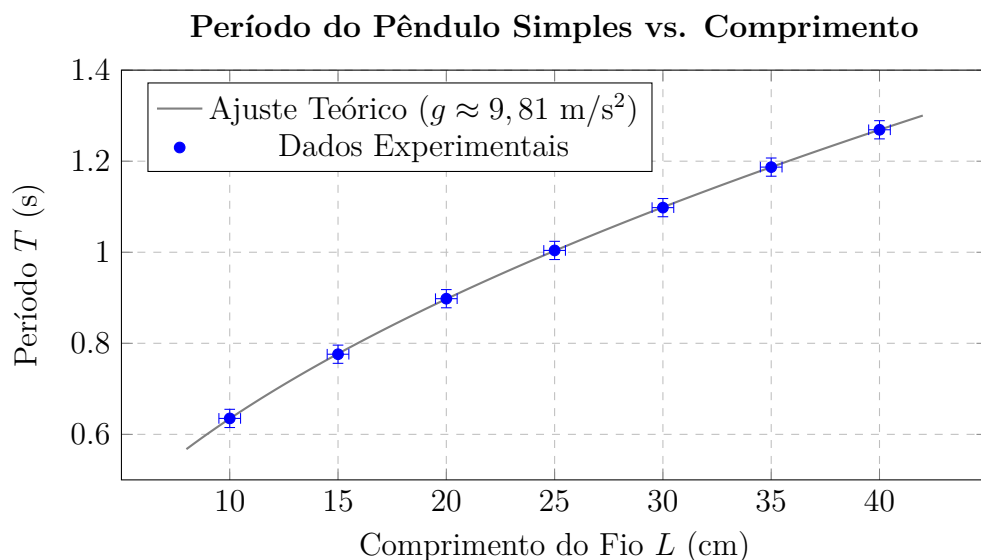


Figura 6.1: Gráfico do período T em função do comprimento do fio L .

Solução B.4 Aqui temos duas linearizações possíveis:

Podemos elevar ambos os lados ao quadrado e chegaremos em $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$ e fazemos $y = T^2$ e $x = L$

Ou podemos usar a fórmula original com $y = T$ e $x = \sqrt{L}$

Porém, nessa solução, vamos utilizar a primeira forma. Para poder plotar o gráfico milimetrado, devemos primeiro fazer uma nova tabela com a função linearizada.

Tabela 04: Dados linearizados dos períodos para cada comprimento. (atualizar tabela)

$(L \pm 0,5) \text{ cm}$	$\bar{T}^2 \text{ (s}^2\text{)}$
10,0	$0,403 \pm 0,025$
15,0	$0,60 \pm 0,03$
20,0	$0,81 \pm 0,04$
25,0	$1,01 \pm 0,04$
30,0	$1,21 \pm 0,04$
35,0	$1,41 \pm 0,05$
40,0	$1,61 \pm 0,05$

Veja que foi necessário a propagação da incerteza do período e, para isso, utilizamos

a seguinte equação:

$$\sigma_{\bar{T}^2} = 2\bar{T}\sigma_{\bar{T}}$$

Agora, podemos finalmente plotar o gráfico.

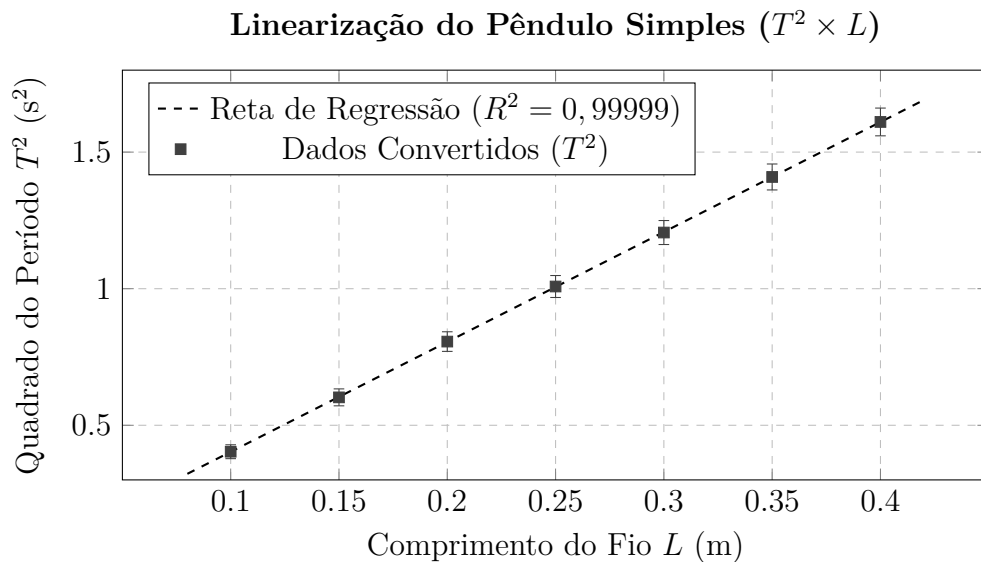


Figura 6.2: Linearização dos dados experimentais para determinação de g .

Solução B.5 A regressão linear na calculadora nos dá:

$$A = (0,0003 \pm 0,0016) \text{ s}^2 ; B = (4,024 \pm 0,006) \text{ s}^2/\text{m} ; r^2 = 0,99999$$

Da fórmula teórica:

$$g = \frac{4\pi^2}{B} = 9,8097 ; \sigma_g = g \frac{\sigma_B}{B} = 0,014$$

Por fim, representando com a quantidade correta de algarismos significativos:

$$g = (9,810 \pm 0,014) \text{ m/s}^2$$

Solução B.6 O valor é bem compatível com a gravidade local. Caso seu valor não tenha sido tão próximo, não se preocupe, os dados foram tirados do site do PHET, sendo estes muito mais precisos do que dados tirados fora de uma simulação.

6.3.4 Pêndulo físico

Parte A: Determinação experimental do momento de inércia I **Solução A.1**

Utilizando a régua para medir o comprimento total L , podemos mudar a posição da régua duas vezes, obtendo que o comprimento $L = 99,86$ cm.

Para a incerteza, podemos estimar ela como sendo 0,1 cm (o mais correto seria estimar como sendo 0,05 cm. Entretanto, pela má qualidade da imagem e uma distância aparente pequena entre as medidas, podemos estimar uma incerteza maior)

A incerteza total deve ser, portanto, $\sigma_{total} = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} \approx 0,14$ cm

Logo, o comprimento total é:

$$L = (99,86 \pm 0,14) \text{ cm}$$

Para medir a distância D , podemos medir a distância entre 8 pontos de apoio, obtendo uma distância $D' = 44,40$ cm. Logo, a distância D será $\frac{44,40}{8} = 5,55$ cm

E a incerteza deveria ser $\frac{0,10}{8} = 0,0125$ cm

$$D = (5,55 \pm 0,01) \text{ cm}$$

A relação entre d e D deve ser:

$$d = D \cdot n$$

Solução A.2

Temos que o período do pêndulo físico é dada por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{mgd}$$

Logo, o momento de inércia I é:

$$I = \frac{T^2 m g d}{4\pi^2}$$

Solução A.3

Medindo o período para cada distância, obtemos a seguinte tabela. Para obter os valores do período, podemos realizar a medição de 10 oscilações, por exemplo. Para estimar a incerteza da distância, podemos utilizar a fórmula encontrada na A.1 (nesse caso, podemos apenas multiplicar a incerteza, pois as incertezas são dependentes). Já para estimar a incerteza do momento de inércia, devemos usar a fórmula da incerteza da potência.

$$x = k a^n b^m$$

$$\sigma_x = x \sqrt{\left(n \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(m \frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

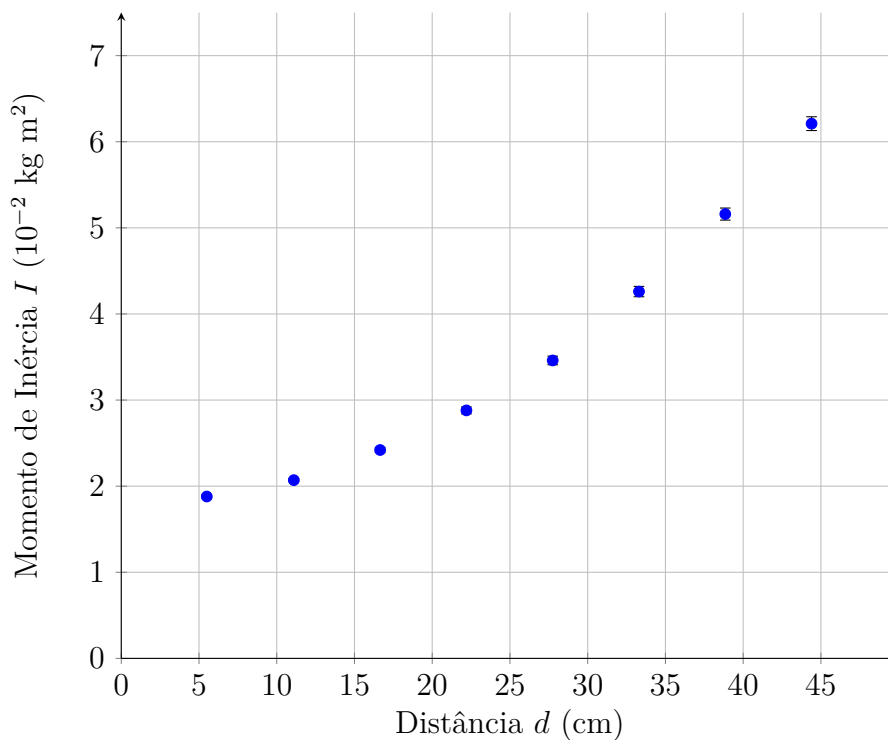
Logo, a incerteza do momento de inércia é dada por:

$$\sigma_I = I \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

Portanto, sua tabela deve parecer algo como:

Tabela 1: $d \times T \times I$

d (m)	$(T \pm 0,01)$ (s)	I (kg m ²)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	1,60	$(6,21 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	1,56	$(5,16 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	1,53	$(4,26 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	1,51	$(3,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	1,54	$(2,88 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	1,63	$(2,42 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	1,85	$(2,07 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	2,50	$(1,88 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$

Solução A.4**Gráfico 1: $I \times d$** **Solução A.5**

Sendo

$$I = \frac{L^2}{k_1} + k_2 d^2,$$

podemos definir uma nova variável $x \equiv d^2$, de modo que a equação se reescreve como

$$I = \frac{L^2}{k_1} + k_2 x.$$

Note que $\frac{L^2}{k_1}$ é constante, portanto I é uma função linear de x , da forma

$$I = a + bx,$$

com $a \equiv \frac{L^2}{k_1}$ e $b \equiv k_2$.

Solução A.6

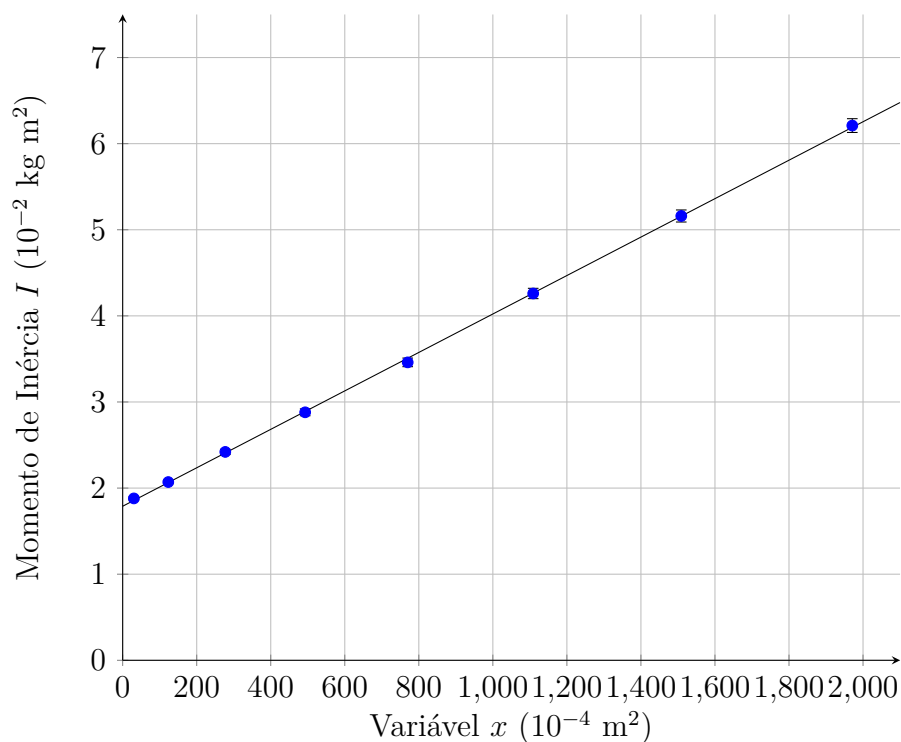
Criando a variável $x \equiv d^2$

Para calcular a incerteza de x , devemos usar a fórmula da potência.

$$\sigma_x = 2 \frac{\sigma_d}{d} x$$

Tabela 2: $d \times x \times I$

d (m)	x (m ²)	I (kg m ²)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	$(1971 \pm 7) \cdot 10^{-4}$	$(6,21 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	$(1509 \pm 5) \cdot 10^{-4}$	$(5,16 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	$(1109 \pm 4) \cdot 10^{-4}$	$(4,26 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	$(770 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	$(3,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	$(493 \pm 2) \cdot 10^{-4}$	$(2,88 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$(277,2 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$(2,42 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	$(123,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$	$(2,07 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	$(30,25 \pm 0,11) \cdot 10^{-4}$	$(1,88 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$

Solução A.7**Gráfico 1: $I \times d$** 

Realizando a regressão linear, obtemos que $y = 0,002232588x + 1,78918$

Do item **A.5**, tem-se:

$$I = \frac{L^2}{k_1} + k_2x,$$

Comparando a equação anterior com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$I \rightarrow y;$$

$$x \rightarrow x;$$

$$\frac{L^2}{k_1} \rightarrow 1,78918 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2;$$

$$k_2 \rightarrow 0,002232588 \cdot 10^2 \text{ kg}$$

Assim, calculando o k_2 e sua incerteza associada (coeficiente angular):

$$k_2 = 0,22325 \text{ kg};$$

$$\sigma_{k_2} = |k_2| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}} = 0,0013 \text{ kg}$$

Agora calculando o valor de k_1 e sua incerteza:

$$k_1 = \frac{L^2}{1,78918 \cdot 10^{-2}} = 55,735 \text{ kg}^{-1};$$

$$\sigma_{L^2/k_1} = \sigma_{k_2} \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = 1,352 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Utilizando a fórmula da propagação de incertezas para potência.

$$x = ka^n b^m$$

$$\sigma_x = x \sqrt{\left(n \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(m \frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

$$\sigma_{L^2/k_1} = \frac{L^2}{k_1} \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left((-1) \frac{\sigma_{k_1}}{k_1}\right)^2}$$

$$\sigma_{k_1} = k_1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{L^2/k_1}}{L^2/k_1}\right)^2 - \left(2 \frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$\sigma_{k_1} = 0,3822 \text{ kg}^{-1}$$

Portanto, substituindo os valores:

$$k_1 = (55,7 \pm 0,4) \text{ kg}^{-1}$$

$$k_2 = (0,2233 \pm 0,0013) \text{ kg}$$

Parte B: Diferentes massas

Solução B.1

Repetindo os mesmos passos, obtemos as seguintes tabelas:

Tabela 3.1: $d_2 \times T_2 \times I_2$

d_2 (m)	$(T_2 \pm 0,01)$ (s)	I_2 (kg m ²)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	1,59	$(3,07 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	1,55	$(2,55 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	1,53	$(2,13 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	1,52	$(1,75 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	1,54	$(1,438 \pm 0,019) \cdot 10^{-2}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	1,64	$(1,223 \pm 0,015) \cdot 10^{-2}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	1,84	$(1,026 \pm 0,011) \cdot 10^{-2}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	2,50	$(0,939 \pm 0,008) \cdot 10^{-2}$

Tabela 3.2: $d_3 \times T_3 \times I_3$

d_3 (m)	$(T_3 \pm 0,01)$ (s)	I_3 (kg m ²)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	1,59	$(9,20 \pm 0,12) \cdot 10^{-2}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	1,56	$(7,74 \pm 0,10) \cdot 10^{-2}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	1,53	$(6,39 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	1,52	$(5,25 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	1,55	$(4,37 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	1,64	$(3,67 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	1,86	$(3,15 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	2,51	$(2,84 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$

Solução B.2

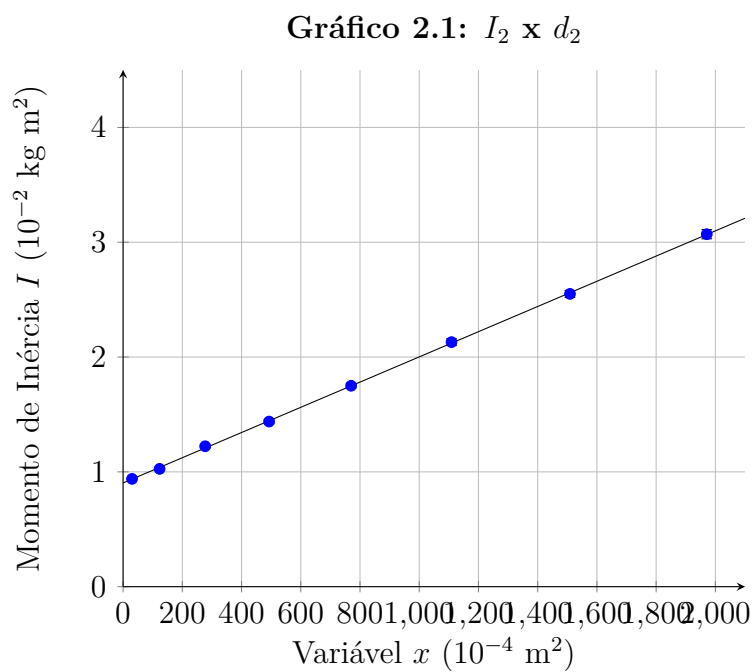
Repetindo os mesmos passos, obtemos as seguintes tabelas:

Tabela 3.1: $d_2 \times x_2 \times I_2$

d_2 (m)	x_2 (m ²)	I_2 (kg m ²)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	$(1971 \pm 7) \cdot 10^{-4}$	$(3,07 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	$(1509 \pm 5) \cdot 10^{-4}$	$(2,55 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	$(1109 \pm 4) \cdot 10^{-4}$	$(2,13 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	$(770 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	$(1,75 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	$(493 \pm 2) \cdot 10^{-4}$	$(1,438 \pm 0,019) \cdot 10^{-2}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$(277,2 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$(1,223 \pm 0,015) \cdot 10^{-2}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	$(123,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$	$(1,026 \pm 0,011) \cdot 10^{-2}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	$(30,25 \pm 0,11) \cdot 10^{-4}$	$(0,939 \pm 0,008) \cdot 10^{-2}$

Tabela 3.2: $d_3 \times x_3 \times I_3$

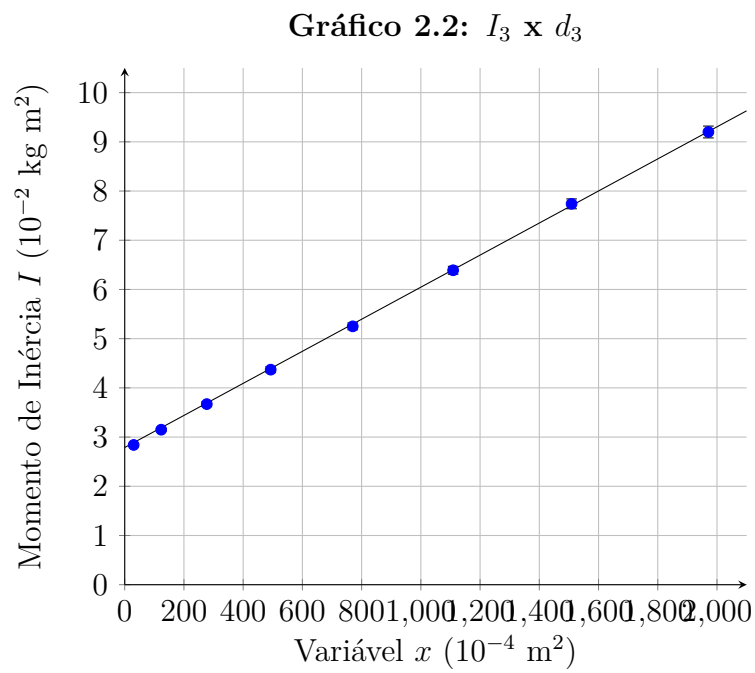
d_3 (m)	x_3 (m ²)	I_3 (kg m ²)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	$(1971 \pm 7) \cdot 10^{-4}$	$(9,20 \pm 0,12) \cdot 10^{-2}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	$(1509 \pm 5) \cdot 10^{-4}$	$(7,74 \pm 0,10) \cdot 10^{-2}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	$(1109 \pm 4) \cdot 10^{-4}$	$(6,39 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	$(770 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	$(5,25 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	$(493 \pm 2) \cdot 10^{-4}$	$(4,37 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$(277,2 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$(3,67 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	$(123,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$	$(3,15 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	$(30,25 \pm 0,11) \cdot 10^{-4}$	$(2,84 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$



Pela regressão linear, obtemos que $y = 0.0010977x + 0.90365$. Logo,

$$k_{1_2} = (110,4 \pm 0,6) \text{ kg}^{-1}$$

$$k_{2_2} = (0,1098 \pm 0,0006) \text{ kg}$$



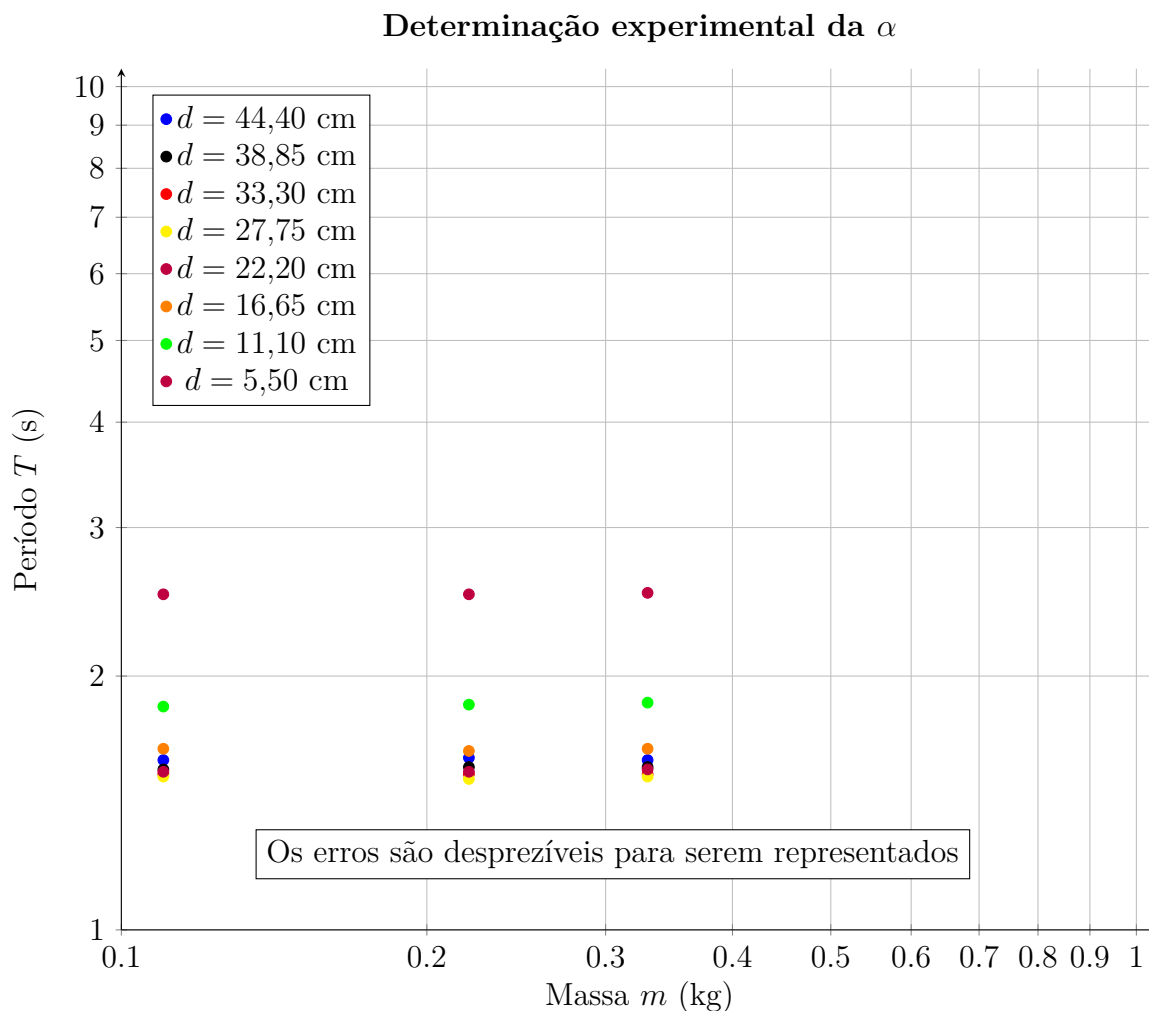
Pela regressão linear, obtemos que $y = 0.0032582x + 2.78818$. Logo,

$$k_{13} = (35,8 \pm 0,5) \text{ kg}^{-1}$$

$$k_{23} = (0,326 \pm 0,004) \text{ kg}$$

Solução B.3

Utilizando o papel dilog, podemos obter o seguinte gráfico:



A partir do gráfico, é possível perceber que para uma determinada distância, o comportamento do gráfico é constante de inclinação quase nula. Logo, podemos concluir que $\alpha = 0$ e, portanto, o período não depende da massa.

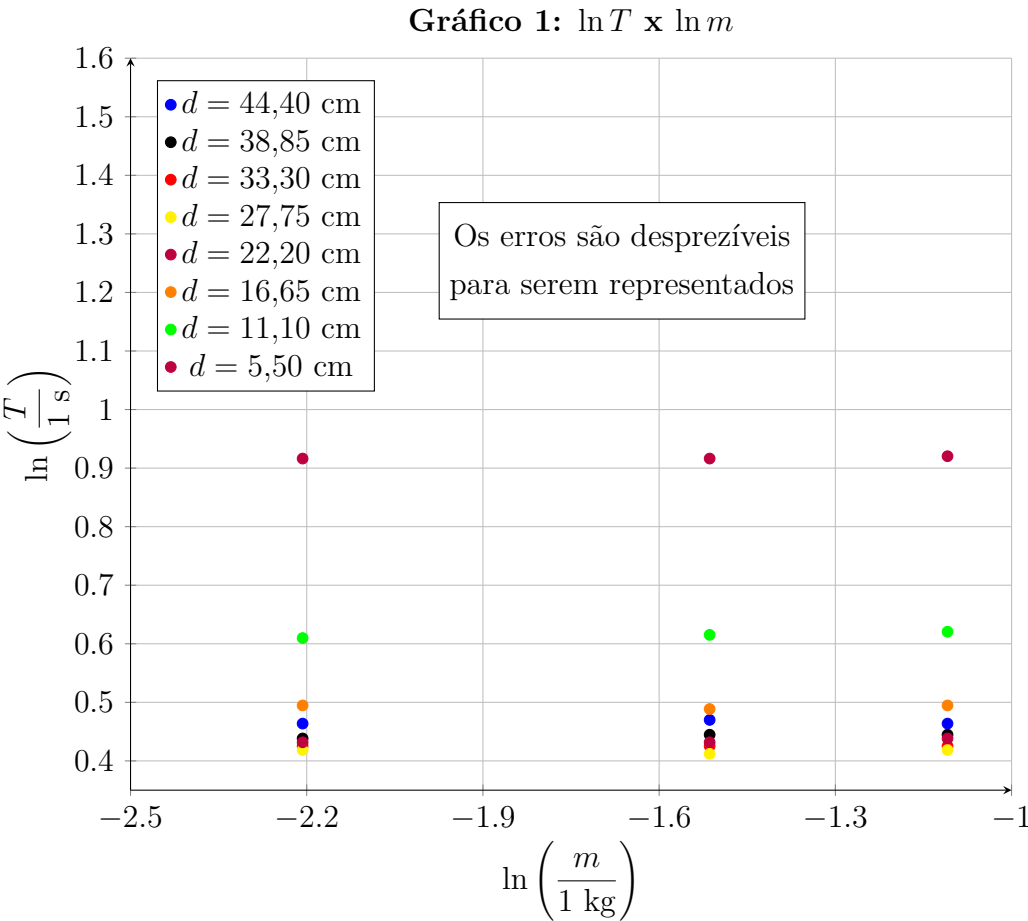
Podemos aplicar o método de linearização para determinar o valor de α . Partimos da relação $T = C \cdot m^\alpha$, onde C é uma constante. Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação, obtemos:

$$\ln T = \ln C + \alpha \ln m.$$

Com isso, definimos as variáveis $y = \ln T$ e $x = \ln m$, o que nos permite reescrever a equação como:

$$y = \ln C + \alpha x.$$

Trata-se de uma equação da forma $y = a + bx$, ou seja, uma equação linear. Assim, ao construirmos um gráfico de $\ln T$ em função de $\ln m$, a inclinação da reta nos fornece o valor de α .



Realizando a regressão linear das as distâncias, obtemos os seguintes valores para o coeficiente angular (α):

Tabela 5: $d \times \alpha$

$d_3 \text{ (m)}$	α
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	$9,74 \cdot 10^{-4}$
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	$6,22 \cdot 10^{-3}$
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	0
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	$-1,03 \cdot 10^{-3}$
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	$5,26 \cdot 10^{-3}$
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$-9,50 \cdot 10^{-4}$
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	$9,62 \cdot 10^{-3}$
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	$3,24 \cdot 10^{-4}$

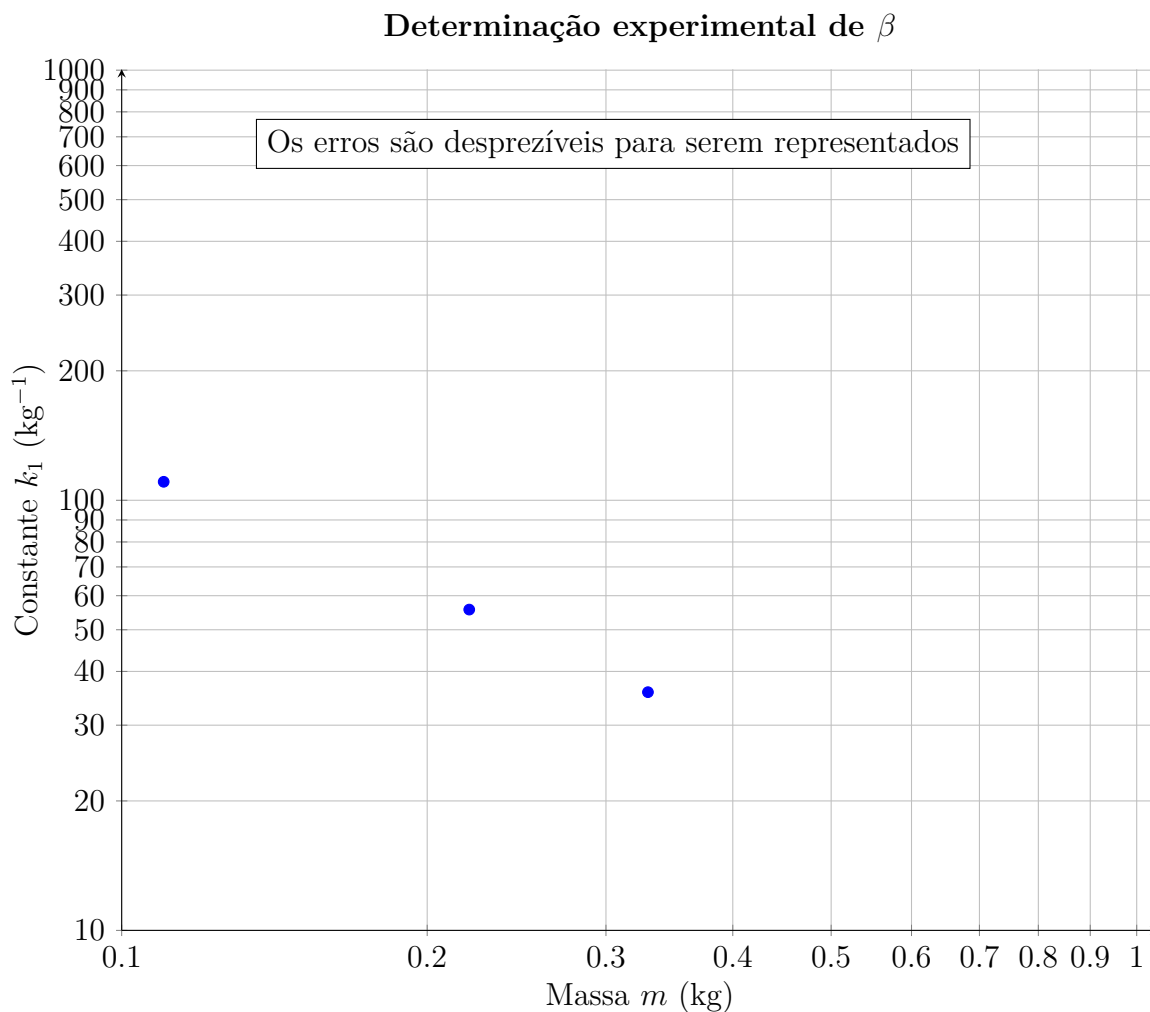
Tirando a média e erro aleatório de α :

$$\bar{\alpha} = (1,9 \pm 1,2) \cdot 10^{-3}$$

Como α deve ser um número inteiro, temos que $\alpha = 0$. Assim como obtido no outro método.

Solução B.4

Utilizando o papel dilog, podemos obter o seguinte gráfico:



A partir do gráfico, podemos criar uma reta média (aproximada), obtendo a reta vermelha. A partir da reta média, podemos obter o valor da inclinação, que será igual a β . Como se trata de um papel dilog, temos que $\beta = \frac{\log k_{1_1} - \log k_{1_2}}{\log m_1 - \log m_2} = \frac{\log 40 - \log 60}{\log 0,3 - \log 0,2} = -1$

Podemos aplicar o método de linearização para determinar o valor de β . Partimos da relação $k_1 = C_1 \cdot m^\beta$, onde C_1 é uma constante. Aplicando logaritmo natural em

ambos os lados da equação, obtemos:

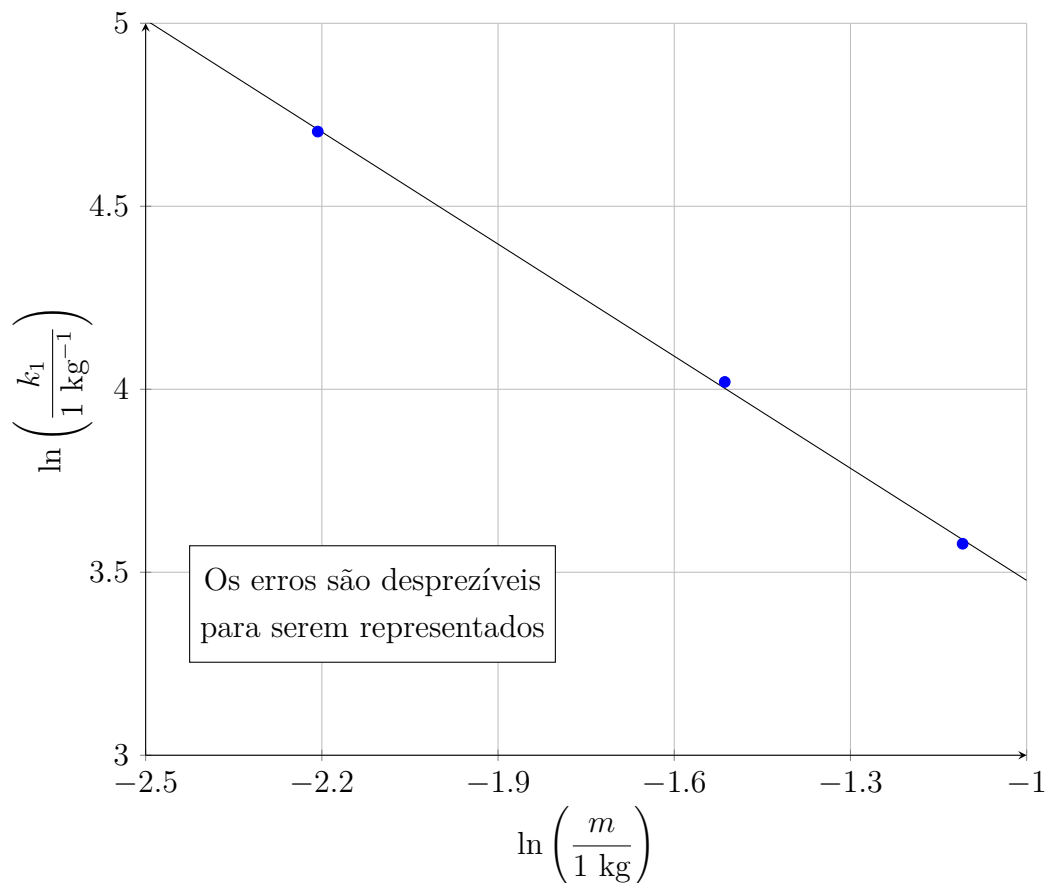
$$\ln k_1 = \ln C_1 + \beta \ln m.$$

Com isso, definimos as variáveis $y = \ln k_1$ e $x = \ln m$, o que nos permite reescrever a equação como:

$$y = \ln C_1 + \beta x.$$

Trata-se de uma equação da forma $y = a + bx$, ou seja, uma equação linear. Assim, ao construirmos um gráfico de $\ln k_1$ em função de $\ln m$, a inclinação da reta nos fornece o valor de β .

Gráfico 3: $\ln k_1$ x $\ln m$



Realizando a regressão linear, obtemos que $y = -1,0210x + 2,4568$

Logo, $\beta = -1,0210$

Calculando a incerteza, $\sigma_\beta = 0,027$

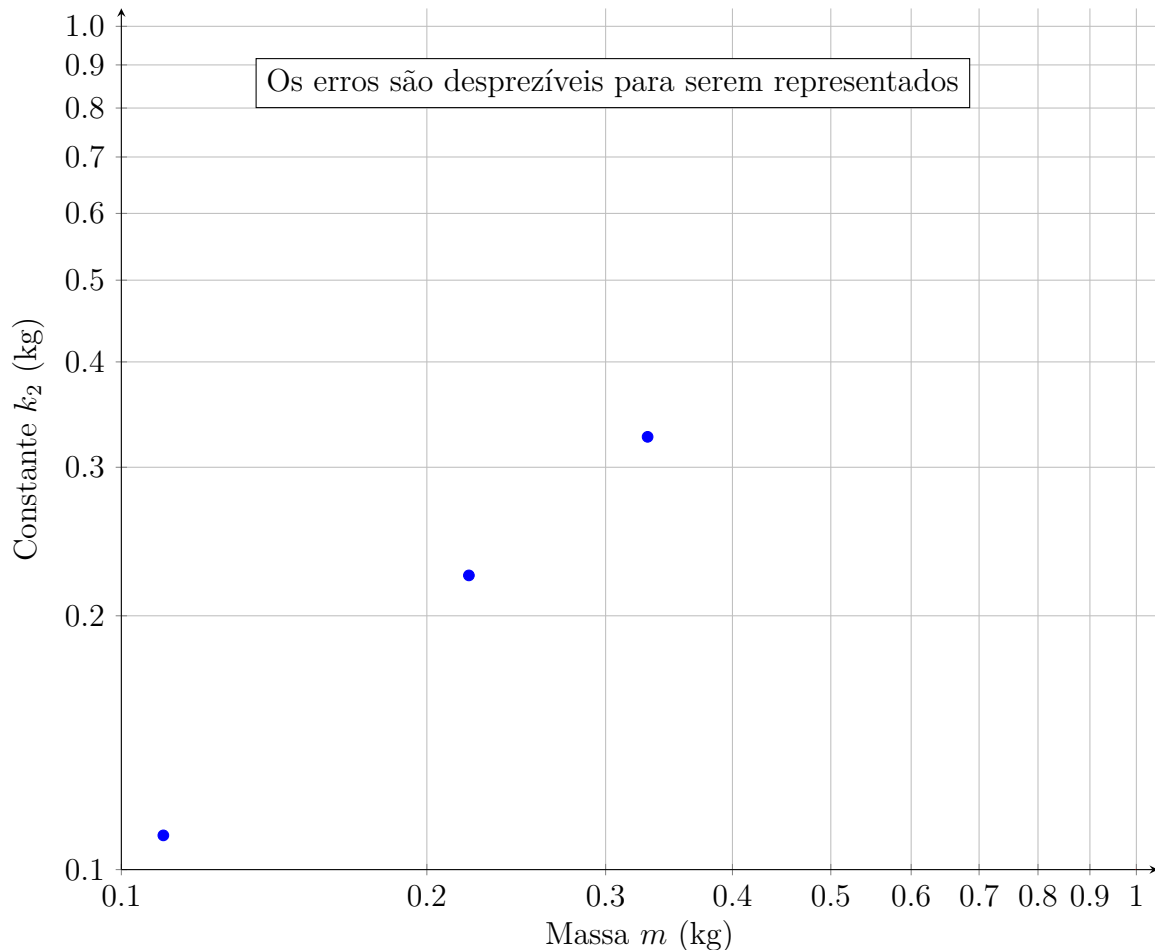
Portanto,

$$\boxed{\beta = -1,02 \pm 0,03}$$

Como β deve ser um número inteiro, temos que $\beta = -1$. Assim como obtido no outro método.

Realizando o mesmo procedimento para obter o valor de γ :

Gráfico 4: Determinação experimental de γ



A partir da reta média, podemos obter o valor da inclinação, que será igual a γ . Como se trata de um papel dilog, temos que $\gamma = \frac{\log k_{21} - \log k_{22}}{\log m_1 - \log m_2} = \frac{\log 0,5 - \log 0,4}{\log 0,5 - \log 0,4} = 1$

Podemos aplicar o método de linearização para determinar o valor de γ . Partimos da relação $k_2 = C_2 \cdot m^\gamma$, onde C_2 é uma constante. Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação, obtemos:

$$\ln k_2 = \ln C_2 + \gamma \ln m.$$

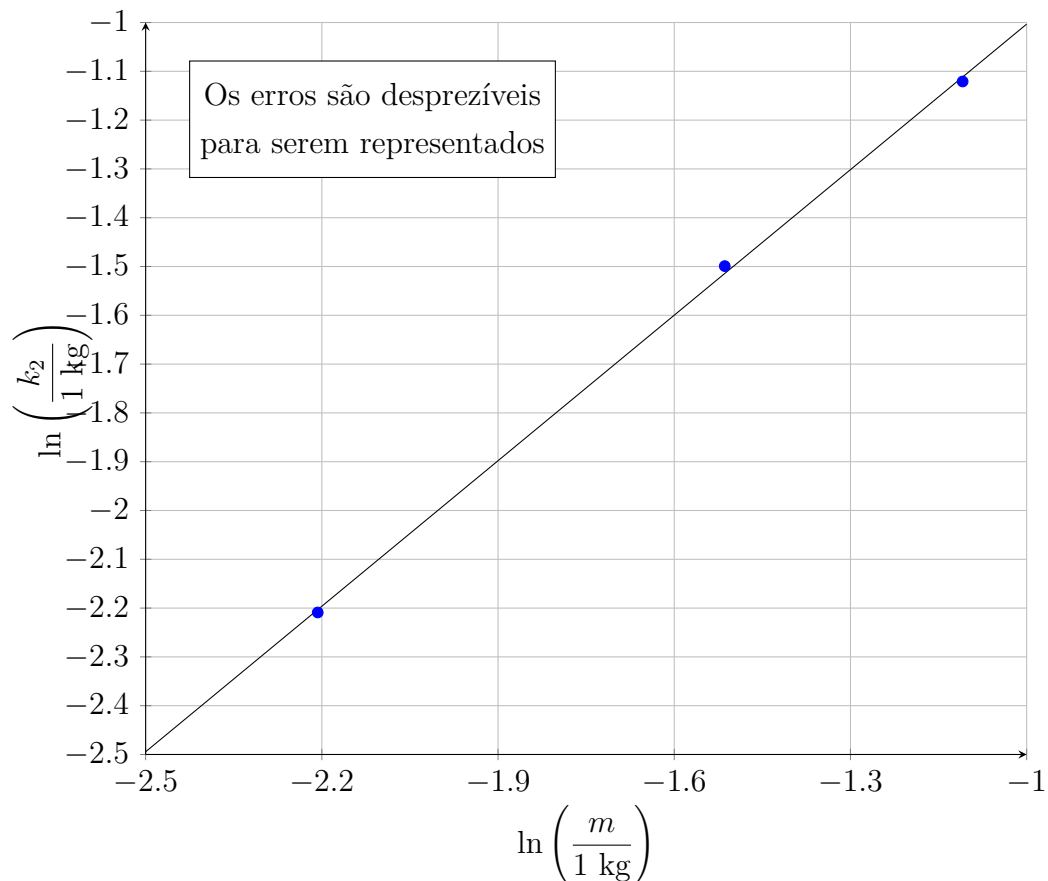
Com isso, definimos as variáveis $y = \ln k_2$ e $x = \ln m$, o que nos permite reescrever a

equação como:

$$y = \ln C_2 + \gamma x.$$

Trata-se de uma equação da forma $y = a + bx$, ou seja, uma equação linear. Assim, ao construirmos um gráfico de $\ln k_2$ em função de $\ln m$, a inclinação da reta nos fornece o valor de γ .

Gráfico 3: $\ln k_2$ x $\ln m$



Realizando a regressão linear, obtemos que $y = 0.9941x - 0.0091778$

Logo, $\gamma = 0,9941$

Calculando a incerteza, $\sigma_\beta = 0,024$

Portanto,

$$\gamma = 0,99 \pm 0,02$$

Como γ deve ser um número inteiro, temos que $\gamma = 1$. Assim como obtido no outro método.

Solução B.5

Usando os valores da questão anterior, temos que $\ln C_1 = 2,4568 \rightarrow C_1 \approx 11,67$. Como C_1 é inteiro, $C_1 = 12$.

Para C_2 temos que: $\ln C_2 = -0,0091778 \rightarrow C_2 = 0,991$. Como C_2 é inteiro, $C_2 = 1$.

Solução B.6

Com os valores obtido em **B.4** e **B.5**, concluímos que $I = \frac{mL^2}{12} + md^2$.

Logo, o período é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd}}$$

Parte C: Determinação experimental da gravidade

Solução C.1

Variando as distâncias, assim como foi feito em **A.3**, obtemos a seguinte tabela.

Tabela 5: $d \times T$

d (m)	$(T \pm 0,01)$ (s)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	3,93
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	3,81
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	3,76
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	3,73
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	3,79
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	4,05
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	4,56
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	6,17

Solução C.2

Pelo resultado obtido em **B.6**:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd}}$$

Logo:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{d}}$$

Criando a variável

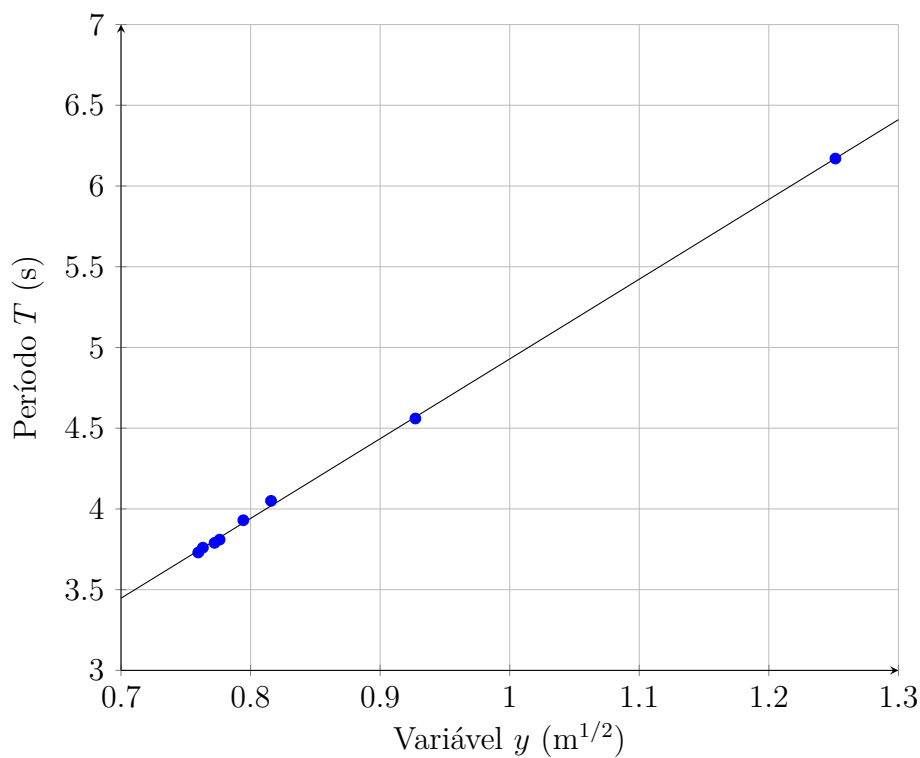
$$y \equiv \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{d}}$$

Temos que:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} y$$

Solução C.3**Tabela 5:** $d \times y \times T$

d (m)	y ($\text{m}^{1/2}$)	$(T \pm 0,01)$ (s)
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	0,7944	3,93
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	0,7761	3,81
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	0,7632	3,76
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	0,7596	3,73
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	0,7722	3,79
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	0,8158	4,05
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	0,9272	4,56
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	1,2514	6,17

Solução C.4**Gráfico 7:** $T \times y$ 

Realizando a regressão linear, $y = 4,93953x - 0,01058$.

Logo,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g_{Lua}}} = 4,93953$$

$$g_{Lua} = (1,62 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$$

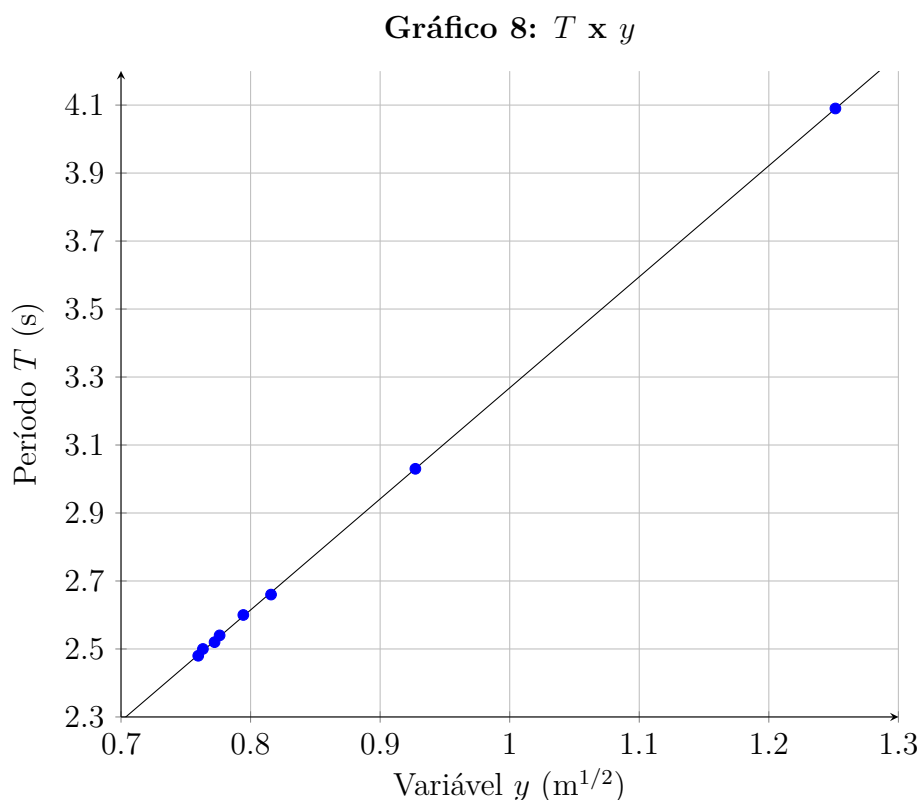
Para determinar a incerteza, foi utilizado o mesmo método que em **A.7**

Solução C.5

Repetindo o mesmo processo em **C.3**

Tabela 5: $d \times y \times T$

$d \text{ (m)}$	$y \text{ (m}^{1/2}\text{)}$	$(T \pm 0,01) \text{ (s)}$
$(44,40 \pm 0,08) \cdot 10^{-2}$	0,7944	2,60
$(38,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$	0,7761	2,54
$(33,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	0,7632	2,50
$(27,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	0,7596	2,48
$(22,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$	0,7722	2,52
$(16,65 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	0,8158	2,66
$(11,10 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	0,9272	3,03
$(5,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	1,2514	4,09



Realizando a regressão linear, $y = 3,26723x - 0,000892$.

Logo,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g_{\text{Marte}}}} = 3,26723$$

$$g_{\text{Marte}} = (3,70 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$$

Para determinar a incerteza, foi utilizado o mesmo método que em **A.7**

6.3.5 Pêndulo de torção

Parte A: Momento de inércia

Solução A.1

Variou-se o raio da esfera em 5 mm para cada medição. Para obter resultados mais precisos, mediu-se o tempo que demora para o corpo fazer 10 voltas e depois dividiu-se por 10 para obter o período o objeto.

Tabela 1: T x R

$R(m)$	$10T_1(s)$	$10T_2(s)$	$10T_3(s)$	$10T_4(s)$	$10T_5(s)$	$10T_6(s)$	$10T_7(s)$	$10T_8(s)$	$10T_9(s)$	$10T_{10}(s)$	$T_{médio}(s)$
0,02	13,03	13,01	13,05	13,04	13,06	13,09	13,10	13,06	13,11	13,05	1,306
0,25	22,66	22,60	22,64	22,61	22,56	22,70	22,70	22,57	22,60	22,66	2,263
0,03	35,60	35,59	35,56	35,63	35,70	35,67	35,70	35,73	35,72	35,60	3,565
0,035	52,43	52,47	52,45	52,45	5,240	52,40	52,35	52,36	52,43	52,36	5,2410
0,04	73,11	73,00	73,00	72,58	7,310	73,09	73,00	73,02	73,05	73,05	7,3000
0,045	98,65	98,03	98,21	98,60	9,832	98,50	98,40	98,06	98,29	98,17	9,8320
0,05	128,55	128,60	128,30	128,50	128,71	128,10	128,60	128,50	128,15	128,20	12,842
0,055	162,33	162,02	162,65	162,51	161,80	162,42	161,72	161,77	162,15	161,73	16,211
0,06	201,97	201,85	202,20	202,43	202,32	202,14	202,29	201,96	202,41	202,30	20,219
0,065	254,72	254,33	254,52	254,60	254,21	254,09	254,00	253,98	254,42	254,13	25,430

Solução A.2

Vamos linearizar por meio de logaritmos. Seja o período da forma:

$$T = C_1 I^n$$

Onde I é o momento de inércia e C_1 e n constantes. Então, aplicando as propriedades de logaritmos (com as variáveis em valores do SI):

$$\log(T) = \log(C_1 I^n) \rightarrow \log(T) = \log(C_1) + \log(I^n)$$

Como o momento de inércia depende apenas de sua massa e de fatores geométricos, ele deve depender apenas de massa do corpo e do raio da esfera, já que esse é o único fator geométrico relevante em uma esfera. Assim, pela unidade do momento de inércia, percebe-se que ele é proporcional a mR^2 . Como a massa é $m = \rho \cdot 4\pi R^3/3$, então I é proporcional a R^5 . Logo:

$$\log(T) = \log(C_1 I^n) \rightarrow \log(T) = \log(C_1) + 5n(\log(R) + \log(C_2))$$

Onde C_2 é outra constante. Logo, $g(R) = \log(R)$ e $f(T) = \log(T)$. Linearizando os dados:

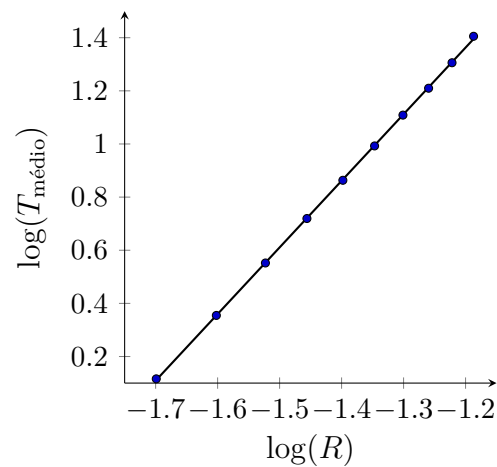
Tabela 2: $\log(T_{médio}/s)$ x $\log(R/m)$

$\log(T_{\text{médio}}/\text{s})$	$\log(R/\text{m})$
0,116	-1,699
0,355	-1,602
0,552	-1,523
0,719	-1,456
0,863	-1,398
0,993	-1,347
1,109	-1,301
1,210	-1,260
1,306	-1,222
1,405	-1,187

Solução A.3

Façamos o gráfico:

Gráfico 1: $\log(T_{\text{médio}}) \times \log(R)$



$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 B &= 2,508 \\
 A &= 4,372 \\
 r^2 &= 0,9999
 \end{aligned}$$

Pelo item anterior, $5n=B$. Logo, $n \approx 1/2$.

Solução A.4

Fazendo medições da mesma maneira que no item A.1:

Tabela 3: T x R

$R(m)$	$10T_1(s)$	$10T_2(s)$	$10T_3(s)$	$10T_4(s)(s)$	$10T_5(s)$	$10T_6(s)$	$10T_7(s)$	$10T_8(s)$	$10T_9(s)$	$10T_{10}(s)$	$T_{\text{médio}}(s)$
0,02	7,23	7,20	7,23	7,20	7,24	7,26	7,27	7,23	7,24	7,30	0,724
0,025	12,35	12,37	12,38	12,36	12,40	12,38	12,45	12,35	12,47	12,45	1,2396
0,03	19,45	19,46	19,57	19,60	19,50	19,46	19,45	19,52	19,57	19,42	1,95
0,035	28,77	28,65	28,67	28,72	28,77	28,58	28,73	28,60	28,78	28,79	2,8706
0,04	39,84	39,99	39,90	39,91	40,00	40,11	39,98	39,99	40,06	39,90	3,9968
0,045	53,52	53,60	53,72	53,57	53,57	53,74	53,75	53,57	53,54	53,65	5,3623
0,05	69,82	70,00	69,76	69,69	69,67	69,90	69,98	69,71	69,77	69,70	6,98
0,055	88,61	89,07	88,92	88,71	88,83	89,05	88,88	89,00	88,65	88,60	8,883
0,06	111,23	110,68	111,17	111,33	111,01	111,11	111,12	110,73	110,98	110,84	11,10
0,065	134,60	134,74	134,78	134,63	134,51	134,85	134,58	134,63	134,46	134,69	13,47

Solução A.5

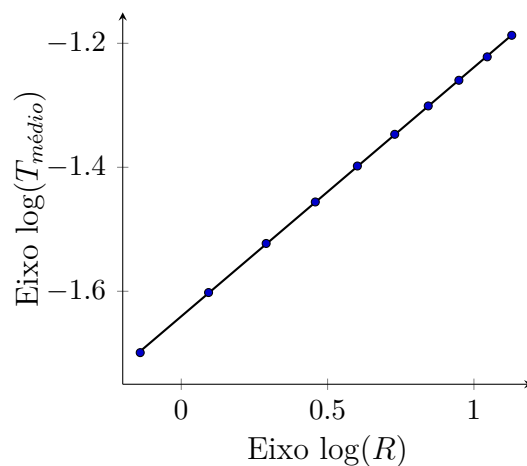
Realizando o mesmo raciocínio do item A.2, temos a tabela:

Tabela 4: $\log(T_{\text{médio}}/s)$ x $\log(R/m)$

$\log(T_{\text{médio}}/s)$	$\log(R/m)$
-0,1402614338	-1,698970004
0,09328156757	-1,602059991
0,2900346114	-1,522878745
0,4579726805	-1,455931956
0,6017124167	-1,397940009
0,7293511074	-1,346787486
0,8438554226	-1,301029996
0,9485694401	-1,259637311
1,045401223	-1,22184875
1,129196682	-1,187086643

Solução A.6

Gráfico 2: dados linearizados



$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 B &= 2,489 \\
 A &= 4,083 \\
 r^2 &= 0,99996
 \end{aligned}$$

Se definirmos:

$$T_1 = \alpha \sqrt{\beta_1 \rho R^5}$$

$$T_2 = \alpha \sqrt{\beta_2 \rho R^5}$$

Então, temos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\rho_1 \beta_1}}{\sqrt{\rho_2 \beta_2}} \rightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Onde a razão entre as densidades (ρ_2/ρ_1) é simplesmente a razão entre as massas que se encontram no simulador, para um mesmo raio. Além disso:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{C_1}{C_2} = 10^{A_1 - A_2}$$

Contudo, substituindo os resultados, você talvez encontre um resultado meio distante do esperado. Com os dados que tirei, o resultado fica por volta de 0,68, ao invés do 0,60 esperado.

Parte B: Constante torcional

Solução B.1

Fazendo medições da mesma maneira que nos itens A.1 e A.4:

Tabela 5: Medições de período para diferentes k

k ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$)	$10T_1(\text{s})$	$10T_2(\text{s})$	$10T_3(\text{s})$	$10T_4(\text{s})$	$10T_5(\text{s})$	$10T_6(\text{s})$	$10T_7(\text{s})$	$10T_8(\text{s})$	$10T_9(\text{s})$	$10T_{10}(\text{s})$	$T_{\text{médio}}(\text{s})$
$1,00 \cdot 10^{-3}$	12,70	12,69	12,67	12,61	12,64	12,73	12,66	12,64	12,77	12,69	1,268
$3,00 \cdot 10^{-4}$	23,02	22,96	22,90	22,98	22,95	23,06	22,85	22,93	22,97	22,99	2,2961
$6,00 \cdot 10^{-4}$	16,20	16,03	16,12	16,17	16,26	16,16	16,21	16,30	16,18	16,08	1,6171

Solução B.2

Linearizando os dados da maneira pedida:

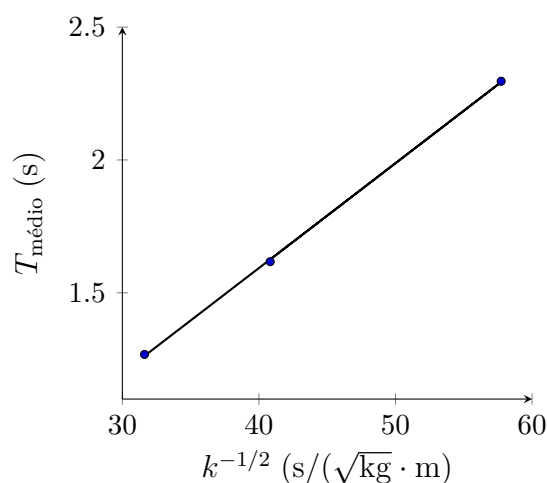
Tabela 6: $k^{-1/2}(\text{s}/(\sqrt{\text{kg}} \cdot \text{m})) \times T_{\text{médio}}(\text{s})$

$k^{-1/2} (\text{s}/(\sqrt{\text{kg}} \cdot \text{m}))$	$T_{\text{médio}}(\text{s})$
31,623	1,268
57,735	2,296
40,825	1,617

Solução B.3

Fazendo um gráfico linearizado:

Gráfico 2: $T_{\text{médio}} \times k^{-1/2}$



$$Y = A + BX$$

$$B = 0,0395$$

$$A = 0,0143$$

$$r = 0,9999$$

Logo, a constante de proporcionalidade buscada é de:

$$K = 0,0395 \text{m}\sqrt{\text{kg}}$$

6.3.6 Pêndulo duplo com mola

Parte A: Pêndulo duplo com mola

Solução A.1

Para obter uma situação em que ambos os pêndulos estão em fase, basta colocar posições angulares iniciais iguais para ambos. Assim, a mola não se deforma e o movimento continua normalmente. Para obter uma situação onde as fases são opostas, basta colocar posições angulares iniciais opostas para ambos. Ou seja, se uma é x , a outra deve ser $-x$. Assim, a mola se deforma, mas as mesmas amplitudes ao longo do tempo se mantém as mesmas.

Solução A.2

Realizando as medidas:

Tabela 1: Medidas para obter $T_{\text{médio}}$

$10T_1$	18,05
$10T_2$	18,07
$10T_3$	18,09
$10T_4$	17,99
$10T_5$	17,98
$10T_6$	18,01
$10T_7$	18,04
$10T_8$	18,08
$10T_9$	18,14
$10T_{10}$	17,97
$10T_{11}$	17,95
$10T_{12}$	17,99
$10T_{13}$	18,06
$10T_{14}$	18,07
$10T_{15}$	18,18
$10T_{16}$	18,13
$10T_{17}$	18,11
$10T_{18}$	18,12
$10T_{19}$	18,13
$10T_{20}$	18,05
$T_{\text{Médio}}$	1,806

Perceba que medimos o tempo de 10 períodos em cada linha para aumentar a precisão. A incerteza aleatória calculada é de $\sigma_x = 0,0064/\sqrt{20} = 0,001$. Assim, temos:

$$T_{\text{Médio}} = (1,806 \pm 0,001)\text{s}$$

Solução A.3 Isolando l na equação:

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \approx 0.8105\text{m}$$

Assim, a incerteza de l será:

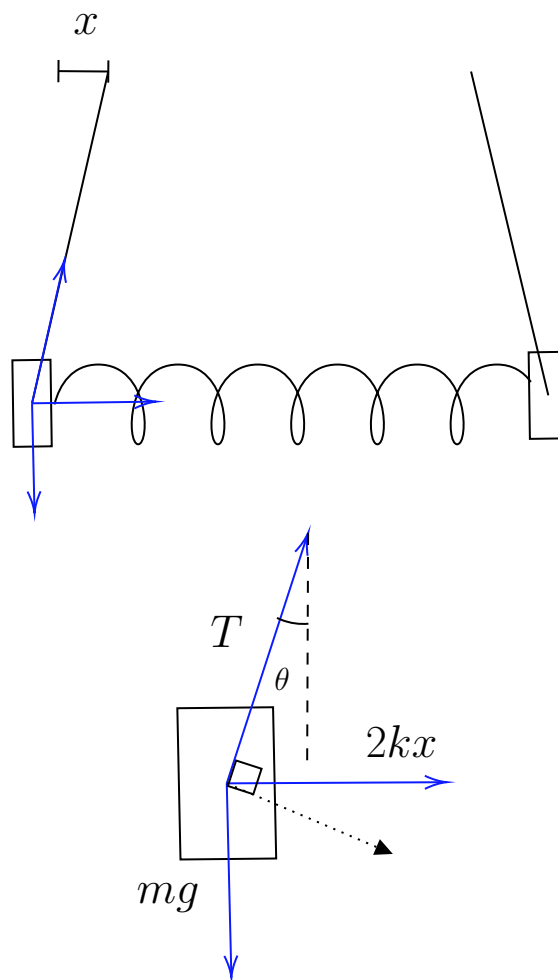
$$\sigma_l = 2 \cdot \frac{Tg}{4\pi^2} \cdot \sigma_T = 9 \cdot 10^{-4} \text{m}$$

Logo:

$$l = (8,105 \pm 0,009) \cdot 10^{-1} \text{m}$$

Solução A.4

Veja as figuras a seguir:



Sendo assim, aplicando a terceira Lei de Newton na direção perpendicular ao fio:

$$ml\alpha = mg\sin(\theta) + 2kx\cos(\theta)$$

Onde α é aceleração angular do pêndulo. Aqui, podemos aproximar $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$. Usando também que $x = l\sin(\theta) \approx l\theta$, temos:

$$\alpha = \theta \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)$$

Logo, o período do pêndulo será:

$$T = 2\pi \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)^{-1/2}$$

Solução A.5 Vamos, então, tirar medidas para descobrir o período quando os pêndulos estão em oposição de fase. Seja esse período T_o e o período anterior T_f .

Tabela 2: Medidas para obter T_o

$10T_1(\text{s})$	16,29
$10T_2(\text{s})$	16,29
$10T_3(\text{s})$	16,36
$10T_4(\text{s})$	16,29
$10T_5(\text{s})$	16,42
$10T_6(\text{s})$	16,19
$10T_7(\text{s})$	16,36
$10T_8(\text{s})$	16,30
$10T_9(\text{s})$	16,37
$10T_{10}(\text{s})$	16,24
$10T_{11}(\text{s})$	16,37
$10T_{12}(\text{s})$	16,17
$10T_{13}(\text{s})$	16,20
$10T_{14}(\text{s})$	16,36
$10T_{15}(\text{s})$	16,31
$10T_{16}(\text{s})$	16,24
$10T_{17}(\text{s})$	16,38
$10T_{18}(\text{s})$	16,37
$10T_{19}(\text{s})$	16,32
$10T_{20}(\text{s})$	16,28
$T_o(\text{s})$	1,630

Assim, sabemos:

$$T_f = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \frac{g}{l} = \left(\frac{T_f}{2\pi} \right)^{-2}$$

$$T_o = 2\pi \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)^{-1/2} \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{T_o}{2\pi} \right)^{-2} - \left(\frac{T_f}{2\pi} \right)^{-2} \right) \approx 1,377(\text{Hz})^2$$

6.3.7 Pêndulo balístico

Solução A.1

Conservando o momento linear:

$$m_B v_0 = (m_W + m_B) v \implies v = \frac{m_B v_0}{m_W + m_B}$$

Por energia:

$$\frac{1}{2} (m_W + m_B) v^2 = (m_W + m_B) g \Delta h$$

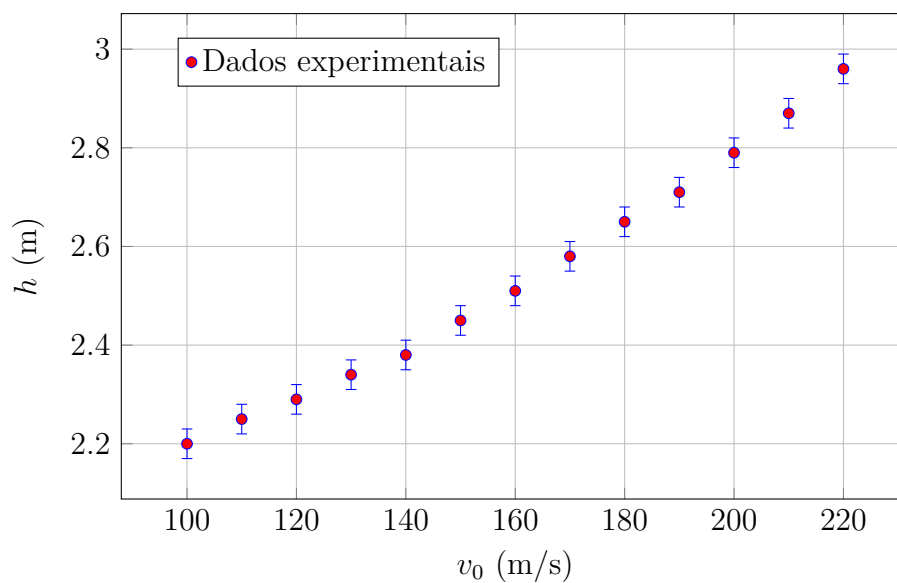
$$\Delta h = \frac{m_B^2 v_0^2}{2g(m_W + m_B)^2}$$

Solução A.2

Note que o parâmetro v_0^2 é mais facilmente linearizável. Além disso, como o valor de v_0 possui mais algarismos significativos, seu valor é mais preciso. Logo, $X = v_0$. Além disso, adotaremos $\sigma_h \approx 3$ cm devido à dificuldade da medida e as massas $m_B = (0.0600 \pm 0.0005)$ kg, $m_W = (3.000 \pm 0.005)$ kg por conveniência.

Tabela 1: $v_0 \times h$

v_0 (± 0.01 m/s)	h (± 0.03 m)
100.00	2.20
110.00	2.25
120.00	2.29
130.00	2.34
140.00	2.38
150.00	2.45
160.00	2.51
170.00	2.58
180.00	2.65
190.00	2.71
200.00	2.79
210.00	2.87
220.00	2.96

Gráfico $v_0 \times h$ **Solução A.2**

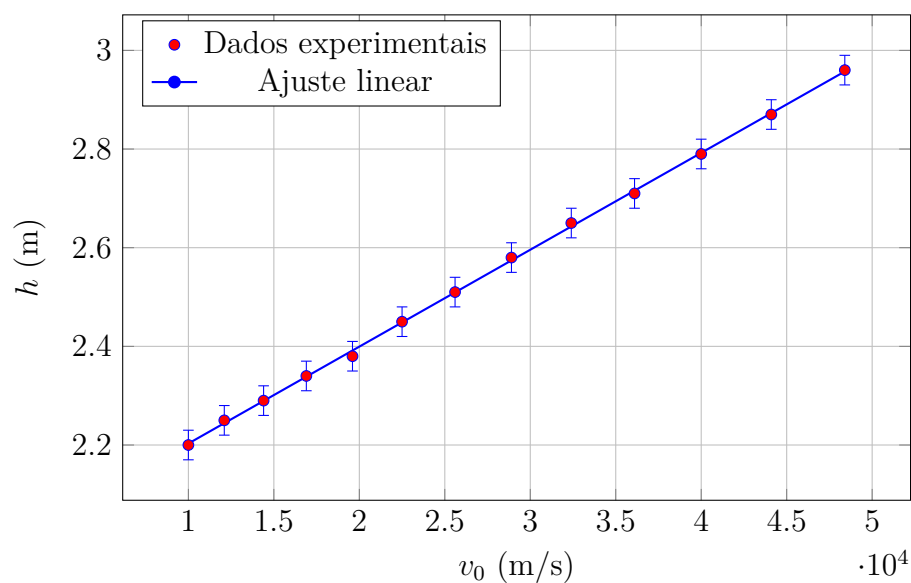
Pelo item A.1, sabemos que:

$$h = h_0 + \frac{m_B^2 v_0^2}{2g(m_W + m_B)^2}$$

Assim, basta montar uma tabela $v_0^2 \times h$:

Tabela 2: $v_0^2 \times h$

v_0^2 (10^4m/s)	h ($\pm 0.03 \text{ m}$)
1.0000 ± 0.0002	2.20
1.2100 ± 0.0002	2.25
1.4400 ± 0.0002	2.29
1.6900 ± 0.0003	2.34
1.9600 ± 0.0003	2.38
2.2500 ± 0.0003	2.45
2.5600 ± 0.0003	2.51
2.8900 ± 0.0003	2.58
3.2400 ± 0.0004	2.65
3.6100 ± 0.0004	2.71
4.0000 ± 0.0004	2.79
4.4100 ± 0.0004	2.87
4.8400 ± 0.0004	2.96

Gráfico $v_0 \times h$ 

Para o ajuste linear ($R^2 = 0.9996$):

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{N - 2}} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

Obtivemos a seguinte equação (no SI):

$$h = (2.007 \pm 0.004) + (1.9642 \pm 0.0012) \cdot 10^{-5} v_0^2$$

Pela equação do coeficiente angular:

$$(1.9642 \pm 0.0012) \cdot 10^{-5} = \frac{(0.0600 \pm 0.0005)^2}{2g((3.000 \pm 0.005) + (0.0600 \pm 0.0005))^2}$$

$$\bar{g} = \frac{0.0600^2 \cdot 10^5}{2 \cdot 1.9642 \cdot (3.000 + 0.0600)^2} = 9.787 \text{ m/s}^2$$

A incerteza associada à aceleração da gravidade (σ_g) é obtida através da propagação de incertezas por derivadas parciais, dada por:

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{2m_W m_B}{(m_W + m_B)^3} \cdot g \cdot \sigma_{m_B}\right)^2 + \left(\frac{g}{B} \cdot \sigma_B\right)^2 + \left(\frac{2g}{m_W + m_B} \cdot \sigma_{m_W}\right)^2}$$

Substituindo os valores experimentais e as suas respectivas incertezas, temos:

$$\sigma_g = 9,79 \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 3,000 \cdot 0,0600}{3,0600^3} \cdot 0,0005\right)^2 + \left(\frac{0,0012}{1,9642}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,005}{3,0600}\right)^2} \approx 0,163 \text{ m/s}^2$$

Desta forma, o valor final da gravidade calculado a partir da expressão fornecida é:

$$g = (9.79 \pm 0.16) \text{ m/s}^2$$

Capítulo 7

Experimentos de Óptica

7.1 Introdução

Neste capítulo, o desafio é medir e caracterizar a luz, um fenômeno por natureza elusivo. Os experimentos exigirão paciência e precisão, especialmente no alinhamento de componentes. Iniciaremos com a óptica geométrica, investigando a Lei de Snell e o comportamento da luz em prismas para determinar o índice de refração. Em seguida, exploraremos a natureza vetorial da luz através da Lei de Malus e da polarização. Por fim, observaremos os padrões de difração para explorar a natureza ondulatória da luz. Os experimentos desse capítulo são, em sua maioria, bem possíveis de reproduzir sem o uso de simuladores e podem aparecer em provas presenciais.

7.2 Experimentos

7.2.1 Lei de Snell - Dificuldade média - 2h15m

Introdução

A Lei de Snell relaciona o ângulo em que a luz entra e sai quando ela passa de um meio para o outro da seguinte forma:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

sendo n_1 e n_2 o índice de refração de cada meio. Por meio dessa relação, podemos achar constantes características do meio.

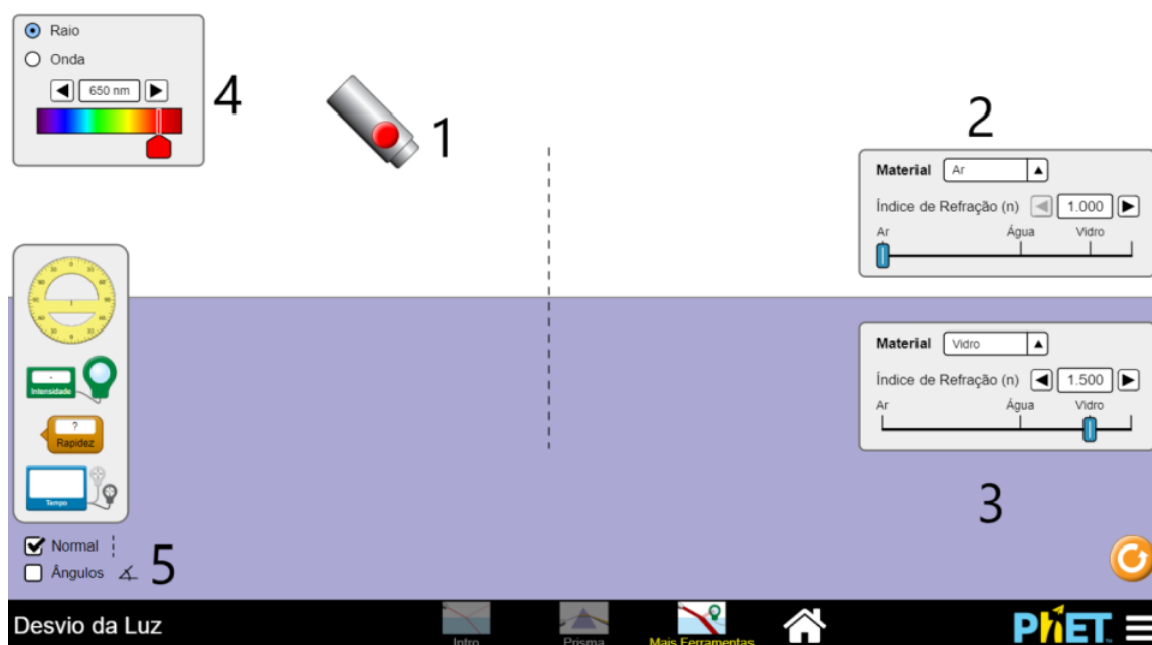
Com isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o simulador do PhET que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Agora, você deve clicar em "Mais Ferramentas" para continuar. Após isso, você chegará na interface do simulador, como é mostrado na figura abaixo:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Esse é o laser do experimento. O botão liga e desliga o laser.
2. Aqui você pode escolher o meio em que o laser está (o meio inicial do raio de luz).

3. Aqui você pode escolher o segundo meio do sistema (o meio final do raio de luz).
4. Aqui você pode variar o comprimento de onda da luz.
5. Aqui você pode fazer com que os ângulos que o raio incidente e o raio refratado fazem com a normal apareçam na tela.

Parte A: Lei de Snell entre o ar e um meio desconhecido

Nessa parte vamos determinar o índice de refração de um meio através da passagem da luz do ar para ele. Determine o material do meio como **Mistério A** e o comprimento de onda como 650 (nm).

A.1 Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando o ângulo θ_1 com θ_2 seguindo o modelo da tabela abaixo da **Tabela 1**.

Tabela 1: θ_1 x θ_2

θ_1 (°)	θ_2 (°)

A.2 Escreva uma equação linearizada que relacione $\sin \theta_1$ e $\sin \theta_2$

A.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela seguindo o modelo da **Tabela 2**.

Tabela 2: $\sin \theta_1$ x $\sin \theta_2$

$\sin \theta_1$	$\sin \theta_2$

A.4 Utilizando os dados da **Tabela 2**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e , a partir dele, determine o valor do índice de refração do **Mistério A** e sua respectiva incerteza.

Parte B: Lei de Snell entre dois meios

Agora, vamos determinar o valor do índice de refração de um material com a luz indo de um meio conhecido para um desconhecido. Defina o primeiro meio como **Mistério A** e o segundo como **Mistério B**, mantenha o comprimento de onda como 650 (nm).

B.1 Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando o ângulo θ_1 com θ_2 seguindo o mesmo modelo da **Tabela 3**.

Tabela 3: θ_1 x θ_2

θ_1 (°)	θ_2 (°)

B.2 Escreva uma equação que relacione os ângulos e, caso necessário, linearize-a

B.3 Utilizando os dados da **Tabela 3**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela seguindo o modelo da **Tabela 4**.

Tabela 4: $\sin \theta_1$ x $\sin \theta_2$

$\sin \theta_1$	$\sin \theta_2$

B.4 Utilizando os dados da **Tabela 4**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor do índice de refração do **Mistério B** e sua respectiva incerteza.

Dica:

$$Z = \frac{Y}{X} ; \sigma_Z = \sqrt{\left(\frac{Y}{X^2} \cdot \sigma_X\right)^2 + \left(\frac{\sigma_Y}{X}\right)^2}$$

Parte C: índice de refração variando

Pela formula de Cauchy, o índice de refração depende do comprimento de onda da forma:

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Onde **A** e **B** são constantes características do meio. A partir disso, vamos tentar descobrir quais são essas constantes para um material. defina o primeiro meio como **Mistério B** e o segundo como Ar.

C.1 Defina um ângulo θ_1 fixo e varie o comprimento de onda do Laser. Faça uma tabela no modelo da **Tabela 5** relacionando λ com θ_2 . Dica: como a variação é pequena, pense qual melhor ângulo θ_1 para realizar as medidas.

Tabela 5: λ x θ_2

λ (nm)	θ_2 ($^\circ$)

C.2 Escreva uma equação que relacione os ângulos e, caso necessário, linearize-a

C.3 Utilizando os dados da **Tabela 5**, faça outra tabela com os dados necessários para a equação linearizada.

C.4 Utilizando os dados da **Tabela 6**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e , a partir dele, determine o valor das constantes **A** e **B**, além de suas respectivas incertezas. Dica:

$$Y = \frac{X}{\sin \theta} ; \sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{X}{(\sin \theta)^2} \cdot \cos \theta \cdot \sigma_\theta\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{\sin \theta}\right)^2}$$

C.5 Parte do seu resultado se parece com o resultado da **Parte B**? Por qual motivo isso ocorre? Em qual das duas formas o resultado é mais preciso? Qual motivo para isso?

7.2.2 Prismas - Dificuldade iniciante - 1h15m

Sobre o simulador

Ao entrar no site, selecione o modo "Prisma". Não altere nenhum parâmetro a não ser que seja solicitado pelo enunciado. Após alteração, retorne aos parâmetros originais.

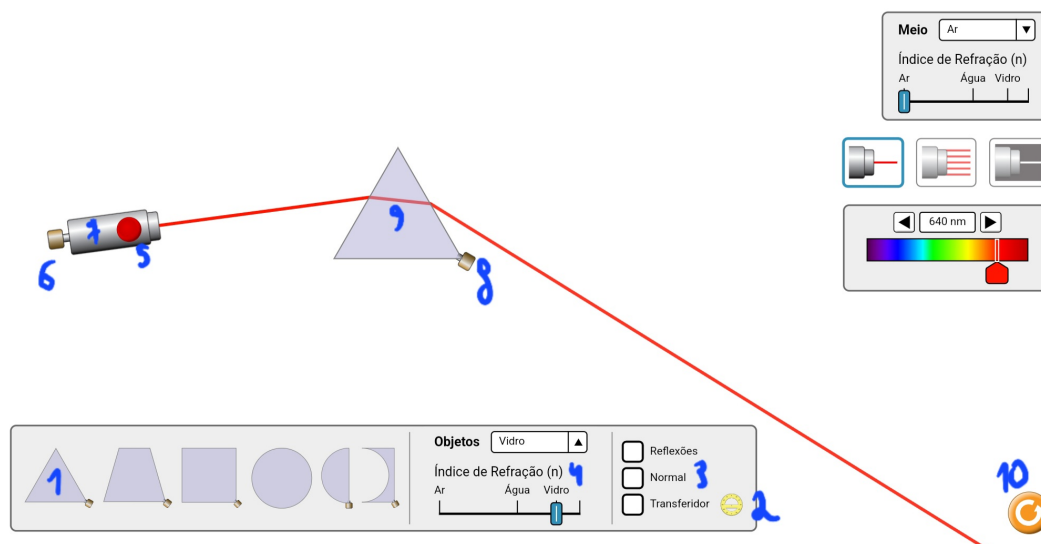


Note que no modo Prisma do Simulador é mostrado um laser, que podemos mexer, rotacionar e ligar, e as figuras geométricas que podemos utilizar. Para a realização do experimento, deve-se utilizar o prisma triangular. A seguir, temos as especificações de todas as funções dessa simulação

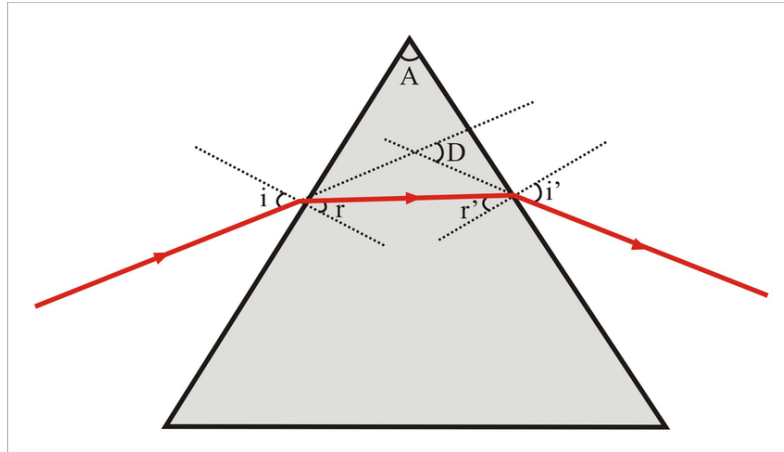


Legenda:

1. Seleccionador de Figuras Geométricas: Para seleccionar alguma figura, no nosso caso o prisma, basta clicar e arrastá-la, conforme a imagem acima.
2. Seleccionador do transferidor: Para usar o transferidor, basta segurar no quadrado em branco escrito "transferidor" e este aparecerá na sua tela.
3. Seleccionador de normal:
4. Seleccionador de índice de Refração do objeto:
5. Botão para ligar o laser: Para ligar o laser, basta apertá-lo.
6. Regulador do ângulo do laser: O ângulo de inclinação do laser em relação à horizontal também pode ser modificado. Para isso basta segurar sobre a parte bege do laser e girá-la.
7. Regulador da posição do laser: A posição do laser pode ser alterada ao segurar o meio do laser
8. Regulador do ângulo do prisma:
9. Regulador da posição do prisma:



OBS.: No que se segue, considere os seguintes parâmetros do desvio de um prisma. A é o ângulo de abertura do prisma, i é o ângulo de chegada no prisma, i' é o ângulo de saída do prisma, r é o ângulo da primeira refração, r' é o ângulo antes da segunda refração e D é o ângulo de desvio entre o raio incidente e o raio ao sair do prisma.



Parte A: Determinando o desvio mínimo

- A.1** Ache o valor numérico e descreva algum modo eficiente, sem utilizar de um tratamento analítico de dados, de encontrar o desvio mínimo da luz no prisma com os seguintes parâmetros $n_{objeto} = n_{vidro} = 1,5$, $n_{meio} = n_{ar} = 1$ e comprimento de onda $\lambda = 660nm$.

Parte B: Análise teórica para desvio mínimo A partir de uma análise matematicamente complexa, podemos provar (mas não será necessário) a seguinte relação:

$$n_{objeto} \sin\left(\frac{A}{2}\right) = n_{meio} \sin\left(\frac{D_{min} + A}{2}\right)$$

onde A é o ângulo de abertura do Prisma. Por enquanto desconsidere incertezas.

- B.1** Ache o valor numérico de A para o prisma do simulador.

- B.2** A partir da análise da equação teórica fornecida e usando os parâmetros de A.1, ache o valor numérico do desvio mínimo da luz e compare com o resultado encontrado em A.1

- B.3** A partir da mesma equação teórica e variando o número do índice de refração, crie uma tabela e um gráfico com os valores de D_{min} e de n_{objeto}

Parte C: Análise experimental para desvio mínimo

C.1 Sabendo que podemos achar D em função apenas de i' , ache essa função a partir das equações da Lei de Snell e da geometria do prisma. (Obs: o resultado não precisa ficar "bonito".)

C.2 Para cada valor de i' , ache o valor teórico (a partir da função encontrada em C.1) e experimental (através do simulador de D). Faça uma tabela e os compare.

7.2.3 Lei de Malus - Dificuldade média - 1h30m

Introdução

A Lei de Malus é uma relação matemática que descreve a intensidade da luz polarizada transmitida por um polarizador ideal. Utilizando essa lei, é possível descrever sistemas como filtros de câmeras e óculos de sol. Com base nisso, vamos analisar experimentalmente o comportamento de filtros polarizadores.

Materiais

Caso você deseje replicar esse experimento sem o uso de simuladores. Você precisará de alguns materiais:

- Alguma fonte luminosa (como uma lanterna)
- 2x filtros polarizadores. Pode ser improvisado com dois óculos de sol polarizados.
- 1x sensor de intensidade luminosa. O aplicativo mobile *Physics Toolbox Sensor Suite* pode ser utilizado.

Apresentando o simulador

Para realizar este experimento, utilizaremos o simulador do Laboratório Virtual de Física da UFC disponível [neste link](#). Caso necessário, utilize o botão “Full Screen” no canto inferior direito do simulador.

Para essa interface, podemos encontrar as seguintes ferramentas:

1. Ajuste de rotação para o Polarizador, apontado pela seta vermelha.
2. Ajuste de rotação para o Analisador, apontado pela seta verde.

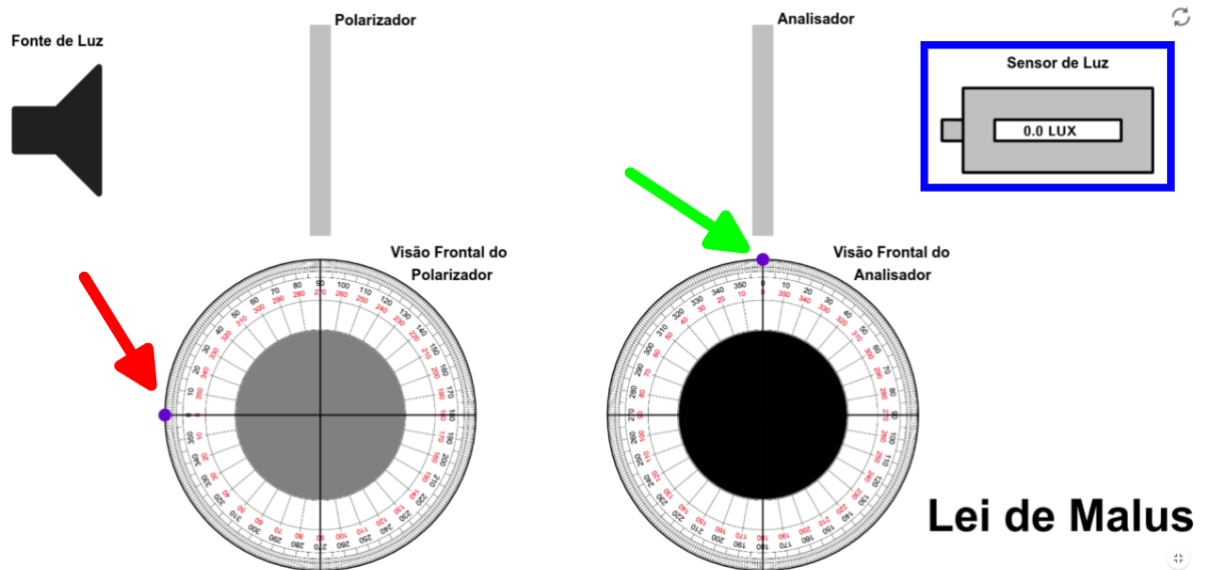


Figura 7.1: Interface do simulador

3. Detector de iluminância, apontado pela caixa azul.

Estudo da Lei de Malus

Para identificar o comportamento geral do sistema ao descrever a fonte de luz e os polarizadores, é necessário modificar alguns parâmetros do sistema. Com o Polarizador alinhado com o Analisador, gire os dois filtros continuamente.

A.1 Descreva o comportamento da iluminância detectada para $\Delta\theta = 0$ (polarizadores alinhados), $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\theta = \pi$ e $\Delta\theta = \frac{3\pi}{2}$. É possível determinar se a luz é polarizada em uma certa direção com esse procedimento?

Agora, fixando um valor para o ângulo do Analisador, rotacione somente o Polarizador.

A.2 Com os dados obtidos pelo detector, faça uma tabela relacionando o ângulo $\Delta\theta$ entre os filtros e a iluminância detectada seguindo o modelo da **Tabela 1**. Elabore um gráfico que demonstra o comportamento para $0 \leq \Delta\theta \leq 2\pi$

Tabela 1: $\Delta\theta$ x E_v

$\Delta\theta$ (°)	E_v (lux)

Sabe-se que a quantidade de luz transmitida por um Analisador ideal é dada por:

$$I = I_0 \cos^2 \Delta\theta \quad (\text{Lei de Malus})$$

A.3 Elabore um gráfico que apresente seus dados linearizados e suas respectivas incertezas em uma tabela similar à **Tabela 1**. O comportamento do Analisador é considerado ideal?

Dica: Para a propagação de erros: $|\delta(\cos^2(\alpha))| = |\sin(2\alpha)\delta\alpha|$

7.2.4 Redes de difração - Dificuldade média - 3h30m

Introdução

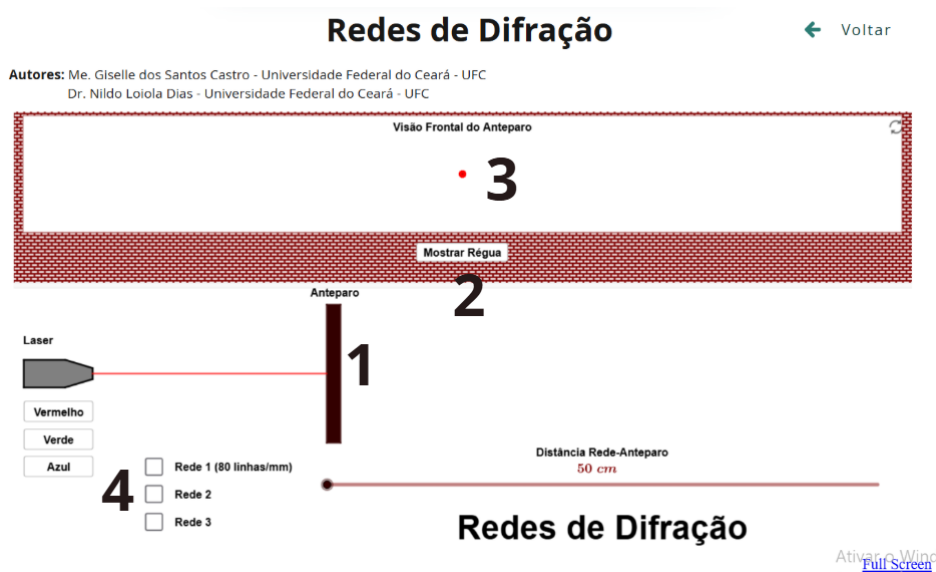
A rede de difração é um experimento que permite analisar o comportamento ondulatório da luz, e, com recursos melhores, pode-se verificar o comportamento ondulatório até mesmo de elementos muitas vezes considerados como apenas "partículas" como elétrons, levando à chamada dualidade onda-partícula, princípio fundamental na mecânica quântica.

Contudo, hoje iremos nos restringir a analisar a luz e os efeitos de interferência utilizando a rede de difração.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o Laboratório Virtual de Física da Universidade Federal do Ceará, que você pode acessar clicando [aqui](#). Quando acessar o simulador, essa será a tela inicial:

Aproveite e familiarize-se com o simulador antes de começarmos o experimento! Ele não é muito complicado, então você provavelmente aprenderá a mexer rapidamente com



sua mecânica:

1. Esse é o anteparo onde será formada a imagem do efeito de difração. Você pode mudar sua posição pelo botão marrom abaixo ao longo da linha permitida. O simulador informa a distância a qual o anteparo está do laser
2. Aqui você pode ativar a régua para fazer medições no padrão de difração que será formado.
3. Aqui é onde o padrão de difração será formado. É a visão do que ocorre no anteparo
4. Aqui você pode variar a rede de difração que vai ser utilizada. Note que a distância entre fendas apenas foi informada na primeira rede. À esquerda, adicionalmente, você pode selecionar a cor do laser.

Parte A: Relações fundamentais e conhecendo o experimento

Nessa parte vamos apenas experimentar o simulador e desenvolver alguns resultados teóricos que irão nos auxiliar ao longo da atividade.

- A.1** Pense no caso simples da fenda dupla. Assumindo que a distância da fenda ao anteparo é muito maior do que a altura da imagem do padrão de interferência no anteparo, obtenha a relação matemática entre a altura y da imagem, a distância x entre as fendas e o comprimento de onda λ da luz utilizada. Utilize também como variáveis a distância do anteparo e a distância entre as fendas.
- Obs: Essa etapa é fundamental para a execução de toda a atividade!

A.2 Utilize a rede de tamanho conhecido e verifique o comprimento entre os pontos do padrão de difração utilizado, usando a cor que você preferir sem variá-la, e variando a distância do anteparo. Monte tabelas verificando o desvio padrão relativo à média obtida σ_{rel} do comprimento entre pontos para diferentes distâncias.

Tabela 1: Distância (cm) x σ_{rel} (mm)

Distância (cm)	σ_{rel} (mm)

A.3 Agora, analisando a tabela do desvio-padrão, e também levando em conta uma boa quantidade de medidas, além de levar em conta a teoria desenvolvida na 1ª questão, conclua: qual é a melhor cor para trabalhar e que trará a menor quantidade possível de discrepâncias em relação ao modelo teórico simplificado do item A.1? Quais faixas são melhores para medições? Mais: a partir de qual distância você tomaria as próximas medidas? Não seja sucinto e deixe claro seu raciocínio.

Parte B: Obtendo as propriedades das cores

Agora, iremos descobrir as características de cada uma das cores disponíveis no simulador, usando da rede de difração com tamanho conhecido e usando também os conhecimentos adquiridos na Parte A.

B.1 Ative a rede de difração de tamanho conhecido (80 linhas/mm). Monte uma tabela no seguinte modelo para cada uma das cores e obtenha seus respectivos comprimentos de onda.

Tabela 2: Distância (cm) x Comprimento de onda (nm)

Distância (cm)	Comprimento de onda (nm)

B.2 Mantenha a distância do anteparo em 170cm. Agora, monte uma tabela relacionando o comprimento do padrão de difração (distância entre dois pontos de luz formados) com o comprimento da onda de luz utilizada no modelo abaixo. Verifique: isto está de acordo com o modelo teórico utilizado no item A.1?

Tabela 3: Comprimento de onda (nm) e Comprimento do padrão (mm)

Comprimento de onda (nm)	Comprimento do padrão (mm)

Parte C: Descobrindo as outras redes

Por fim, iremos explorar agora as outras redes, utilizando a cor encontrada como a melhor para realizar medidas experimentais no item A.3.

C.1 Monte a seguinte tabela entre a distância do anteparo e o comprimento do padrão de difração, com os respectivos erros para cada uma das redes (Rede 2 e Rede 3):

Tabela 4: Distância (cm) & Comprimento do padrão (mm)

Distância (cm)	Comprimento do padrão (mm)

C.2 Utilizando os dados da **Tabela 4**, monte um gráfico de Distância (cm) x Comprimento do padrão (mm) para as Redes 2 e 3.

C.3 Utilizando a relação obtida no item A.1 e o gráfico do C.2, obtenha a relação linhas/mm para as Redes 2 e 3.
Dica: você pode obter o coeficiente angular do gráfico pelo método gráfico ou regressão linear.

7.2.5 Difração de fenda única - Dificuldade média - 2h30m

Introdução

A difração é um fenômeno ondulatório que descreve o desvio e espalhamento de uma onda ao passar por uma abertura ou contornar um obstáculo, sendo o efeito mais pronunciado quando o tamanho da abertura ou do obstáculo é semelhante ao comprimento de onda da onda. Este fenômeno demonstra a natureza ondulatória da luz, com aplicações em tecnologias como hologramas e microscópios eletrônicos, e é um fenômeno comum em ondas sonoras.

Materiais

Caso você deseje replicar esse experimento sem o uso de simuladores, você precisará de alguns materiais:

- Laser
- Uma fenda, que pode ser improvisada com papel e fita
- Régua
- Trena

Apresentando o simulador

Para realizar este experimento, utilizaremos o simulador do Laboratório Virtual de Física da UFC disponível [neste link](#). Caso necessário, utilize o botão “*Full Screen*” no canto inferior direito do simulador.

Para essa interface, podemos encontrar as seguintes ferramentas:

1. Escolha da cor do laser
2. Ajuste da distância entre a fenda e o anteparo
3. Escolha da largura da fenda
4. Uma régua para a medição do padrão de difração

Estudo da difração

Para essa montagem, a seguinte equação descreve a posição dos mínimos:

$$D \sin \theta_{\min} = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

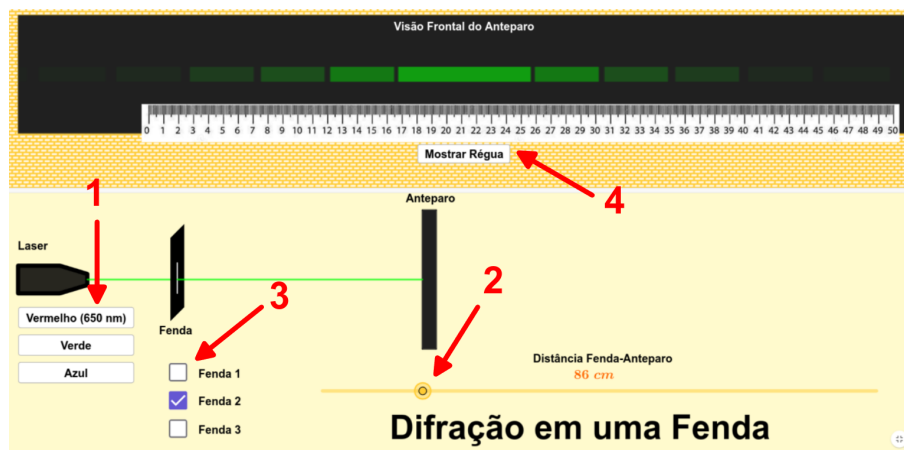


Figura 7.2: Interface do simulador

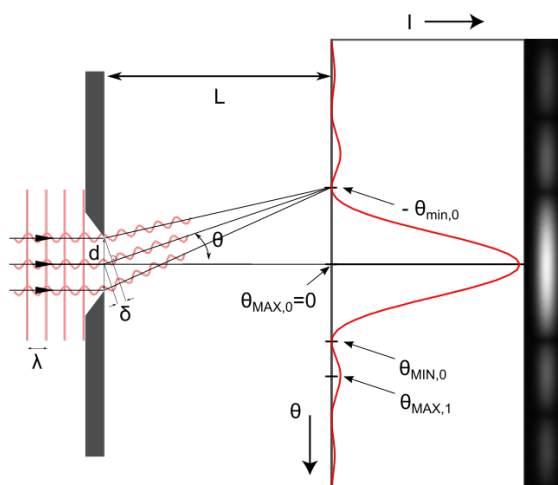


Figura 7.3: Esquema do experimento. Imagem por jkrieger / CC By

A.1 Demonstre a fórmula mostrada para os mínimos da difração.

Para a determinação dos comprimentos de onda das cores azul e verde, será necessário calcular a largura de uma das fendas com uma boa precisão.

A.2 Monte uma tabela seguindo o modelo da **Tabela 1** e um gráfico para uma das fendas usando uma distância Fenda-Anteparo adequada. Explique suas escolhas.

Tabela 1: $n \times \sin \theta_n$

n	$\sin \theta_n$

Dica: Caso necessário, utilize $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ para $\theta \ll 1$ medido em radianos.

A.3 Determine a largura da fenda escolhida com sua respectiva incerteza.

A.4 Repetindo o procedimento do item A.1, determine o comprimento de ondas para as cores azul e verde e suas incertezas. Para isso, utilize a mesma fenda dos itens anteriores.

A.5 Determine a largura das outras duas fendas com suas incertezas. Utilize as cores e distâncias mais adequadas e justifique suas escolhas.

7.3 Soluções

7.3.1 Lei de Snell

Parte A: Lei de Snell entre o ar e um meio desconhecido

Solução A.1

Como nossas medidas podem ir de 0° até 90° , a diferença entre cada θ_1 medido foi de 6° , obtendo 15 medidas:

Tabela 1: $\theta_1 \times \theta_2$

$(\theta_1 \pm 0,5)^\circ$	$(\theta_2 \pm 0,5)^\circ$
0,0	0,0
6,0	2,5
12,0	4,9
18,0	7,3
24,0	9,7
30,0	11,9
36,0	14,1
42,0	16,1
48,0	17,9
54,0	19,6
60,0	21,0
66,0	22,2
72,0	23,2
78,0	23,9
84,0	24,3

Solução A.2

Pela lei de snell:

$$\sin \theta_1 = n_A \cdot \sin \theta_2$$

Logo:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n_A}$$

Solução A.3

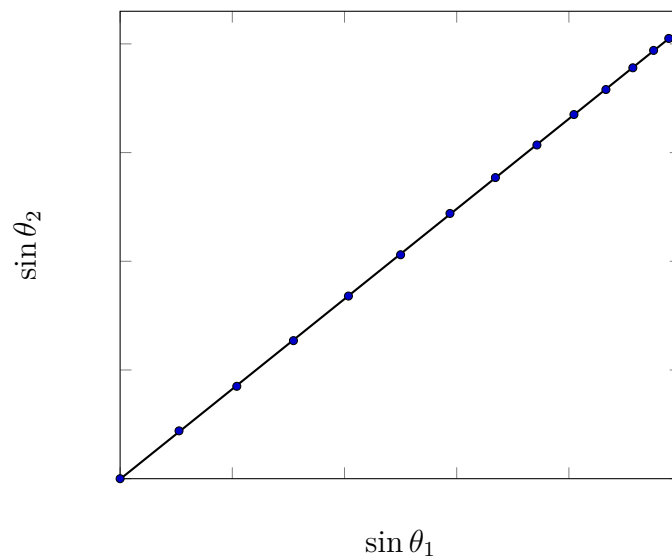
Sendo o erro de $\sin \theta$ da forma:

$$\sigma_{\sin \theta} = \cos \theta \cdot \sigma_\theta$$

Com σ_θ em radianos. Assim, temos:

Tabela 2: $\sin \theta_1$ x $\sin \theta_2$

$\sin \theta_1$	$\sin \theta_2$
$0,000 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,000 \pm 9 \cdot 10^{-3}$
$0,052 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,089 \pm 9 \cdot 10^{-3}$
$0,105 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,181 \pm 9 \cdot 10^{-3}$
$0,156 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,270 \pm 8 \cdot 10^{-3}$
$0,208 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,358 \pm 8 \cdot 10^{-3}$
$0,259 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,446 \pm 8 \cdot 10^{-3}$
$0,309 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,533 \pm 7 \cdot 10^{-3}$
$0,358 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,618 \pm 7 \cdot 10^{-3}$
$0,407 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,702 \pm 6 \cdot 10^{-3}$
$0,454 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,785 \pm 5 \cdot 10^{-3}$
$0,500 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,863 \pm 4 \cdot 10^{-3}$
$0,545 \pm 7 \cdot 10^{-3}$	$0,941 \pm 3 \cdot 10^{-3}$

Solução A.4Gráfico 1: $\sin \theta_1$ x $\sin \theta_2$

$$Y = A + BX$$

$$A = -(4 \pm 3) \times 10^{-4}$$

$$B = (0,4144 \pm 0,0004)$$

Do item **A.2**, tem-se:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n_A}$$

Comparando a equação anterior com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$\sin \theta_2 \rightarrow Y ; \sin \theta_1 \rightarrow X ; \frac{1}{n_A} \rightarrow B$$

Assim, isolando o n_A do B e calculando sua incerteza associada:

$$n_A = \frac{1}{B} ; \sigma(n_A) = \frac{1}{B^2} \sigma_B$$

Portanto, substituindo os valores:

$$n = (2,413 \pm 0,002)$$

Parte B: Lei de Snell entre dois meios

Solução B.1

Como o ângulo limite é aproximadamente 35° , a diferença entre cada θ_1 medido foi de 3° , obtendo 12 medidas:

Tabela 3: $\theta_1 \times \theta_2$

$(\theta_1 \pm 0,5)^\circ$	$(\theta_2 \pm 0,5)^\circ$
0,0	0,0
3,0	5,1
6,0	10,4
9,0	15,7
12,0	21,0
15,0	26,5
18,0	32,2
21,0	38,2
24,0	44,6
27,0	51,7
30,0	59,7
33,0	70,2

Solução B.2

Pela lei de snell:

$$n_A \cdot \sin \theta_1 = n_B \cdot \sin \theta_2$$

Logo:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_A}{n_B} \cdot \sin \theta_1$$

Solução B.3

Sendo o erro de $\sin \theta$ da forma:

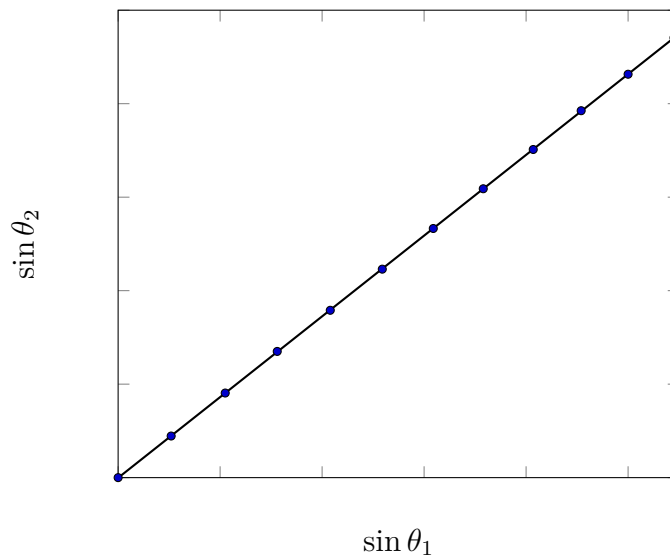
$$\sigma_{\sin \theta} = \cos \theta \cdot \sigma_{\theta}$$

Com σ_{θ} em radianos. Assim, temos:

Tabela 4: $\sin \theta_1$ x $\sin \theta_2$

$\sin \theta_1$	$\sin \theta_2$
$0,000 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,000 \pm 9 \cdot 10^{-3}$
$0,052 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,089 \pm 9 \cdot 10^{-3}$
$0,105 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,181 \pm 9 \cdot 10^{-3}$
$0,156 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,270 \pm 8 \cdot 10^{-3}$
$0,208 \pm 9 \cdot 10^{-3}$	$0,358 \pm 8 \cdot 10^{-3}$
$0,259 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,446 \pm 8 \cdot 10^{-3}$
$0,309 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,533 \pm 7 \cdot 10^{-3}$
$0,358 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,618 \pm 7 \cdot 10^{-3}$
$0,407 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,702 \pm 6 \cdot 10^{-3}$
$0,454 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,785 \pm 5 \cdot 10^{-3}$
$0,500 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	$0,863 \pm 4 \cdot 10^{-3}$
$0,545 \pm 7 \cdot 10^{-3}$	$0,941 \pm 3 \cdot 10^{-3}$

Solução B.4

Gráfico 1: $\sin \theta_1 \times \sin \theta_2$

$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 A &= -(5 \pm 4) \times 10^{-4} \\
 B &= (1,7274 \pm 0,0011)
 \end{aligned}$$

Do item **B.2**, tem-se:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_A}{n_B} \cdot \sin \theta_1$$

Comparando a equação anterior com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$\sin \theta_2 \rightarrow Y ; \sin \theta_1 \rightarrow X ; \frac{n_A}{n_B} \rightarrow B$$

Assim, isolando o n_B e calculando sua incerteza associada:

$$n_B = \frac{n_A}{B} ; \sigma_{n_B} = \sqrt{\left(\frac{n_A}{B^2} \cdot \sigma_B\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{n_A}}{B}\right)^2}$$

Portanto, substituindo os valores:

$$n = (1,3969 \pm 0,0015)$$

Parte C: índice de refração variando

Solução C.1

Foi definido θ_1 como 45° , pois é um ângulo próximo ao ângulo limite. A escolha desse ângulo dessa forma é interessante pois resultará em um θ_2 maior e com maior variação, melhorando o nosso resultado.

Tabela 5: λ x θ_2

$(\lambda \pm 0,5)$ nm	$(\theta_2 \pm 0,5)^\circ$
400	86,9
430	85,3
460	84,3
490	83,6
520	83,1
550	82,7
580	82,3
610	82,0
640	81,8
670	81,6
700	81,4

Solução C.2

Pela lei de snell:

$$\left(a + \frac{b}{\lambda^2}\right) \cdot \sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

Logo:

$$\sin \theta_2 = a \cdot \sin \theta_1 + \frac{b}{\lambda^2} \cdot \sin \theta_1$$

Solução C.3

Para nossa tabela, usaremos $x \rightarrow \frac{1}{\lambda^2}$. Sendo o erro dele:

$$\sigma_x = \frac{2}{\lambda^3} \cdot \sigma_\lambda$$

E sendo o erro de $\sin \theta$ da forma:

$$\sigma_{\sin \theta} = \cos \theta \cdot \sigma_{\theta}$$

Com σ_{θ} em radianos. Assim, temos:

Tabela 6: $\lambda^{-2} \times \sin \theta_2$

$\lambda^{-2} \text{ (m}^{-2}\text{)}$	$\sin \theta_2$
$(6250 \pm 15) \cdot 10^9$	$0,9985 \pm 5 \cdot 10^{-4}$
$(5408 \pm 13) \cdot 10^9$	$0,9966 \pm 7 \cdot 10^{-4}$
$(4726 \pm 10) \cdot 10^9$	$0,9950 \pm 9) \cdot 10^{-4}$
$(4165 \pm 8) \cdot 10^9$	$0,9937 \pm 1,0 \cdot 10^{-3}$
$(3698 \pm 7) \cdot 10^9$	$0,9927 \pm 1,0 \cdot 10^{-3}$
$(3306 \pm 6) \cdot 10^9$	$0,9918 \pm 1,1 \cdot 10^{-3}$
$(2973 \pm 5) \cdot 10^9$	$0,9909 \pm 1,1 \cdot 10^{-3}$
$(2687 \pm 4) \cdot 10^9$	$0,9902 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$
$(2441 \pm 4) \cdot 10^9$	$0,9897 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$
$(2228 \pm 3) \cdot 10^9$	$0,9892 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$
$(2041 \pm 3) \cdot 10^9$	$0,9887 \pm 1,3 \cdot 10^{-3}$

Solução C.4

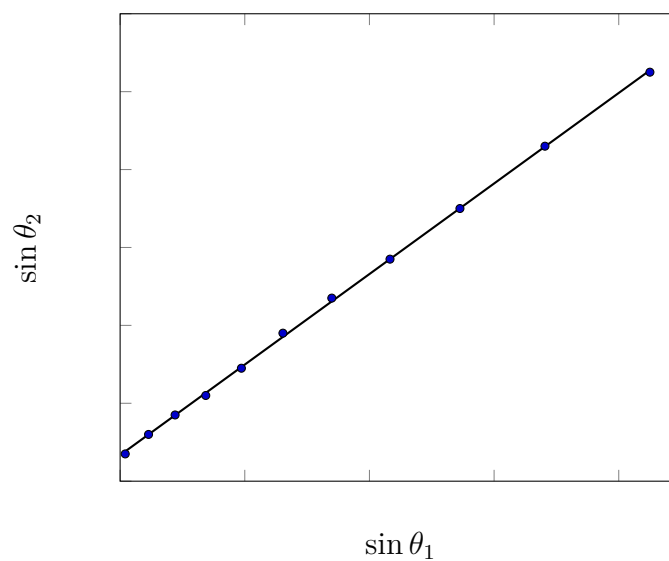


Gráfico 1: $\lambda^{-2} \times \sin \theta_2$

$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 A &= (0,9834 \pm 0,0005) \\
 B &= (24,4 \pm 1,3) \times 10^{-7} \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Do item **C.2**, tem-se:

$$\sin \theta_2 = a \cdot \sin \theta_1 + \frac{b}{\lambda^2} \cdot \sin \theta_1$$

Comparando a equação anterior com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$\sin \theta_2 \rightarrow Y ; \lambda^{-2} \rightarrow X ; a \cdot \sin \theta_1 \rightarrow A ; b \cdot \sin \theta_1 \rightarrow B$$

Isolando o a e calculando sua incerteza associada:

$$a = \frac{A}{\sin \theta_1} ; \sigma_a = \sqrt{\left(\frac{A}{(\sin \theta_1)^2} \cdot \cos \theta_1 \sigma_\theta\right)^2 + \left(\frac{\sigma_A}{\sin \theta_1}\right)^2}$$

Assim, isolando o b e calculando sua incerteza associada:

$$b = \frac{B}{\sin \theta_1} ; \sigma_b = \sqrt{\left(\frac{B}{(\sin \theta_1)^2} \cdot \cos \theta_1 \sigma_\theta\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{\sin \theta_1}\right)^2}$$

Portanto, substituindo os valores:

$$a = (1,4 \pm 0,7)$$

$$b = (345 \pm 9) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Solução C.5

Analisando bem os resultados, podemos ver que o coeficiente $\mathbf{a}$ é semelhante ao n_B . Isso ocorre pois $\mathbf{a}$ é o índice de refração do meio para $\lambda \rightarrow \infty$, e, como a variação do comprimento de onda no espectro visível causa uma pequena variação no índice de

refração, ele é extremamente próximo a n_B , que é o índice para $\lambda = 650$ nm.

Para entendermos qual dos dois é mais preciso, vamos relembrar quais são as etapas para a determinação do índice de refração para $\lambda \rightarrow \infty$.

Na Lei de Snell, as medidas são feitas usando apenas um transferidor, por exemplo. Sendo assim, a incerteza experimental depende basicamente da resolução angular do equipamento.

Na Lei de Cauchy, além da incerteza angular, entra também a incerteza do comprimento de onda utilizado. Além disso, nela ajustam-se dois parâmetros, em vez de um (como ocorre na Lei de Snell). Quanto maior o número de parâmetros livres, maior tende a ser a incerteza associada a cada um deles, especialmente quando o número de medidas é tão limitado.

Além de tudo isso, o resultado da **Parte B** é mais preciso também porque o intervalo de ângulos medidos nela é bem maior, o que proporciona maior precisão.

Diante de tudo isso, ao analisarmos os valores e suas incertezas calculadas em cada parte, é visível que, na **Parte B**, a precisão do valor obtido é muito maior e sua incerteza, muito menor. Isso afirma que, para a obtenção do resultado requerido, a Lei de Snell possibilita o cálculo de valores mais precisos que a fórmula de Cauchy.

7.3.2 Prismas

Parte A: Determinando o desvio mínimo

Solução A.1

Uma sugestão de método para identificar o ângulo de desvio mínimo é o seguinte. Devemos manter o laser fixo na horizontal, de modo que, para calcular o desvio, basta calcular com que ângulo o raio sai em relação a horizontal. Basta girar o prisma, sem rotacioná-lo, para achar o ponto de mínimo e calculá-lo com o transferidor. No exemplo a seguir, o D_{min} é aproximadamente 40° .

Parte B: Análise teórica para desvio mínimo

Solução B.1 Utilizando do transferidor, podemos calcular o ângulo de abertura do Prisma $A = 60^\circ$.

Solução B.2 Isolando o $D_{\min}$ na equação teórica dada, chegamos que:

$$D_{\min} = 2 \arcsin \left(\frac{n_{\text{obj}}}{n_{\text{meio}}} \sin \left(\frac{A}{2} \right) \right) - A$$

Ao colocar os dados na equação, $A = 60^\circ$; $n_{\text{meio}} = 1$ e $n_{\text{objeto}} = 1,5$, concluímos que: $D_{\min} = 37,2^\circ$.

Solução B.3 Usando a equação com $D_{\min}$ isolado do item passado, vamos colocar valores arbitrários de n_{objeto} para entender o comportamento da função. Os valores que constarão na tabela dependerão dos índices de refração escolhidos, mas, para índices variando de 0,05, temos a seguinte tabela:

Tabela 7.1: $D_{\min}$ por n_{objeto}

n_{objeto}	$D_{\min} (^\circ)$
1,05	3,34
1,10	6,73
1,15	10,20
1,20	13,74
1,25	17,36
1,30	21,08
1,35	24,91
1,40	28,85
1,45	32,94
1,50	37,18
1,55	41,61
1,60	46,26

O gráfico para esses índices de refração será o seguinte:

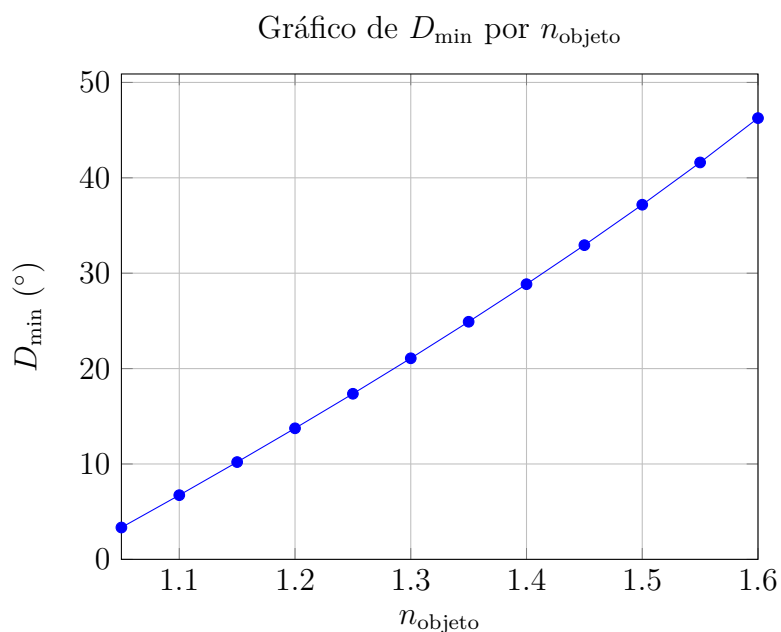


Figura 7.4: Gráfico de $D_{\min}$ em função de n_{objeto}

Parte C: Comparação teoria e experimental

Solução C.1 Pela geometria do prisma, usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que a normal forma 90° com a superfície, temos que:

$$D = i + i' - r - r'$$

e

$$r + r' = A$$

Usando a Lei de Snell nas duas interfaces, temos que

$$n_{\text{meio}} \text{sen}(i) = n_{\text{obj}} \text{sen}(r)$$

e

$$n_{\text{obj}} \text{sen}(r') = n_{\text{meio}} \text{sen}(i')$$

Resolvendo as equações, temos que:

$$\text{sen}(i) = \frac{n_{\text{obj}}}{n_{\text{meio}}} \text{sen}(r)$$

$$\text{sen}(r') = \text{sen}(A - r) = \frac{n_{\text{meio}}}{n_{\text{obj}}} \text{sen}(i')$$

$$r = A - \arcsin\left(\frac{n_{meio}}{n_{obj}} \sin(i')\right)$$

$$i = \arcsin\left(\frac{n_{obj}}{n_{meio}} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_{meio}}{n_{obj}} \sin(i')\right)\right)\right)$$

Por fim, usando a equação do desvio, chegamos em:

$$D = i + i' - r - r' = i' + \arcsin\left(\frac{n_{obj}}{n_{meio}} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_{meio}}{n_{obj}} \sin(i')\right)\right)\right) - A$$

Solução C.2 Devemos monitorar um esquema que seja fácil medir o desvio do Prisma. Deste modo, deixaremos o laser incidente sempre na horizontal, de modo que o ângulo entre o raio que sai e a horizontal seja o desvio. Após realizar as medições, devemos anotar os valores de i' e seus respectivos D . Após isso, devemos por esses valores de i' na equação achada em C.1 (com o auxílio da calculadora, claro). Fazendo isso, devemos ter um tabela como a seguinte:

Tabela 1: D_{exp} e D_{teo} por i' .

$i'(^{\circ})$	(D_{exp}) m	D_{teo}
63	54	39,8
62	49	39,5
60	48	38,9
58	46	38,4
56	43	37,9
55	42	37,7

Por fim, podemos plotar os gráficos de desvio por i' nas situações teórica e experimental:

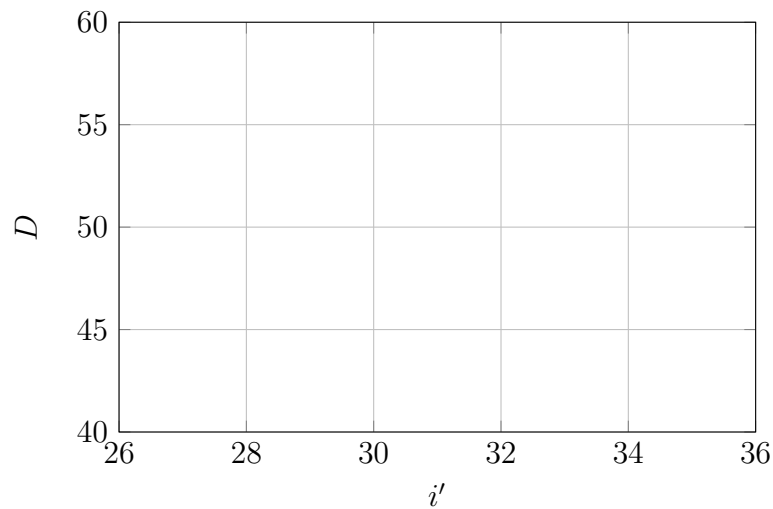


Figura 7.5: Gráfico de D_{exp} por i'

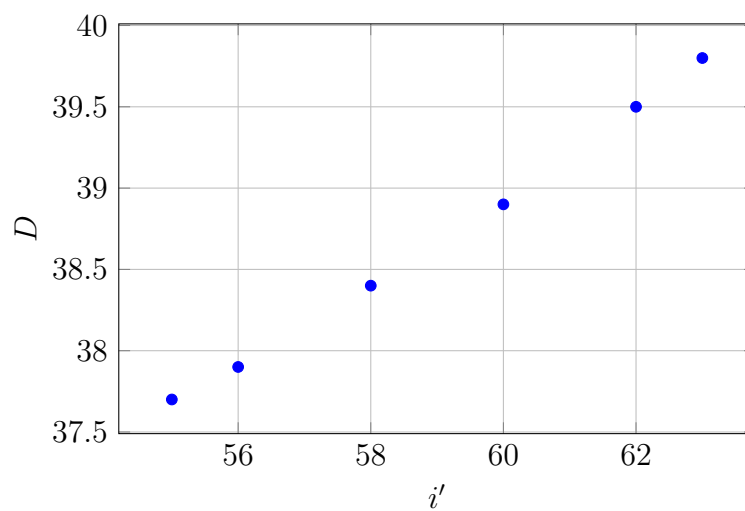


Figura 7.6: Gráfico de D_{teo} por i'

7.3.3 Lei de Malus

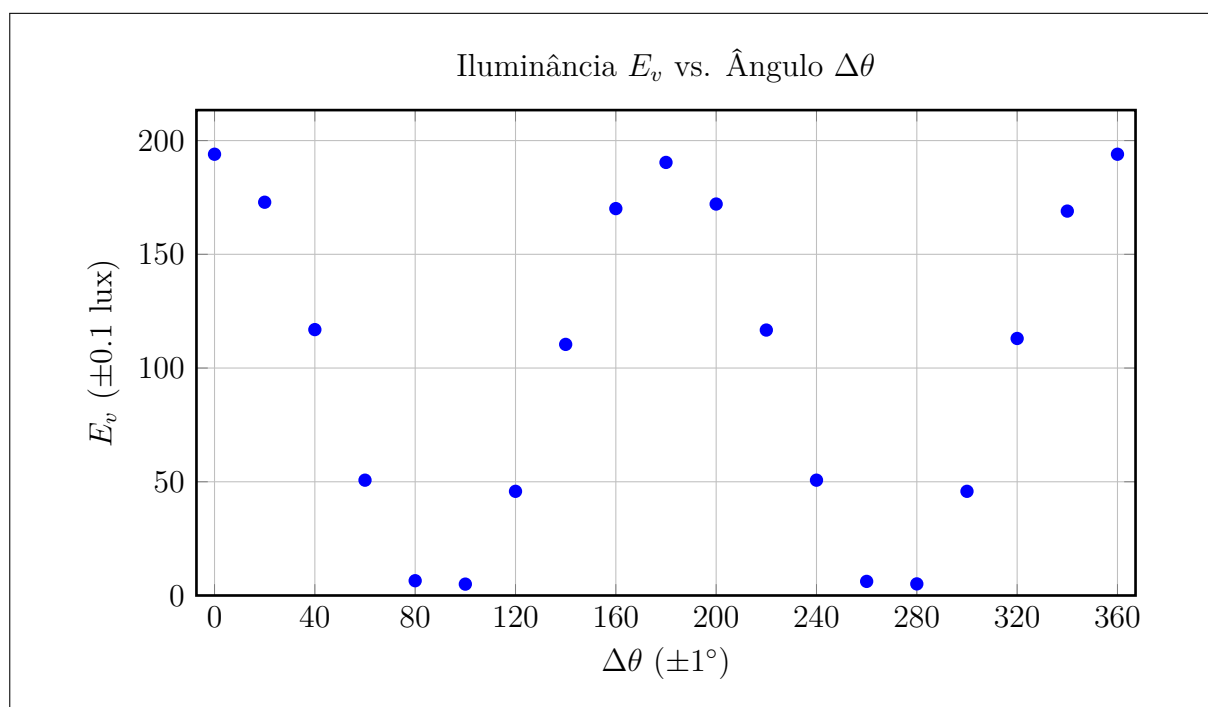
Solução A.1 Girar os polarizadores simultaneamente não altera a leitura do sensor. Logo, **não** podemos afirmar que a luz é linearmente polarizada em uma direção. Agora, analisando a iluminância em termos de $\Delta\theta$:

- $\Delta\theta = 0$ e $\Delta\theta = \pi$ produzem iluminância máxima (194,0 lux)
- $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta\theta = \frac{3\pi}{2}$ produzem iluminância mínima (≈ 0 lux)

Note que se o experimento for feito sem o uso de simuladores, é possível que a iluminância mínima seja não nula. Porém, isso afetará a futura regressão linear somente por um fator constante na reta.

Solução A.2 Com base nos dados obtidos:

$\Delta\theta$ ($\pm 1^\circ$)	E_v ($\pm 0,1$ lux)
0°	194,0
20°	172,9
40°	116,9
60°	50,7
80°	6,5
100°	5,0
120°	45,8
140°	110,4
160°	170,1
180°	190,4
200°	172,1
220°	116,7
240°	50,7
260°	6,2
280°	5,1
300°	45,8
320°	113,0
340°	169,0
360°	194,0

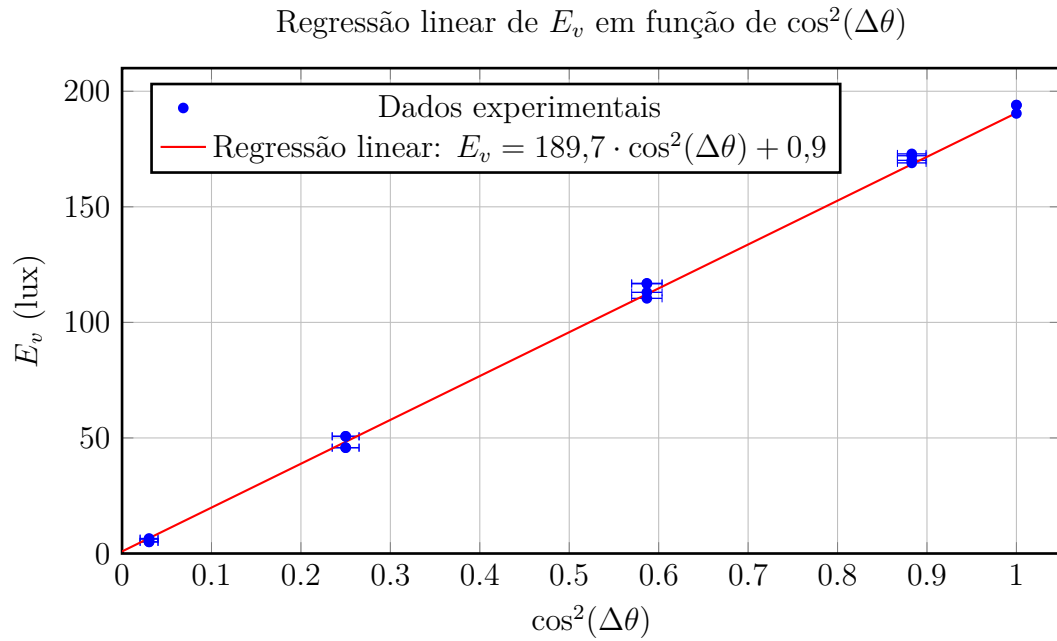


Solução A.3

Pela Lei de Malus, $E_v = E_1 + E_0 \cos^2 \Delta\theta$ podemos construir uma tabela com dados linearizados:

Tabela 3: $\cos^2(\Delta\theta) \times E_v$

$\cos^2(\Delta\theta)$	$E_v (\pm 0.1 \text{ lux})$
1.000 ± 0.000	194.0
0.883 ± 0.016	172.9
0.587 ± 0.017	116.9
0.250 ± 0.015	50.7
0.030 ± 0.010	6.5
0.030 ± 0.010	5.0
0.250 ± 0.015	45.8
0.587 ± 0.017	110.4
0.883 ± 0.016	170.1
1.000 ± 0.000	190.4
0.883 ± 0.016	172.1
0.587 ± 0.017	116.7
0.250 ± 0.015	50.7
0.030 ± 0.010	6.2
0.030 ± 0.010	5.1
0.250 ± 0.015	45.8
0.587 ± 0.017	113.0
0.883 ± 0.016	169.0
1.000 ± 0.000	194.0



(Nem todos os pontos são visíveis com facilidade)

Para a regressão linear, $R^2 = 0.9991$. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 1}} \approx 1.0$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 0.9$$

Assim, a reta obtida é da forma: $E_v = (189.7 \pm 1.0) \cos^2(\Delta\theta) + (0.9 \pm 0.9)$

Esses valores nos permitem assumir que o polarizador é ideal, pois o coeficiente de correlação indica um bom ajuste, e o coeficiente linear é estatisticamente nulo, reafirmando a formula teórica do enunciado.

7.3.4 Redes de difração

Parte A: Relações fundamentais e conhecendo o experimento

Solução A.1

A diferença de caminho óptico (C.O.) para os dois raios é de

$$\Delta C.O. = x \sin \theta$$

e, como a distância D é muito maior que a altura y da imagem do máximo, logo, temos que

$$\theta \approx \frac{y}{D}$$

Por fim, para termos um máximo, a diferença de caminho óptico deve ser igual a um múltiplo do comprimento de onda; também usando a aproximação de que, para um ângulo pequeno, seu valor é aproximadamente igual ao de seu seno (em radianos):

$$\Delta \text{C.O.} = n\lambda = x \sin \theta \approx x\theta$$

Então, finalmente

$$y = \frac{n\lambda D}{x} = \frac{n\lambda D}{x}$$

já que o enunciado usa x como a distância entre as fendas.

Solução A.2

O erro da régua é de 0,5 mm (não é necessário incluir na tabela caso seja especificado anteriormente).

Para a cor verde:

Tabela 1.1 (verde): Distância (cm) e $\sigma_{\text{rel}}(cm)$

Distância (cm)	$\sigma_{\text{rel}}(cm)$
60,0	0,09
70,0	0,07
80,0	0,05
90,0	0,04
100,0	0,03
130,0	0,023
160,0	0,011
190,0	0,005

Para a cor azul:

Tabela 1.2 (azul): Distância (cm) e $\sigma_{\text{rel}}(cm)$

Distância (cm)	$\sigma_{rel}(cm)$
60,0	0,15
70,0	0,07
80,0	0,05
90,0	0,04
100,0	0,04
130,0	0,017
160,0	0,013
190,0	0,007

Para a cor vermelha:

Tabela 1.3 (vermelho): Distância (cm) e $\sigma_{rel}(cm)$

Distância (cm)	$\sigma_{rel}(cm)$
60,0	0,09
70,0	0,06
80,0	0,04
90,0	0,04
100,0	0,03
130,0	0,019
160,0	0,007
190,0	0,008

Solução A.3 Apesar das tabelas poderem levar à ilusão de que o vermelho pode ser melhor do que o azul para a maior parte das distâncias, é importante notar que a cor vermelha apresenta menores desvios padrões relativos não por apresentar "menor discrepância", e simplesmente porque as faixas formadas quando é utilizada a cor vermelha são maiores do que com azul e verde, fato que inclusive está de acordo com o modelo teórico do item A.1.

Em situações normais, frequências maiores apresentariam menor desvio-padrão relativo pois o comprimento das faixas é menor, e, como estamos trabalhando com ângulos pequenos, quanto menor o tamanho da faixa, mais estamos próximos de ângulos de fato pequenos. Contudo, neste simulador, dois problemas surgem: 1 - o número de pontos disponíveis para medir comprimentos de faixa é maior para

as menores frequências, de forma que as medições apontarão variações maiores (na coletânea de dados) para frequências maiores; 2 - a régua traz altíssima imprecisão de medição, inclusive sendo bem plausível se obter valores de tabela ligeiramente diferente dos escritos aqui no gabarito. O erro da régua é sempre o mesmo (0,5mm), assim como o erro humano de visão. Contudo, os comprimentos de faixa são maiores para as frequências menores, levando portanto a erros relativos menores.

Além disso, é importante notar que as melhores medições claramente são das faixas mais internas, já que são os ângulos de fato menores. É interessante coletar não apenas uma medida para cada distância, pois pode haver erro. Para o resto da solução, para cada distância irá se adotar a metodologia de medir o comprimento do máximo central e do primeiro máximo (dos dois lados), e entre o segundo máximo e o primeiro máximo (também de cada lado), para trazer maior precisão; faixas mais distantes apresentarão erro maior por virem de ângulos maiores. Basicamente, até o 3º máximo ainda teremos medidas boas, mas utilizaremos aqui até o 2º máximo. É interessante observar que, utilizando essa metodologia, as medições tenderão a ser melhores para as cores de maior frequência, já que o fenômeno 1 que trouxe o resultado estranho nas tabelas não irá mais interferir no nosso trabalho.

Conforme também é possível analisar pelas tabelas, os erros relativos de maneira geral caíram vertiginosamente quando trabalhando com distâncias acima de 100cm, com erro relativo abaixo ou por volta de 0,20cm, o que é resultado bastante produtivo. Por conta disso, também irá se tomar a metodologia de medir apenas acima dessa distância no restante do experimento, visando diminuir a propagação de erros.

Parte B: Obtendo as propriedades das cores

Utilizando a relação obtida no item A.1, onde y é o comprimento do padrão de difração formado, entre cada máximo $\Delta n = 1$, logo podemos relacionar que

$$\Delta y = (\Delta n) \frac{\lambda D}{x} = \frac{\lambda D}{x} \Rightarrow \frac{(\Delta y)x}{D} = \lambda$$

onde x é a distância entre fendas e D é a distância do anteparo (que será medida). A rede conhecida tem como propriedade 80 linhas/mm, que é o mesmo que dizer que cada fenda dista entre si $1/80 \text{ mm} = 0,0125 \text{ mm} = x$. Colocando o comprimento de

onda em nm e o comprimento do padrão em mm, teremos numericamente que

$$1250 \left(\frac{\Delta y/\text{mm}}{D/\text{cm}} \right) = \lambda/\text{nm}$$

Utilizando também os métodos descritos no item A.3, agora iremos às tabelas:

Tabela 2.1 (verde): Distância (*cm*) x Comprimento de onda (*nm*)

Distância (<i>cm</i>)	Comprimento de onda (<i>nm</i>)
120,0	531,3
130,0	531,3
140,0	531,3
150,0	532,1
160,0	529,3
170,0	534,9
180,0	533,0
190,0	534,5
200,0	532,8
210,0	534,2
220,0	532,7
230,0	534,0
240,0	535,1
250,0	533,8

Obtém-se logo que

$$\lambda_{\text{verde}} = (532,9 \pm 0,4) \text{ nm}$$

Tabela 2.2 (azul): Distância (cm) x Comprimento de onda (nm)

Distância (cm)	Comprimento de onda (nm)
120,0	408,9
130,0	409,6
140,0	406,3
150,0	406,3
160,0	408,2
170,0	405,9
180,0	407,9
190,0	407,9
200,0	406,3
210,0	404,8
220,0	404,8
230,0	406,0
240,0	406,3
250,0	406,0

Obtém-se logo que

$$\lambda_{\text{azul}} = (406,8 \pm 0,4) \text{ nm}$$

Tabela 2.3 (vermelho): Distância (cm) x Comprimento de onda (nm)

Distância (cm)	Comprimento de onda (nm)
120,0	653,6
130,0	656,7
140,0	654
150,0	652,0
160,0	653,9
170,0	653,7
180,0	652,5
190,0	651,3
200,0	650
210,0	648,9
220,0	650,6
230,0	652,2
240,0	651,0
250,0	650,0

Obtém-se logo que

$$\lambda_{\text{vermelho}} = (652,2 \pm 0,5) \text{ nm}$$

Solução B.2 Basta medir a distância entre o primeiro máximo e o máximo central (ou, se preferir, por conta das imprecisões da régua, a média entre a distância do primeiro máximo ao máximo central e a distância do segundo máximo ao primeiro, já que 170cm ainda não gera comprimentos de padrão muito grandes) para cada uma das cores, que agora poderão ser identificadas pelos seus comprimentos de onda, obtidos no item B.1.

Tabela 3: Comprimento de onda (nm) x Comprimento do padrão (mm)

Comprimento de onda (nm)	Comprimento do padrão (mm)
652,2	88,7
532,9	72,7
406,8	55,3

Fazendo uma regressão linear com esses (miseráveis) dados, o valor de r encontrado é $r = 0,99997$, o que indica uma boa linearidade. Apesar de que isso não seja definitivo e muitas relações que não são lineares possam ter r muito alto em regiões específicas, ainda assim é um bom indicativo. É esperada uma relação linear, com base na teoria desenvolvida.

Parte C: Descobrimos as outras redes

Solução C.1 Conforme mencionado anteriormente, a cor mais apropriada seria o azul, de maior frequência e assim levando a menores incoerências com o modelo utilizado. Contudo, também faz sentido utilizar a cor verde, já que, apesar de ter comprimento maior, os comprimentos de padrão de difração são maiores e permitem medições significativamente melhores. Sendo esse aspecto tão subjetivo, faz-se então as tabelas para todas as cores.

Tabela 4.2.1 (verde, rede 2): Distância (cm) & Comprimento do padrão (mm)

Distância (<i>cm</i>)	Comprimento do padrão (<i>mm</i>)
120,0	64,0
130,0	69,0
140,0	74,5
150,0	80,0
160,0	85,0
170,0	90,5
180,0	95,5
190,0	101,5
200,0	106,5
210,0	111,5
220,0	117,0
230,0	122,0
240,0	127,5
250,0	133,0

Tabela 4.2.2 (azul, rede 2): Distância (*cm*) x Comprimento do padrão (*mm*)

Distância (<i>cm</i>)	Comprimento do padrão (<i>mm</i>)
120,0	48,5
130,0	52,5
140,0	57,0
150,0	61,0
160,0	65,0
170,0	69,0
180,0	73,0
190,0	77,0
200,0	81,0
210,0	85,0
220,0	89,5
230,0	93,5
240,0	97,5
250,0	101,5

Tabela 4.2.3 (vermelho, rede 2): Distância (*cm*) x Comprimento do padrão (*mm*)

Distância (<i>cm</i>)	Comprimento do padrão (<i>mm</i>)
120,0	78,0
130,0	84,5
140,0	91,0
150,0	97,5
160,0	104,0
170,0	110,5
180,0	117,5
190,0	123,5
200,0	130,0
210,0	136,5
220,0	143,5
230,0	150,0
240,0	156,5
250,0	163,0

Tabela 4.3.1 (verde, rede 3): Distância (*cm*) x Comprimento do padrão (*mm*)

Distância (<i>cm</i>)	Comprimento do padrão (<i>mm</i>)
50,0	80,5
60,0	97,0
70,0	113,0
80,0	128,5
90,0	146
100,0	161,5
110,0	178,0
120,0	194,0
130,0	210,0
140,0	226,5
150,0	243,5

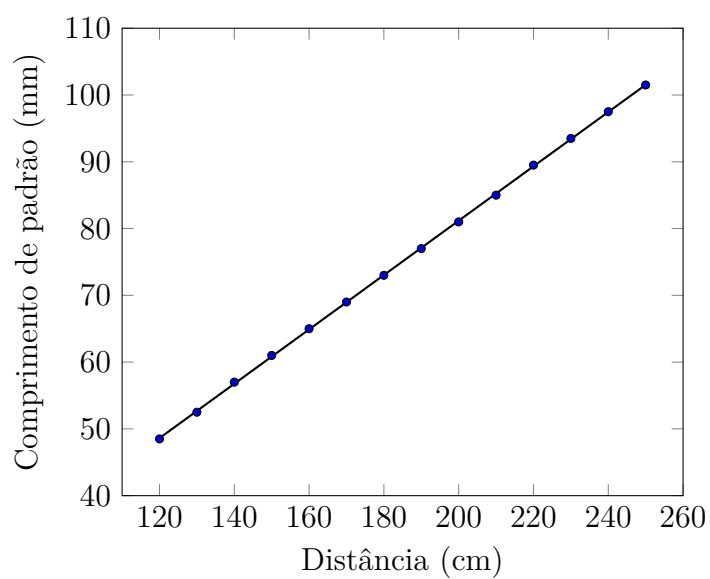
Tabela 4.3.2 (azul, rede 3): Distância (*cm*) x Comprimento do padrão (*mm*)

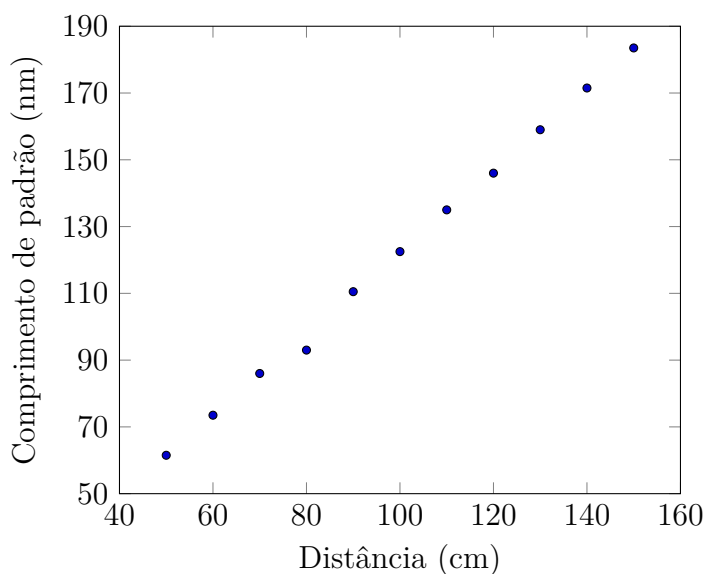
Distância (<i>cm</i>)	Comprimento do padrão (<i>mm</i>)
50,0	61,5
60,0	73,5
70,0	86,0
80,0	93,0
90,0	110,5
100,0	122,5
110,0	135,0
120,0	146,0
130,0	159,0
140,0	171,5
150,0	183,5

Tabela 4.3.3 (vermelho, rede 3): Distância (*cm*) & Comprimento do padrão (*mm*)

Distância (<i>cm</i>)	Comprimento do padrão (<i>mm</i>)
50,0	99,0
60,0	119,0
70,0	139,0
80,0	159,0
90,0	179,0
100,0	199,0
110,0	218,5
120,0	238,5
130,0	258,5
140,0	278,0
150,0	298,0

Solução C.2 Utilizando a luz azul como padrão, temos os seguintes gráficos, respectivamente, para as redes 2 e 3:





Solução C.3 Reciclando a relação obtida na Parte B, vinda da teoria do item A.1:

$$\frac{(\Delta y)_a}{D} = \lambda \Rightarrow \Delta y = y = \frac{\lambda}{a} D = B \cdot x$$

Onde foi feito um processo de linearização, isto é, chamando $\Delta y = y$ e $D = x$, onde B é o coeficiente angular e, teoricamente, o coeficiente linear A é nulo. Logo, basta fazer uma regressão linear com os valores para obter o valor de $1/a$ para cada rede (o que dá o valor numérico da quantidade de fendas por unidade de comprimento)

Rede 2:

(a) Para verde:

$$r = 0,99996; B = (0,05304 \pm 0,00014); A = (0,0262 \pm 0,026)$$

$$\frac{\Delta n_{2,vd}}{\Delta l} = \frac{1}{a} = \frac{B}{\lambda} = (99,54 \pm 0,27) \text{ linhas/mm}$$

(b) Para azul:

$$r = 0,99996; B = (0,04070 \pm 0,00011); A = -(0,023 \pm 0,020)$$

$$\frac{\Delta n_{2,az}}{\Delta l} = (100,06 \pm 0,29) \text{ linhas/mm}$$

(c) Para vermelho:

$$r = 0,99998; B = (0,06543 \pm 0,00012); A = -(0,061 \pm 0,023)$$

$$\frac{\Delta n_{2,vm}}{\Delta l} = (100,32 \pm 0,20) \text{ linhas/mm}$$

Rede 3:

(a) Para verde:

$$r = 0,99997; B = (0,1625 \pm 0,0004); A = -(0,08 \pm 0,04)$$

$$\frac{\Delta n_{3,vd}}{\Delta l} = (304,4 \pm 0,8) \text{ linhas/mm}$$

(b) Para azul:

$$r = 0,9993; B = (0,1229 \pm 0,0015); A = -(0,09 \pm 0,16) \approx 0$$

$$\frac{\Delta n_{3,az}}{\Delta l} = (302 \pm 4) \text{ linhas/mm}$$

(c) Para vermelho:

$$r = 0,999996; B = (0,19891 \pm 0,00018); A = -(0,023 \pm 0,019)$$

$$\frac{\Delta n_{3,vm}}{\Delta l} = (305,0 \pm 0,4) \text{ linhas/mm}$$

Finalmente, para determinar a melhor estimativa para cada um, podemos tomar a **média ponderada pelos inversos dos quadrados das incertezas**, que faz com que a estimativa esteja mais próxima de valores com menor erro associado:

7.3.5 Difração de fenda única

Solução A.1

Podemos esboçar os raios de luz que estão saindo da fenda:

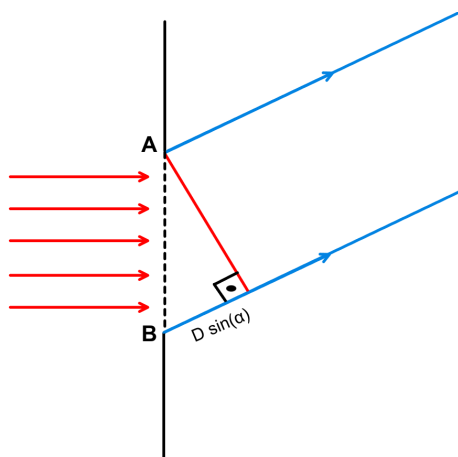


Figura 7.7: Esboço da solução

Seja P um ponto em $\overline{AB}$ que possui fase ϕ em relação ao raio emergente de A . Note que se B produz diferença de fase múltipla de 2π em relação a A , então existe um ponto P' que possui fase $\pi + \phi$ (ou $\phi - \pi$, pois estamos trabalhando em “módulo 2π ”) em relação a A , o que gera interferência destrutiva entre os raios de P e P' . Assim:

$$2\pi n = kD \sin \alpha$$

$$D \sin \alpha = n\lambda$$

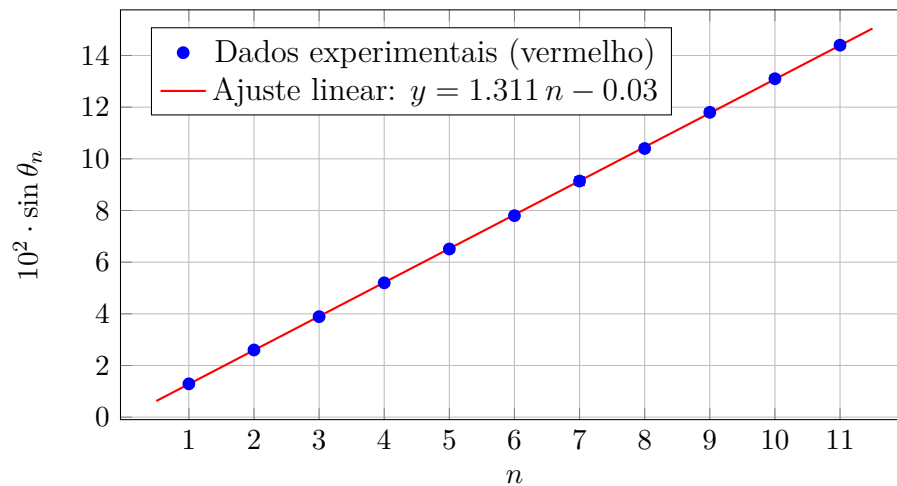
Solução A.2

Note que a fenda 1 possui uma quantidade muito boa de pontos para o laser vermelho. Além disso, podemos diminuir a distância para aumentar o número de pontos ao mesmo tempo que a precisão da medida dos mínimos é preservada. Para a seguinte tabela, $L = 175$ cm foi utilizado:

Tabela 1: $n \times \sin \theta_n$

n	$10^2 \times \sin \theta_n$
1	1.29 ± 0.09
2	2.60 ± 0.09
3	3.89 ± 0.11
4	5.20 ± 0.11
5	6.51 ± 0.11
6	7.80 ± 0.09
7	9.14 ± 0.17
8	10.4 ± 0.2
9	11.8 ± 0.2
10	13.1 ± 0.2
11	14.4 ± 0.2

Para estimar a incerteza da medida, o tamanho angular da franja escura dividido por 2 foi utilizado. O gráfico construído com os dados experimentais é mostrado abaixo:



Para a regressão linear, $R^2 = 0,99997$. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 1}} \approx 0.002$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 0.014$$

Assim, a reta obtida é da forma: $10^2 \sin \theta_n = -(0.035 \pm 0.014) + (1.311 \pm 0.002)n$
 $\sin \theta_n = -(3.5 \pm 1.4)10^{-4} + (1.311 \pm 0.002)10^{-2}n$

Solução A.3

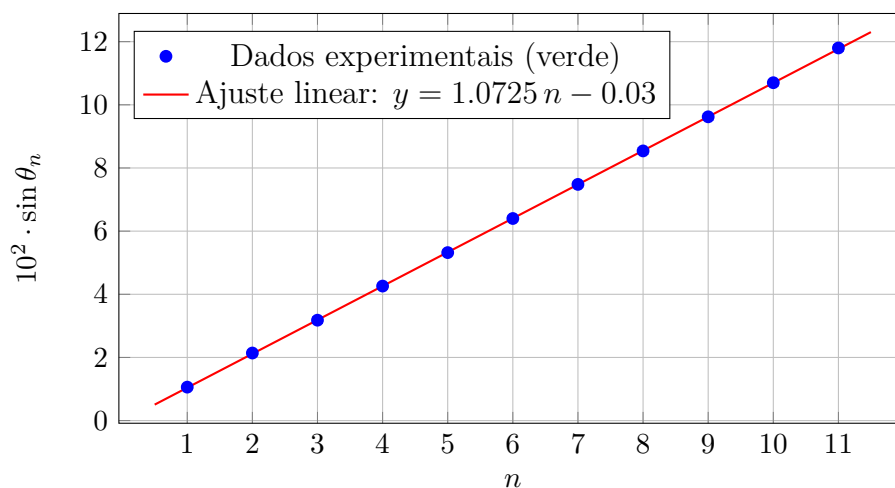
$$D \sin \theta_n = n\lambda \implies D = \frac{n \sin \theta_n}{\lambda_{\text{vermelho}}} = \frac{650 \text{ nm}}{(1.311 \pm 0.002)10^{-2}} = \boxed{(49.58 \pm 0.08)\mu\text{m}}$$

Solução A.4

Para o laser verde (usando $L = 250 \text{ cm}$):

Tabela 2: $n \times \sin \theta_n$

n	$10^2 \times \sin \theta_n$
1	1.06 ± 0.06
2	2.14 ± 0.06
3	3.18 ± 0.10
4	4.26 ± 0.06
5	5.32 ± 0.08
6	6.40 ± 0.08
7	7.48 ± 0.08
8	8.54 ± 0.10
9	9.62 ± 0.10
10	10.70 ± 0.10
11	11.80 ± 0.10



Para a regressão linear, $R^2 = 0,99998$. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 1}} \approx 0.0014$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 0.01$$

Assim, a reta obtida é da forma: $10^2 \sin \theta_n = -(0.03 \pm 0.01) + (1.0725 \pm 0.0014)n$

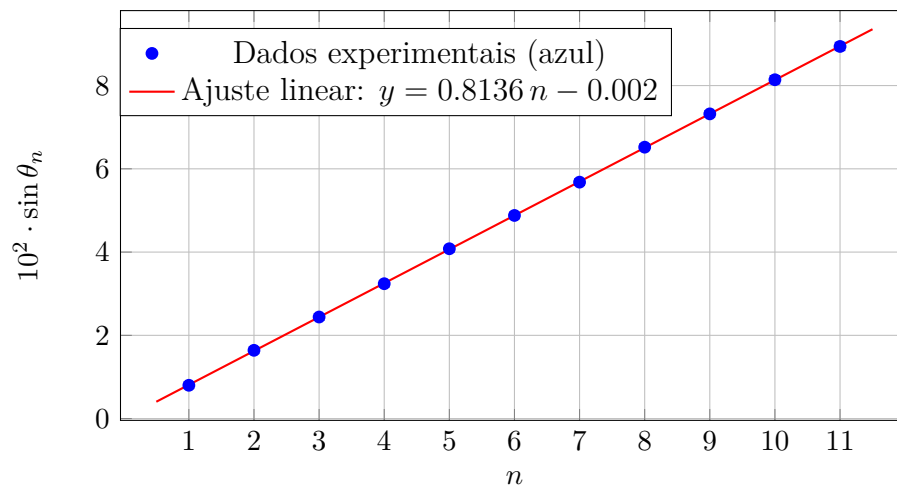
$$\sin \theta_n = -(0.03 \pm 0.01)10^{-2} + (1.0725 \pm 0.0014)10^{-2}n$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{verde}} = 650 \text{ nm} \frac{1.0725 \pm 0.0014}{1.311 \pm 0.002} = \boxed{(531.8 \pm 1.1)\text{nm}}$$

Para o laser azul (usando $L = 250 \text{ cm}$):

Tabela 3: $n \times \sin \theta_n$

n	$10^2 \times \sin \theta_n$
1	0.80 ± 0.08
2	1.64 ± 0.08
3	2.44 ± 0.08
4	3.24 ± 0.08
5	4.08 ± 0.08
6	4.88 ± 0.08
7	5.68 ± 0.08
8	6.52 ± 0.08
9	7.32 ± 0.08
10	8.14 ± 0.10
11	8.94 ± 0.10



Para a regressão linear, $R^2 = 0,99998$. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 1}} \approx 0.0010$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 0.007$$

Assim, a reta obtida é da forma: $10^2 \sin \theta_n = -(0.002 \pm 0.007) + (0.8136 \pm 0.0010)n$

$$\sin \theta_n = -(0.002 \pm 0.007)10^{-2} + (0.8136 \pm 0.0010)10^{-2}n$$

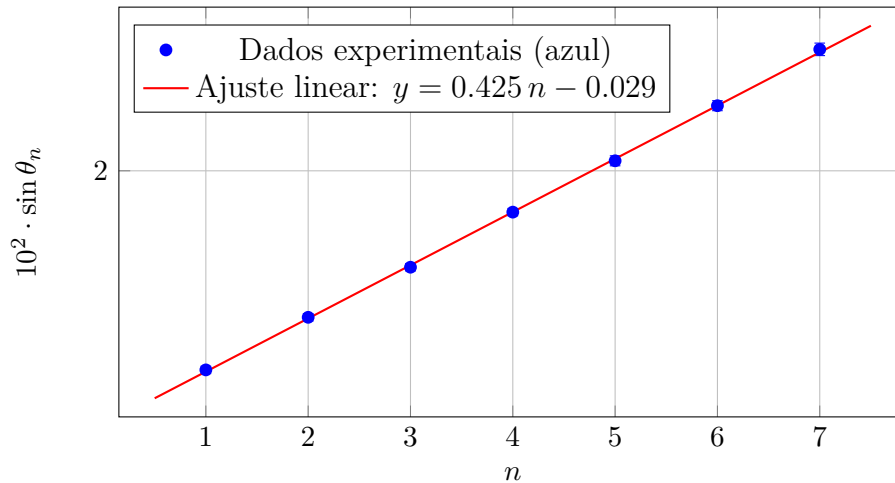
$$\Rightarrow \lambda_{\text{azul}} = 650 \text{ nm} \frac{0.8136 \pm 0.0010}{1.311 \pm 0.002} = \boxed{(403.4 \pm 0.8) \text{ nm}}$$

Solução A.5

Para a fenda 2, as medidas são muito mais difíceis devido ao baixo número de franjas. Assim, vamos utilizar o laser azul junto a uma distância Fenda-Anteparo menor ($L = 75 \text{ cm}$) para aumentar o número de pontos:

Tabela 4: $n \times \sin \theta_n$

n	$10^2 \times \sin \theta_n$
1	0.41 ± 0.03
2	0.83 ± 0.03
3	1.23 ± 0.03
4	1.67 ± 0.03
5	2.08 ± 0.04
6	2.52 ± 0.04
7	2.97 ± 0.05



Para a regressão linear, $R^2 = 0.9997$. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 1}} \approx 0.002$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 0.006$$

Assim, a reta obtida é da forma: $10^2 \sin \theta_n = -(0.015 \pm 0.006) + (0.213 \pm 0.002)n$

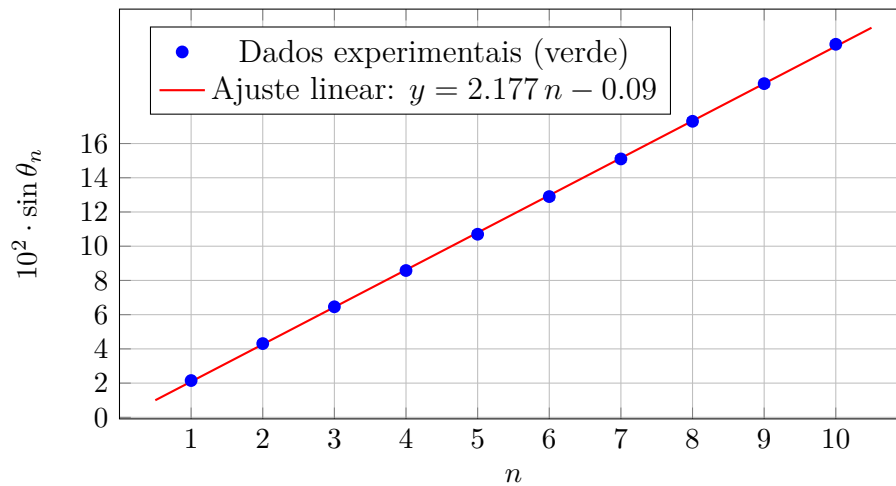
$$\sin \theta_n = -(0.015 \pm 0.006)10^{-2} + (0.213 \pm 0.002)10^{-2}n$$

$$\Rightarrow D_2 = (49.58 \pm 0.08)\mu\text{m} \frac{0.213 \pm 0.002}{0.8136 \pm 0.0010} = \boxed{(12.98 \pm 0.02)\mu\text{m}}$$

Para a fenda 3, as medidas são um pouco mais fáceis. Nesse caso, vamos utilizar o laser verde junto a uma distância Fenda-Anteparo de $L = 130$ cm:

Tabela 5: $n \times \sin \theta_n$

n	$10^2 \times \sin \theta_n$
1	2.15 ± 0.08
2	4.31 ± 0.15
3	6.46 ± 0.15
4	8.58 ± 0.19
5	10.7 ± 0.2
6	12.9 ± 0.2
7	15.1 ± 0.2
8	17.3 ± 0.2
9	19.5 ± 0.2
10	21.8 ± 0.2



Para a regressão linear, $R^2 = 0.99990$. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 1}} \approx 0.007$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 0.05$$

Assim, a reta obtida é da forma: $10^2 \sin \theta_n = -(0.09 \pm 0.05) + (2.177 \pm 0.007)n$

$$\sin \theta_n = -(0.09 \pm 0.05)10^{-2} + (2.177 \pm 0.007)10^{-2}n$$

$$\Rightarrow D_3 = (49.58 \pm 0.08)\mu\text{m} \frac{1.0725 \pm 0.0014}{2.177 \pm 0.007} = \boxed{(24.42 \pm 0.09)\mu\text{m}}$$

Capítulo 8

Experimentos de Circuitos

8.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo de circuitos elétricos, um domínio onde as grandezas como tensão e corrente são invisíveis e devem ser investigadas com instrumentos. Usando o multímetro como ferramenta principal, você aprenderá a montar circuitos e a medir suas propriedades com segurança. Serão abordados desde a caracterização de resistores, diferenciando componentes ôhmicos de não ôhmicos, até a análise do comportamento dinâmico de capacitores em circuitos RC. O objetivo é desenvolver uma abordagem lógica para verificar as leis fundamentais da eletrodinâmica e entender o papel de cada componente. Esse conteúdo dificilmente aparece em provas da OBF, por ser um conteúdo visto apenas pelo nível 3, mas é muito comum em outras olimpíadas, por ser fácil de montar vários experimentos diferentes.

8.2 Experimentos

8.2.1 Testando funções do multímetro - Dificuldade iniciante - 1h

Introdução

O multímetro é o principal instrumento de medida para circuitos elétricos. E, como em todo o instrumento de medida, apresenta uma faixa ideal de operação, incerteza e modo de utilizar. A seguir aprenderemos como opera-lo apropriadamente e como extrair todas suas informações.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador da UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Parte A: Conhecendo o Ohmímetro Nessa parte vamos aprender como determinar a resistência. Temos 2 métodos para determiná-la, pelo código de cor e pelo Ohmímetro. Primeiramente pelo código de cor, o resistor tem 4 ou 5 faixas sendo:

- As 2 ou 3 primeiras faixas representando o valor numérico;
- A penúltima faixa indica a ordem de grandeza;
- A última faixa indica a tolerância.

Código de Cores

A extremidade com mais faixas deve apontar para a esquerda

Resistores padrão possuem 4 faixas

Resistores de precisão possuem 5 faixas

Cor	1ª Faixa	2ª Faixa	3ª Faixa	Multiplicador	Tolerância
Preto	0	0	0	x 1 Ω	
Marrom	1	1	1	x 10 Ω	+/- 1%
Vermelho	2	2	2	x 100 Ω	+/- 2%
Laranja	3	3	3	x 1K Ω	
Amarelo	4	4	4	x 10K Ω	
Verde	5	5	5	x 100K Ω	+/- .5%
Azul	6	6	6	x 1M Ω	+/- .25%
Violeta	7	7	7	x 10M Ω	+/- .1%
Cinza	8	8	8		+/- .05%
Branco	9	9	9		
Dourado				x .1 Ω	+/- 5%
Prateado				x .01 Ω	+/- 10%

A tolerância serve para indicar uma margem de incerteza no valor real da resistência em relação ao valor nominal. Como ela é normalmente indicada em porcentagem, considere que se a resistência nominal encontrada for x e a tolerância $y\%$, a resistência real provavelmente esta no intervalo de $x - x\frac{y}{100}$ e $x + x\frac{y}{100}$. Por exemplo, uma tolerância de 5 % em um resistor de 100 Ω indica que o valor real da resistência poderá ser qualquer valor entre 95 Ω e 105 Ω .

Por exemplo, o primeiro resistor(amarelo) da imagem tem resistência nominal de $56 \times 10^4 \Omega$ e tem tolerância de 10 %, ou seja, o valor real pode estar entre $50,4 \times 10^4 \Omega$ e $61,6 \times 10^4 \Omega$. Já o segundo resistor(azul) tem resistência nominal de $237 \times 10^0 \Omega$ e tem tolerância de 1%, ou seja, o valor real pode estar entre $234,63 \times 10^4 \Omega$ e $239,37 \times 10^4 \Omega$.

Agora, iremos aprender a medir a resistência pelo multímetro. Na foto abaixo, temos um multímetro. A parte com a linha verde, perto do Ω , é o Ohmímetro.



ESCALA:

E os números ao lado são a escala. A escala de 200 Ω deve ser usada para medir resistências de até 200 Ω . A escala de 2000 Ω deve ser usada para medir resistências entre 200 Ω e 2 k Ω e assim por diante. Quando tentamos medir uma resistência cujo valor é maior do que o limite da escala utilizada, o multímetro fornece a seguinte leitura: (1 .); neste caso você deverá MUDAR PARA UMA ESCALA MAIOR até obter uma leitura adequada. Quando uma resistência pode ser medida em várias escalas, você devera ESCOLHER A MENOR DESTAS ESCALAS de modo a obter um maior número de algarismos significativos. OBS: se colocarmos na escala de 20k Ω a informação virá em kilohms, ex o visor que indica 1,65 significará que a resistência vale 1,65 k Ω , no entanto se colocarmos na escala de 2000 Ω , o visor que indica 1653 significa 1653 Ω .

CUIDADOS AO MEDIR COM O OHMÍMETRO:

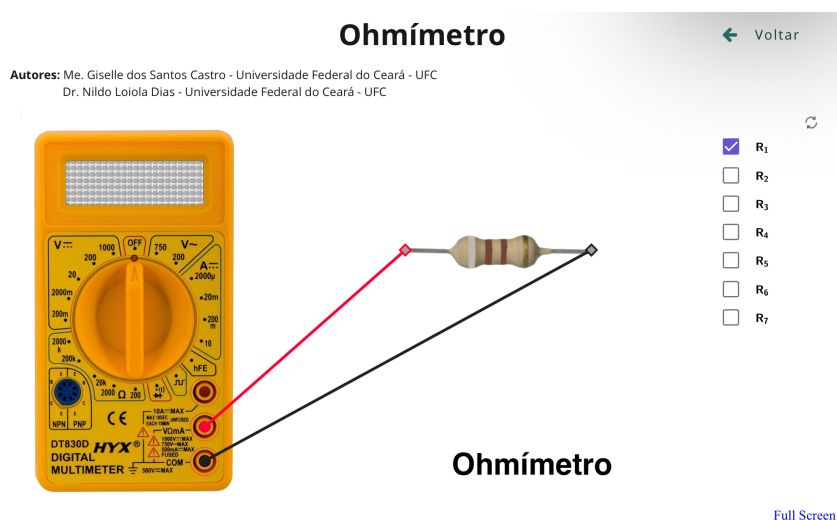
- Conecte a ponta de prova preta ao terminal “COM” (negativo) e a ponta de prova vermelha ao terminal “VΩmA” (positivo), o terminal 10A, só é utilizada em casos de altas correntes, e não será utilizados em experimentos reais na OBF, por causa que altas correntes são perigosas em mãos inexperientes. Embora a utilização do ohmímetro seja feita sem distinção de polaridade, é importante que você adquira o hábito de obedecer sempre a esta convenção;
- Escolha a escala adequada ao valor da resistência a ser medida;
- Certifique-se que o resistor medido não está associado a nenhum outro resistor ou fonte;
- Cuide para que haja um bom contato entre as pontas de prova e os terminais do resistor;
- Durante a medida não toque nas partes metálicas das pontas de prova, pois a resistência do seu corpo influenciará na medida.

INCERTEZA:

A incerteza do Ohmímetro varia com o aparelho, normalmente é dito ou disponibilizado o datasheet (manual) onde essa informação pode ser facilmente encontrada. Mas, varia normalmente entre 2% a 5% da medida.

CONEXÕES:

Agora que aprendemos a teoria do Ohmímetro, vamos para o simulador. Conecte o multímetro como na imagem abaixo, **paralelo ao componente** e responda as questões abaixo:



A.1 Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela com o valor da Resistência nominal, Resistência Medida, a Escala Utilizada e o Erro da Medida e verifique se está na tolerância do fabricante.

Tabela 1

R_{nom}	R_{med}	Escala	Erro

Parte B: Conhecendo o Voltímetro

Nessa parte, determinaremos a diferença de potencial, voltagem (V), de um componente elétrico.

Existem duas voltagens que podemos medir com o voltímetro, a contínua e a alternada. A contínua é aquela que seu valor permanece constante com o tempo e sua polaridade, ou seja, o positivo e negativo não se alteram, ela comumente é gerada por baterias e pilhas e é o tipo de tensão que iremos utilizar majoritariamente. Já a tensão alternada é aquela que seu valor muda constantemente, tal qual sua polaridade também se altera. Esta é comumente utilizada na rede elétrica doméstica, como na tomada da sua casa.

ESCALA:

O voltímetro também apresenta uma escala, que funciona de maneira análoga ao ohmímetro. A diferença é que se **tentarmos medir uma tensão maior do que a escala permite, o voltímetro poderá ser danificado**, por isso, se não temos ideia do valor da tensão é de boa prática sempre gira o seletor no sentido **anti-horário**, a fim de começar com uma escala bem alta e depois escolher escalas menores, se for possível.

CUIDADOS COM O VOLTÍMETRO:

- Escolher uma escala adequada;
- Ligar em paralelo ao componente;
- Se a tensão for CONTÍNUA, o seletor deve ser colocado em uma das escalas de tensão contínua (indicada pelo traço contínuo sublinhado por três tracinhos). Se a tensão for ALTERNADA, o seletor deve ser colocado em uma das escalas de tensão alternada (indicada pelo símbolo $\sim$).

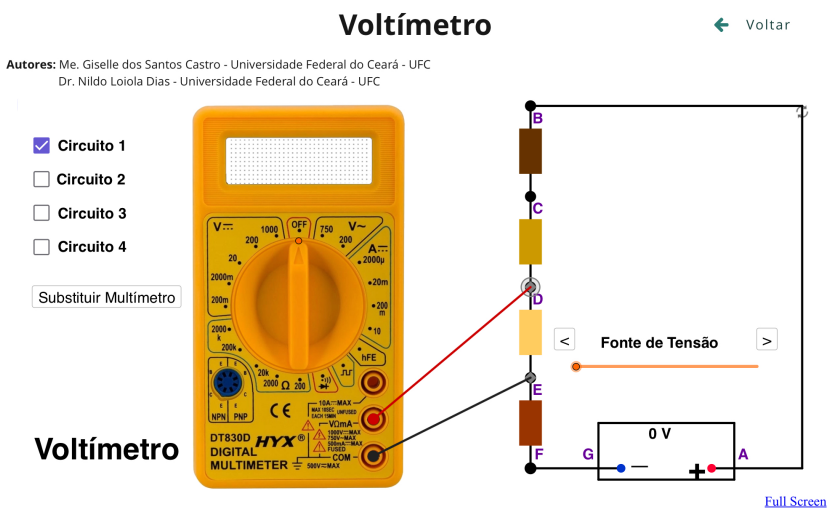
OBS: se a leitura do voltímetro aparecer negativa significa que a polaridade do componente está trocada. Ou seja, o positivo se torna negativo e o negativo positivo.

INCERTEZA:

A incerteza do Ohmímetro varia com o aparelho, normalmente é dito ou disponibilizado o datasheet (manual) onde essa informação pode ser facilmente encontrada. Mas, varia normalmente entre 2% a 5% da medida.

CONEXÕES:

Agora que aprendemos a teoria do Ohmímetro, vamos para o simulador. Conecte o multímetro como na imagem abaixo, **paralelo ao componente** e responda as questões abaixo:



B.1 No circuito 1, configure a fonte para a maior tensão possível. Meça diretamente o valor da fonte e informe seu valor, a escala utilizada e os pontos de conexão possíveis.

Agora mude para o circuito 2, e ajuste a fonte de tensão para 12V.

B.2 Meça as tensões entre os pontos do circuito, como indicado na Tabela abaixo. Anote o valor medido e a escala utilizada do Voltímetro.

	V_{BC}	V_{BD}	V_{BE}	V_{BF}	V_{BG}
Valor Medido					
Escala Utilizada					
	V_{AF}	V_{CD}	V_{DE}	V_{EF}	V_{FG}
Valor Medido					
Escala Utilizada					

B.3 Agora calcule o valor de $V = V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF}$.

Agora mude para o circuito 3, e ajuste a fonte de tensão para 100V.

B.4 Meça as tensões entre os pontos do circuito, como indicado na Tabela abaixo. Anote o valor medido e a escala utilizada do Voltímetro.

	V_{BC}	V_{BD}	V_{BE}	V_{BF}	V_{BG}
Valor Medido					
Escala Utilizada					
	V_{AF}	V_{CD}	V_{DE}	V_{EF}	V_{FG}
Valor Medido					
Escala Utilizada					

B.5 Agora calcule o valor de $V = V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF}$.

Parte C: Conhecendo o Amperímetro

O amperímetro mede corrente, diferentemente do voltímetro só mede corrente contínua, ignorando a existência da corrente alternada. O comportamento da escala é análogo ao resto do multímetro.

DIFERENÇAS DO AMPERÍMETRO:

- Mede Corrente;
- Deve ser conectado em série ao circuito, fechando o circuito, antes aberto, que deseje analisar.

OBS: Tenha a máxima atenção para NÃO ligar o amperímetro em PARALELO a uma fonte de tensão.

Agora vamos começar o experimento

C.1 Ajuste para as resistências de 270Ω , conectando o amperímetro para apenas uma resistência, regule a saída da fonte de tensão de acordo com os valores indicados na abaixo Tabela. Anote, para cada tensão, a corrente medida e calcule a razão V/I .

V (V)	I (mA)	V / I (Ohm)
10		
20		
30		
40		
50		

C.2 Ajuste para as resistências de $68k\Omega$, conectando o amperímetro para uma tensão de 50V, Varie a quantidade de resistências de acordo com os valores indicados na abaixo Tabela. Anote, para cada tensão, a corrente medida e calcule a razão V/I .

R	I (mA)	V / I (Ohm)
1R		
2R		
3R		
4R		
5R		

8.2.2 Capacitores com dielétricos - Dificuldade iniciante - 1h45m

Introdução

Um capacitor armazena energia elétrica ao acumular cargas em duas placas condutoras separadas por um isolante. Quando introduzimos um dielétrico entre essas placas, modificamos o comportamento do campo elétrico e a quantidade de carga que o capacitor pode armazenar. A partir dessa interação, conseguimos determinar propriedades características do material dielétrico, como sua constante elétrica.

Com isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do Laboratório virtual que você pode acessar clicando: [aqui](#) Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário: No simulador, você pode ajustar a distância entre as placas do capacitor, modificar a área das placas, escolher diferentes materiais dielétricos e medir como essas alterações impactam a capacitância do capacitor.

**CONTROLES:**

- O cursor ÁREA DAS PLACAS permite escolher a área das placas do capacitor.
- O cursor DISTÂNCIA ENTRE AS PLACAS permite escolher a separação entre as placas do capacitor.
- Há 6 possibilidades de escolha para o dielétrico entre as placas do capacitor.
- Pressione o ponto cinza na borda do seletor do capacitômetro e arraste para a escala apropriada do mesmo.

Parte A: Constantes Dielétricas: Explorando o Campo Elétrico entre Placas Variáveis

Nesta etapa, vamos analisar como a capacitância varia à medida que alteramos a distância entre as placas do capacitor. Além disso, buscamos identificar as relações envolvidas e determinar os valores das constantes dielétricas para os materiais utilizados.

No experimento, vamos variar a distância d entre as placas do capacitor e medir a capacitância C para cada valor de d , utilizando a mica e o papel como material dielétrico e uma área de placas de 5000 mm^2 .

A.1 Escolha diferentes distâncias para coletar os dados; para cada distância, realize diversas medições de capacitância e registre os resultados. Crie uma tabela separada para os dados obtidos com a mica e outra para os dados com o papel.

A.2 Calcule a média das medições de capacitância obtidas para cada distância e agrupe em 2 tabelas, uma para a mica e outra para o papel.

A.3 Calcule a incerteza da capacitância para cada distância, considerando apenas o desvio padrão da média, desconsiderando as incertezas digitais do aparelho.

Para os próximos itens, será útil o conhecimento da expressão:

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d}$$

- C representa a capacitância
- K representa a constante dielétrica
- ϵ_0 representa a permissividade do vácuo
- A representa a área das placas do capacitor
- d representa a distância entre as placas

A.4 Escreva uma equação linearizada que relacione a capacitância (C) e a distância (d)

A.5 Agora, com os dados obtidos, construa dois gráficos: um para o papel e outro para a mica, representando a relação linearizada.

A.6 Agora, calcule o coeficiente angular da relação linearizada.

A.7 Sabendo que o valor da constante $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Calcule o valor aproximado da constante dielétrica (K) da mica e do papel.

Parte B: Constantes Dielétricas: Investigando o Efeito da Variação da Área das Placas na Capacitância

Nesta parte, realizaremos uma análise semelhante à da Parte A, porém, desta vez, variaremos a área das placas, mantendo a distância fixa em 0,5 mm.

B.1 Escolha áreas distintas para coletar os dados; para cada área, realize medições de capacitância e registre os resultados. Crie uma tabela separada para os dados obtidos com a mica e outra para os dados com o papel.

B.2 Calcule a média das medições de capacitância obtidas para cada distância e agrupe em 2 tabelas, uma para a mica e outra para o papel.

B.3 Calcule a incerteza de cada conjunto de dados, considerando apenas o desvio padrão da média, desconsiderando as incertezas digitais do aparelho.

B.4 Agora, com os dados obtidos, construa dois gráficos: um para o papel e outro para a mica, representando a relação linearizada entre a capacitância e a área das placas.

B.5 Agora, calcule o coeficiente angular da relação linearizada.

B.6 Calcule o valor aproximado da constante dielétrica(K) da mica e do papel, e compare com os valores obtidos na parte A.

8.2.3 Resistores Ôhmicos e Não-Ôhmicos - Dificuldade média - 1h45m

Introdução

No estudo da eletricidade, os resistores são componentes fundamentais que limitam o fluxo de corrente elétrica em um circuito. A forma como a corrente elétrica se comporta em relação à tensão aplicada define dois grandes grupos de resistores: os **ôhmicos** e os **não ôhmicos**.

Um resistor **ôhmico** obedece à *Lei de Ohm*, ou seja, a corrente que passa por ele é diretamente proporcional à tensão aplicada:

$$V = R \cdot I,$$

onde V é a tensão, I é a corrente e R é a resistência elétrica, constante nesse caso. Materiais condutores metálicos em condições ideais costumam apresentar esse comportamento.

Já os resistores **não ôhmicos** não seguem essa relação linear. Neles, a resistência varia com a tensão, a corrente ou outras condições, como temperatura ou luminosidade. Dis-

positivos como lâmpadas incandescentes, diodos e termistores são exemplos de elementos não ôhmicos, pois sua resistência muda conforme o funcionamento.

Com isso em mente, estudaremos experimentalmente os resistores ôhmicos (Parte A) e não ôhmicos (Parte B).

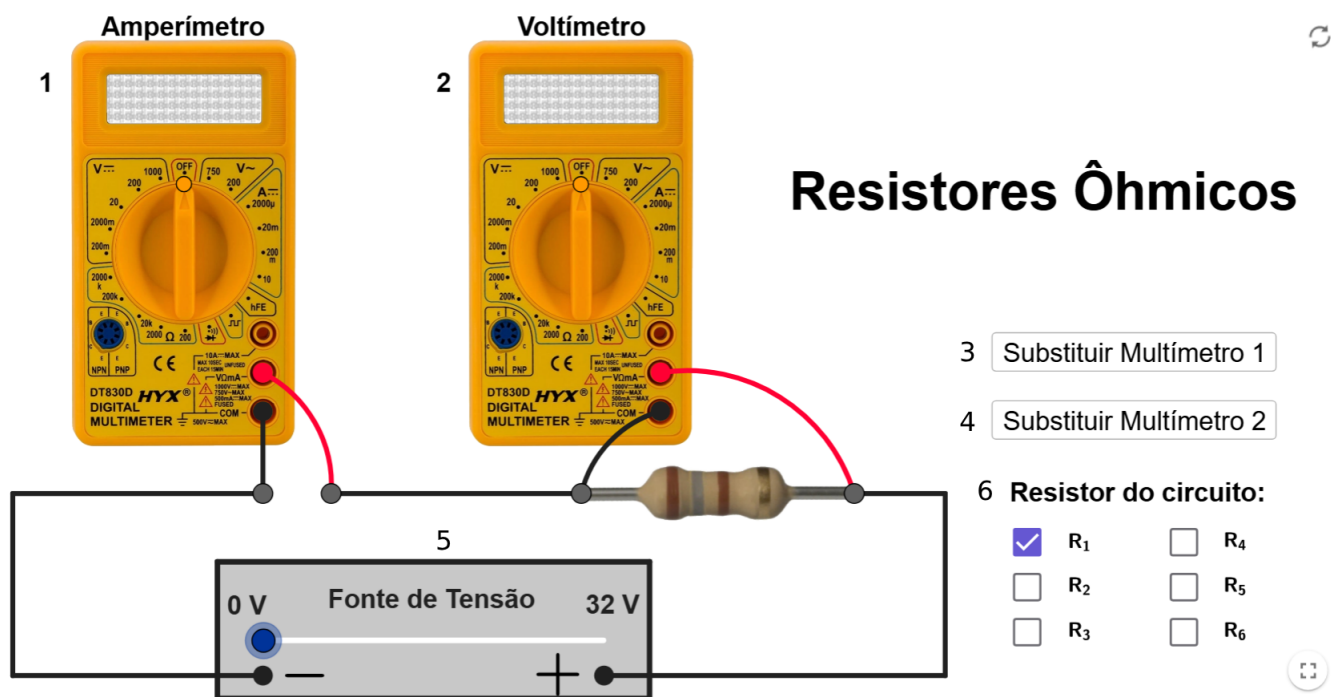
Observações

Em todos os itens, propague as incertezas com base nas especificações do multímetro, conforme indicado no manual disponível ao final do experimento.

Parte A: Resistores Ôhmicos

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Este é o Multímetro 1 (amperímetro), com o qual você poderá medir a corrente elétrica no circuito. Para isso, basta mover a chave seletora da posição OFF para a região A com a barra e os 3 pontos. Caso não esteja familiarizado com o uso do multímetro, consulte o manual disponível ao final do experimento.
2. Este é o Multímetro 2 (voltímetro), com o qual você poderá medir a diferença de potencial no resistor. Para isso, basta mover a chave seletora da posição OFF para a região V com a barra e os 3 pontos.

3. Aqui, é possível substituir o Multímetro 1 (amperímetro). Se ele queimar durante o experimento, você poderá trocá-lo por outro no próprio simulador. Dica: ao mudar a escala do multímetro, deixe a tensão como zero para não queimar o multímetro.
4. Aqui, é possível substituir o Multímetro 2 (voltímetro). Se ele queimar durante o experimento, você poderá trocá-lo por outro no próprio simulador.
5. Por meio deste botão, você pode ajustar a fonte de tensão que será aplicada ao circuito.
6. Aqui, você altera o resistor do circuito.

Nessa parte vamos determinar experimentalmente a resistência dos resistores.

A.1 Ajuste a resistência para R_1 , altere a tensão aplicada ao circuito e meça a corrente elétrica correspondente.

Repita esse procedimento para, no mínimo, seis valores diferentes de tensão e preencha a **Tabela 1**, seguindo o modelo apresentado abaixo. Lembre-se de calcular as incertezas com base nas especificações do manual.

Tabela 1: Determinação experimental da resistência do resistor R_1

U (V)	I (mA)

A.2 Utilizando os dados da Tabela 1, faça um gráfico no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor da resistência R_1 e sua respectiva incerteza.

Dica: escolha os eixos de forma que o coeficiente angular seja a resistência R_1 .

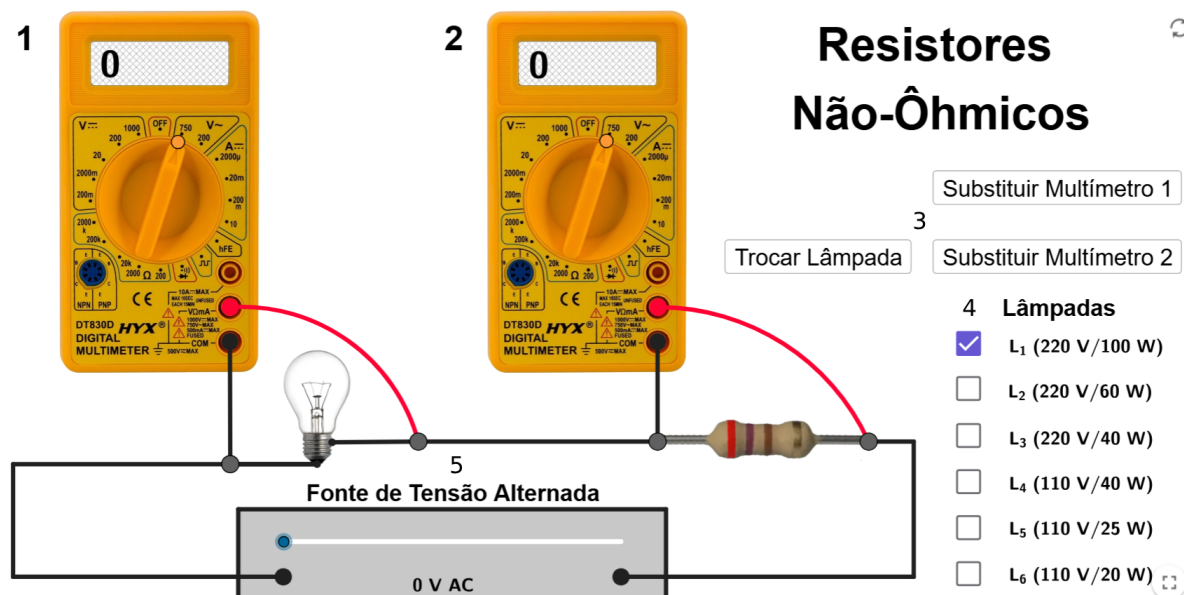
A.3 Repita o mesmo procedimento para R_2 e R_6

Parte B: Resistores não Ôhmicos

Agora, vamos explorar resistências de resistores não ôhmicos. Considere que a resistência do resistor no circuito seja $R = (270 \pm 13) \, \Omega$

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o simulador do UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Este é o Multímetro 1 (voltímetro), com o qual você poderá medir a diferença de potencial na lâmpada. Para isso, basta mover a chave seletora da posição OFF para a região $V\sim$. Caso não esteja familiarizado com o uso do multímetro, consulte o manual disponível ao final do experimento.
2. Este é o Multímetro 2 (voltímetro), com o qual você poderá medir a diferença de potencial no resistor. Para isso, basta mover a chave seletora da posição OFF para a região $V\sim$ com a barra e os 3 pontos.
3. Aqui, é possível substituir o Multímetro 1, 2 e a lâmpada.
4. Aqui, você altera a lâmpada do circuito.
5. Por meio deste botão, você pode ajustar a fonte de tensão que será aplicada ao circuito.

B.1 Ajuste a lâmpada para L_1 , altere a tensão alternada aplicada ao circuito e meça as diferenças de potencial. Repita esse procedimento para, no mínimo, seis valores diferentes de tensão e preencha a **Tabela 2**, seguindo o modelo apresentado abaixo. Lembre-se de calcular as incertezas com base nas especificações do manual.

Tabela 2: Tensões em cada componente

U_{fonte} (V)	$U_{lâmpada}$ (V)	$U_{resistor}$ (V)

B.2 Com base na **Tabela 2**, crie uma **Tabela 3** contendo a corrente elétrica que passa pela lâmpada.

Tabela 3: U vs I na lâmpada L_1

$U_{lâmpada}$ (V)	I (mA)

B.3 Determine a curva U vs I na lâmpada L_1 .

B.4 Considerando que a curva U versus I para a lâmpada L_1 pode ser descrita pela equação $U = kI^n$, onde k e n são constantes. Determine um método para encontrar os valores de k e n , e encontre esses valores.



MULTÍMETRO DIGITAL

ITEM Nº
673310

DT 830D

Manual de Instruções:

Os multímetros da série 83 são compactos para medição de voltagens DC e AC, Corrente DC, Resistência e Diodo.

São instrumentos ideais para uso em campo tais como: laboratório, aparelhos domésticos e etc.

PAINEL FRONTAL:

1. Funções e Botão de Seleção

O botão é usado para selecionar a função desejada, bem como ligar e desligar o equipamento.

Para maior durabilidade da bateria, recomenda-se deixar na posição "OFF", quando o instrumento não estiver sendo usado.

2. Visor LCD (OU DISPLAY DIGITAL)

3 ½ dígitos – 3 inteiros e uma casa decimal, 7 segmentos, LCD 0.5"

3. Entrada "Common"

Coloque a ponta de teste preta (negativo).

4. Entrada "V,Ω,mA"

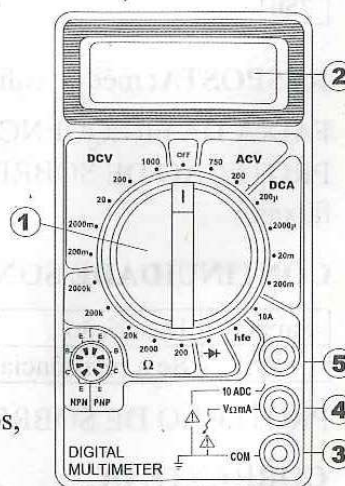
Coloque a ponta de teste vermelha positivo), para todas as voltagens, resistências e correntes (exceto para medidas 10A).

5. Entrada "10A"

Coloque a ponta de teste vermelha (positivo) para medidas 10A.

ESPECIFICAÇÕES:

Precisão é garantida, 23°C ±, menos do que 80% umidade relativa.



VOLTAGEM DC

Faixa	Resolução	Precisão
200mV	100µV	±0.5% of rdg + 3D)
2000mV	1mV	±(0.8% of rdg + 2D)
20V	10mV	
200V	100mV	
1000V	1V	±(1.0% of rdg + 2D)

sac@leetools.com.br

TOOLS CLUB COMÉRCIO
DE FERRAM. E UTIL. LTDA.
CNPJ: 07.379.783/0001-05

GARANTIA:
90 DIAS

Proteção de sobrecarga: faixa de 220V rms ou AC 200 mV e 1000V DC ou 750V para todos as faixas.

VOLTAGE AC

Faixa	Resolução	Precisão
200V	100mV	$\pm (1.2)\%$ de rdg + 10D)
750V		

RESPOSTA: média, calibrado em rms onda de seno.

FAIXA DA FREQUÊNCIA: 45Hz ~450Hz

PROTEÇÃO DE SOBRECARGA: 1000V DC OU 750 V rms para todas as faixas.

CONTINUIDADE SONORA:

Faixa	Descrição
	Se a resistência for menor que $30 \pm 20\%$ o visor irá oscilar

PROTEÇÃO DE SOBRECARGA: máximo 15 segundos 220V rms.

CORRENTE DC

Faixa	Resolução	Precisão
200 μ A	100 μ A	$\pm 1.8\%$ of rdg + 2D)
2000 μ A	1 μ A	
20mA	10 μ A	
200mA	100 μ A	$\pm (2.0\%$ of rdg + 2D)
10A	10mA	$\pm (2.0\%$ of rdg + 10D)

PROTEÇÃO DE SOBRECARGA: Fusível de 500mA 250V. (na faixa de 10A sem fusível)

MEDINDO QUEDA DE VOLTAGEM: 200mV

RESISTÊNCIA

Faixa	Resolução	Precisão
200 Ω	100m Ω	$\pm 1.0\%$ leitura + 10D)
2000 Ω	1 Ω	
20K Ω	10 Ω	$\pm (1.0\%$ leitura + 4D)
200K Ω	100 Ω	
2000K Ω	1K Ω	

MÁXIMA VOLTAGEM DO CIRCUITO ABERTO: 3.2V

PROTEÇÃO DE SOBRE-CARGA: 15 segundos máximo 220 Vrms.

INSTRUÇÕES DE OPERAÇÃO

AVISO

Para evitar risco de choque elétrico ou danos ao instrumento, não meça voltagens que possam exceder 500V acima do terra.

Antes de utilizar o instrumento, inspecione as pontas de teste e as entradas.

MEDIÇÃO DE VOLTAGEM DC & AC

1. Conecte a ponta de teste vermelha na entrada " V, Ω, m, A " e a ponta de teste preta na entrada "COM".
2. Coloque o botão selecionador na posição da voltagem desejada, se a voltagem a ser medida não é conhecida, selecione a faixa maior e reduza até uma leitura satisfatória seja obtida.
3. Conecte as pontas de teste no aparelho ou circuito a ser medido.
4. Ligue o aparelho ou circuito a ser medido, a voltagem aparecerá no Display Digital, juntamente com a polaridade.

MEDIÇÃO DE CORRENTE DC

1. Ponta de teste vermelha coloque em " V, Ω, mA " e a ponta de teste preta coloque em "COM" (para medição entre 200mA e 10 A conecte a ponta de teste vermelha a entrada "10A" até o fundo).
2. Coloque o botão seletor na posição DCA desejada.
3. Abra o circuito a ser medido e conecte as pontas de teste em série com a carga na corrente a ser medida.
4. Leia o valor da corrente no Display Digital.
5. Adicionalmente a função "10A" é somente para uso intermitente. Máximo tempo de contato das pontas de teste com o circuito é de 15 segundos, com um intervalo mínimo de tempo de segundos entre os testes.

MEDIÇÃO DE RESISTÊNCIA

1. Ponta de teste vermelha em " V, Ω, m, A ". Ponta de teste preta em "COM".
2. Selecione a posição OHM desejada.
3. Se a resistência a ser medida está conectada a um circuito, desligue e descarregue todos os capacitores antes da medição.
4. Conecte as pontas de teste ao circuito a ser medido.
5. Leia o valor da resistência no Display Digital.

MEDIÇÃO DO DIODO

1. Ponta de teste vermelha em " V, Ω, m, A ". Ponta de teste preta em "COM".
2. Coloque o botão selecionador na posição $\rightarrow$

3. Conecte a ponta de teste vermelha ao anodo de diodo a ser medido e a ponta preta de teste ao catodo.
4. A voltagem enviada cai em mV será mostrada no display. Se o diodo é inverso figura "1". Será mostrada.

MEDIÇÃO DO TRANSISTOR hFE

1. Coloque a botão seletor na posição hFE.
2. Determine se o transistor é do tipo PNP de NPN e determinado o Emitter, e coletor de pontas. Coloque as pontas dentro dos soquetes de hFE no painel frontal.
3. O aparelho irá mostrar o valor hFE
4. Aproximado na corrente básica $10\mu A$ e $V_{ce} 2.8V$.

TESTE DE CONTINUIDADE AUDÍVEL (caso o modelo tenha esta função)

1. Ponta de teste vermelha em "V, Ω ,m,A", a ponta de teste preta em "COM".
2. O botão seccionador na posição .
3. Conecte as pontas de teste aos dois pontos de teste a ser testado.

TESTE DE SINAL

Coloque o botão seccionador na posição . O teste de sinal (50Hz) aparece entre a entrada "V, Ω ,m,A" e "COM".

TROCA DE BATERIA E FUSÍVEL

O fusível raramente precisa ser trocado.

Se  aparecer no display, indica que a bateria deve ser trocada.

Para trocar a bateria & fusível (500mA250V).

CUIDADO

Antes de abrir o instrumento, tenha certeza que as pontas de teste estão desconectadas.

8.2.4 Descarga de capacitor - Dificuldade iniciante - 1h30m

Introdução

O circuito RC consiste em uma montagem com um capacitor e um resistor, podendo ter ou não uma bateria.

Com a presença da bateria, o capacitor é carregado. Sem a bateria, ele descarrega. A forma desses efeitos nos permitem descobrir características importantes do sistema.

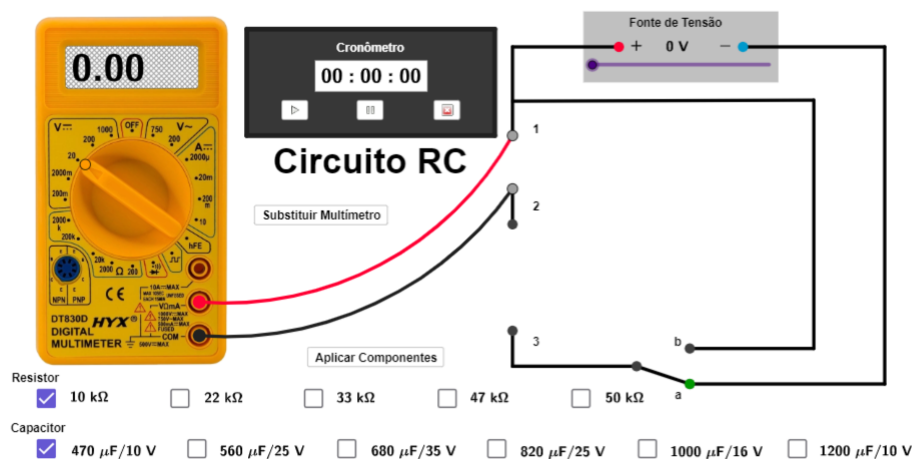
Com isso, vamos estudar propriedades desse circuito com um simulador.

Caso você queira reproduzir esse experimento em casa/laboratório, você precisará de:

- Multímetro
- Fonte de tensão
- Capacitor
- Resistor

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizamos o simulador do laboratório virtual ds UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

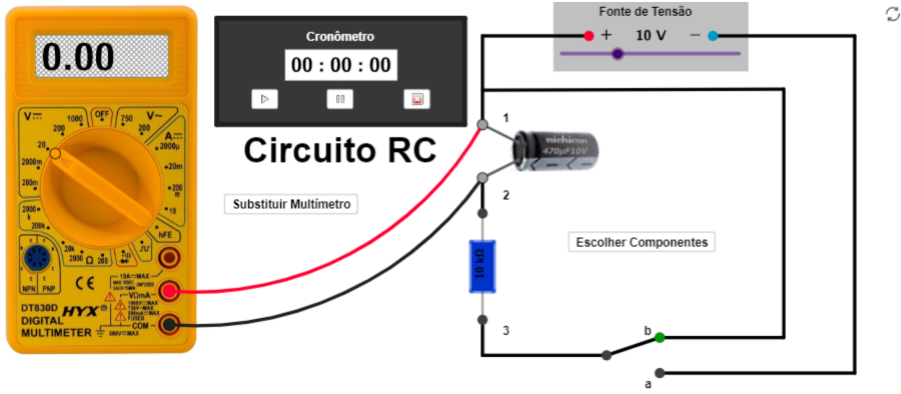


Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Um multímetro, que pode ser colocado em diversos pontos do circuito
2. Uma chave no circuito. Quando em "a", ela liga o circuito com a bateria. Quando em "b", isola o capacitor e o resistor.

- 3. Um cronômetro, que pode ser ativado com o botão presente nele ou de forma automática quando a chave muda de posição.
- 4. Uma fonte de tensão, que é possível variar seu valor.
- 5. Vários valores de resistência.
- 6. Vários valores de capacitância.

Apertando o botão "aplicar componentes", o circuito fica montado da seguinte forma:



Parte A: Descarga do capacitor

Escolha valores para o capacitor e o resistor. O valor escolhido para a resistência é exato, mas o da capacitância tem uma margem de erro. Vamos tentar descobrir esse valor de forma exata. Conectando a chave em "a", você consegue carregar o capacitor até que ele tenha a mesma voltagem da fonte de tensão. Voltando-a para "b", o capacitor começa a descarregar.

A.1 Meça a forma que a voltagem varia com o tempo. Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando a voltagem U com o tempo t seguindo o modelo da tabela abaixo da **Tabela 1**.

Tabela 1: $t \times U$

t (s)	U (V)

A.2 Utilizando os dados da **Tabela 1**, Faça um gráfico no papel milimetrado para, a partir dele, observar o comportamento da voltagem no tempo

Como visto, essa variação segue a equação de descarga de um capacitor:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Onde U_0 é a voltagem inicial do capacitor, R é a resistência do resistor e C a capacitância do capacitor. Essa equação pode ser linearizada da forma:

$$\ln U = \ln U_0 - \frac{t}{RC}$$

A.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela seguindo o modelo da **Tabela 2**.

Tabela 2: $t \times \ln U$

t (s)	$\ln U$

A.4 Utilizando os dados da **Tabela 2**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e , a partir dele, determine o valor da capacitância do capacitor e sua respectiva incerteza. Assuma que o valor da resistência não tem incertezas.

A.5 Agora, refaça o experimento com os outros valores de resistência. Quais valores melhoram a precisão? O que causa isso?

8.2.5 Curva característica de um LED - Dificuldade média -1h30m

Introdução

LEDs são diodos emissores de luz, um componente eletrônico semicondutor que converte energia elétrica em luz de forma eficiente, emitindo a luz quando uma corrente mínima passa por ele. A tecnologia LED é usada em iluminação, telas, indicadores e outras aplicações, oferecendo vantagens como maior vida útil, eficiência energética, sustentabilidade e a capacidade de produzir luz em diversas cores e intensidades. O comportamento de LEDs em circuitos é complexo e sua descrição permite obter resultados importantes sobre os seus componentes.

Materiais

Caso você deseje replicar esse experimento sem o uso de simuladores, você precisará de alguns materiais:

- LED
- Multímetro
- Bateria
- Potenciômetro
- Resistor (Resistência na faixa de $500\ \Omega - 2\ \text{k}\Omega$)
- Placa de ensaio / Breadboard

Apresentando o simulador

Para realizar este experimento, utilizaremos uma simulação na plataforma Tinkercad, disponível [neste link](#). Para iniciar o experimento, clique no botão “Iniciar Simulação”.

Para essa interface, podemos encontrar as seguintes ferramentas:

1. Amperímetro
2. Voltímetro
3. Potenciômetro ajustável
4. Botão iniciar/parar simulação

Estudo da curva característica

LEDs geralmente obedecem, aproximadamente, à equação de Shockley para um diodo ideal:

$$I = I_S \left(\exp \left(\frac{qV}{\eta k_B T} \right) - 1 \right)$$

em que $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K (constante de Boltzmann), $T = (300 \pm 5)$ K (Temperatura no local), $q = 1.602 \times 10^{-19}$ C (carga elementar) e $\exp(x) = e^x$, sendo $e \approx 2.71828$ (número de Euler). Para este experimento, você determinará os valores de I_S (corrente de saturação reversa) e η (fator adimensional de idealidade).

Dicas: $\ln(x)$ é a função inversa de $\exp(x)$ e a aproximação $\exp(x) \approx 1+x$ para $|x| \ll 1$ pode ser útil.

Curva Característica de um LED

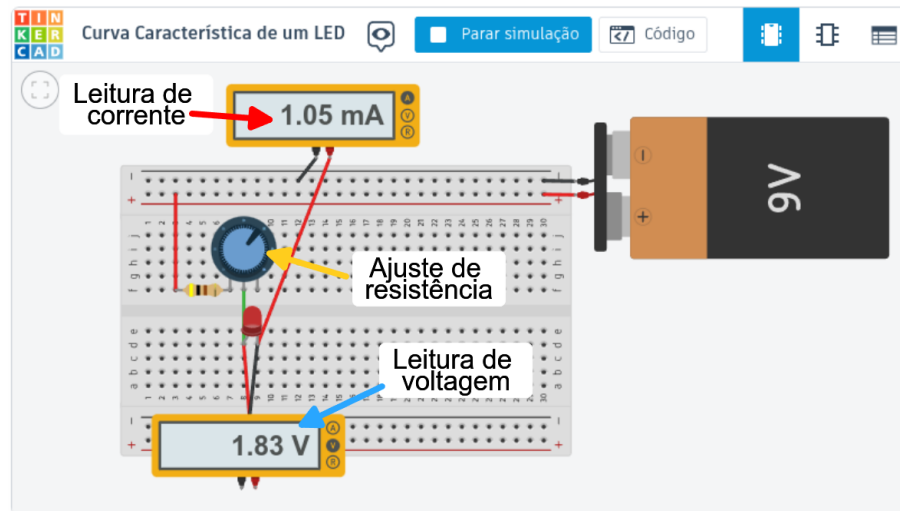


Figura 8.1: Interface do simulador

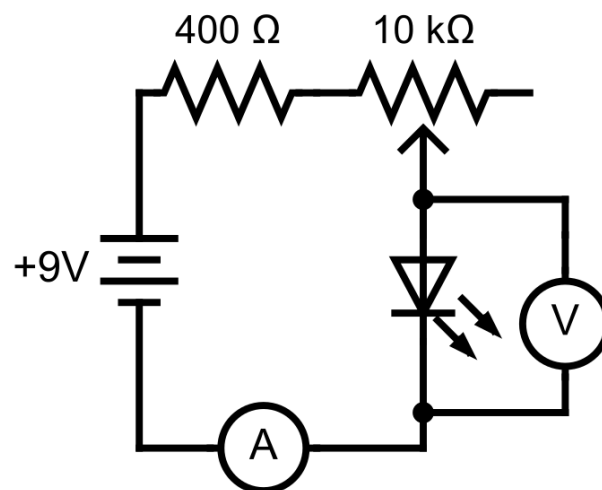


Figura 8.2: Diagrama do circuito. **OBS:** $400\ \Omega$ pode ser muito baixo para alguns LEDs. Verifique a corrente máxima que pode ser usada caso deseje replicar o experimento

- A.1** Ajustando a resistência do potenciômetro, indique os valores máximos e mínimos de corrente que podem ser obtidos e suas voltagens correspondentes.

- A.2** Monte uma tabela seguindo o modelo da **Tabela 1** e um gráfico I-V para o LED vermelho. O gráfico obtido é chamado de **curva característica**. Indique as barras de erro se necessário.

Tabela 1: $V \times I$

V	I

- A.3** Para o restante da questão, utilizaremos a seguinte aproximação na análise de dados:

$$I \approx I_S \exp\left(\frac{qV}{\eta k_B T}\right)$$

Note que para V suficientemente pequeno, o termo -1 não é desprezível e a fórmula deixa de ser válida. Encontre, usando aproximações teóricas, o intervalo de valores de V em que a aproximação pode ser utilizada. Caso necessário, utilize $\eta \approx 2$.

- A.4** Determine os valores de I_S e η com suas respectivas incertezas e faça um gráfico adequado. Indique as barras de erro se necessário.

- A.5** A **resistência diferencial** indica como a tensão varia com uma pequena variação de corrente, sendo definida pela seguinte fórmula:

$$R = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{1}{\text{Inclinação instantânea no gráfico I-V}}$$

Mostre que para uma voltagem muito pequena, um LED atua como um resistor de resistência quase infinita. Calcule explicitamente esse valor. Não é necessário realizar análise de erros.

8.2.6 Resistividade - Dificuldade iniciante - 1h

Introdução

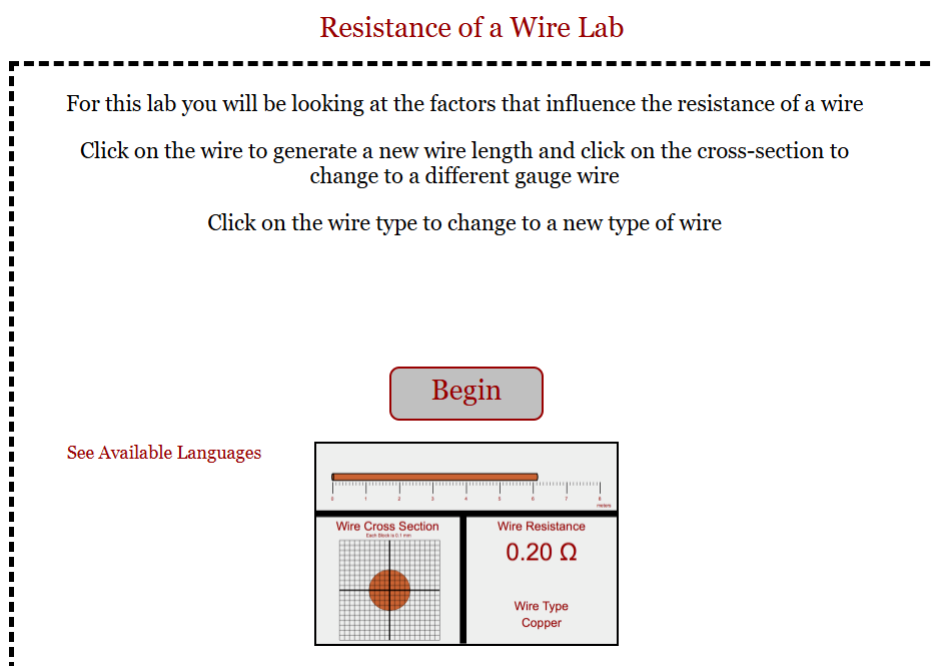
Nesse experimento estudaremos quais fatores afetam a resistência de um fio. Para isso, utilizaremos a Segunda Lei de Ohm:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A}$$

Sendo ρ a resistividade do fio, propriedade intrínseca do material que mede o quanto aquele material se opõe à passagem de corrente, L o comprimento do fio e A a área de seção transversal do fio.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o simulador do Physics Aviary que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

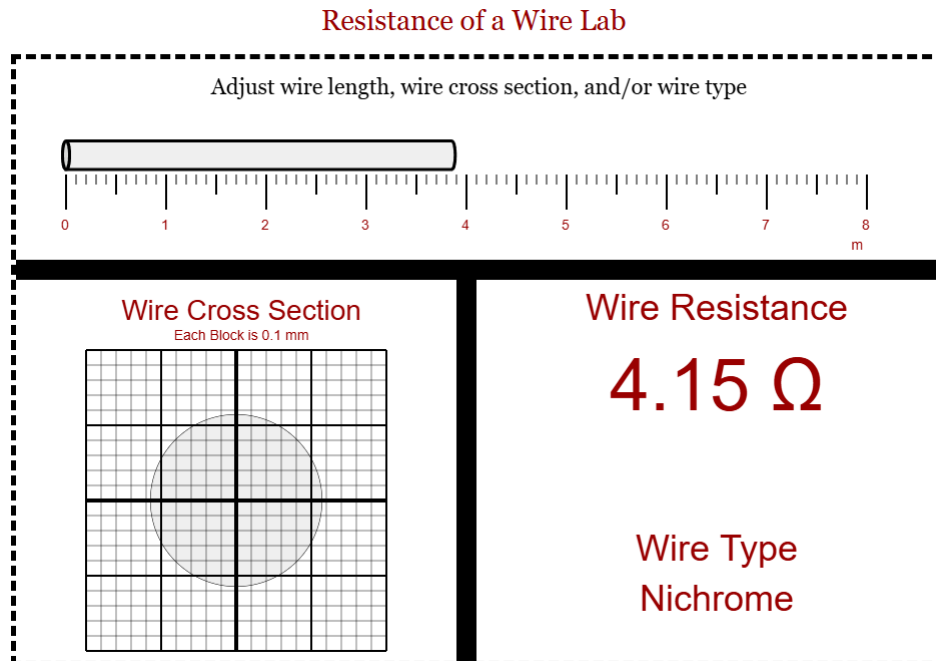


Agora, você deve clicar em "Begin" para continuar. Após isso, você chegará na interface do simulador, como é mostrado na figura abaixo:

Temos quatro áreas importantes na tela. A área que tem uma régua e um fio é onde você consegue alterar o comprimento dele (basta clicar em cima do fio). A área que tem o quadriculado é onde você consegue alterar a área de seção transversal do fio (basta clicar no quadriculado). Temos ainda a área "Wire Type", onde você consegue mudar o material do fio (clicando em cima do nome), e a área "Wire Resistance" que é onde você pode ler o valor da resistência do fio.

Parte A: Descobrindo a resistividade do cobre variando o comprimento

Nessa parte vamos determinar qual a resistividade do cobre variando somente o comprimento do fio. Para isso, clique em "Wire Type" até aparecer "Copper". Deixe também



a área do fio no máximo para todas as medições.

- A.1** Faça uma tabela da resistência pelo comprimento do fio. Coloque todos os erros e considere que a resistência é dada por um medidor digital. Faça a tabela conforme a **Tabela 1**.

Tabela 1:

	l (m)	R (Ω)
1		
2		
3		
4		
...		

- A.2** Utilizando os dados da **Tabela 1**, faça um gráfico em um papel milimetrado apresentando as barras de erro.

- A.3** Faça regressão linear na calculadora e determine a resistividade do cobre e seu respectivo erro.

Parte B: Descobrindo a resistividade do cobre variando a área

Nessa parte vamos determinar qual a resistividade do cobre variando somente a área

do fio. Para isso, mantenha o "Wire Type" em "Copper". Deixe também o comprimento do fio no máximo para todas as medições.

B.1 Faça uma tabela da resistência pelo raio do fio. Coloque todos os erros e considere que o erro da medida da resistência é de $0,01 \text{ m}\Omega$. Faça a tabela conforme o seguinte modelo:

Tabela 2:

	$r \text{ (m)}$	$R \text{ (}\Omega\text{)}$
1		
2		
3		
4		
5		
...		

B.2 Escreva uma equação linearizada que relacione R e r .

B.3 Utilizando os dados da **Tabela 2**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela seguindo o modelo da **Tabela 3**.

Tabela 3:

$f(r)$	$f(R)$

B.4 Faça regressão linear na calculadora e determine a resistividade do cobre e seu respectivo erro. Seu valor deu próximo ao obtido na parte A?

Capítulo 9

Experimentos de Miscelânea

9.1 Introdução

Este capítulo final é uma síntese de todas as habilidades que você desenvolveu, aplicando o método experimental a uma vasta gama de problemas. Os experimentos cobrem áreas diversas, incluindo força magnética, órbitas planetárias, hidrodinâmica, termodinâmica e fenômenos ondulatórios. Embora a maioria destes experimentos não seja viável fora de simuladores e, portanto, não apareceria em uma prova, eles servem como uma excelente preparação para possíveis desafios. O objetivo não é focar em uma única área, mas sim testar sua capacidade de adaptar as técnicas de planejamento, medição e análise a sistemas físicos variados e desconhecidos.

9.2 Experimentos

9.2.1 Força Magnética - Dificuldade média - 2h30m

Introdução Toda partícula carregada com carga q que se move com uma velocidade $v \neq 0$ em um referencial com um campo magnético de módulo B , sente uma força magnética perpendicular à sua velocidade, com sentido determinado pela regra da mão direita. Com isso, as partículas movem-se em uma trajetória circular quando sujeitas a um campo magnético constante. O objetivo dessa tarefa experimental é (i) determinar a forma da força magnética; (ii) determinar a coerência teórica do modelo adotado a partir do raio de curvatura do movimento da partícula; (iii) comparar a carga do elétron e do pósitron. Para tanto, assuma as seguintes dependências:

$$\frac{F}{N} = k_1 \left(\frac{q}{C} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{v}{\text{m/s}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{B}{T} \right)^{\gamma_1} \quad (9.1)$$

$$\frac{R}{m} = k_2 \left(\frac{q}{C} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{v}{m/s} \right)^{\beta_2} \left(\frac{B}{T} \right)^{\gamma_2} \quad (9.2)$$

Onde k_i é um fator numérico maior que zero e $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ são arredondados para os inteiros mais próximos. Durante todo o experimento, realize a devida análise de erros.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o simulador do Laboratório Virtual da UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

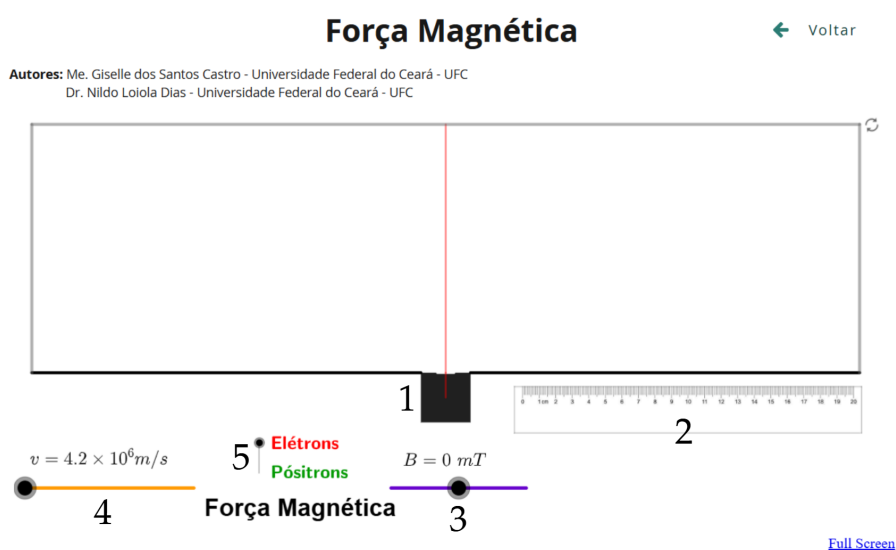


Figura 9.1: Interface do simulador

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Esse é o canhão de partículas. Nele não há nenhum tipo de configuração.
2. Essa é a régua que será utilizada para medir o raio de curvatura da partícula. Para usá-la basta segurar e arrastar pela tela.
3. Esse é o regulador do campo magnético. Basta arrastar o cursor para um lado e para o outro para ajustá-lo.
 - $B > 0 \implies$ campo entrando da tela.
 - $B < 0 \implies$ campo saindo na tela.
4. Esse é o regulador da velocidade das partículas no canhão. Assim como para o campo magnético, basta arrastar o cursos para ajustá-la.
5. Aqui você escolhe entre elétrons e pósitrons. Basta arrastar o cursor para tal.

Importante! Para todo o experimento, considerem a convenção de que quando a trajetória da partícula está orientada para direita, $R > 0$. Enquanto quando está orientada para esquerda, $R < 0$. Semelhantemente, a força magnética segue a mesma convenção de sinais.

Parte A: Observações qualitativas e teóricas

Nessa parte, vamos fazer algumas observações qualitativas e teóricas sobre a física envolvida no experimento. Para tanto, você não precisa realizar um grande volume de medidas, e sim, é preferível que observe qualitativamente o espaço amostral mínimo necessário. Além disso, não considere quaisquer expressões teóricas já conhecidas para as grandezas físicas relevantes no experimento.

A.1 A partir de uma análise teórica, de que forma podemos relacionar k_1 com k_2 , α_1 com α_2 e assim por diante? A massa do elétron é m_e em kg.

A.2 O que se pode dizer sobre a paridade de $|\alpha_i|$ e de $|\gamma_i|$. Isto é, eles são pares ou ímpares? Do mesmo modo, o que se pode dizer sobre os sinais da carga do pósitron e do elétron?

A.3 Determine $\left| \frac{q_{\text{pósitron}}}{q_{\text{elétron}}} \right|$.

Parte B: Expressão para o raio da partícula

Nessa parte, iremos explorar a montagem experimental para encontrarmos quantitativamente os coeficientes β_2 e γ_2 . Para as próximas partes, escolha o elétron.

B.1 Para uma velocidade v fixa, varie o campo magnético B (T) e registre os valores do raio R (m) do elétron na **Tabela 1**. Construa um gráfico da dependência.

Tabela 1: B (T) x R (m)

$(B \pm \sigma_B)$ (T)	$(R \pm \sigma_R)$ (m)
...	...

B.2 Para um campo magnético B fixo, varie a velocidade v (m/s) e registre os valores do raio R (m) do elétron na **Tabela 2**. Construa um gráfico da dependência.

Tabela 2: B (T) x v (m/s)

$(v \pm \sigma_v)$ (m/s)	$(R \pm \sigma_R)$ (m)
...	...

B.3 Proponha uma linearização adequada para determinar β_2 e γ_2 .

B.4 Construa duas tabelas com os dados linearizados para ambas as dependências.

Tabela 3: Dados linearizados

$f_1 \left(\frac{R}{m} \right) \pm \sigma_{f_1}$	$h_1 \left(\frac{v}{m/s} \right) \pm \sigma_{h_1}$
...	...

$f_2 \left(\frac{R}{m} \right) \pm \sigma_{f_2}$	$h_2 \left(\frac{B}{T} \right) \pm \sigma_{h_2}$
...	...

B.5 Construa, em papel milimetrado, dois gráficos para os dados das tabelas do item B.4. Determine as retas de melhor ajuste.

B.6 A partir das retas de melhor ajuste, determine β_2 e γ_2 .

Parte C: Resultados finais e carga do elétron

Agora, a partir dos dados coletados, podemos determinar uma expressão para a força magnética. Também, nessa parte considere $k_2 = m_e/\text{kg}$ e $\alpha_2 = -1$. Numericamente, $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

C.1 Experimentalmente, qual a expressão para a força magnética em termos de q , v e B ?

C.2 Determine o módulo da carga do elétron, em Coulomb.

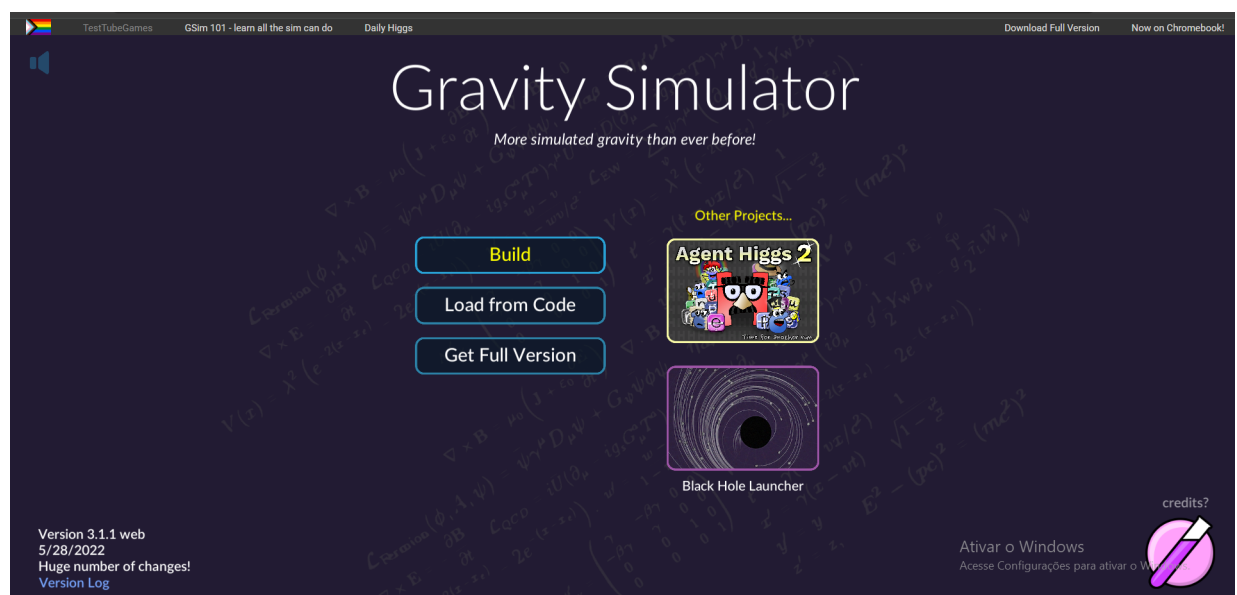
9.2.2 Sistema Solar - Dificuldade média - 2h

Introdução

Neste experimento, vamos estudar alguns resultados fundamentais da gravitação universal aplicados no Sistema Solar.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos um simulador da TestTubeGames que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

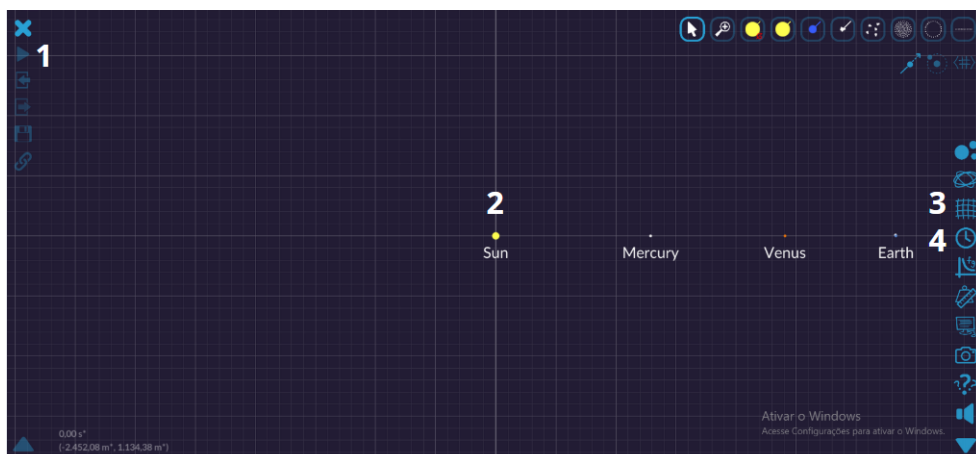
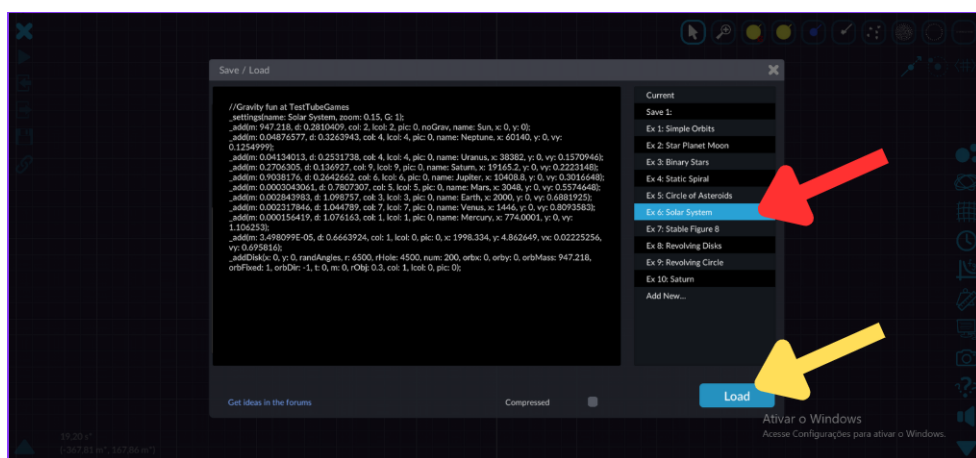
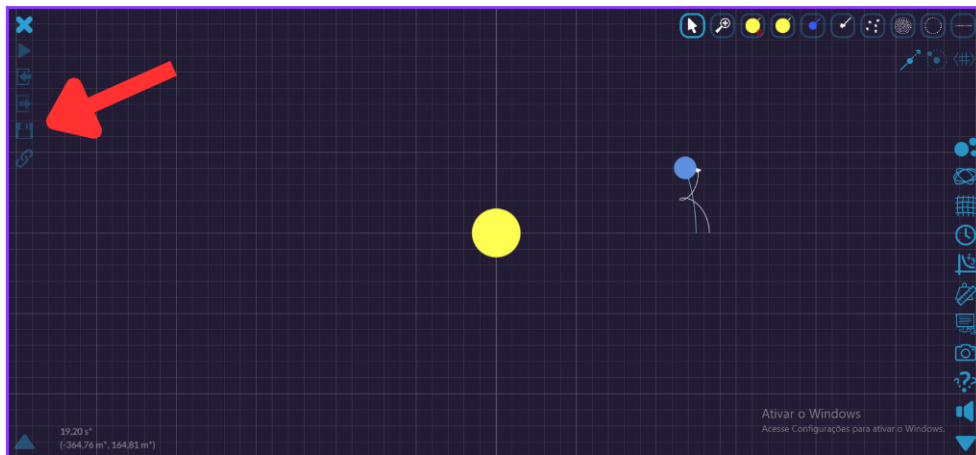


Agora, clique em "Build". Você irá se deparar com uma simulação aleatória rodando. Para selecionar a simulação sobre do Sistema solar, você deve clicar no botão indicado na imagem:

Assim, você irá se encontrar em uma nova tela. Nesta, você deve clicar em "Ex 6: Solar System" e depois em "Load":

Agora, finalmente estamos diante do simulador! **Caso você queira reiniciar a simulação, basta realizar este mesmo processo novamente. Isso talvez seja algo decisivo ao longo de seu experimento.** Assim, você deve ficar diante da interface:

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:



1. Esse botão paralisa a simulação. Apertando ele novamente, a simulação continuará de onde parou.
2. Esse é o sol. A sua direita, estão os planetas do sistema solar. Apenas os 4 planetas internos (os 4 mais próximos do Sol) vão ser relevantes neste problema.
3. Clicando neste botão, é possível ajustar o "zoom" de maneira a facilitar suas medidas.
4. Clicando neste botão, é possível ajustar a "time speed", ou seja, a velocidade da simulação. Você pode mudar essa velocidade arbitrariamente. Além disso, apertando

"Start timer", você começa um cronômetro de tempo nas unidades do simulador, que deverá ser usado para tirar medidas na parte C. Apertando novamente esse botão, você pode pausar o cronômetro ou fazer com que ele volte do 0.

Porém, o simulador ainda tem algumas opções importantes que devemos explorar.

Se quiser, você pode medir a distância entre dois objetos englobando ambos em um retângulo. Para isso, segure "shift" enquanto mexe o cursor.

Por fim, é importante dizer que o simulador apresenta um sistema de unidades diferente: m^* , kg^* e s^* . Este sistema é tal que G é numericamente igual a 1.

Parte A: Parâmetros orbitais

Nessa parte, vamos encontrar os principais parâmetros orbitais dos planetas do Sistema Solar. Para isso, você precisará medir distâncias. Lembre-se de ter cuidado sobre suposições acerca das posições do periélio e do afélio.

A.1 Expresse o semi-eixo maior e a excentricidade de uma órbita em função da distância do planeta ao sol no periélio(r_p) e no afélio(r_a).

A.2 Por meio de dados experimentais, faça uma tabela com medições de r_p e r_a para os 3 primeiros planetas mais próximos do Sol. ATENÇÃO: Faça isso com velocidade de simulação de 10x; por questões técnicas, velocidades de simulação diferentes podem dar resultados diferentes.

Tabela 1: Planeta x r_p x r_a

Planeta	r_p (m^*)	r_a (m^*)

A.3 Encontre o semi-eixo maior e a excentricidade de cada planeta do Sistema Solar. OBSERVAÇÃO: não estranhe se os valores de excentricidade diferirem muito dos da vida real; por razões técnicas eles devem ser diferentes.

Parte B: Períodos

Agora, vamos estudar o comportamento de período em órbitas. Para medir períodos

de tempo relevantes, use a função de medição de tempo do simulador. Faça medidas apenas com os 4 planetas mais próximos do Sol. Talvez seja útil usar que o semi-eixo maior da órbita de Marte é aproximadamente $a = 3039,37m^*$.

B.1 Faça uma tabela com os períodos de cada planeta.

Tabela 2: Planeta x T

Planeta	T_1 (s)	T_2 (s)	$\dots T_n$ (s)	$T_{\text{médio}}$ (s)

B.2 Suponha que você apenas sabe o seguinte sobre a terceira Lei de Kepler: o período é proporcional a uma potência do semi-eixo maior. Assim, faça uma nova tabela com as funções devidamente linearizadas.

B.3 Faça um gráfico com os dados linearizados. Assim, encontre a potência comentada no item anterior. Calcule a constante de proporcionalidade.

9.2.3 Transformações gasosas - Dificuldade média - 1h15m

Introdução

Um gás ideal é um modelo aproximado para gases que, na maioria das ocasiões, funciona muito bem. A partir desse modelo, temos relações envolvendo pressão, volume, temperatura e o número de mols de um gás.

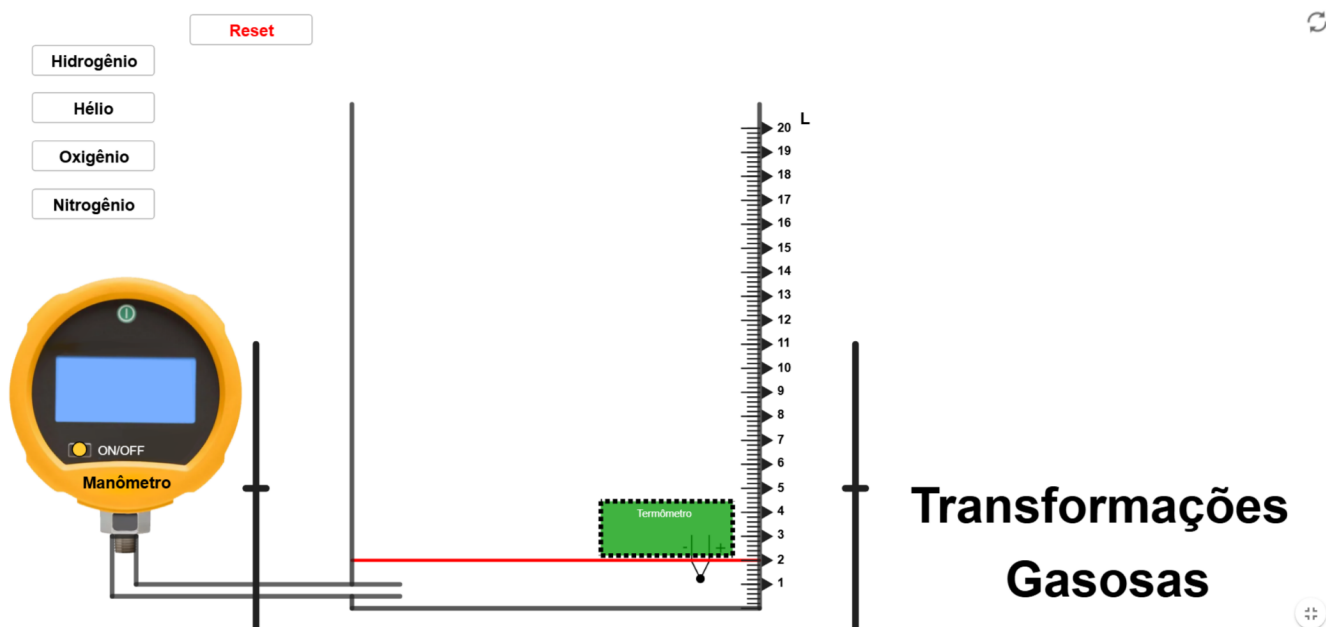
Com isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema.

Tabela 3: Planeta x $f(T)$ x $g(a)$

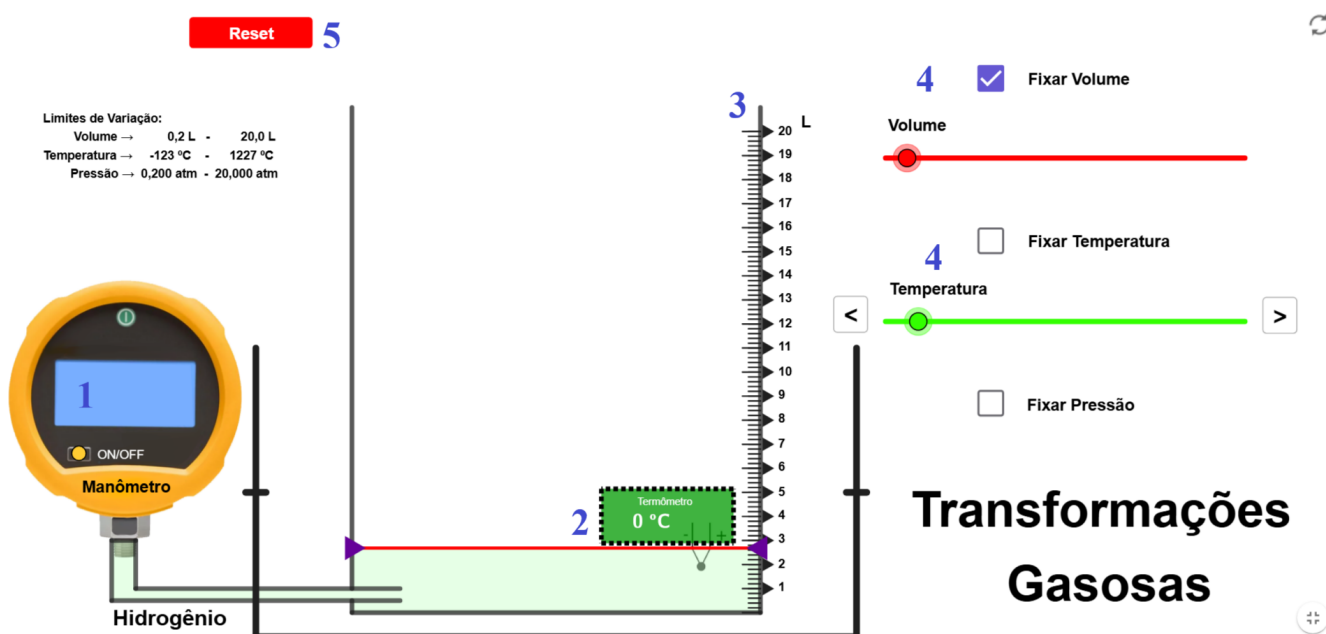
Planeta	$f(T)$	$g(a)$

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do Laboratório Virtual que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Agora, você deve escolher algum gás para continuar. Após isso, você terá a interface principal do simulador, como visto abaixo:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Um manômetro, onde você medir a pressão em Atm.

2. Um termômetro, onde você medir a temperatura em $^{\circ}C$.
3. Um medidor de volume, onde você medir o volume em Litros.
4. Você pode variar o volume e a temperatura, além de poder escolher fixar um deles e a pressão
5. Você pode apertar o botão de "reset" para reiniciar o experimento e escolher um outro gás

Parte A: Lei de Gay-Lussac

A lei de Gay-Lussac é uma lei experimental que diz que em uma transformação isocórica (volume constante), a pressão é proporcional à temperatura. Para começar, escolha o gás hidrogênio, um volume fixo e anote ele.

A.1 Escreva a relação entre **P**(pressão do gás) e **T**(temperatura do gás) através dos seus conhecimentos de termodinâmica.

A.2 Varie a temperatura do seu experimento e preencha a **Tabela 1**, relacionando as medidas de temperatura e pressão.

Tabela 1: $T \times P$

T (K)	P (atm)

A.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, descubra o número de mols do gás hidrogênio. Use que $R = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm}/\text{K} \cdot \text{mol}$.

Parte B: Lei de Boyle

A lei de Boyle é uma lei experimental que diz que em uma transformação isotérmica (temperatura constante), o volume é inversamente proporcional à pressão. Para começar, escolha o gás hélio e uma temperatura fixa e anote ela.

B.1 Escreva a relação entre **V**(volume do gás) e **P**(pressão do gás) através dos seus conhecimentos de termodinâmica.

B.2 Varie a temperatura do seu experimento e preencha a **Tabela 2**, relacionando as medidas de volume com uma função da pressão para uma equação linearizada.

Tabela 2: $V \times f(P)$

$V \text{ (L)}$	$f(P)$

B.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e , a partir dele, descubra o número de mols do gás hélio. Use que $R = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm/K} \cdot \text{mol}$.

Parte C: Lei de Charles

A lei de Charles é uma lei experimental que diz que em uma transformação isobárica (pressão constante), o volume é proporcional à temperatura. Para começar, escolha o gás oxigênio e uma pressão fixa e anote ela.

C.1 escreva a relação entre **V** e **T** através dos seus conhecimentos de termodinâmica

C.2 Varie a temperatura do seu experimento e preencha a **Tabela 3**, relacionando as medidas de temperatura e volume.

Tabela 3: $T \times V$

$T \text{ (K)}$	$V \text{ (L)}$

C.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e , a partir dele, descubra o número de mols do gás oxigênio. Use que $R = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm}/\text{K} \cdot \text{mol}$.

9.2.4 Lei de Wien/Stefan-Boltzmann - Dificuldade média - 1h15m

Introdução

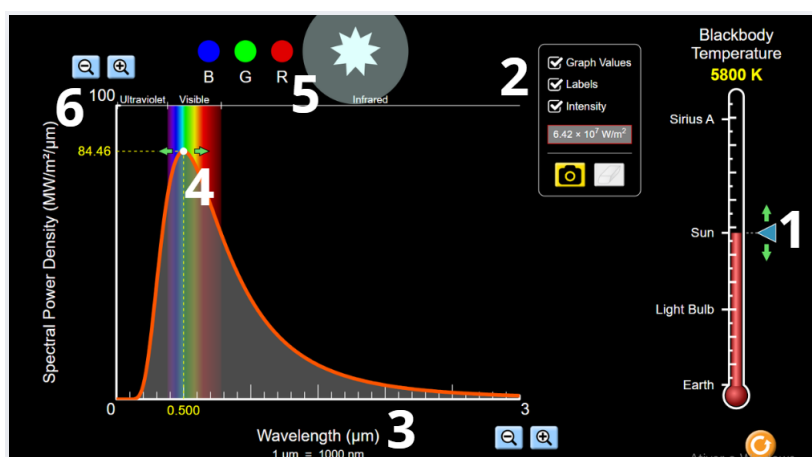
As Leis do Corpo Negro são extremamente úteis para modelar a radiação emitida pelos objetos, possuindo diversas aplicações, principalmente na astrofísica.

Por isso, nesse experimento, vamos estudar tais leis por meio de um simulador!

ATENÇÃO: A equipe do departamento de física do NOIC recomenda fortemente que você não utilize *Sirius A*, ζCMa ou alguma outra estrela que por acaso esteja no seu quintal para realizar esse experimento, e sim o simulador apresentado abaixo. Mas também, se quiser fazer, vai lá. Só medir o comprimento de onda e botar um termômetro perto dela.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do PhET que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Esse é o medidor que mostra a temperatura do Corpo Negro, que pode ser alterada movendo o medidor para cima ou para baixo.
2. Aqui você tem a opção de habilitar "Graph values"(ponto branco), "Labels"(legendas) e Intensity(intensidade), sendo que este último revela um retângulo cinza que mostra o valor da intensidade.

3. Eixo x da curva mostrada, que representa o comprimento de onda da luz em micrômetros.
4. Ponto branco que pode ser alterado de lugar para encontrar os valores de x e y em qualquer canto da curva. OBS: Quando você habilita "Graph Values", o ponto branco aparece automaticamente no pico do gráfico.
5. Legendas que mostram o espectro de cada região do gráfico.
6. Eixo y da curva mostrada, que representa a radiância espectral.

As Leis de Wien e Lei de Stefan-Boltzmann são da forma:

$$\lambda_m T = b$$

$$L = \sigma 4\pi R^2 T^n$$

Onde λ_m é o comprimento de onda de maior emissão, b é a constante de Wien, R é o raio da estrela, T sua temperatura e L é chamado de luminosidade da estrela. O coeficiente n é algo que encontraremos ao longo do problema.

A intensidade que aparece no simulador é dada por:

$$I = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Onde r é a distância entre o centro da estrela e o ponto de análise. Como o ponto de análise está na superfície da estrela, $r=R$. Além disso, temos que a radiância espectral é dada por:

$$R = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1 \right)}$$

Onde f é a frequência, c é a velocidade da luz, h é a constante de Planck, k_B é a constante de Boltzmann e e o número de Euler.

Talvez alguma das aproximações seja útil:

Além dos valores de $c = 3 \cdot 10^8 m/s$, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ e $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$

Parte A: Comprimento de maior emissão

Nessa parte, vamos estudar alguns comportamentos sobre o comprimento de onda de maior emissão de um Corpo Negro, principalmente conforme a variação de temperatura.

Condição	Aproximação
$x(rad) \ll 1$	$\sin(x) \approx \operatorname{tg} x \approx x(rad)$
$x \ll 1$	$(1+x)^n \approx 1+nx$
$x \ll 1$	$e^x \approx 1+x$
$x(rad) \ll 1$	$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
$x \ll 1$	$\log(1+x) \approx x$

Com isso, temos o objetivo de encontrar a constante de Wien(b).

A.1 Estime o intervalo de temperaturas no qual o pico de emissão está na luz visível, além do intervalo de comprimentos de onda do espectro de luz visível. Aja como se você não conhecesse ainda a Lei de Wien, somente neste item.

A.2 Com os dados experimentais obtidos no simulador, faça uma tabela relacionando o comprimento de onda de maior emissão da estrela por temperatura do corpo negro.

Tabela 1: $T \times \lambda_m$

T (K)	λ_m (μm)

A.3 Perceba que os dados ainda não estão linearizados. Por sorte, como conhecemos a Lei de Wien, já sabemos a linearização necessária. Então, faça uma tabela da função $f(\lambda_m)$ que possui comportamento linear com o T . Talvez apareça algum termo independente na sua equação de reta, mas apenas ignore ele (ele é um termo de extra adicionado pelo próprio simulador).

Tabela 2: $T \times f(\lambda_m)$

T (K)	$f(\lambda_m)$

A.4 Faça um gráfico com os dados da Tabela 2 de $f(\lambda_m) \times T$. Além disso, por meio de uma regressão linear ou pelo método gráfico, determine a constante de Wien.

Parte B: Lei de Stefmann Boltzmann

Agora, vamos estudar o comportamento da intensidade do Corpo Negro, que pode ser encontrado como a área abaixo do gráfico. Porém, como o simulador já nos fornece o valor da intensidade, não precisaremos utilizar esse método para encontrá-la. Com os resultados dessa parte, queremos mostrar a Lei de Stefmann-Boltzmann e encontrar sua constante!

B.1 Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando a intensidade I com a temperatura T do Corpo Negro.

Tabela 3: $T \times I$

T (K)	I (W/m ²)

B.2 Agora, refaça a tabela linearizando os dados. Apenas neste item e no próximo, aja como se você apenas soube-se que I depende de uma potência T , mesmo que você já conheça a fórmula por estudos próprios.

Tabela 4: $f(T)$ x $g(I)$

$f(T)$	$g(I)$

B.3 Faça um gráfico com os dados da tabela 4. Por meio de uma regressão linear ou pelo método gráfico, descubra o valor da potência de T que a intensidade depende.

Parte C: Radiância espectral

Por último, vamos tentar entender o comportamento da radiância espectral conforme o regime de altas temperaturas e altos comprimentos de onda. Use que R_m é a radiância espectral do pico do espectro.

C.1 Encontre a função da radiância espectral no regime de altas temperaturas e altos comprimentos de onda. Deixe sua resposta em função de constantes fundamentais, do comprimento de onda e da temperatura.

C.2 Mostre que tal aproximação não pode ser feita com os dados do simulador.

Infelizmente, o simulador não possui opções de temperatura altas o suficiente para que a aproximação seja bem utilizada. Porém, não é por isso que não podemos imaginar como faríamos se tivesse.

C.3 Detalhe como poderíamos medir a constante de Boltzmann (k_B) por meio de medidas experimentais de espectros de altas temperaturas (caso ele estivesse presente no simulador), supondo que era conhecido o valor da velocidade da luz. Que comprimento de onda seria o melhor para ser medido?

9.2.5 Flutuabilidade - Dificuldade iniciante - 1h

Introdução

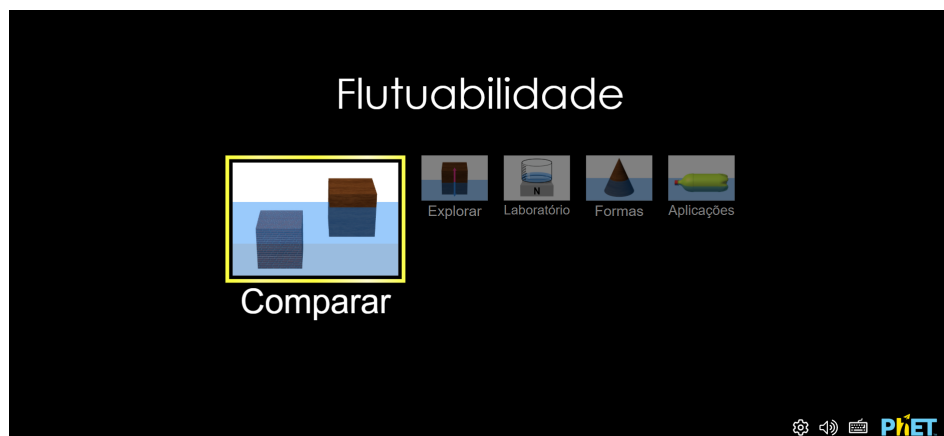
O sistema com um bloco inserido em um fluido, com ambos em equilíbrio, é regido

por duas forças: a gravitacional, devido à atração entre os corpos, e a de empuxo, devido a diferença de pressão nas extremidades do bloco

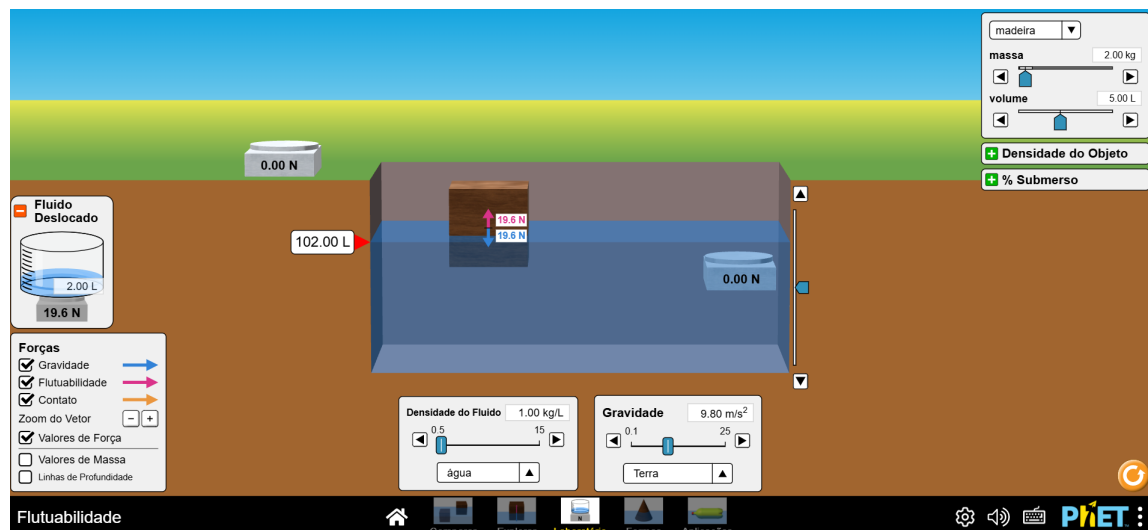
Tendo isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema utilizando um simulador.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do PhET que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Agora, você deve clicar em "Laboratório" para continuar. Após isso, você chegará na interface do simulador, como é mostrado na figura abaixo:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Ajuste do material do bloco;
2. Ajuste da massa do bloco;
3. Ajuste do volume do bloco;

4. Ajuste do material do fluido;
5. Ajuste da densidade do fluido;
6. Medidor de fluido deslocado.

Parte A: Determinação da densidade de um fluido

Nessa parte vamos determinar a densidade do **fluido A** variando a massa do bloco. Para a propagação de erros, considere que a incerteza de cada massa conhecida seja de 1%.

A.1 Escreva uma expressão para o volume submerso do bloco em função da massa do mesmo.

A.2 Escolha o melhor material para o bloco baseado no que o simulador disponibiliza. Com isso, meça o volume submerso para massas diferentes e, com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando ambas as medidas seguindo o modelo da tabela abaixo da **Tabela 1**.

Tabela 1

Massa (kg)	V (m ³)

A.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor da densidade do **Fluido A**.

Parte B: Determinação da densidade de um material

Nessa parte vamos determinar a densidade do Material T variando a densidade do líquido. Para a propagação de erros, considere que a incerteza de cada densidade conhecida seja de 1%.

B.1 Escreva uma expressão para a porcentagem do volume do bloco δ_V que está submerso em função da densidade do líquido.

B.2 Meça a porcentagem de volume submerso para densidades diferentes e, com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela relacionando ambas as medidas seguindo o modelo da tabela abaixo da **Tabela 2**.

Tabela 1

ρ^{-1} (L/kg)	δ_V

B.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor da densidade do **Material T**

9.2.6 Pressão hidrostática - Dificuldade iniciante - 1h

Introdução

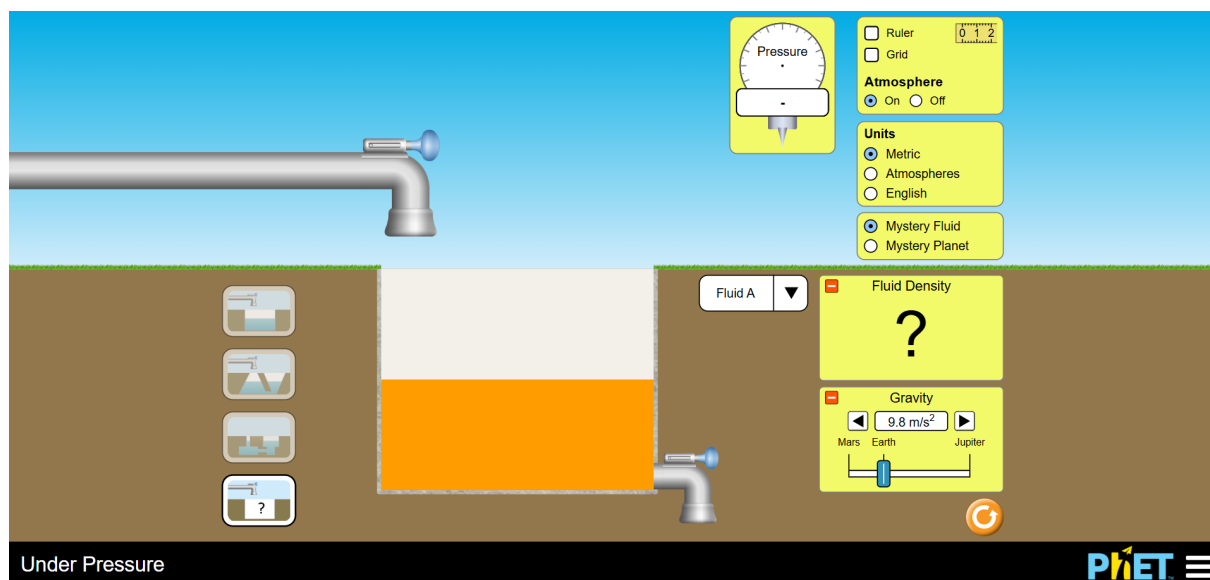
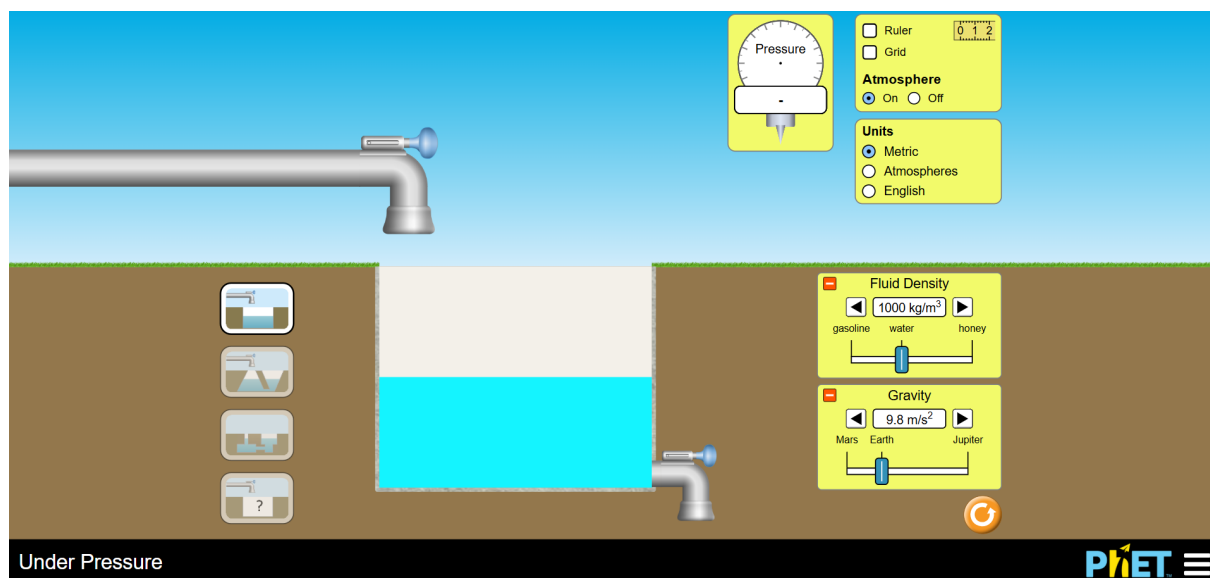
Neste experimento, exploraremos os princípios da pressão hidrostática. Para isso, é necessário compreender que a pressão em um fluido em repouso está relacionada à sua densidade, à aceleração da gravidade e à profundidade em que o ponto se encontra. Por meio dessa relação, podemos entender como a variação da pressão em um líquido permite caracterizar propriedades fundamentais do sistema.

Com isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o simulador presente neste link:[aqui](#) Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Para dar início aos experimentos, acesse a tela principal do simulador e selecione o quarto cenário disponível, identificado pelo ícone de um recipiente com um ponto de interrogação (?). Esta será a interface que utilizaremos para todas as análises, conforme exibida na imagem a seguir:



O simulador permite:

1. **Medir a Pressão:** Utilizar um medidor de pressão móvel para aferir a pressão em qualquer ponto dentro do fluido, observando como ela varia com a profundidade.
2. **Densidade do Fluido:** É possível selecionar diferentes tipos de fluidos, cada um com sua densidade, ou até mesmo um "Fluido Misterioso" para investigar suas propriedades.
3. **Gravidade:** O usuário pode alterar a aceleração da gravidade, escolhendo entre valores predefinidos para planetas como Marte, Terra e Júpiter, ou ajustando-a livremente. Isso demonstra a relação direta entre a força gravitacional e a pressão hidrostática.

4. **Analisar a Pressão Atmosférica:** A opção de ligar ou desligar a atmosfera permite compreender a diferença entre pressão manométrica e pressão absoluta.
5. **Utilizar Ferramentas de Medição:** Uma régua e uma grade podem ser ativadas para realizar medições precisas de profundidade e distância.
6. **Comparar Unidades:** Os resultados de pressão podem ser exibidos em diferentes sistemas de unidades (Métrico, Atmosferas e Inglês).

Caso se opte pela realização do experimento em sua forma prática, em substituição à versão simulada, será necessário dispor de um recipiente, um líquido à escolha, uma régua e um manômetro.

Parte A: O líquido Misterioso

Nesta etapa do experimento, selecionaremos a opção Mystery Fluid; optarei por utilizar o fluido A, embora seja possível escolher outro. Ajustaremos a gravidade para 10 m/s^2 , a fim de simplificar os cálculos, e manteremos a opção Atmosphere ativada.

A.1 Construa uma tabela relacionando a pressão com a profundidade.

A.2 Construa um gráfico utilizando os dados da tabela montada anteriormente.

A.3 Calcule o coeficiente angular e linear do gráfico.

A.4 Por meio de uma análise dimensional, deduza a fórmula para variação da pressão. Dica: depende da gravidade.

A.5 Estime a densidade do líquido.

Parte B: O Planeta Misterioso

Nesta seção do experimento, selecionaremos a opção Mystery Planet; optarei pelo planeta A, embora seja possível escolher outro. Ajustaremos a densidade do líquido para 1000 kg/m^3 e manteremos a opção Atmosphere desativada.

B.1 Construa uma tabela relacionando pressão com a profundidade.

B.2 Construa um gráfico com os dados da tabela anterior.

B.3 Calcule o coeficiente angular e linear.

B.4 Estime a gravidade do planeta.

B.5 Caso optássemos por deixar a atmosfera ativa, o valor da gravidade alteraria?

9.2.7 Bernoulli - Dificuldade iniciante - 1h

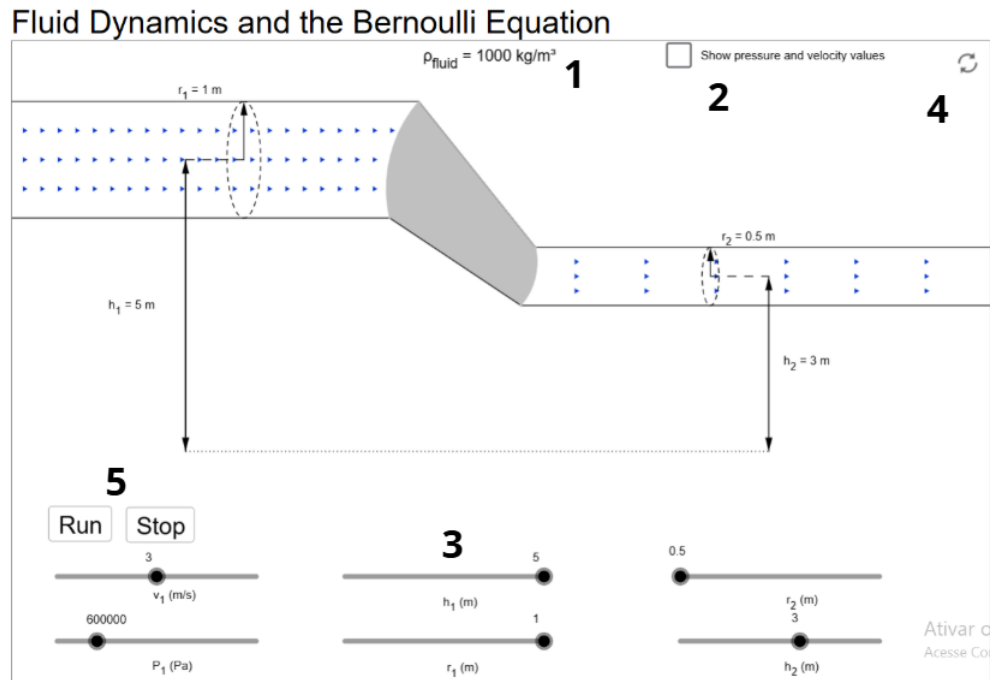
Introdução Neste experimento, vamos analisar um simples caso de hidrodinâmica para demonstrar algumas fórmulas conhecidas e descobrir parâmetros relevantes.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos um simulador do "oPhysics" que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Aqui está a densidade do fluido utilizado.
2. Apertando nesse botão, a pressão e velocidade do fluido no seguinte tubo vão começar a ser mostrado. Essa opção **deve** estar ligada durante todo o seu experimento, já que é por meio dela que você pode medir seus dados.
3. Nessa área, você pode alterar vários parâmetros relevantes do experimento.
4. Apertando esse botão, o simulador voltará para suas configurações originais.
5. Por meio desses botões, você pode ligar ou parar a simulação. Como ver o movimento do fluido no tubo não é relevante neste experimento, você pode ignorar essa área.



No geral, mantenha todos os parâmetros na configuração padrão, alterando apenas aquele que for pedido pelo item. Após tirar os devidos dados daquele item, retorne à configuração original.

Talvez seja útil utilizar a equação da continuidade:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

E a equação de Bernoulli:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Parte A: Equação da continuidade

Nessa parte, vamos tentar demonstrar a equação da continuidade, muito relevante na hidrodinâmica.

A.1 Seja $k = r_1/r_2$. Mantendo os outros parâmetros os mesmos, meça v_2 para diferentes valores de k e anote seus dados em uma tabela.

A.2 Faça uma tabela com as funções linearizadas $g(k)$ e $f(v_2)$.

Tabela 1: $k \times v_2$

k	v_2 (m/s)	

Tabela 2: $g(R) \times f(T)$

$g(k)$	$f(v_2)$	

A.3 A partir disso, faça um gráfico com os dados linearizados. Mostre que seu resultado é condizente com a equação da continuidade.

Parte B: Equação de Bernoulli

Agora, vamos tentar utilizar a equação de Bernoulli para tentar obter o valor da gravidade local.

B.1 Mantendo os outros parâmetros os mesmos, meça P_2 para diferentes valores de P_1 e anote seus dados em uma tabela. Use apenas 3 algarismos significativos e 1 duvidoso em seus dados.

Tabela 3: $k \times v_2$

P_2 (10^5 Pa)	P_1 (10^5 Pa)	

B.2 Faça um gráfico por meio dos dados anteriores. Assim, determine o valor da gravidade local.

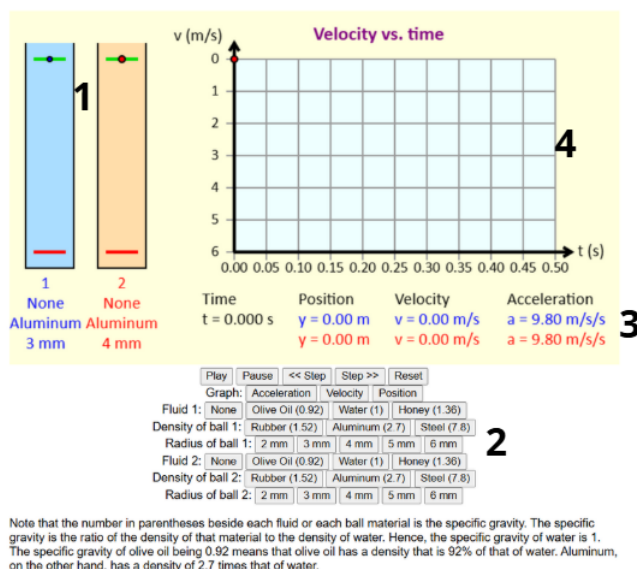
9.2.8 Viscosidade - Dificuldade difícil - 3h

Introdução

Neste experimento, vamos estudar os efeitos da força de viscosidade em líquidos e como ela depende de parâmetros relevantes

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos um simulador da "Boston Uni", que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:



Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Esse são os tubos com os dois líquidos e as duas esferas das quais podemos tirar medidas. Essa parte é apenas visual, então você não deve tirar medidas daqui.
2. Aqui, você pode alterar as propriedades dos fluídos 1 e 2 e das esferas 1 e 2. "Fluid" é fluído utilizado, "Density of the ball" é a densidade da esfera e "Radius of the ball" é o raio da bola. A simulação para quando uma das esferas atinge o chão. Como espera-se que você faça medições em um tubo por vez, você pode configurar o outro tubo (que não foi escolhido para medições) para que ele caia muito lentamente e não atrapalhe as medições do tubo principal. **Os valores em parêntese no fluído e na densidade da esfera representam a densidade relativa deles com respeito à água.**
3. Clicando neste botão, é possível ajustar o "zoom" de maneira a facilitar suas medidas.
4. Clicando neste botão, é possível ajustar a "time speed", ou seja, a velocidade da simulação. Você pode mudar essa velocidade arbitrariamente. Além disso, apertando "Start timer", você começa um cronômetro de tempo nas unidades do simulador, que deverá ser usado para tirar medidas na parte C. Apertando novamente esse botão, você pode pausar o cronômetro ou fazer com que ele volte do 0.

Além disso, a viscosidade dinâmica de cada um dos fluídos pode ser um parâmetro relevante ao problema. Em $\text{Pa} \cdot \text{s}$, considera que tais viscosidades são 0,001, 0,08 e 4,2 para os fluídos "Water", "Olive oil" e "Honey", respectivamente.

Parte A: Investigando a viscosidade Em um movimento com a força de viscosidade, podemos descrever a posição, velocidade e aceleração do corpo por meio de certas funções:

$$y = C_1 \left(t - \frac{1}{C_2} e^{C_2 t} \right) + C_3$$

$$v = C_4 (1 - e^{C_2 t})$$

$$a = (g - C_5) e^{C_2 t}$$

Onde C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 variam conforme o material do líquido, o material da esfera e o raio da esfera. Utilizando-se de resultados experimentais, o objetivo desse experimento é descobrir como exatamente como essas variáveis dependem desses parâmetros relevante. Todas essas relações são por forma de potências(ou seja, cada C_i depende de cada parâmetro elevado a uma potência n_{ij}). Para isso, o recomendado é que sejam feitas tabelas e gráficos da maneira que for mais conveniente.

Ao fazer suas medições, o recomendado é usar as configurações "Oil Oliver", "Steel" e "6mm" como base e alterá-las conforme os objetivos de cada item. Talvez seja útil utilizar que a densidade da água é de, aproximadamente, 997kg/m^3 .

A.1 Encontre como C_1 se relaciona com C_4 e como C_3 se relaciona com C_4 e C_2 utilizando casos limites do movimento. Além disso, saiba que $g - C_5 = -C_2 C_4$.

A.2 Encontre como C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 dependem do raio da esfera.

A.3 Encontre como C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 dependem da densidade da esfera.

A.4 Encontre como C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 dependem com a e viscosidade dinâmica do material e sua densidade. Talvez seja útil saber que C_5 depende apenas da densidade do líquido (e não da viscosidade) e que C_2 depende apenas da viscosidade do líquido (e não da densidade do líquido).

A.5 Encontre C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 em função dos parâmetros relevantes. Assim, encontre a força de viscosidade em função dos parâmetros relevantes.

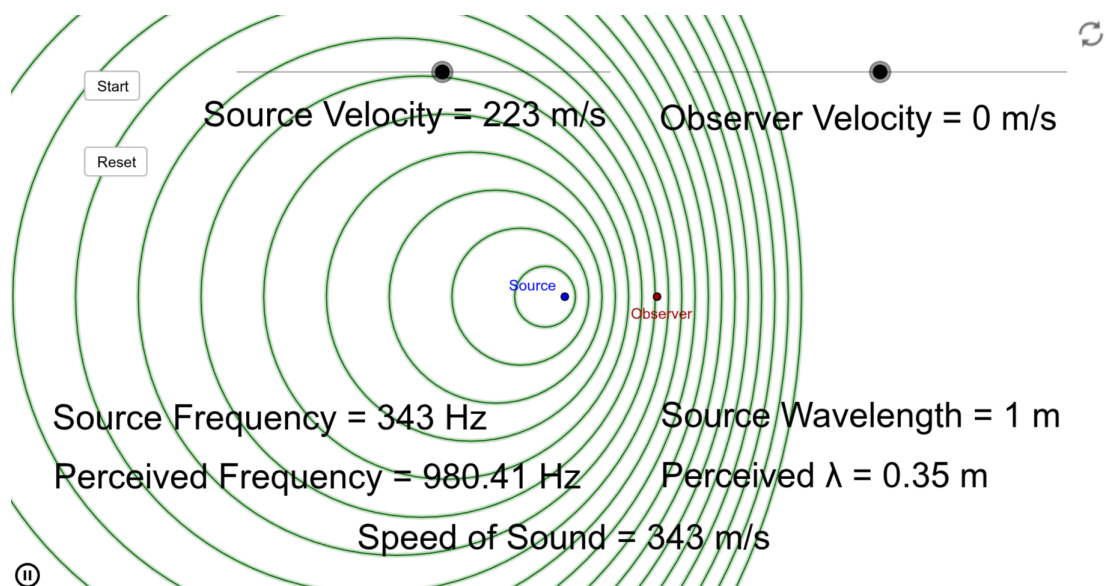
9.2.9 Efeito doppler - Dificuldade iniciante - 1h

Introdução

O efeito Doppler é a mudança percebida na frequência de uma onda (como o som ou a luz) devido ao movimento relativo entre a fonte da onda e o observador. Quando a fonte e o observador se aproximam, a frequência da onda aumenta, tornando o som mais agudo ou, no caso da luz, deslocando-a para o azul. Quando se afastam, a frequência diminui, tornando o som mais grave ou a luz desviada para o vermelho.

Apresentando o simulador

Para realizar este experimento, utilizaremos uma simulação do site *oPhysics* disponível [neste link](#) (tela cheia).



Para essa interface, podemos encontrar as seguintes ferramentas:

1. Ajuste de velocidade (fonte e observador)
2. Botão para pausar a simulação (canto inferior esquerdo)
3. Medições de frequência e comprimento de onda

Estudo do fenômeno

Tendo em mente a introdução fornecida, é possível particularizar o efeito Doppler para o caso de ondas sonoras, pela seguinte fórmula:

$$\frac{f'}{f} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{v_s \pm v_{\text{obs}}}{v_s \mp v_{\text{fonte}}}$$

onde f' , λ' são medidos no referencial do observador, f , λ são medidos no referencial da fonte e v_s é a velocidade do som.

A.1 Explique o efeito das escolhas dos sinais na fórmula.

A.2 Descreva um método de calcular a velocidade do som com um erro menor que 0.1 m/s.

A.3 Determine a velocidade do som no ar v_s com sua respectiva incerteza.

9.2.10 Ressonância em uma cavidade com ar - Dificuldade iniciante - 2h

Introdução

Quando uma coluna de ar é confinada em um tubo sonoro — uma estrutura cilíndrica com extremidades abertas ou fechadas — ela apresenta modos de vibração específicos. Ao ser excitada por uma frequência próxima a um desses modos, a ressonância ocorre, amplificando o som de forma significativa, mas a frequência permanece a mesma.

Com isso em mente, vamos estudar algumas propriedades desse sistema.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento, utilizaremos o simulador do UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Aqui, você pode variar a frequência da onda.
2. Aqui, você pode variar a intensidade da onda.
3. Aqui, você pode variar a posição do êmbolo.

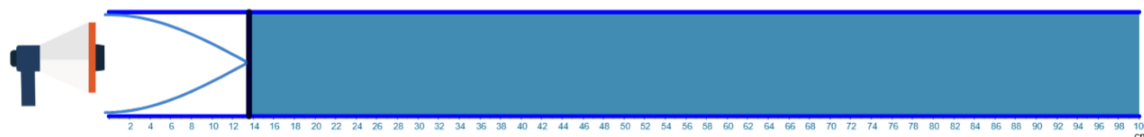


Ressonância em uma Cavidade com Ar

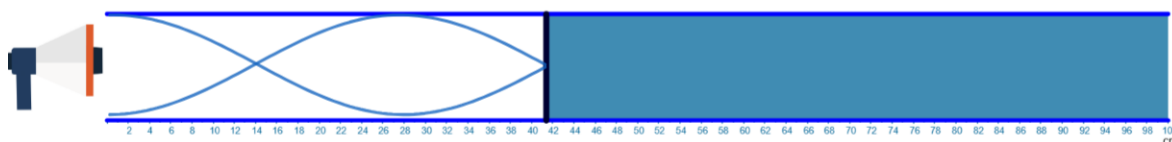
4. Nesse botão, você liga o som da simulação (mas não é necessário ouvir para realizar o experimento).
5. Nesse botão, você desliga o som da simulação.
6. Aqui, você altera para uma das frequências X, Y ou Z, que não são conhecidas.
7. Este é o decibelímetro do sistema, responsável por indicar a intensidade da onda sonora.
8. Este é o alto-falante, responsável pela geração das ondas sonoras.
9. Este é o tubo sonoro, onde a onda se propagará.

Fundamento Teórico

Uma onda estacionária é gerada pelo alto-falante. Ao alterar a posição do êmbolo, observa-se que a intensidade da onda atinge seu primeiro máximo a uma distância d_1 , formando o seguinte padrão:



Se continuarmos aumentando a posição do êmbolo, a intensidade atinge um segundo máximo a uma distância d_2 :



A partir da análise das figuras, podemos estabelecer a seguinte relação em função do comprimento de onda λ :

$$d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2}$$

Portanto,

$$v_s = 2f(d_2 - d_1)$$

Em que v_s é a velocidade de propagação do som, e f é a frequência da onda associada.

Observações

Também é válido que $d_3 - d_2 = \frac{\lambda}{2}$, para um terceiro máximo; $d_4 - d_3 = \frac{\lambda}{2}$, para um quarto máximo; e assim por diante.

Em todos os itens, propague as incertezas.

Parte A: Determinação da velocidade do som

Nessa parte vamos determinar experimentalmente a velocidade do som.

A.1 Ajuste a frequência para $f = 300$ Hz e mova o êmbolo até que a onda atinja uma intensidade máxima. Quando o decibelímetro digital indicar um valor máximo, anote a posição correspondente na escala.

Repita esse procedimento para, no mínimo, cinco frequências diferentes e construa a **Tabela 1**, seguindo o modelo apresentado abaixo.

Tabela 1: Determinação experimental da velocidade do som

	d_1 (cm)	d_2 (cm)	d_3 (cm)
Frequência 300 Hz			
Frequência A Hz			
Frequência B Hz			

A.2 Utilizando os dados da **Tabela 1**, construa a **Tabela 2** com as velocidades do som obtidas experimentalmente, de acordo com as expressões: $v_1 = 2f(d_2 - d_1)$, $v_2 = 2f(d_3 - d_2)$, e assim por diante.

Tabela 2: Determinação experimental da velocidade do som

	v_1 (m/s)	v_2 (m/s)	v_3 (m/s)
Frequência 300 Hz			
Frequência A Hz			
Frequência B Hz			

A.3 Tire a média de todos os valores, e encontre o valor da velocidade do som e sua respectiva incerteza.

Parte B: Frequências X, Y e Z

Agora, vamos determinar o valor das frequências desconhecidas: X, Y e Z.

B.1 Repita o mesmo procedimento que em A.1 e faça uma tabela seguindo o mesmo modelo da **Tabela 3**.

Tabela 3: Determinação experimental das frequências

	d_1 (cm)	d_2 (cm)	d_3 (cm)
Frequência X			
Frequência Y			
Frequência Z			

B.2 Com base no valor da velocidade do som encontrado no item A.3 e do item B.1, determine os valores das frequências X, Y e Z.

Parte C: Correção de comprimento

Você pode perceber que, quando o êmbolo está na posição inicial $d = 0$, a intensidade da onda não corresponde à intensidade mínima esperada. No entanto, isso não está de acordo com a teoria apresentada até agora.

Esse fenômeno ocorre porque, na realidade, a onda se inicia um pouco antes da posição $d = 0$, ou seja, antes do início efetivo do êmbolo. Para corrigir essa discrepância, introduzimos uma distância fictícia D , que representa esse deslocamento inicial. Sabemos que D varia da seguinte maneira:

$$D = \frac{d_2 - 3d_1}{2} = \frac{3d_3 - 5d_2}{2} = \frac{7d_4 - 5d_3}{2} = \frac{9d_5 - 7d_4}{2} = kR$$

Onde k é uma constante a ser determinada e R é o raio interno do tubo, sendo $R = 3$ cm.

C.1 Utilizando os dados da **Tabela 1**, contrua a **Tabela 4** com as distâncias D .

Tabela 4: Determinação experimental da correção de extremidade

	D_1 (cm)	D_2 (cm)	D_3 (cm)
Frequência 300 Hz			
Frequência A Hz			
Frequência B Hz			

C.2 Tire a média de todos os valores da **Tabela 4**, e encontre o valor da distância D e sua respectiva incerteza. Além disso, determine o valor de k .

9.2.11 Ondas em cordas - Dificuldade iniciante - 1h

Introdução

Nesse experimento estudaremos como ondas se propagam em cordas e que fatores afetam essa propagação. Como não temos valores para encontrar nesse simulador, faremos um pouco diferente. Utilizaremos uma fórmula importante que é a Equação de Taylor, que relaciona a velocidade v da onda na corda com a tração T sendo aplicada e a densidade linear μ .

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do Physics Aviary que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Agora, você deve clicar em "Begin" para continuar. Após isso, você chegará na interface do simulador, como é mostrado na figura abaixo:

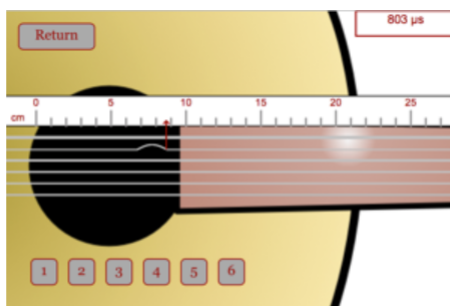
Temos um violão e a densidade linear das cordas. Você pode mudar os valores da tensão aplicada nas cordas ao tocar na cabeça do violão e depois clicar nas tarraxas. Para

Wave on String Lab

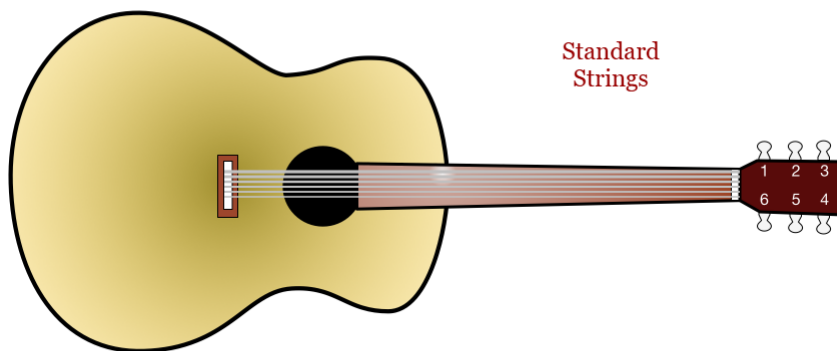
This lab will let you examine the factors affecting the speed of a wave on string.

When you are ready to start the experiment, click on the begin button

Begin



Wave on String Lab



Linear Density of Strings (g/m)

String 1: 6.790

String 2: 4.466

String 3: 2.333

String 4: 1.140

String 5: 0.708

String 6: 0.401

mudar a densidade linear das cordas, você pode trocar de "Standard Strings" para "Equal Mass Strings" apenas clicando em cima de "Standard Strings" ou o contrário. Ao clicar na boca do violão, você chegará na interface onde pode se obter os valores do experimento.

Como fazer as medições?

Clique na boca do violão. Você verá uma régua e 6 números diferentes, cada um se refere a uma corda. Clique no número da corda que você deseja analisar, quando você quiser parar, clique em "Stop". Será indicado na régua o quanto a onda se propagou e no canto superior direito o tempo que levou.

Parte A: Verificando se a tensão das cordas está de acordo

Nessa parte vamos determinar qual a tensão aplicada nas cordas. Para prepararmos o simulador para isso, clique na cabeça do violão, tampe com sua mão os valores das tensões e clique na tarraxa da corda 1 uma quantidade de vezes aleatória, agora clique em "Equalize" e depois em "Return". Agora todas as suas cordas estão com a mesma tensão aplicada e nosso objetivo é descobrir qual é essa tensão.

A.1 Com os dados experimentais obtidos, faça uma tabela para cada corda com a distância percorrida pela onda (d), tempo que levou (t) e a velocidade, seguindo o modelo da tabela abaixo. Coloque todos os erros e na última linha a velocidade média.

Tabela 1:

	d (cm)	t (μ s)	v (m/s)
1			
2			
3			
4			
5			
...			
v_m			

A.2 Escreva uma equação linearizada que relacione v_m e μ (densidade linear da corda).

A.3 Utilizando os dados da **Tabela 1**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela seguindo o modelo da **Tabela 2**.

Tabela 2:

$f(v_m)$	$f(\mu)$

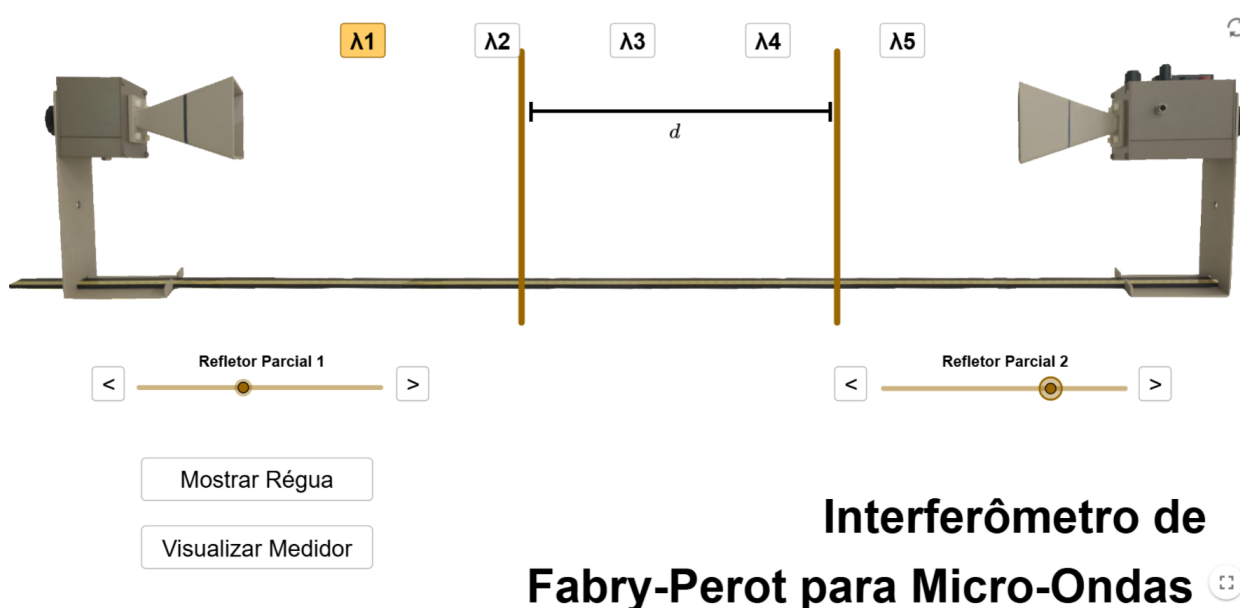
A.4 Utilizando os dados da **Tabela 2**, Faça um gráfico linearizado no papel milimetrado e com regressão linear, determine o valor da tensão aplicada nas cordas e sua respectiva incerteza.

9.2.12 Interferômetro de Fabry-Perrot - Dificuldade média - 3h

Introdução

Os interferômetros são dispositivos que utilizam o princípio da superposição de ondas para produzir interferência construtiva (amplificação) ou destrutiva (atenuação). No caso específico do interferômetro de Fabry-Perrot, dois refletores parciais paralelos, como ilustrado na figura abaixo, formam uma cavidade cuja distância de separação d pode ser ajustada. O grau de interferência entre as ondas transmitidas e refletidas dentro da cavidade depende da diferença de fase resultante de seus percursos.

Quando a separação entre os refletores é igual a $\lambda/2$, uma onda eletromagnética refletida no refletor da direita percorre uma distância $\lambda/2$ até o refletor da esquerda, onde é novamente refletida, percorrendo mais $\lambda/2$ no retorno. Assim, a onda refletida completa um percurso total igual a um comprimento de onda λ , mantendo-se em fase com a onda que atravessa os dois refletores diretamente, sem ser refletida. Nesse caso, ocorre interferência construtiva entre as duas ondas.



De maneira geral, sempre que a distância d for um múltiplo inteiro de meios comprimentos de onda ($d = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, com n inteiro), a interferência será totalmente construtiva. Ou seja, a intensidade será máxima.

Observações

Em todos os itens, propague as incertezas e considere que $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

A intensidade foi convertida para uma unidade linearizada.

Apresentando o simulador

Para realizar o experimento utilizaremos o simulador do UFC que você pode acessar clicando [aqui](#). Assim que acessar o simulador, você vai se deparar com o seguinte cenário:

Nessa interface, podemos encontrar os seguintes elementos:

1. Aqui, você pode alterar a posição do Refletor Parcial 1.
2. Aqui, você pode alterar a posição do Refletor Parcial 2.
3. Por meio deste botão, é possível habilitar a régua. Obs: você pode mover a régua
4. Por meio deste botão, é possível habilitar o medidor de intensidade da onda.
5. Aqui, é possível alterar o comprimento de onda.

Parte A: Determinação experimental do comprimento de onda

Nessa parte vamos determinar experimentalmente o comprimento de onda por meio dos máximos.

A.1 Ajuste o comprimento de onda para λ_1 e altere a posição do refletor 2 (mantendo o refletor 1 fixo) até que a intensidade da onda atinja um valor máximo.

Repita esse procedimento para, no mínimo, 10 máximos diferentes e preencha a **Tabela 1**, seguindo o modelo apresentado abaixo. Não se esqueça de calcular as respectivas incertezas.

Observação: o número do máximo refere-se à sua ordem: primeiro, segundo, terceiro, e assim por diante.

Tabela 1: Determinação experimental do comprimento de onda λ_1

d (cm)	Número do Máximo n

A.2 Utilizando os dados da Tabela 1, faça um gráfico no papel milimetrado e, a partir dele, determine o valor do comprimento de onda λ_1 e sua respectiva incerteza.

A.3 Encontre a frequência de onda e sua respectiva incerteza.

A.4 Repita o mesmo procedimento para λ_2 .

Parte B: Intensidade da onda

Agora, vamos explorar como a intensidade varia com a distância d e determinar a refletância R do refletor.

B.1 Ajuste o comprimento de onda para λ_2 e altere a posição do refletor 1 (mantendo o refletor 2 fixo) e anote a intensidade da onda. Repita esse procedimento para, no mínimo, 10 valores diferentes da posição e preencha a **Tabela 2**, seguindo o modelo apresentado abaixo. Lembre-se de calcular as incertezas.

Tabela 2: Tensões em cada componente

d (cm)	Intensidade I_T

B.2 Com base na **Tabela 2**, crie um gráfico no papel milimetrado.

A equação da intensidade transmitida no interferômetro de Fabry-Perot é:

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)}$$

Onde:

- I_T é a intensidade transmitida
- I_0 é a intensidade máxima
- F é o fator de finesse

B.3 Linearize a fórmula acima para encontrar o fator de finesse.

B.4 Utilizando os dados da **Tabela 2**, realize uma outra tabela, com os dados necessários para a equação linearizada. Faça a nova tabela com as variáveis linearizadas.

A relação entre refletância e finesse é dada por:

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

B.5 A partir da fórmula acima, determine o valor da refletância R .
Lembre-se de calcular a incerteza.

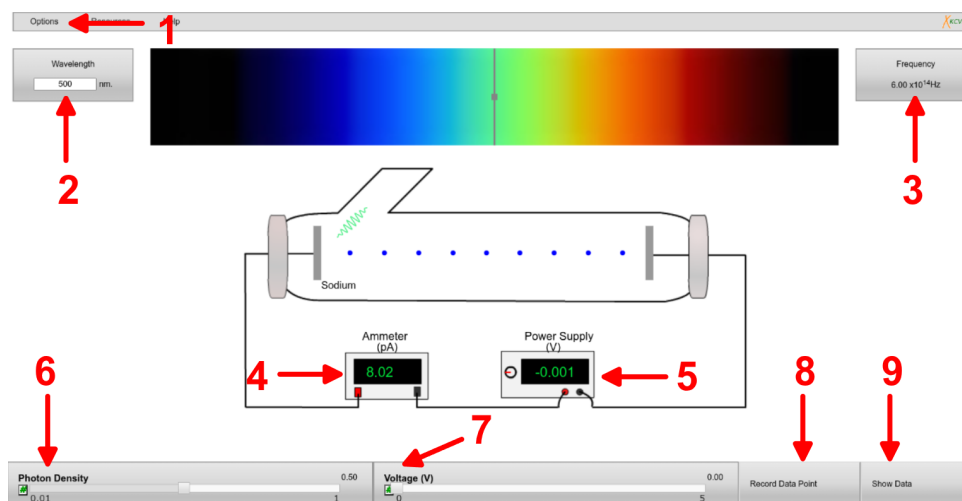
9.2.13 Efeito fotoelétrico - Dificuldade média - 3h

Introdução

O efeito fotoelétrico é a emissão de elétrons por um material, geralmente metálico, quando este é exposto a radiação eletromagnética (como a luz) de uma frequência específica. A luz comporta-se como partículas (fótons), e ao atingir o material, a energia do fóton é transferida a um elétron, que o arranca da superfície do metal. O excesso de energia do fóton que não foi usado para liberar o elétron se transforma em energia cinética, que ejeta o elétron do material.

Apresentando o simulador

Para realizar este experimento, utilizaremos uma simulação disponível [neste link](#). Para iniciar o experimento, clique no botão “Continue”.



Para essa interface, podemos encontrar as seguintes ferramentas:

1. Menu “Options”. Pode ser usado para visualizar/apagar os dados obtidos e trocar o metal do experimento.
2. Ajuste do comprimento de onda
3. Leitura de frequência da luz

4. Amperímetro
5. Fonte de tensão
6. Ajuste da densidade de fótons
7. Ajuste da tensão (utilize o botão verde caso queira digitar o valor)
8. Salvar ponto em uma tabela
9. Acessar a tabela

Estudo do fenômeno

Quando fótons incidem sobre a superfície de um metal, cada fóton pode transferir sua energia $E = hf$ (onde h é a constante de Planck e f é a frequência da luz) para um elétron do material. Se essa energia for maior que a função trabalho ϕ (energia mínima necessária para liberar o elétron do metal), o elétron é ejetado com uma energia cinética dada por:

$$K = hf - \phi$$

Além disso, é possível aplicar uma tensão de modo que os elétrons sejam desviados e não alcancem a outra placa.

OBS: Caso necessário, utilize $e = 1.6022 \times 10^{-19}$ C (carga elementar).

A.1 Encontre, teoricamente, a tensão de corte V_0 necessária para evitar que qualquer elétron atravesse o espaço entre as placas em termos de h , f , e e ϕ .

A.2 Verifique, experimentalmente, se existe uma dependência entre a tensão de corte V_0 e a densidade de fótons.

A.3 Meça a tensão de corte para diferentes valores de frequência. Monte uma tabela seguindo o modelo da **Tabela 1** e um gráfico. Indique as barras de erro no gráfico, se necessário.

Tabela 1: $f \times V_0$

f	V_0

A.4 Determine, com suas devidas incertezas, a constante de Planck h e a função trabalho do sódio ϕ .

Nos próximos itens, será necessário alterar o metal de escolha.

A.5 Determine a corrente I lida pelo amperímetro em termos da densidade de fótons $0 < D \leq 1$, tensão aplicada V e tensão de corte do metal V_0 . Explique o método utilizado.

A.6 Faça uma fila de reatividade química para os metais disponíveis com base no experimento.

9.3 Soluções

9.3.1 Força Magnética

Parte A: Observações qualitativas e teóricas

Solução A.1

Para tanto, devemos usar a expressão para força centrípeta. Dela vem que:

$$\frac{F}{N} = \frac{m_e}{\text{kg}} \frac{\left(\frac{v}{\text{m/s}}\right)^2}{\left(\frac{R}{m}\right)} \quad (9.3)$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$\frac{F}{N} = \frac{m_e}{\text{kg}} \frac{1}{k_2} \left(\frac{q}{C}\right)^{-\alpha_2} \left(\frac{v}{\text{m/s}}\right)^{2-\beta_2} \left(\frac{B}{T}\right)^{-\gamma_2} \quad (9.4)$$

Disso:

$$k_1 = \frac{m_e}{\text{kg}} \frac{1}{k_2}$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\beta_1 = 2 - \beta_2$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2$$

Solução A.2

Para tanto, iremos variar um parâmetro mantendo o outro fixo.

Se mantermos campo magnético e velocidade fixos, e trocarmos a partícula o sentido da trajetória da partícula muda, portanto α_2 deve ser ímpar. Caso contrário a função R/m seria par com relação à q e o sentido permaneceria o mesmo.

Do mesmo modo, concluímos que as cargas do pósitron e elétron devem ter sinais opostos, uma vez que geram movimentos em sentido opostos para o mesmo conjunto de variáveis.

Analogamente, mantemos a partícula e sua velocidade fixas, invertendo o sinal do campo magnético. Desse modo, obtemos uma outra reflexão no sentido de movimento, o que indica que γ_2 deve ser ímpar.

Solução A.3

Ao mantermos todos os parâmetros fixos e trocarmos do elétron para o pósitron o módulo do raio permanece fixo. Portanto:

$$\left| \frac{q_{\text{pósitron}}}{q_{\text{elétron}}} \right| = 1$$

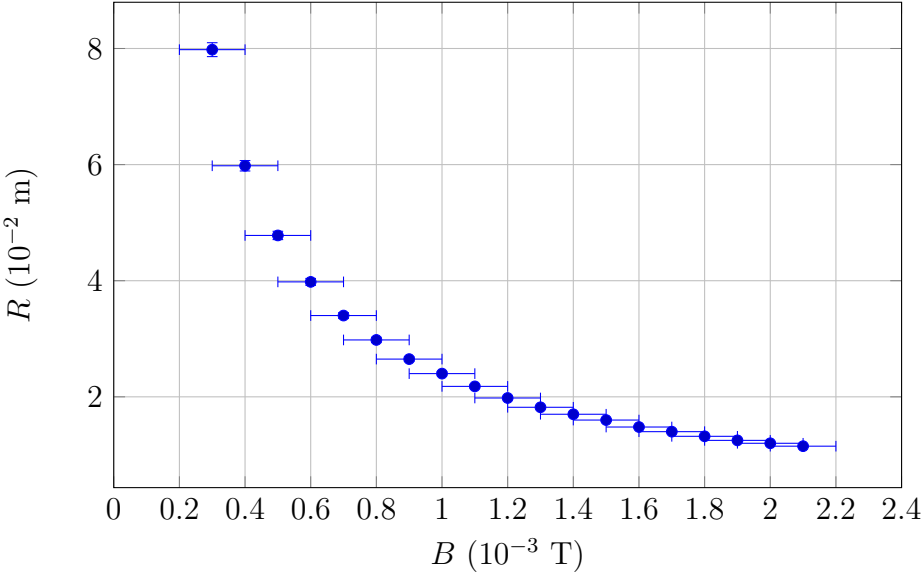
Parte B: Expressão para o raio da partícula

Solução B.1**Tabela 9.1:** Valores experimentais de B e R com suas respectivas incertezas.

$B \pm 0,1 (10^{-3} \text{ T})$	$R \pm 0,03 (10^{-2} \text{ m})$
0,3	7,98
0,4	5,98
0,5	4,78
0,6	3,98
0,7	3,40
0,8	2,98
0,9	2,65
1,0	2,40
1,1	2,18
1,2	1,98
1,3	1,82
1,4	1,70
1,5	1,60
1,6	1,48
1,7	1,40
1,8	1,32
1,9	1,25
2,0	1,20
2,1	1,15

Note que o método mais adequado para a medida de R é medir o diâmetro $2R$ e dividir por 2. Por isso, a incerteza para o raio fica 0,025 cm que, arredondado para 1 significativo, fica 0,03 cm. A incerteza de B é a menor divisão do aparelho, isto é, $0,1 \cdot 10^{-3} \text{ T}$. Para o gráfico da dependência:

Gráfico 1: Dependência entre B e R



Nesse item usamos o menor valor possível de velocidade, $v = 4,20 \cdot 10^6$ m/s, pois ele possibilita medirmos no maior range possível de B .

Solução B.2

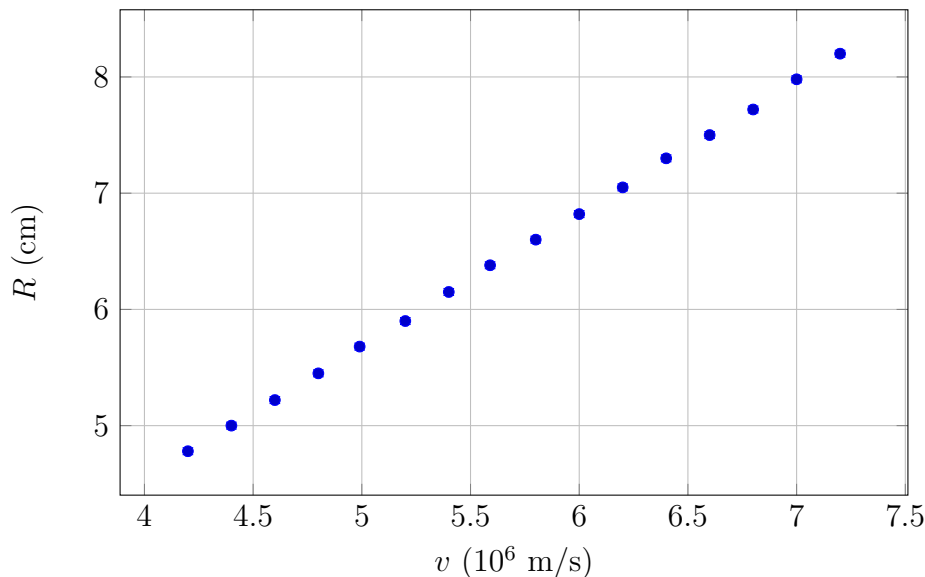
Tabela 9.2: Valores experimentais de R e v com respectivas incertezas.

$v \pm 0,01$ (10^6 m/s)	$R \pm 0,03$ (cm)
4,20	4,78
4,40	5,00
4,60	5,22
4,80	5,45
4,99	5,68
5,20	5,90
5,40	6,15
5,59	6,38
5,80	6,60
6,00	6,82
6,20	7,05
6,40	7,30
6,60	7,50
6,80	7,72
7,00	7,98
7,20	8,20

As incertezas foram determinadas da mesma forma do item B.2. Para a depen-

dência gráfica:

Gráfico 2: Dependência entre v e R



O que é bastante próximo de uma reta, uma vez que o coeficiente de correlação é $r \approx 0,999944764$. E o $B = (0,5 \pm 0,1)$ mT escolhido foi o menor possível que permitisse todos os dados serem obtidos, para que a incerteza relativa do raio fosse diminuída ao máximo.

Solução B.3

Como a dependência é supostamente polinomial, aplicando logaritmo natural dos dois lados:

$$\text{p/ } v \text{ fixo: } \ln\left(\frac{R}{\text{m}}\right) = \ln\left(k_2 \left(\frac{q}{C}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{v}{\text{m/s}}\right)^{\beta_2}\right) + \gamma_2 \ln\left(\frac{B}{\text{T}}\right) \quad (9.5)$$

$$\text{p/ } B \text{ fixo: } \ln\left(\frac{R}{\text{m}}\right) = \ln\left(k_2 \left(\frac{q}{C}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{B}{\text{T}}\right)^{\gamma_2}\right) + \beta_2 \ln\left(\frac{v}{\text{m/s}}\right) \quad (9.6)$$

Alternativamente, pelo gráfico de B.2, você pode supor que a linearização para B fixo é simplesmente:

$$\frac{R}{\text{m}} = A \frac{v}{\text{m/s}} \quad (9.7)$$

Solução B.4 Para o campo magnético fixo:

Tabela 9.3: Valores linearizados para a dependência $R \times v$ com suas. incertezas

$\ln\left(\frac{v}{10^6 \text{ m/s}}\right) \pm \sigma$	$\ln\left(\frac{R}{10^{-2} \text{ m}}\right) \pm \sigma$
1.435 ± 0.002	1.564 ± 0.006
1.482 ± 0.002	1.609 ± 0.006
1.526 ± 0.002	1.652 ± 0.006
1.569 ± 0.002	1.696 ± 0.006
1.607 ± 0.002	1.737 ± 0.005
1.649 ± 0.002	1.775 ± 0.005
1.686 ± 0.002	1.816 ± 0.005
1.721 ± 0.002	1.853 ± 0.005
1.758 ± 0.002	1.887 ± 0.005
1.792 ± 0.002	1.920 ± 0.004
1.825 ± 0.002	1.953 ± 0.004
1.856 ± 0.002	1.988 ± 0.004
1.887 ± 0.002	2.015 ± 0.004
1.917 ± 0.001	2.044 ± 0.004
1.946 ± 0.001	2.077 ± 0.004
1.974 ± 0.001	2.104 ± 0.004

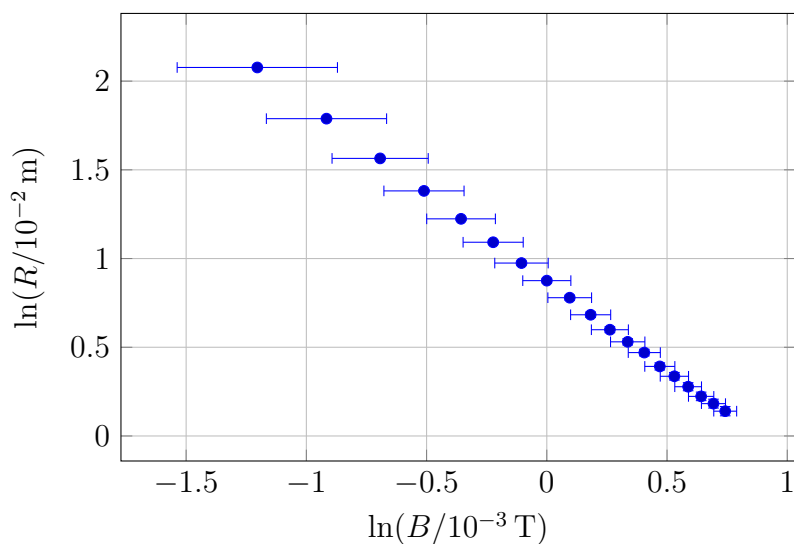
Para uma velocidade fixa:

Tabela 9.4: Valores linearizados para a dependência $R \times B$ com suas. incertezas

$\ln\left(\frac{B}{10^{-3} \text{ T}}\right) \pm \sigma$	$\ln\left(\frac{R}{10^{-2} \text{ m}}\right) \pm \sigma$
-1.2 ± 0.3	2.077 ± 0.004
-0.9 ± 0.3	1.788 ± 0.005
-0.7 ± 0.2	1.564 ± 0.006
-0.5 ± 0.2	1.381 ± 0.008
-0.36 ± 0.14	1.224 ± 0.009
-0.22 ± 0.12	1.092 ± 0.010
-0.11 ± 0.11	0.975 ± 0.011
0.00 ± 0.10	0.875 ± 0.013
0.10 ± 0.09	0.779 ± 0.014
0.18 ± 0.08	0.683 ± 0.015
0.26 ± 0.08	0.599 ± 0.016
0.34 ± 0.07	0.531 ± 0.018
0.41 ± 0.07	0.470 ± 0.019
0.47 ± 0.06	0.392 ± 0.020
0.53 ± 0.06	0.336 ± 0.021
0.59 ± 0.06	0.278 ± 0.023
0.64 ± 0.05	0.223 ± 0.024
0.69 ± 0.05	0.182 ± 0.025
0.74 ± 0.05	0.140 ± 0.026

Solução B.5

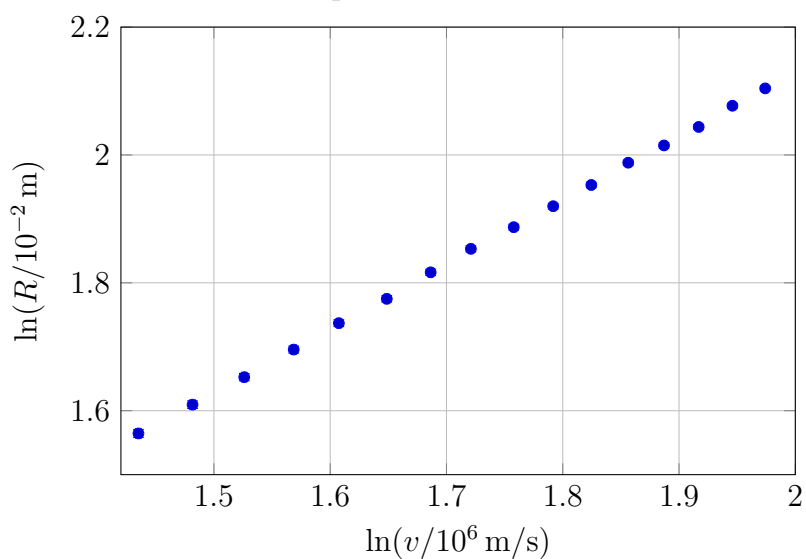
O gráfico para dependência com v fixo é:

Gráfico 3: Dependência linearizada entre B e R 

Sendo que o melhor ajuste é:

$$\ln\left(\frac{R}{10^{-2}\text{m}}\right) = -(1,004 \pm 0,003) \ln\left(\frac{B}{10^{-3}\text{T}}\right) + (0,872 \pm 0,002) \quad (9.8)$$

Para dependência com B fixo:

Gráfico 4: Dependência linearizada entre v e R 

Que tem como melhor ajuste:

$$\ln \left(\frac{R}{10^{-2}\text{m}} \right) = (1,005 \pm 0,003) \ln \left(\frac{v}{10^6\text{m/s}} \right) + (0,119 \pm 0,005) \quad (9.9)$$

Os melhores ajustes foram obtidos a partir do método dos mínimos quadrados. A fórmula para as incertezas dos coeficientes A e B da reta $y = A + Bx$ é:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{N - 2}} \quad \sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \quad (9.10)$$

Em que $-1 \leq r \leq 1$ é o coeficiente de correlação e N o número de pontos. Para ambas as dependências $r \sim 0,9999$.

Solução B.6

Para tanto, devemos identificar os coeficientes angulares, que resultam em:

$$\beta_2 = 1$$

$$\gamma_2 = -1$$

Parte C: Resultados finais e carga do elétron

Solução C.1

Usando o que foi dado, encontramos que:

$$R = \frac{m_e v}{qB} \quad (9.11)$$

E, portanto:

$$F = qvB$$

Que concorda com o resultado teórico já conhecido.

Solução C.2

Da equação (8), podemos encontrar uma expressão para a carga do elétron. Para tanto, devemos retirar os fatores 10 de dentro dos ln's, veja:

$$\ln \left(\frac{C m_e v_0}{q \text{ kg m/s}} \right) = -2 \times \ln 10 - 3 \times \ln 10 \times (1,004 \pm 0,003) + (0,872 \pm 0,002) \quad (9.12)$$

Que resulta em (lembrando que $v_0 = (4,20 \pm 0,01) \text{ m/s}$):

$$\frac{q}{C} = \frac{m_e}{\text{kg}} \times \frac{4,20 \pm 0,01}{2,32 \pm 0,05} \times 10^{11} \quad (9.13)$$

$$q = (1,65 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Alternativamente, você pode usar a equação (9) para obter:

$$q = (1,7 \pm 0,4) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Um resultado que, apesar de ainda estar dentro da margem de erro para o valor real, é muito mais impreciso. Isso se deve ao fato de que usamos um valor de campo magnético fixo com incerteza relativa de $\sim 20\%$, prejudicando os resultados. Enquanto isso, a incerteza relativa da velocidade fixa no método anterior é $\sim 0,2\%$, 100 vezes menor!

9.3.2 Sistema Solar**Parte A: Parâmetros orbitais****Solução A.1**

Seja a o semi-eixo maior e e a excentricidade. Para encontrar a :

$$r_a + r_p = 2a \rightarrow a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

Agora, para encontrar $e = c/a$:

$$r_a = a + c \rightarrow r_a = a(1 + e) \rightarrow e = \frac{r_a}{a} - 1$$

$$e = \frac{r_a}{a} - 1 = \frac{r_a - (r_a + r_p)/2}{(r_a + r_p)/2} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Solução A.2

Medindo as distâncias para cada planeta:

Tabela 1: Distâncias de periélio e afélio dos planetas

Planeta	Periélio (m*)	Afélio (m*)
Mércurio	773,56	774,36
Vênus	1445,69	1445,96
Terra	1999,58	2000,54

Solução A.3

Por meio das expressões do A.1, podemos calcular:

Tabela extra: Semi-eixo maior e excentricidade dos planetas

Planeta	Semi-eixo maior (m*)	Excentricidade
Mércurio	773,96	$5,17 \times 10^{-4}$
Vênus	1445,825	$9,34 \times 10^{-5}$
Terra	2000,06	$2,40 \times 10^{-4}$

Parte B: Períodos

Solução B.1

É importante destacar que o número de medidas mínimas para se obter bons resultados neste item depende, de certa forma, da velocidade de simulação escolhida e das técnicas usadas. Quanto maior a velocidade, mais difícil é para a simulação no

momento certo para medir a distância(ou seja, a incerteza é maior). Ou seja, você precisa de mais medidas. Porém, como contraponto, você pode obter medidas mais rapidamente. Em uma prova, talvez fosse interessante colocar uma velocidade menor e fazer alguma outra tarefa(como gráfico, regressão...) enquanto espera o momento certo. Outra técnica possível é que você poderia medir $T/2$ (que é mais rápido) e multiplicar por 2, mesmo que aumentasse as incertezas(eu não recomendo muito). Além disso, reiniciou-se a simulação após medir cada planeta para diminuir incertezas...é muito importante ter cuidado com a propagação de erro causada quando não se reinicia a simulação! Para esse gabarito, usou-se uma velocidade de simulação de 10x para a maioria das medidas, apesar de às vezes aumentá-la momentaneamente para passar mais rápido e depois diminuir denovo no ponto de análise. Fez-se 10 medidas para cada planeta para depois se tirar uma média. Assim, teve-se os resultados:

Tabela 2: Medidas do período de rotação dos planetas

Tempo	Mércurio	Vênus	Terra	Marte
$t_1(s^*)$	4404	11200	18260	34320
$t_2(s^*)$	4390	11228	18270	34340
$t_3(s^*)$	4396	11234	18256	34340
$t_4(s^*)$	4400	11230	18260	34340
$t_5(s^*)$	4395	11220	18280	34330
$t_6(s^*)$	4400	11230	18264	34324
$t_7(s^*)$	4396	11200	18264	34328
$t_8(s^*)$	4405	11205	18264	34332
$t_9(s^*)$	4395	11224	18260	34330
$t_{10}(s^*)$	4396	11228	18260	34330
$\bar{t}(s^*)$	4397,7	11221,9	18263,8	34331,4
$\sigma_t(s^*)$	4,3139	10,625	6,47765	6,5146

Solução B.2

Aqui, novamente vale a pena recorrer à linearização por meio de logaritmos. Seja $T = Ca^n$, onde C é uma constante e n a potência requerida. Então, aplicando o logaritmo:

$$\log(T/s^*) = \log(Ca^n/s^*) = \log\left(C \frac{(m^*)^n}{s^*}\right) + n\log(a/m^*)$$

Logo, $\log(T/s^*)$ é linear com $\log(a/m^*)$. Linearizando os dados:

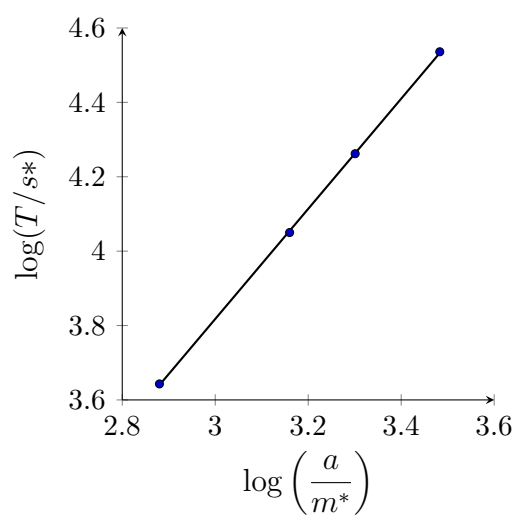
Tabela 3: $\log(a/m^*)$ x $\log(T/s^*)$

Planeta	$\log(a/m^*)$	$\log(T)$
Mércurio	2,880	3,643
Vênus	3,160	4,050
Terra	3,301	4,262
Marte	3,483	4,536

Solução B.3

Plotando os pontos linearizados:

Gráfico 4: $\log(T/s^*)$ x $\log\left(\frac{a}{m^*}\right)$



$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 B &= 1,5 \\
 A &= -0,696
 \end{aligned}$$

Assim, utilizando o raciocínio do item anterior:

$$n = 1,5$$

$$C = 10^A = 0,201 \frac{s^*}{m^{*1,5}}$$

9.3.3 Transformações gasosas

Parte A: Lei de Gay-Lussac

Solução A.1

Para isso, devemos usar a Lei dos Gases Ideais:

$$PV = nRT$$

Onde P é a pressão, V é o volume, n é o número de mols, R é a constante dos gases ideais. Sendo assim, podemos inferir:

$$P = \frac{nR}{V} \cdot T$$

Solução A.2

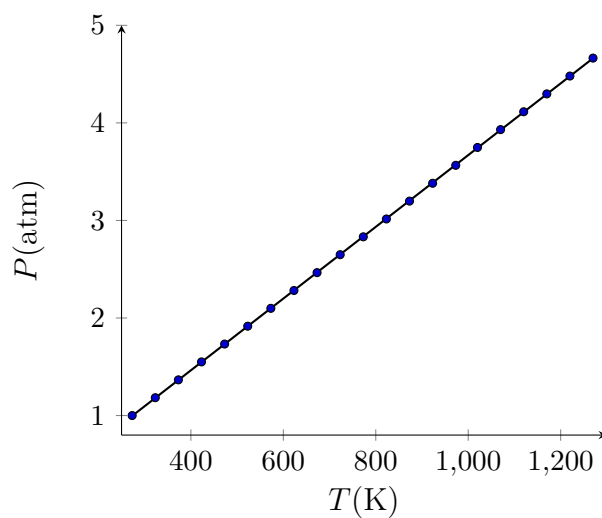
Fazendo a tabela no volume de 2,7L:

Tabela 1: $T \times P$

$T(K)$	$P(atm)$
$2,73 \times 10^2$	1,000
$3,23 \times 10^2$	1,183
$3,73 \times 10^2$	1,366
$4,23 \times 10^2$	1,550
$4,73 \times 10^2$	1,733
$5,23 \times 10^2$	1,916
$5,73 \times 10^2$	2,099
$6,23 \times 10^2$	2,282
$6,73 \times 10^2$	2,465
$7,23 \times 10^2$	2,649
$7,73 \times 10^2$	2,832
$8,23 \times 10^2$	3,015
$8,73 \times 10^2$	3,198
$9,23 \times 10^2$	3,381

Solução A.3 Fazendo o gráfico:

Gráfico 1: $P(\text{atm}) \times T(\text{K})$



$$Y = A + BX$$

$$B = 3,66 \cdot 10^{-3}$$

$$A = 1,81 \cdot 10^{-4}$$

Pórem, temos que $B = nR/V$ pela Lei do Gases Ideias. Dessa forma, temos:

$$n = \frac{VB}{R} \approx 0,121\text{mol}$$

Parte B: Lei de Boyle

Solução B.1

Analogamente, podemos inferir pela equação dos gases ideais:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{nRT} \cdot V$$

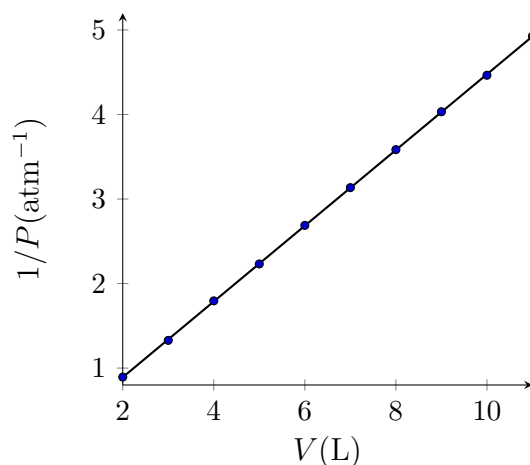
Solução B.2 Pelo item B.1, percebe-se que a função linearizada é $1/P$. Fazendo nossa tabela em uma temperatura de $T = 0^\circ\text{C}$:

Tabela 2: $V \times 1/P$

$V(\text{L})$	$1/P(\text{atm}^{-1})$
2,00	0,894
3,00	1,33
4,00	1,80
5,00	2,23
6,00	2,69
7,00	3,13
8,00	3,58
9,00	4,03
10,00	4,46
11,00	4,93

Solução B.3 Fazendo o gráfico:

Gráfico 2: $1/P(\text{atm}^{-1}) \times V(\text{L})$



$$Y = A + BX$$

$$B = 0,448$$

$$A = 4,63 \cdot 10^{-3}$$

Porém, $B = 1/nRT$. Logo:

$$n = \frac{1}{BRT} \approx 9,97 \cdot 10^{-2} \text{mol}$$

Parte C: Lei de Charles

Solução C.1 Analogamente, podemos inferir pela equação dos gases ideais:

$$T = \frac{P}{nRT} \cdot V$$

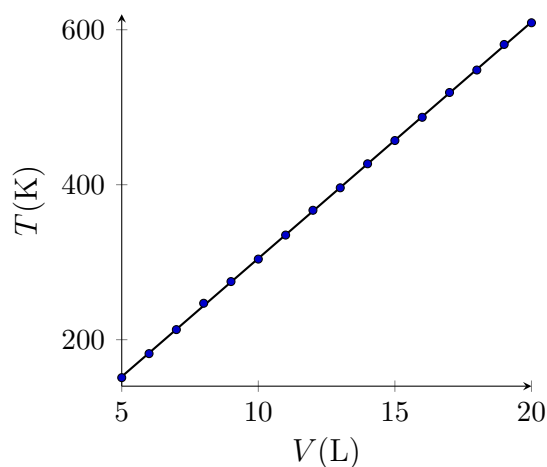
Solução C.2 Fazendo a tabela:

Tabela 3: $V \times T$

$V(\text{L})$	$T(\text{K})$
5	151
6	182
7	213
8	247
9	275
10	304
11	335
12	367
13	396
14	427
15	457
16	487
17	519
18	548
19	581
20	609

Solução C.3

Fazendo o gráfico:

Gráfico 3: $T(K) \times V(L)$ 

$$Y = A + BX$$

$$B = 30,5$$

$$A = -0,199$$

Porém, pela lei dos gases ideal $B = P/nR$. Logo:

$$n = \frac{P}{BR} \approx 0,400$$

9.3.4 Lei de Wien/Stefan-Boltzmann

Parte A: Comprimento de maior emissão

Solução A.1

Temos dois limites: o do ultravioleta e o do infravermelho. Para melhor precisão nas medidas, é recomendado mover o marcador de comprimento de onda até que o círculo branco esteja com seu centro aproximadamente no limite buscado. Porém, uma observação: como podemos mover o círculo apenas um número determinado de comprimento de onda por vez, talvez você tenha que variar a temperatura (e consequentemente o pico do qual iniciamos a mover o círculo) até conseguir fazer com que o círculo branco fique exatamente no limiar. Uma ótima temperatura para fazer isso é em $T = 5450K$, por exemplo. Fazendo isso, obtemos:

$$\lambda_{UV} \approx 379nm$$

$$\lambda_{IV} \approx 780nm$$

Onde UV representa o limite do ultravioleta e IV o limite do Infravermelho. Agora, podemos ir atrás da temperaturas. Como ainda não conhecemos ainda a relação entre T e λ_m , temos que estimar movendo o cursor de temperatura até o pico ficar próximo dos comprimentos onde encontramos. Caso não haja alguma temperatura com λ_m muito próximo de um certo limite, podemos estimar a temperatura como uma média das temperaturas com picos mais próximos do limiar. Fazendo as estimativas, obtemos:

$$T_{UV} \approx 7650K$$

$$T_{IV} \approx 3725K$$

Solução A.2

Como estamos em um simulador muito preciso, tiramos apenas 11 medidas. O recomendado é você tirar pelo menos 10. Para coletar dados em um alto range, decidimos variar a temperatura em 1000 K a cada medida. Assim, a tabela ficou:

Tabela 1: T x λ_m

T (K)	λ_m (μm)
11000	0,263
10000	0,29
9000	0,322
8000	0,362
7000	0,414
6000	0,483
5000	0,58
4000	0,724
3000	0,966
2000	1,499
1000	2,898

Solução A.3

Pela Lei de Wien, temos:

$$\lambda_m T = b \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{b} T$$

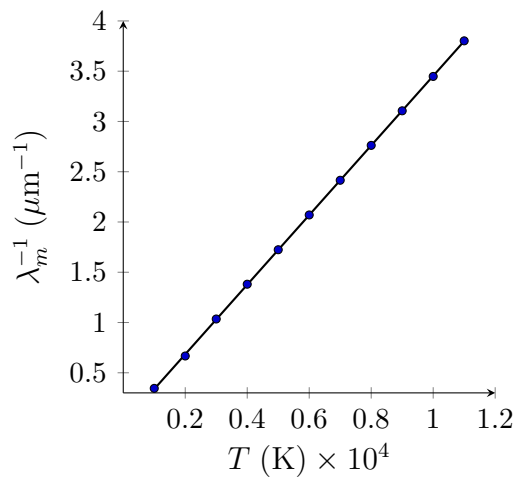
Como b é uma constante, temos que λ_m^{-1} é linear com T . Assim, refazendo a Tabela 1, temos:

Tabela 2: $T \times \lambda_m^{-1}$

T (K)	λ_m^{-1} (μm^{-1})
11000	3,802
10000	3,448
9000	3,106
8000	2,762
7000	2,415
6000	2,070
5000	1,724
4000	1,381
3000	1,035
2000	0,667
1000	0,345

Solução A.4

Plotando os nossos pontos no gráfico, temos:

Gráfico 2: Temperatura (T) x Inverso do comprimento de onda máximo (λ_m^{-1})

$$Y = A + BX$$

$$B = (3,46 \cdot 10^{-4})$$

Vamos determinar a constante de Wien. Ela é encontrada por meio do inverso do coeficiente B. Porém, como usamos o λ_m em μm , é necessário fazer a correção de 10^{-6} para obter a constante em unidades de SI. Fazendo isso, temos:

$$b = \frac{10^{-6}}{B} = \frac{10^{-6}}{3,46 \cdot 10^{-4}} \approx 2,89 \cdot 10^{-3} Km$$

$$b \approx 2,89 \cdot 10^{-3} Km$$

Parte B: Lei de Stefmann-Bolztmann Novamente, vamos tirar 11 medidas variando sempre 1000K a cada medida para coletar dados em um alto range. Fazendo isso, temos a tabela:

Solução B.1

Tabela 3: Temperatura x Intensidade

T (K)	I ($\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$)
11000	$8,30 \times 10^8$
10000	$5,67 \times 10^8$
9000	$3,72 \times 10^8$
8000	$2,32 \times 10^8$
7000	$1,36 \times 10^8$
6000	$7,35 \times 10^7$
5000	$3,54 \times 10^7$
4000	$1,45 \times 10^7$
3000	$4,59 \times 10^6$
2000	$9,07 \times 10^5$
1000	$5,67 \times 10^4$

Solução B.2

Primeiramente, é bom destacar que como estamos analisando o fluxo na superfície da estrela, temos:

$$I = \frac{4\pi R^2 \sigma T^n}{4\pi R^2} = \sigma T^n$$

A melhor maneira de linearização para esse caso é por meio do logaritmos. Com T e I representados por unidades do SI, podemos expandir a relação entre eles:

$$I = \sigma T^n \rightarrow \log(I_{(SI)}) = \log(T_{(SI)}^n) + \log(\sigma_{(SI)}) \rightarrow \log(I_{(SI)}) = n \log(T_{(SI)}) + \log(\sigma_{(SI)})$$

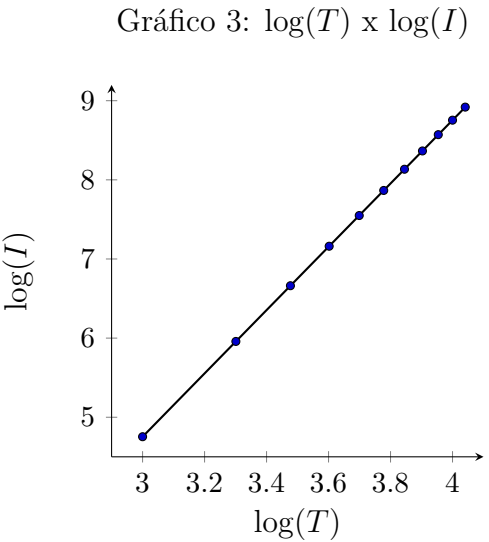
Logo, o logaritmo da intensidade é linear com o logaritmo da temperatura. Por isso, nossas funções de linearização serão logaritmos das duas quantias. Então, aplicando o logaritmo para cada dado, temos:

Tabela 4: $\log(T)$ x $\log(I)$

$\log(T)$	$\log(I)$
4,041	8,919
4,000	8,754
3,954	8,571
3,903	8,365
3,845	8,134
3,778	7,866
3,699	7,549
3,602	7,161
3,477	6,662
3,301	5,958
3,000	4,754

Solução B.3

Plotando os nosso dados em um gráfico, temos:



$$Y = A + BX$$
$$B = 4$$
$$A = -7,25$$

Perceba que o valor de n , a potência que acompanha a temperatura, é igual ao coeficiente angular da reta pelo nosso desenvolvimento do item anterior. Logo,

$$n = 4$$

Ainda seguindo o desenvolvimento do item B2, temos que o logaritmo da constante de Stefmann-Boltzmann(em unidades do SI) é igual ao coeficiente independente da reta. Assim:

$$\log \sigma = A \rightarrow \sigma = 10^A = 10^{-7,25} \approx 5.62 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$$

$$\sigma \approx 5.62 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$$

Parte C: Radiância espectral

Solução C.1 Nesse regime, podemos afirmar que:

$$x = \frac{hc}{\lambda k_b T} \ll 1$$

Assim, podemos utilizar a aproximação da tabela que diz que $e^x \approx 1 + x$. Dessa forma, desenvolvendo a expressão da radiância.

$$R = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(\exp \left(\frac{hc}{\lambda k_B T} \right) - 1 \right)} \approx 2\pi c k_B \frac{T}{\lambda^4}$$

Solução C.2 Vamos, então, analisar o caso limite em que temos a maior temperatura e o maior comprimento de emissão possivelmente medíveis no simulador. A maior temperatura é de $T = 11000\text{K}$ e o maior comprimento de onda é de $3\mu\text{m}$. Assim, podemos calcular o menor x possível:

$$x = \frac{hc}{\lambda k_b T} \approx 0,47$$

O que não é muito menor que 1. Assim, a aproximação não é eficiente para o simulador utilizado

Solução C.3 O melhor comprimento de onda para isso é o comprimento máximo disponível no simulador. Para esse ponto, se anotaria a radiância espectral por cada temperatura de corpo negro. Assim, fazendo uma linearização de R por T/λ^4 , se obteria uma reta cujo coeficiente angular é $2\pi ck_B$ (pela nossa equação no item a). Sendo esse coeficiente B , podemos calcular a constante de Boltzmann como:

$$k_B = \frac{B}{2\pi c}$$

9.3.5 Flutuabilidade

Parte A: Determinação da densidade de um fluido

Solução A.1

Escrevendo as forças no sistema, tem-se:

$$\rho_A V_S g = mg$$

Isolando o V_S dessa equação:

$$V_S = \frac{m}{\rho_A}$$

Solução A.2

utilizando o material "personalizar", para maior amplitude de massas:

Massa (kg)	($V \pm 0,005$) L
$2,50 \pm 0,25$	0,81
$5,00 \pm 0,50$	1,61
$7,50 \pm 0,75$	2,41
$10,00 \pm 1,00$	3,23
$12,50 \pm 1,25$	4,03
$15,00 \pm 1,50$	4,83
$17,50 \pm 1,75$	5,64
$20,00 \pm 2,00$	6,45
$22,50 \pm 2,25$	7,25
$25,00 \pm 2,50$	8,06

Solução A.3

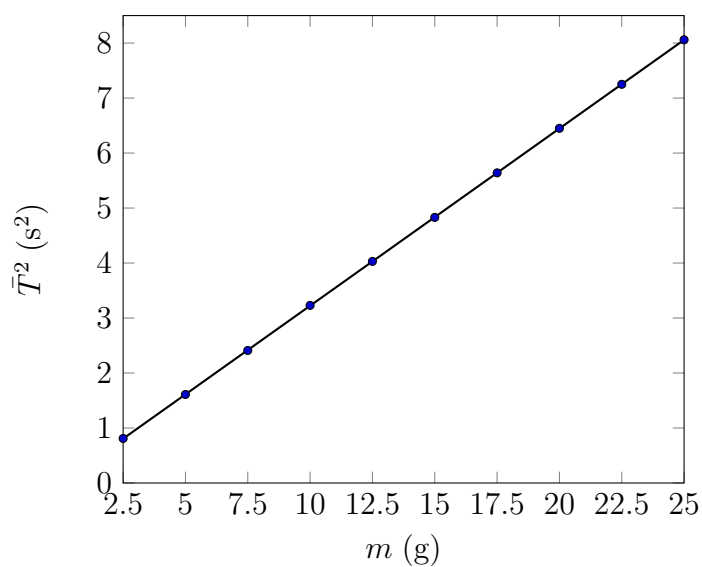


Gráfico 1: Período para cada massa

$$Y = A + BX$$

$$A = (0 \pm 3) \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$B = (0,3223 \pm 0,0002) \text{ m}$$

Comparando a equação da **A.1** com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$V_S \rightarrow Y ; m \rightarrow X ; \frac{1}{\rho_A} \rightarrow B$$

Assim, isolando o ρ_A do B e calculando sua incerteza associada:

$$\rho_A = \frac{1}{B} ; \sigma_\rho = \frac{1}{B^2} \sigma_B$$

Portanto, substituindo os valores:

$$\rho_A = (3,1027 \pm 0,0019) \text{ Kg/L}$$

Parte B: Determinação da densidade de um material

Solução B.1 Escrevendo as forças no sistema, tem-se:

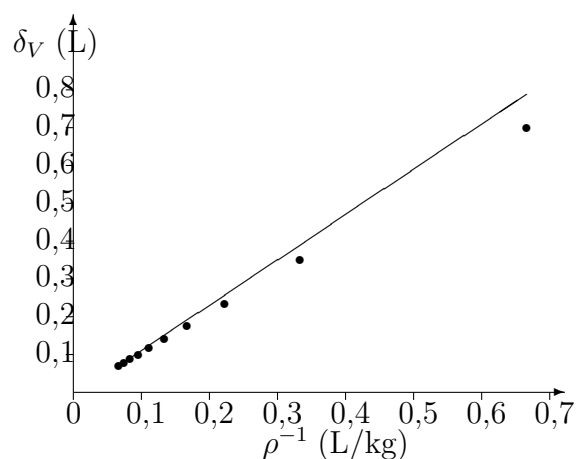
$$\rho_L V_S g = \rho_T V g$$

Isolando o δ_V dessa equação:

$$\delta_V = \frac{\rho_T}{\rho_L}$$

Solução A.2

$\rho^{-1}(\text{ L/kg})$	$(V \pm 0,001)$
$0,666 \pm 0,007$	$0,700$
$0,333 \pm 0,003$	$0,350$
$0,2222 \pm 0,0022$	$0,233$
$0,1666 \pm 0,0017$	$0,175$
$0,1333 \pm 0,0013$	$0,140$
$0,1111 \pm 0,0011$	$0,117$
$0,0952 \pm 0,0010$	$0,100$
$0,0833 \pm 0,0008$	$0,088$
$0,0740 \pm 0,0007$	$0,077$
$0,0666 \pm 0,0007$	$0,070$

Solução A.3**Gráfico 1: Período para cada massa**

$$Y = A + BX$$

$$A = (1,0 \pm 1,8) \times 10^{-4} \text{ L}$$

$$B = (1,0511 \pm 0,0007) \text{ kg/L}$$

Comparando a equação da **B.1** com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$\delta_V \rightarrow Y ; \rho^{-1} \rightarrow X ; \rho_T \rightarrow B$$

Portanto:

$$\rho_T = (1,0511 \pm 0,0007) \text{ kg/L}$$

9.3.6 Pressão hidrostática

Parte A: O líquido Misterioso

Solução A.1

Tabela 1: Pressão em função da profundidade

Profundidade (<i>m</i>)	Pressão (<i>kPa</i>)
0	103.412
0.2	106.608
0.4	110.111
0.6	113.468
0.8	116.824
1.0	120.181
1.2	123.537

Solução A.2 Agora, plotando os dados da tabela:

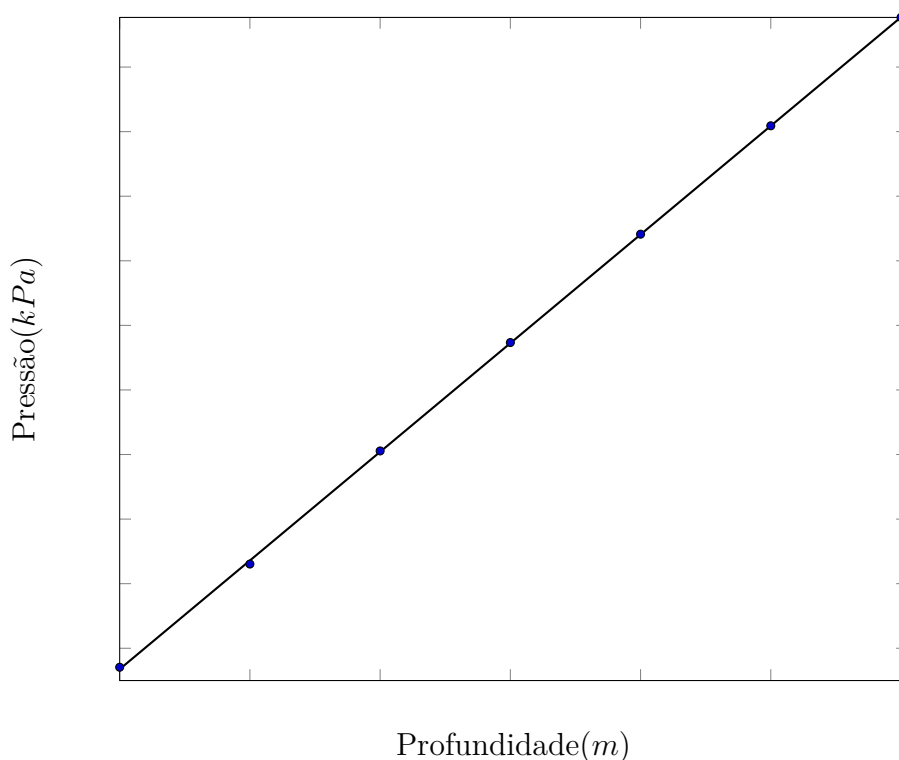


Gráfico 1: Pressão vs Profundidade

Solução A.3 Calculando o coeficiente angular e linear, obtemos:

$$\alpha_{angular} \approx 16.83 \text{ kPa/m}; b \approx 103.35 \text{ kPa}$$

Podemos observar que a consistência nos dados é reforçada pela análise do coeficiente linear. Fisicamente, este coeficiente representa a pressão na profundidade $h = 0$, que corresponde à pressão na superfície do fluido. O valor encontrado de 103.412 kPa, obtido na superfície do líquido, é coerente com o valor obtido por regressão linear, validando o resultado.

Solução A.4 Para deduzir a fórmula da variação da pressão hidrostática por meio de uma análise dimensional, partimos da premissa de que esta variação (ΔP) depende de um produto de potências da densidade do fluido (ρ), da aceleração da gravidade (g) e da profundidade (h). Podemos expressar essa relação como $\Delta P = C \cdot \rho^a \cdot g^b \cdot h^c$, onde C é uma constante adimensional e a, b, c são os expoentes a serem determinados.

A consistência dimensional da equação exige que as dimensões de ambos os lados sejam iguais. As dimensões das grandezas envolvidas, em termos de Massa (M),

Comprimento (L) e Tempo (T), são: $[\Delta P] = ML^{-1}T^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[g] = LT^{-2}$ e $[h] = L$. Substituindo essas dimensões na equação, obtemos a seguinte igualdade dimensional:

$$[ML^{-1}T^{-2}] = (ML^{-3})^a \cdot (LT^{-2})^b \cdot (L)^c$$

Ao agruparmos os expoentes para cada dimensão fundamental no lado direito, a equação se torna $[ML^{-1}T^{-2}] = M^a L^{-3a+b+c} T^{-2b}$. Para que a igualdade seja válida, ambos os lados devem ter a mesma dimensão, o que nos leva a um sistema de equações:

$$\begin{cases} a = 1 & (\text{para M}) \\ -2b = -2 & (\text{para T}) \\ -3a + b + c = -1 & (\text{para L}) \end{cases}$$

A solução deste sistema é $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$. Substituindo esses expoentes na equação original, encontramos a fórmula para a variação da pressão. A análise mostra que a variação de pressão é proporcional ao produto ρgh . Portanto, a fórmula deduzida é:

$$\Delta P = \rho gh$$

Solução A.5 Para estimar a densidade do fluido, utilizamos a relação fundamental da hidrostática(deduzida no item anterior) e o coeficiente angular obtido experimentalmente do gráfico de Pressão em função da Profundidade. Sabemos que o coeficiente angular é definido por: $\frac{\Delta P}{\Delta h}$. Dessa maneira, o coeficiente angular passa a ser:

$$\alpha_{angular} = \rho g \leftrightarrow 16830 = 10\rho \leftrightarrow \rho = 1683 \text{ kg/m}^3$$

Parte B: O Planeta Misterioso

Solução B.1 Tabela 2: Pressão em função da profundidade

Profundidade (m)	Pressão (kPa)
0.0	0.0
0.2	3.93
0.4	7.88
0.6	12.0
0.8	15.95
1.0	19.9
1.2	24.02
1.4	27.8

Solução B.2 Agora, plotando os dados da tabela:

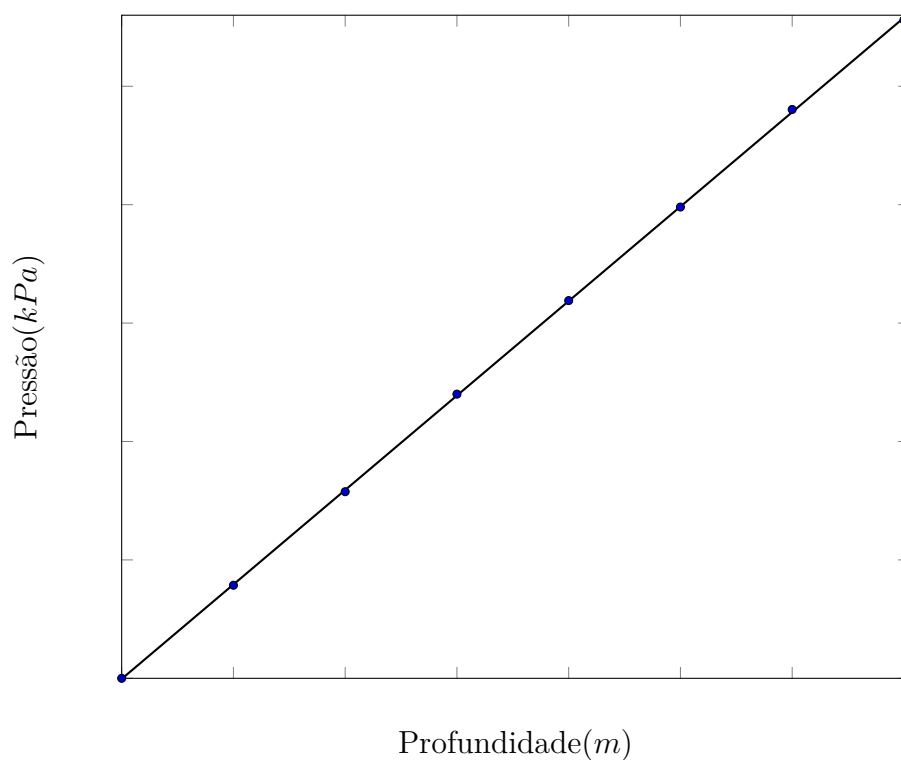


Gráfico 1: Pressão vs Profundidade

Solução B.3 O coeficiente linear representa a pressão na profundidade $h = 0$, que corresponde à superfície do fluido. Idealmente, para uma medição onde a pressão atmosférica é o ponto de referência zero (ocasionado pelo uso do modo "atmosphere" off), este valor deveria ser nulo. Embora a regressão linear dos dados possa resultar em

um coeficiente um pouco diferente de zero, como o obtido, um valor muito próximo a ele é esperado. Essa pequena diferença é atribuída às imprecisões inerentes à medição experimental e não invalida o modelo. Assim, calculando o coeficiente angular obtemos:

$$\alpha_{angular} \approx 19,94 \text{ kPa/m}; b = 0$$

Solução B.4 Conforme constatado no item A.5, temos a seguinte relação:

$$\alpha_{angular} = \rho g$$

Dessa maneira, substituindo os valores obtemos:

$$g = 19,94 \text{ m/s}^2$$

Solução B.5 Não, o valor estimado para a aceleração da gravidade (g) não se alteraria ao ativar a atmosfera no experimento. A ativação da atmosfera muda o tipo de pressão medida, de manométrica para absoluta, mas não altera a relação de dependência entre a variação da profundidade e a variação da pressão.

Com a atmosfera ativa, a pressão total em uma profundidade h é a soma da pressão atmosférica (P_{atm}) na superfície com a pressão hidrostática (ρgh), resultando na equação:

$$P_{\text{absoluta}} = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

Para entender por que a gravidade estimada não muda, analisamos a variação da pressão (ΔP) entre duas profundidades, h_1 e h_2 . A variação é dada por:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = (P_{\text{atm}} + \rho gh_2) - (P_{\text{atm}} + \rho gh_1)$$

Simplificando a expressão, os termos da pressão atmosférica se cancelam:

$$\Delta P = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g \Delta h$$

Isolando a taxa de variação, que é o coeficiente angular (a) do gráfico, obtemos a mesma relação de antes:

$$a = \frac{\Delta P}{\Delta h} = \rho g$$

Conforme demonstrado, a expressão para a variação de pressão (ΔP) não depende

da pressão atmosférica. Consequentemente, o coeficiente angular do gráfico, que representa a taxa de variação $\Delta P/\Delta h$, permanece inalterado e igual a ρg . A única diferença no gráfico seria o coeficiente linear, que passaria de zero para o valor de P_{atm} , deslocando a reta verticalmente sem alterar sua inclinação. Portanto, como o cálculo de g depende apenas do coeficiente angular e da densidade, o valor estimado para a gravidade permaneceria o mesmo.

9.3.7 Bernoulli

Parte A: Equação da continuidade

Solução A.1

Realizando as medidas:

Tabela 1: Medições de k e v_2

k	$v_2(\text{m/s})$
0,50	0,75
0,75	1,69
1,00	3,00
1,25	4,69
1,50	6,75
1,70	8,67
2,00	12,0

Solução A.2

Lembrando da fórmula da equação da continuidade, vamos linearizar por meio de logaritmos(você também poderia linearizar em k^2 por exemplo).

$$v_2 = v_1 k^2 \rightarrow \log(v_2) = \log(v_1) + 2\log(k)$$

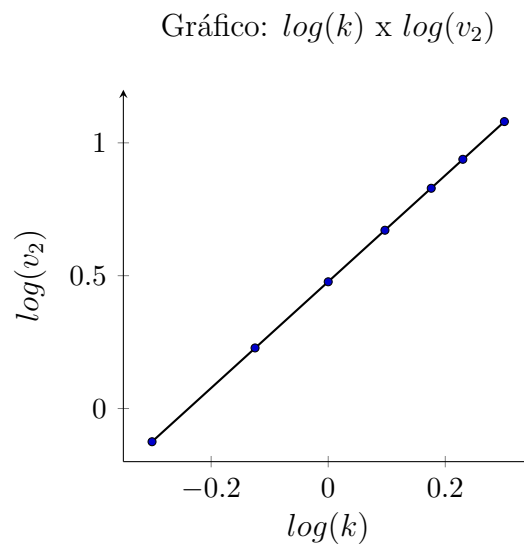
Com as velocidades em unidades do SI. Então, façamos a tabela linearizada:

Tabela 2: $\log(k)$ e $\log(v_2 \cdot \text{s/m})$

$\log(k)$	$\log(v_2 \cdot s/m)$
$-3,01 \times 10^{-1}$	$-0,125$
$-1,25 \times 10^{-1}$	$0,228$
$0,00 \times 10^0$	$0,477$
$9,69 \times 10^{-2}$	$0,671$
$1,76 \times 10^{-1}$	$0,829$
$2,30 \times 10^{-1}$	$0,938$
$3,01 \times 10^{-1}$	$1,08$

Solução A.3

Façamos o gráfico:



$$\begin{aligned}
 Y &= A + BX \\
 B &= 2 \\
 A &= 0,477
 \end{aligned}$$

Então, v_2 realmente é proporcional a k^2 , como esperado pela equação da continuidade. Agora, para conferir que o termo de proporcionalidade é v_1 :

$$\alpha = 10^4 \approx 3\text{m/s} = v_1$$

Onde α é o termo de proporcionalidade.

Parte B: Equação de Bernoulli

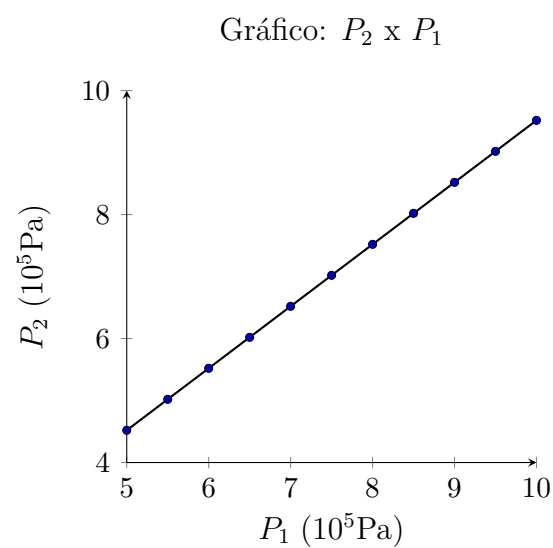
Solução B.1

Realizando as medições:

P_1 (10^5Pa)	P_2 (10^5Pa)
5,00	4,52
5,50	5,02
6,00	5,52
6,50	6,02
7,00	6,52
7,50	7,02
8,00	7,52
8,50	8,02
9,00	8,52
9,50	9,02
10,0	9,52

Solução B.2

Fazendo um gráfico linearizado:



$$Y = A + BX$$

$$B = 1$$

$$A = -47900$$

Porém, juntando a equação de Bernoulli e equação da continuidade, podemos dizer:

$$P_2 = P_1 + \rho(gh_1 - gh_2 + \frac{v_1^2}{2}(1 - k^2))$$

Logo, o termo que envolve ρ é igual ao A da regressão linear. Isolando a gravidade e substituindo os valores:

$$g(h_1 - h_2) = \frac{A}{\rho} - \frac{v_1^2}{2}(1 - k^4)$$

$$g = \frac{\frac{A}{\rho} - \frac{v_1^2}{2}(1 - k^4)}{(h_1 - h_2)} = 9.8\text{m/s}$$

9.3.8 Viscosidade

Parte A: Investigando a viscosidade

Solução A.1

Para descobrir tais relações, vamos pensar em alguns casos específicos. Em $t = 0$, sabemos que $y = 0$, já que a bola ainda não se moveu. Logo:

$$C_1 \left(0 - \frac{1}{C_2}e^0\right) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = \frac{C_1}{C_2}$$

Como queríamos encontrar. Além disso, vamos pensar no momento em que a aceleração começa a ser praticamente nula por causa do impacto da viscosidade. Após isso, o movimento será praticamente um MRU com $v = C_4$ e:

$$y = C_1t + C_3$$

Assim, comparando as funções de posição e velocidade, fica fácil ver que $C_1 = C_4$. Assim, como temos 3 relações entre os 5 coeficientes, na prática só precisamos descobrir 2 experimentalmente(e substituir o resto nas equações):

Solução A.2

Primeiramente, vamos tirar medições do simulador. Como veremos, medir apenas uma das funções é necessário. Aqui, **usaremos como padrão a configuração de "Oil Oliver", "Steel" e $R = 6\text{mm}$** e mudar de acordo com as necessidades, do mesmo jeito recomendado no enunciado. Porém, aqui vão tabelas com todas as medidas:

Tabela 1: Tabela para $R = 6\text{mm}$

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s^2)	Posição (m)
0,00	0,00	8,64	0,00
0,04	0,34	8,23	0,01
0,08	0,66	7,82	0,03
0,12	0,96	7,43	0,06
0,16	1,25	7,06	0,10
0,20	1,53	6,70	0,16
0,24	1,79	6,37	0,23
0,28	2,04	6,05	0,30
0,32	2,27	5,75	0,39
0,36	2,50	5,46	0,49
0,40	2,71	5,19	0,59

Tabela 2: Tabela para $R = 5\text{mm}$

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s^2)	Posição (m)
0,00	0,00	8,64	0,00
0,04	0,33	8,06	0,01
0,08	0,64	7,48	0,03
0,12	0,93	6,95	0,06
0,16	1,20	6,45	0,10
0,20	1,45	5,99	0,16
0,24	1,68	5,57	0,22
0,28	1,89	5,17	0,29
0,32	2,09	4,80	0,37
0,36	2,28	4,46	0,46
0,40	2,45	4,14	0,55

Tabela 3: Tabela para $R = 4\text{mm}$

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0,00	0,00	8,64	0,00
0,04	0,33	7,74	0,01
0,08	0,62	6,90	0,03
0,12	0,88	6,14	0,06
0,16	1,11	5,47	0,10
0,20	1,32	4,87	0,15
0,24	1,50	4,34	0,20
0,28	1,66	3,87	0,27
0,32	1,81	3,44	0,34
0,36	1,94	3,07	0,41
0,40	2,05	2,73	0,49
0,44	2,16	2,43	0,57

Tabela 4: Tabela para $R = 3\text{mm}$

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0,00	0,00	8,64	0,00
0,04	0,31	7,11	0,01
0,08	0,57	5,78	0,02
0,12	0,78	4,70	0,05
0,16	0,95	3,83	0,09
0,20	1,08	3,12	0,13
0,24	1,20	2,53	0,17
0,28	1,29	2,06	0,22
0,32	1,36	1,68	0,28
0,36	1,42	1,37	0,33
0,40	1,47	1,11	0,39
0,44	1,51	0,90	0,45
0,48	1,54	0,74	0,51
0,52	1,57	0,60	0,57

Tabela 5: Tabela para $R = 2\text{mm}$

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0,00	0,00	8,64	0,00
0,04	0,28	5,55	0,01
0,08	0,45	3,48	0,02
0,12	0,56	2,18	0,04
0,16	0,63	1,37	0,07
0,20	0,68	0,86	0,09
0,24	0,70	0,54	0,12
0,28	0,72	0,34	0,15
0,32	0,73	0,21	0,18
0,36	0,74	0,13	0,21
0,40	0,74	0,08	0,24
0,44	0,74	0,05	0,27
0,48	0,75	0,03	0,30
0,52	0,75	0,02	0,33

Agora, vamos pensar em como linearizar os dados para obter como os 2 coeficientes resultantes dependem do raio. Como cada linearização traz como resultado 2 coeficientes (um angular e um linear), precisamos apenas linearizar uma entre as 3 funções medidas (posição, velocidade e aceleração). A mais fácil de linearizar é aceleração, então vamos focar nela. Aplicando o logaritmo natural (logaritmo na base e) na equação da aceleração:

$$\ln a = \ln((g - C_5)e^{C_2 t}) = \ln(g - C_5) + C_2 t$$

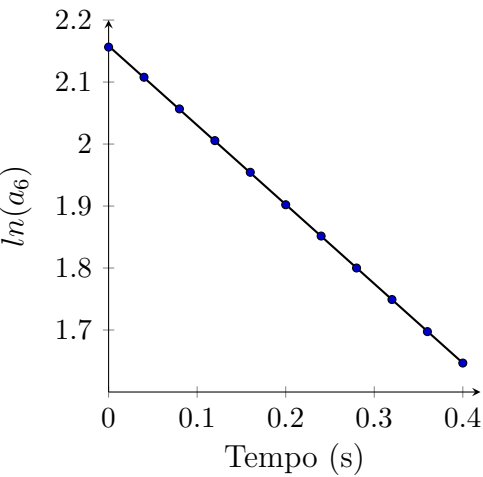
Ou seja, $\ln a$ é linear com t . Lembrando que com C_5 e a são os valores no SI (o melhor representar como $\ln(as^2/m)$ e $\ln((g - C_5)s^2/m)$). Então, vamos linearizar os dados de aceleração para cada raio:

Tabela 6: Acelerações linearizadas para cada raio

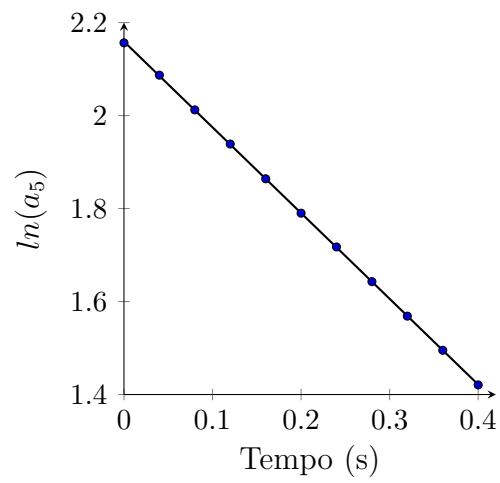
Tempo (s)	$\ln(a_6)$	$\ln(a_5)$	$\ln(a_4)$	$\ln(a_3)$	$\ln(a_2)$
0,00	2,16	2,16	2,16	2,16	2,16
0,04	2,11	2,09	2,05	1,96	1,71
0,08	2,06	2,01	1,93	1,75	1,25
0,12	2,01	1,94	1,81	1,55	0,779
0,16	1,95	1,86	1,70	1,34	0,315
0,20	1,90	1,79	1,58	1,14	-0,151
0,24	1,85	1,72	1,47	0,928	-0,616
0,28	1,80	1,64	1,35	0,723	-1,08
0,32	1,75	1,57	1,24	0,519	-1,56
0,36	1,70	1,50	1,12	0,315	-2,04
0,40	1,65	1,42	1,00	0,104	-2,53
0,44	—	—	0,888	-0,105	-3,00
0,48	—	—	—	-0,301	-3,51
0,52	—	—	—	-0,511	-3,91

Então, por meio de uma regressão linear ou pelo método gráfico, é possível descobrir C_5 e C_2 para cada raio. Assim, façamos os gráficos:

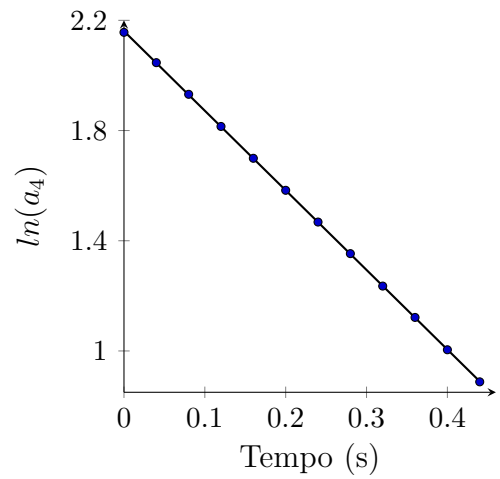
Gráfico 1: $\ln(a_6)$ x t



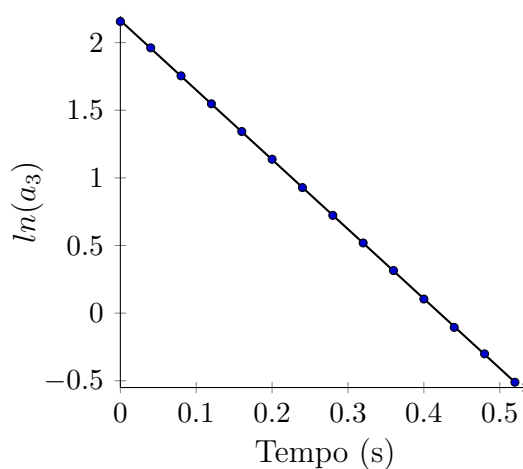
$$Y = A + BX$$
$$B = -1,28$$
$$A = 2,16$$

Gráfico 2: $\ln(a_5)$ x t 

$$\begin{aligned} Y &= A + BX \\ B &= -1,84 \\ A &= 2,16 \end{aligned}$$

Gráfico 3: $\ln(a_4)$ x t 

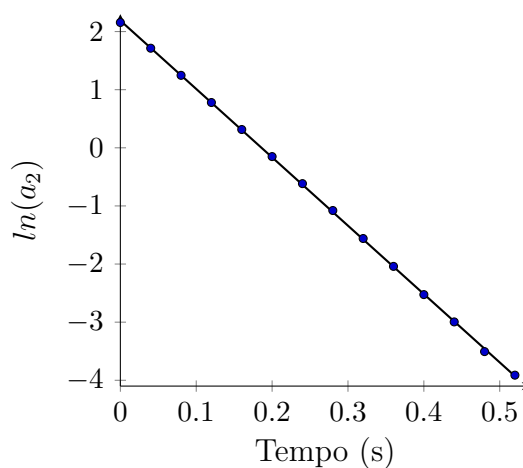
$$\begin{aligned} Y &= A + BX \\ B &= -2,89 \\ A &= 2,16 \end{aligned}$$

Gráfico 4: $\ln(a_3) \times t$ 

$$Y = A + BX$$

$$B = -5,14$$

$$A = 2,16$$

Gráfico 5: $\ln(a_2) \times t$ 

$$Y = A + BX$$

$$B = -11,18$$

$$A = 2,16$$

Então, para cada raio, $C_2 = B$ e $(g - C_5) = e^A$ (nas devidas unidades). Uma maneira mais fácil de encontrar o módulo de C_5 é simplesmente medindo a aceleração da gravidade menos a aceleração inicial da esfera, que percebemos **não depender do raio**. Então, precisamos apenas linearizar C_2 , o que pode ser feito por meio de logaritmos:

$$C_2 = K_1 R^{n_1} \rightarrow \log C_2 = \log(K_1) + n_1 \log R$$

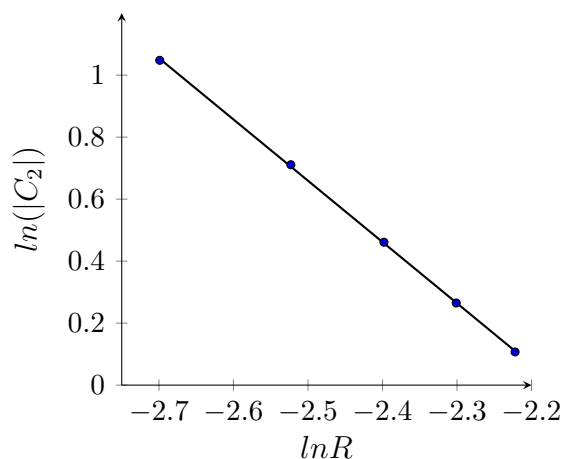
Como C_2 é negativo, K_1 também é. Para se realizar a linearização por logaritmos, os valores precisam ser positivos; por isso, vamos apenas esquecer os sinais por enquanto. Façamos então uma tabela com os valores linearizados:

Tabela 7: $\ln(|C_2|)$ x $\ln(R)$

$\ln(R)$	$\ln(C_2)$
-2,222	0,107
-2,301	0,265
-2,398	0,461
-2,523	0,711
-2,699	1,048

Então, fazendo o gráfico e obtendo os coeficientes de regressão:

Gráfico 6: $\ln(|C_2|)$ x $\ln R$



$$\begin{aligned} Y &= A + BX \\ B &= -1,98 \\ A &= -4,28 \end{aligned}$$

Ou seja, C_2 é proporcional a $R^{-1,98} \approx R^{-2}$. Isso ocorre pela relevância da área da bola no fenômeno. Assim, aplicando as relações encontradas no item A.1, podemos descobrir como cada coeficiente varia com R . Resumindo:

$$C_5 \propto R^0$$

$$C_2 \propto R^{-1,98}$$

$$C_4 \propto R^{1,98}$$

$$C_1 \propto R^{1,98}$$

$$C_3 \propto R^{3,96}$$

Solução A.3

Já temos as medições para o material sendo "Steel". Assim, façamos as medições nos outros dois materiais:

Tabela 8: Tabela para "Aluminum"

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0	0	6,46	0
0,04	0,24	5,61	0,01
0,08	0,45	4,83	0,02
0,12	0,63	4,17	0,04
0,16	0,78	3,59	0,07
0,2	0,92	3,09	0,1
0,24	1,03	2,67	0,14
0,28	1,13	2,3	0,19
0,32	1,21	1,98	0,23
0,36	1,29	1,71	0,28
0,4	1,35	1,47	0,34
0,44	1,4	1,27	0,39
0,48	1,45	1,09	0,45
0,52	1,49	0,94	0,51
0,56	1,53	0,81	0,57

Tabela 2: Tabela para "Rubber"

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0	0	3,87	0
0,1	0,28	2,02	0,02
0,2	0,43	1,04	0,05
0,3	0,51	0,54	0,1
0,4	0,55	0,28	0,15
0,5	0,57	0,14	0,21
0,6	0,58	0,07	0,27
0,7	0,58	0,04	0,32
0,8	0,59	0,02	0,38
0,9	0,59	0,01	0,44

Assim, vamos seguir o mesmo procedimento aplicado no item A.2. Linearizando a aceleração:

Tabela 10: Acelerações linearizadas do "Aluminum"

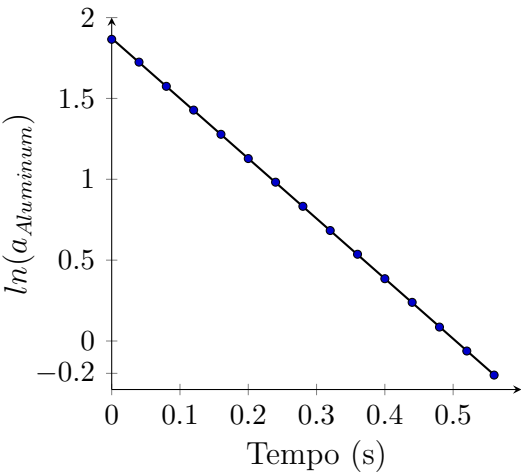
Tempo (s)	$\ln(a_{Aluminum})$
0	1,87
0,04	1,72
0,08	1,57
0,12	1,43
0,16	1,28
0,2	1,13
0,24	0,982
0,28	0,833
0,32	0,683
0,36	0,536
0,4	0,385
0,44	0,239
0,48	0,0862
0,52	-0,0619
0,56	-0,211

Tabela 11: Acelerações linearizadas do "Rubber"

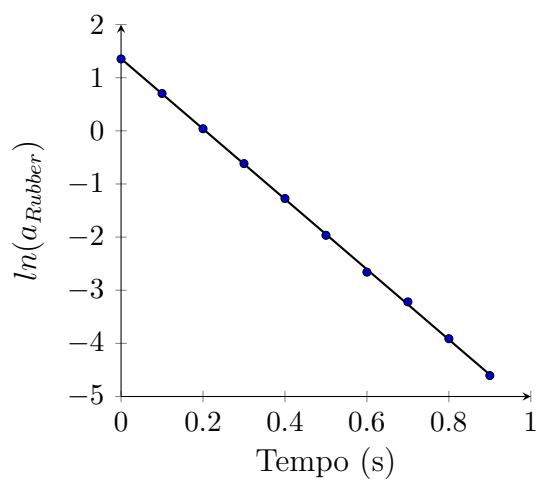
Tempo (s)	$\ln(a_{Rubber})$
0	1,35
0,1	0,703
0,2	0,0392
0,3	-0,616
0,4	-1,27
0,5	-1,97
0,6	-2,66
0,7	-3,22
0,8	-3,91
0,9	-4,61

Na tabela 6, já temos a aceleração linearizada do material "Steel"($\ln(a_6)$). Também já temos o gráfico linearizado para "Steel", que é o gráfico 1. Fazendo os outros dois gráficos:

Gráfico 7: $\ln(a_{Aluminum}) \times t$



$$Y = A + BX$$
$$B = -3,72$$
$$A = 1,87$$

Gráfico 8: $\ln(a_{Rubber}) \times t$ 

$$Y = A + BX$$

$$B = -6,61$$

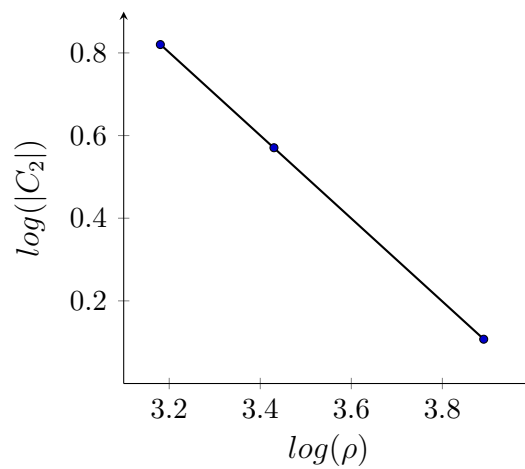
$$A = 1,36$$

Dessa vez, percebe-se que ambas as variáveis dependem da densidade da bola. Então, façamos a tabela dos dados linearizados:

Tabela 12: Densidades e coeficientes linearizados

$\log(\rho)$	$\log(C_2)$	$\log(C_5)$
3,89	0,107	0,065
3,43	0,571	0,524
3,18	0,820	0,773

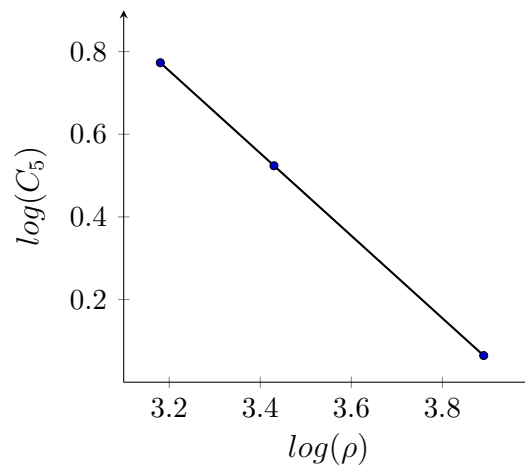
Assim, fazendo os gráficos com os dados linearizados:

Gráfico 9: $\log(|C_2|) \times \log(\rho)$ 

$$Y = A + BX$$

$$B = -1$$

$$A = 4,01$$

Gráfico 10: $\log(C_5)$ em função de $\log(\rho)$ 

$$Y = A + BX$$

$$B = -0,998$$

$$A = 3,95$$

Assim, vamos aproximar 0,998 para 1 por facilidade. Então, podemos resumir os resultados como:

$$C_5 \propto \frac{1}{\rho}, C_2 \propto \frac{1}{\rho}, C_4 \propto \rho^0, C_1 \propto \rho^0, C_3 \propto \rho$$

Solução A.4

Vamos replicar a metodologia dos itens anteriores. Tirando medições com os outros dois líquidos:

Tabela 13: Medições com "Water"

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0	0	8,54	0
0,04	0,34	8,54	0,01
0,08	0,68	8,53	0,03
0,12	1,02	8,53	0,06
0,16	1,37	8,52	0,11
0,2	1,71	8,52	0,17
0,24	2,05	8,51	0,25
0,28	2,39	8,51	0,34
0,32	2,73	8,5	0,44
0,36	3,07	8,49	0,56

Tabela 14: Medições com "Honey"

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Aceleração (m/s ²)	Posição (m)
0	0	8,09	0
0,01	0,06	4,67	0
0,02	0,09	2,35	0
0,03	0,11	1,19	0
0,04	0,12	0,6	0
0,05	0,12	0,3	0
0,06	0,12	0,15	0,01
0,07	0,13	0,08	0,01
0,08	0,13	0,04	0,01
0,09	0,13	0,02	0,01
0,1	0,13	0,01	0,01

Fazendo as tabelas linearizadas:

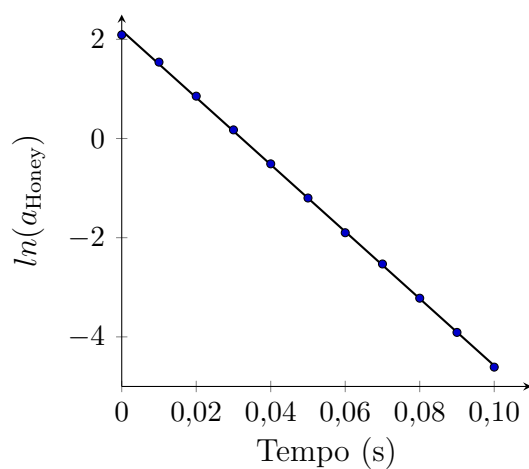
Tabela 15: Acelerações linearizadas de "Water"

Tempo (s)	$\ln(a_{water})$
0	2,144761008
0,04	2,14
0,08	2,14
0,12	2,14
0,16	2,14
0,2	2,14
0,24	2,14
0,28	2,14
0,32	2,14
0,36	2,14

Tabela 16: Acelerações linearizadas de "Honey"

Tempo (s)	$\ln(a_{Honey})$
0	2,09
0,01	1,54
0,02	0,854
0,03	0,174
0,04	-0,511
0,05	-1,20
0,06	-1,90
0,07	-2,53
0,08	-3,22
0,09	-3,91
0,1	-4,61

Como é possível notar, $\ln(a_{water})$ se mantém praticamente o mesmo. Isso ocorre pelo fato da viscosidade ser tão pequena que o movimento é praticamente um MRUV. Assim, nossa melhor maneira de obter resultados sobre as variáveis é focar apenas os líquidos de "Oil Oliver" e "Honey". Façamos, então, o gráfico dos dados de "Honey":

Gráfico: $\ln(a_{\text{Honey}})$ em função do tempo

$$Y = A + BX$$

$$B = -67,5$$

$$A = 2,18$$

Assim, fazendo a nova tabela linearizada:

Tabela 17: Viscosidade, densidade e coeficientes linearizados

$\log(\eta)$	$\log(\rho_{\text{liquido}})$	$\log(C_2)$	$\log(C_5)$
-1,10	2,95	0,107	0,0645
0,623	3,12	1,83	0,233

Fazendo os gráficos e obtendo os coeficientes de regressão:

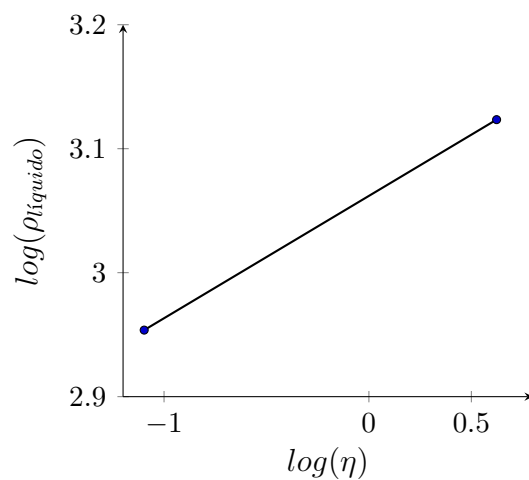
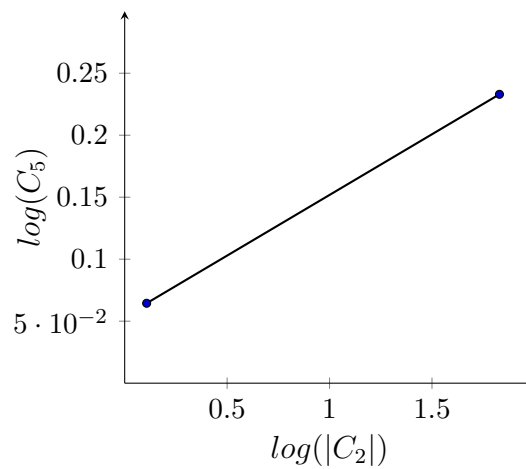
Gráfico: $\log(\rho_{\text{liquido}})$ em função de $\log(\eta)$ 

Gráfico: $\log(C_5)$ em função de $\log(|C_2|)$ 

Assim, podemos resumir:

$$C_2 \propto \eta$$

$$C_5 \propto \rho_{\text{líquido}}$$

$$C_4 \propto \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\eta}$$

$$C_1 \propto \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\eta}$$

$$C_3 \propto \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\eta^2}$$

Solução A.5

Agora, basta juntarmos os resultados obtidos até agora, tanto de proporcionalidade quanto de fatores numéricos. Então, vamos, por exemplo, pegar os resultados de linearização do item A.2. Podemos dizer que:

$$\log(C_2) = \log(K_1) + n_1 \log(R)$$

Onde a constante K_1 é $10^4 \approx 5,45 \cdot 10^{-5}$. Porém, sabemos que:

$$C_2 \propto \frac{\eta}{\rho_{corpo} r^2} \rightarrow C_2 \approx \frac{D_1 \eta}{\rho_{corpo} r^2}$$

Onde D_1 é a constante que queremos. Assim:

$$K_1 \approx \frac{D_1 \eta}{\rho_{corpo}} \rightarrow D_1 = \frac{K_1 \rho_{corpo}^{0,998}}{\eta} \approx 5,01$$

Porém, lembremos aqui do sinal negativo de C_2 que deixamos para trás nas linearizações. Por causa dele, D_1 é na verdade negativo. O valor esperado era por volta de 4,5 pela fórmula mais comum de viscosidade, mas é normal ter uma certa diferença já que tal fórmula depende bastante do regime e nossas potências não deram exatamente o valor esperado (ao invés de 1, tivemos 0,998 por exemplo), o que faz bastante diferença nos cálculos finais. Assim, façamos o mesmo para C_5 , utilizando o resultado do item A.3 como base:

$$K_2 \approx D_2 \rho_{líquido} \rightarrow D_2 = \frac{K_2}{\rho_{líquido}^{0,993}} \approx 10,2$$

Aqui, novamente o resultado distoa um pouco do esperado, que era por volta gravidade local ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$). Se você aproximar $0,993 \approx 1$, um valor mais próximo é obtido.

Assim, vamos juntar esses resultados para expressar todas as variáveis:

$$C_5 \approx 10,2 \frac{\rho_{líquido}}{\rho_{corpo}}$$

$$C_2 \approx \frac{5,01 \eta}{\rho_{corpo} r^2}$$

$$C_4 \approx 2 \frac{\rho_{corpo} r^2}{\eta} \frac{\rho_{líquido}}{\rho_{corpo}} \approx 2 \frac{r^2 \rho_{líquido}}{\eta}$$

$$C_1 \approx 2 \frac{\rho_{corpo} r^2}{\eta} \frac{\rho_{líquido}}{\rho_{corpo}} \approx 2 \frac{r^2 \rho_{líquido}}{\eta}$$

$$C_3 \approx \frac{2}{5,01} \left(\frac{\rho_{corpo} r^2}{\eta} \right)^2 \frac{\rho_{líquido}}{\rho_{corpo}} \approx 0,4 \frac{\rho_{corpo} \rho_{líquido} r^4}{\eta^2}$$

Agora, para a força de viscosidade recorde as equações dadas no começo da questão:

$$a = -C_4 C_2 e^{C_2 t} \text{ e } v = C_4(1 - e^{C_2 t})$$

$$v = C_4 - C_4 e^{C_2 t} \rightarrow -C_4 e^{C_2 t} = v - C_4$$

$$a = C_2(v - C_4)$$

Assim, pela Segunda Lei de Newton:

$$F = ma = mC_2(v - C_4) = mC_2v - mC_2C_4$$

Para um corpo caindo num fluido, a força resultante deve ser composta pelo peso, empuxo e força de viscosidade:

$$F = P - E - F_v$$

Como o corpo está sempre submerso, o empuxo atuante deve ser constante, assim como o peso. Desse modo, a componente constante da força $-mC_2C_4$, constitui a diferença entre o peso e o empuxo na bola. Assim como o esperado, a força de viscosidade é a parte que depende da velocidade.

$$|F_v| = m|C_2|v = mv \frac{5,01\eta}{\rho_{corpo} r^2} = \rho_{corpo} V v \frac{5,01\eta}{\rho_{corpo} r^2}$$

$$|F_v| = V v \frac{5,01\eta}{r^2}$$

Se quisermos continuar, podemos assumir que o corpo uma esfera e seu volume é $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$|F_v| = v \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{5,01\eta}{r^2}$$

$$|F_v| \approx 6,7\pi\eta r v$$

O que é bem próximo da formula teórica, onde $|F_v| = 6\pi\eta r v$.

9.3.9 Efeito doppler

Solução A.1

Os sinais têm a seguinte interpretação física:

- No numerador ($v \pm v_o$): usa-se $+v_o$ se o observador se aproxima da fonte, e $-v_o$

se se afasta.

- No denominador ($v \mp v_f$): usa-se $-v_f$ se a fonte se aproxima do observador, e $+v_f$ se se afasta.

Repare que os sinais do observador e da fonte entram de forma assimétrica: Para o observador, movimento “a favor” da onda aumenta a frequência, já para a fonte, movimento “a favor” (aproximando-se do observador) diminui o denominador, o que também aumenta a frequência. Assim, **aproximação** implica $f' > f$, enquanto **afastamento** implica $f' < f$.

Solução A.2

Considere a fonte em movimento (velocidade radial v_s) e o observador fixo no meio. As frequências medidas quando a fonte *aproxima* e *afasta* são

$$f_+ = f \frac{v}{v - v_s}, \quad f_- = f \frac{v}{v + v_s},$$

Defina a razão

$$R \equiv \frac{f_+}{f_-} = \frac{v + v_s}{v - v_s}.$$

Isolando v e linearizando em $\frac{1}{R+1}$:

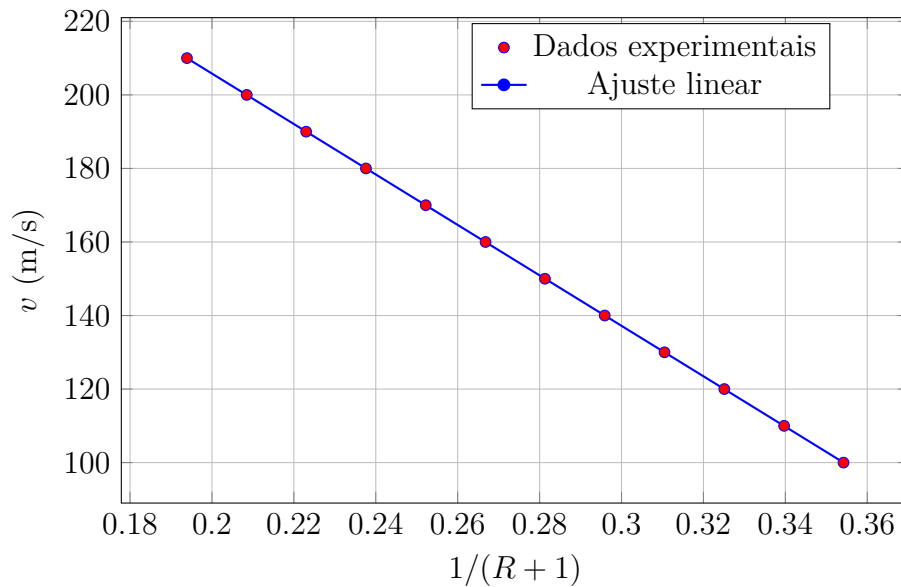
$$v = v_s \left(1 - \frac{2}{R+1} \right)$$

Note que essa expressão cancela a incerteza em f (σ_f não entra diretamente) e permite o uso de 2 parâmetros na regressão, o que pode diminuir erros sistemáticos. Além disso, é possível descartar os dados em que $R \approx 1.0$ (v baixo) e $R \rightarrow \infty$ ($v \approx v_s$).

Solução A.3

Com os dados obtidos pelo método em A.2:

v (± 1.0 m/s)	f_1 (± 0.01 Hz)	f_2 (± 0.01 Hz)	$R = f_1/f_2$
100	484.15	265.57	1.8231 ± 0.0001
110	504.93	259.71	1.9442 ± 0.0001
120	527.57	254.10	2.0762 ± 0.0001
130	552.34	248.73	2.2206 ± 0.0001
140	579.55	243.58	2.3793 ± 0.0001
150	609.58	238.64	2.5544 ± 0.0001
160	642.89	233.89	2.7487 ± 0.0001
170	680.05	229.34	2.9652 ± 0.0001
180	721.77	224.95	3.2086 ± 0.0001
190	768.95	220.73	3.4837 ± 0.0001
200	822.72	216.66	3.7973 ± 0.0001
210	884.58	212.75	4.1578 ± 0.0002

Gráfico v vs $1/(R + 1)$ 

Para o ajuste linear ($r^2 \approx 1 - 7 \times 10^{-9}$):

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{N - 2}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

Temos duas estimativas:

$$v_{s,A} = A = (343.001 \pm 0.002) \text{ m/s}$$

$$v_{s,B} = \frac{|B|}{2} = (343.001 \pm 0.002) \text{ m/s}$$

Sendo assim, $v_s \approx (343.001 \pm 0.001) \text{ m/s}$

9.3.10 Ressonância em uma cavidade com ar

Parte A: Determinação da velocidade do som

Solução A.1

Alterando a posição do êmbolo até o decibelímetro digital atingir 45 dB, obtemos a seguinte tabela:

Tabela 1: Determinação experimental da velocidade do som

	$(d_1 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_2 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_3 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_4 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_5 \pm 1, 0)\text{cm}$
300 Hz	27,3	84,9			
400 Hz	20,0	62,6			
500 Hz	15,1	50,1	84,9		
600 Hz	12,3	41,4	70,3	99,1	
700 Hz	10,3	35,7	60,0	84,9	
800 Hz	8,9	30,3	52,2	74,1	95,7
900 Hz	8,0	27,2	46,2	65,9	85,1
1000 Hz	6,6	24,1	41,4	58,7	76,4

A incerteza é 1,0 cm, pois a escala da régua é 2,0 cm.

Solução A.2

Utilizando a fórmula dada $v_s = 2f(d_2 - d_1)$

Tabela 2: Determinação experimental da velocidade do som

	$v_1 \text{ (m/s)}$	$v_2 \text{ (m/s)}$	$v_3 \text{ (m/s)}$	$v_4 \text{ (m/s)}$
300 Hz	346 ± 8			
400 Hz	341 ± 11			
500 Hz	350 ± 14	348 ± 14		
600 Hz	349 ± 17	347 ± 17	346 ± 17	
700 Hz	356 ± 20	340 ± 20	349 ± 20	
800 Hz	342 ± 23	350 ± 23	350 ± 23	346 ± 23
900 Hz	346 ± 25	342 ± 25	345 ± 25	346 ± 25
1000 Hz	350 ± 28	346 ± 28	346 ± 28	354 ± 28

Sendo o erro dado por $\sigma_{v_s} = 2f\sigma_{(d_2-d_1)}$. Além disso, $\sigma_{(d_2-d_1)} = \sqrt{2} \cdot 1,0\text{cm}$

Solução A.3

Tirando a média dos valores e o desvio padrão da média, obtemos:

$$v_s = (347,0 \pm 0,8)m/s$$

Parte B: Frequências X, Y e Z

Solução B.1

Repetindo o mesmo procedimento que em A.1

Tabela 3: Determinação experimental das frequências

	$(d_1 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_2 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_3 \pm 1, 0)\text{cm}$	$(d_4 \pm 1, 0)\text{cm}$
X	9,9	32,8	56,1	78,8
Y	22,4	72,4		
Z	15,6	50,3	84,9	

Solução B.2

Pela fórmula dada:

$$v_s = 2f(d_2 - d_1)$$

Logo, podemos criar a seguinte tabela:

Tabela 3.1: Determinação experimental das frequências

	$f_1(\text{Hz})$	$f_2(\text{Hz})$	$f_3(\text{Hz})$
X	758 ± 47	745 ± 45	764 ± 48
Y	347 ± 10		
Z	500 ± 20	501 ± 20	

A incerteza foi encontrada utilizando a seguinte fórmula:

$$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{v_s}}{v_s}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{(d_2-d_1)}}{(d_2-d_1)}\right)^2$$

Tirando a média, obtemos que:

$$f_x = (756 \pm 47)\text{Hz}$$

$$f_y = (347 \pm 10)\text{Hz}$$

$$f_z = (501 \pm 20)\text{Hz}$$

Parte C: Correção de comprimento

Solução C.1

Utilizando a fórmula:

$$D = \frac{d_2 - 3d_1}{2}$$

Aplicamos a fórmula de propagação de incertezas:

$$\sigma_D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_{d_2})^2 + (3 \cdot \sigma_{d_1})^2}$$

Substituindo os valores:

$$\sigma_D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + (3 \cdot 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}$$

$$\sigma_D \approx 1.6 \text{ cm}$$

Podemos criar a seguinte tabela:

Tabela 4: Determinação experimental da correção de extremidade

	$(D_1 \pm 1,6) \text{ cm}$	$(D_2 \pm 1,6) \text{ cm}$	$(D_3 \pm 1,6) \text{ cm}$	$(D_4 \pm 1,6) \text{ cm}$
300 Hz	1,5			
400 Hz	1,3			
500 Hz	2,4	2,1		
600 Hz	2,3	2,0	1,7	
700 Hz	2,4	0,8	2,3	
800 Hz	1,8	2,6	2,6	1,5
900 Hz	1,6	1,3	3,1	1,3
1000 Hz	2,2	1,9	1,9	3,3

Solução C.2

Tirando a média e o desvio padrão da média:

$$D = (2,00 \pm 0,13) \text{ cm}$$

Logo, o valor da constante k é:

$$k = (0,66 \pm 0,04)$$

Obs: o valor de k na teoria é 0,6. Logo, conseguimos uma boa aproximação desse valor!

9.3.11 Ondas em cordas

Parte A: Verificando se a tensão das cordas está de acordo

Solução A.1

O erro da velocidade é calculado por propagação de erro:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{d \cdot 10^{-2}}{t \cdot 10^{-6}} \rightarrow$$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial d} \cdot \sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sigma_t\right)^2} = \frac{0,5 \cdot 10^4}{t}$$

O erro da velocidade média é calculado por:

$$\sigma_{v_m} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{\sqrt{N}}\right)^2 + \sigma_v^2}$$

Sendo σ_a o desvio padrão amostral e σ_v o erro da velocidade.

A fim de diminuir o erro da velocidade, recomendo coletar dados com distâncias maiores.

Tabela 1: Corda 1

	$(d \pm 0,5)$ cm	$(t \pm 0)$ μs	v (m/s)
1	26,0	2270	115 ± 2
2	24,7	2152	115 ± 2
3	25,0	2171	115 ± 2
4	26,1	2280	114 ± 2
5	25,1	2191	115 ± 2
v_m			115 ± 2

Tabela 2: Corda 2

	$(d \pm 0,5)$ cm	$(t \pm 0)$ μs	v (m/s)
1	25,2	1780	142 ± 3
2	25,5	1801	142 ± 3
3	26,0	1830	142 ± 3
4	25,0	1770	141 ± 3
5	25,5	1800	142 ± 3
v_m			142 ± 3

Tabela 3: Corda 3

	$(d \pm 0,5)$ cm	$(t \pm 0)$ μs	v (m/s)
1	25,2	1291	195 ± 4
2	26,9	1370	196 ± 4
3	26,2	1341	195 ± 4
4	27,9	1420	196 ± 4
5	26,4	1350	196 ± 4
v_m			196 ± 4

Tabela 4: Corda 4

	$(d \pm 0,5)$ cm	$(t \pm 0)$ μs	v (m/s)
1	27,1	971	279 ± 5
2	28,0	1001	280 ± 5
3	27,0	960	281 ± 5
4	26,3	940	280 ± 5
5	27,1	970	279 ± 5
v_m			280 ± 5

Tabela 5: Corda 5

	$(d \pm 0,5)$ cm	$(t \pm 0)$ μs	v (m/s)
1	26,0	730	356 ± 7
2	27,7	780	355 ± 6
3	28,0	791	354 ± 6
4	27,3	770	355 ± 6
5	26,0	730	356 ± 7
v_m			355 ± 6

Tabela 6: Corda 6

	$(d \pm 0,5) \text{ cm}$	$(t \pm 0) \mu\text{s}$	$v \text{ (m/s)}$
1	26,0	551	472 ± 9
2	28,0	591	474 ± 9
3	27,0	571	473 ± 9
4	26,0	551	472 ± 9
5	27,0	571	473 ± 9
v_m			473 ± 9

Solução A.2

Pela equação de Taylor:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Logo:

$$v^2 = T \cdot \mu^{-1}$$

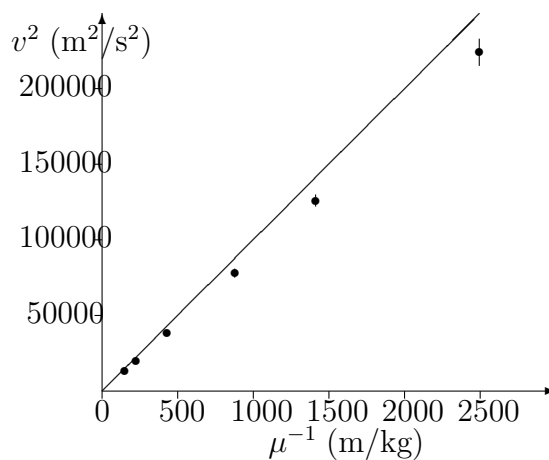
Solução A.3

Sendo o erro de v^2 da forma:

$$\sigma_{v^2 \text{ cm}} = 2v \cdot \sigma_v$$

Tabela 7: $v^2 \times \mu^{-1}$

$v^2 \text{ (m}^2/\text{s}^2)$	$\mu^{-1} \text{ (m/kg)}$
$(132 \pm 5) \cdot 10^2$	147,3
$(202 \pm 9) \cdot 10^2$	223,9
$(384 \pm 16) \cdot 10^2$	428,6
$(78 \pm 3) \cdot 10^3$	877,2
$(126 \pm 4) \cdot 10^3$	1412
$(224 \pm 9) \cdot 10^3$	2494

Solução A.4

v^2 por μ^{-1}

Realizando uma regressão linear pela calculadora com os valores da tabela e utilizando que o erro do coeficiente angular é:

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{\Delta}}$$

$$\Delta = n \sum x^2 - (\sum x)^2$$

Assim, temos que:

$$T = (89,7 \pm 1,5)N$$

Lembrando que cada um terá um valor fixo de tensão diferente, então seus resultados podem ter dado diferentes. O importante é depois você olhar qual era seu valor de tensão fixo e ver se bateu. O meu valor era de 90 N no caso.

9.3.12 Interferômetro de Fabry-Perrot**Parte A: Determinação experimental do comprimento de onda****Solução A.1**

Alterando a posição do refletor 2 até atingir uma intensidade máxima, obtemos a

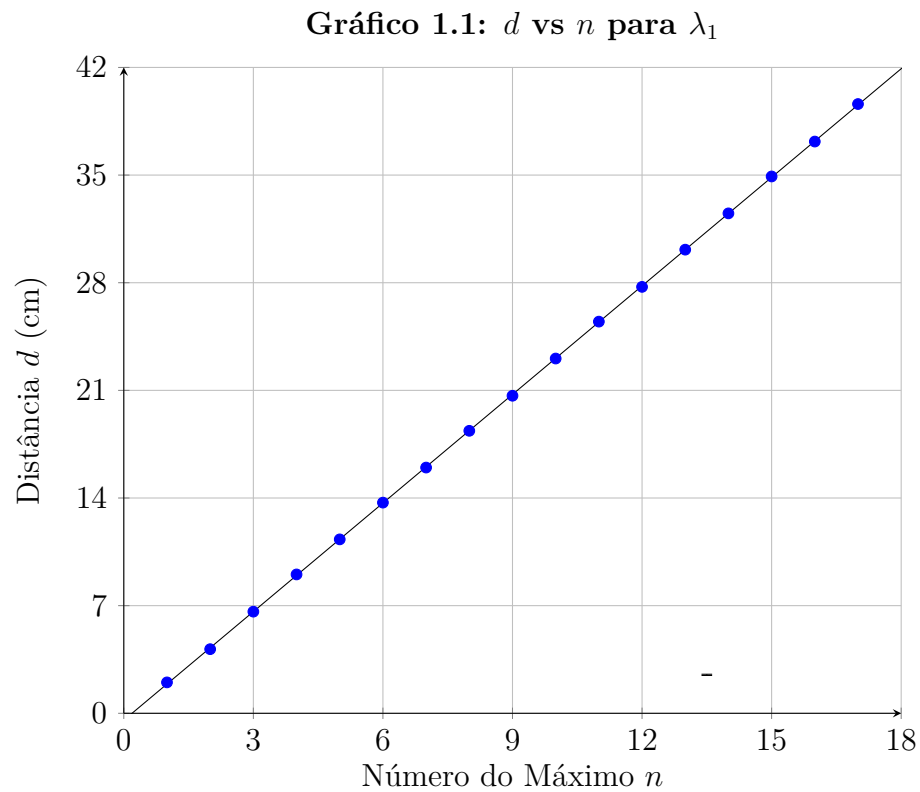
seguinte tabela.

Tabela 1: Determinação experimental do comprimento de onda λ_1

$(d \pm 0,05)$ cm	Número do Máximo n
2,01	1
4,17	2
6,61	3
9,03	4
11,31	5
13,70	6
15,98	7
18,37	8
20,65	9
23,07	10
25,47	11
27,73	12
30,15	13
32,51	14
34,91	15
37,18	16
39,62	17

Solução A.2

Criando um gráfico com os valores na **Tabela 1**:



Realizando a regressão linear, obtemos que $y = 2,3536x - 0,4491$; $r^2 = 0,99998$

Comparando a equação $d = \frac{n\lambda}{2}$ com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$d \rightarrow y;$$

$$n \rightarrow x;$$

$$\frac{\lambda}{2} \rightarrow 2,3536 \text{ cm};$$

Logo, $\lambda_1 = 4,707 \text{ cm}$

Calculando a incerteza, utilizando a fórmula da incerteza do coeficiente angular:

$$\sigma_a = |a| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}}$$

$$\sigma_{\lambda_1} = 4,707 \sqrt{\frac{\frac{1}{0,99998} - 1}{17 - 2}}$$

$$\sigma_{\lambda_1} = 5,46 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Portanto,

$$\boxed{\lambda_1 = (4,707 \pm 0,005) \text{ cm}}$$

Solução A.3

Sabendo que:

$$c = \lambda \cdot f$$
$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Usando, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s e $\lambda_1 = 4,707 \cdot 10^{-2}$ m

Temos, portanto, que:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8}{4,707 \cdot 10^{-2}} = 6,3734 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

Calculando a incerteza, utilizando a fórmula da potência:

$$y = x^n$$
$$\left| \frac{\sigma_y}{y} \right| = \left| n \frac{\sigma_x}{x} \right|$$
$$\sigma_f = f \left| (-1) \frac{\sigma_\lambda}{\lambda} \right|$$
$$\sigma_f = 7,4 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Logo,

$$f_1 = (6,373 \pm 0,007) \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

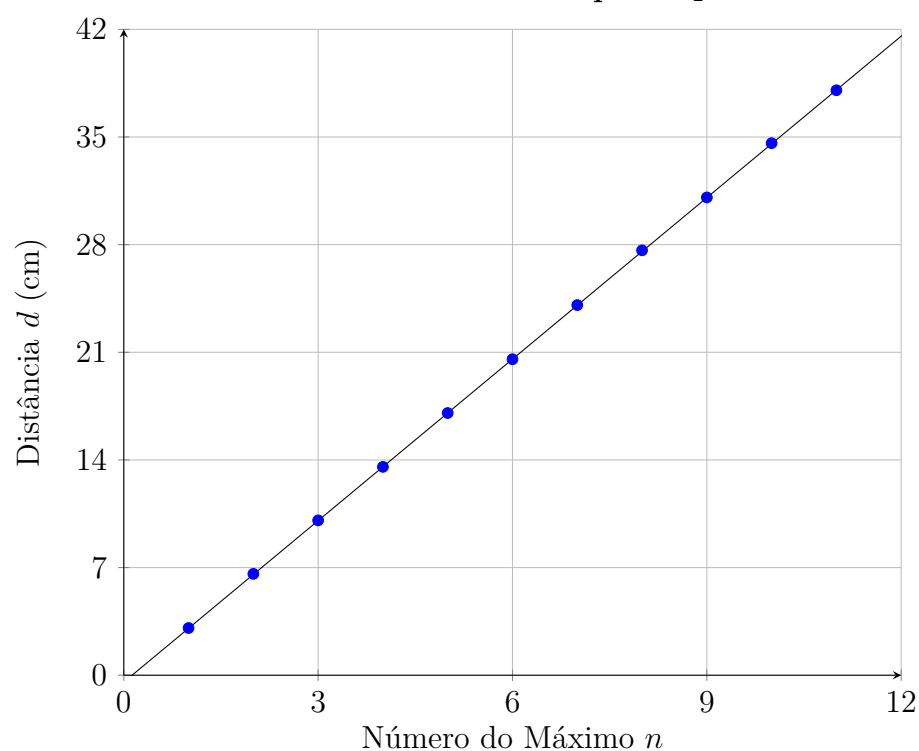
Solução A.4

Repetindo o mesmo procedimento dos itens **A.1**, **A.2** e **A.3** para λ_2 , obtemos:

Tabela 2: Determinação experimental do comprimento de onda λ_2

$(d \pm 0,05)$ cm	Número do Máximo n
3,07	1
6,59	2
10,07	3
13,55	4
17,05	5
20,55	6
24,07	7
27,63	8
31,07	9
34,60	10
38,04	11

Gráfico 2: d vs n para λ_2



Realizando a regressão linear, obtemos que $y = 3,5006x - 0,432$; $r^2 = 0,999994$

Comparando a equação $d = \frac{n\lambda}{2}$ com a equação da reta, podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$d \rightarrow y;$$

$$n \rightarrow x;$$

$$\frac{\lambda}{2} \rightarrow 3,5006 \text{ cm};$$

Logo, $\lambda_2 = 7,0013 \text{ cm}$

Calculando a incerteza, utilizando a fórmula da incerteza do coeficiente angular:

$$\sigma_a = |a| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}}$$

$$\sigma_{\lambda_2} = 5,29 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Portanto,

$$\lambda_2 = (7,001 \pm 0,005) \text{ cm}$$

Parte B: Intensidade da onda

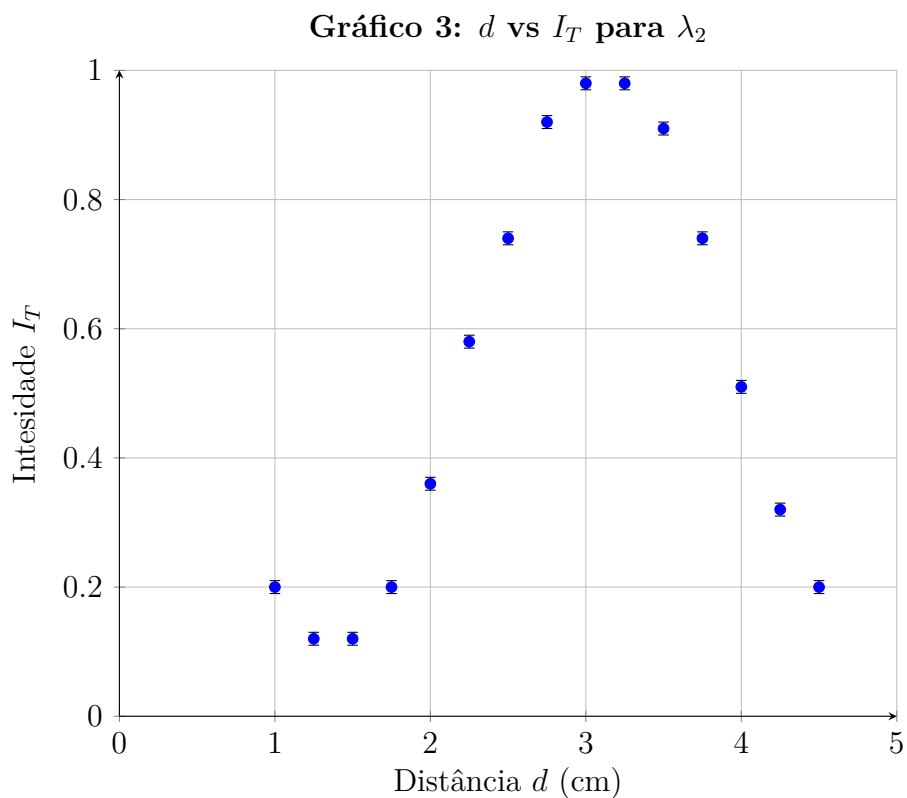
Solução B.1

Tabela 2: Intensidade em função da distância para λ_2

$(d \pm 0,05) \text{ cm}$	Intensidade ($I_T \pm 0,01$)
1,00	0,20
1,25	0,12
1,50	0,12
1,75	0,20
2,00	0,36
2,25	0,58
2,50	0,74
2,75	0,92
3,00	0,98
3,25	0,98
3,50	0,91
3,75	0,74
4,00	0,51
4,25	0,32
4,50	0,20

Solução B.2

Criando um gráfico com os valores na **Tabela 1**:

**Solução B.3**

Sabendo que:

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)}$$

Podemos rearranjar a equação como:

$$\frac{I_0}{I_T} - 1 = F \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)$$

Dessa forma, podemos criar as variáveis $A \equiv \frac{I_0}{I_T} - 1$ e $B \equiv \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)$.

Além disso, podemos considerar que $I_0 = 0,99$. Já que para λ_2 , a intensidade máxima ocorre em $I = 0,99$

Também, usaremos que $\lambda_2 = (7,001 \pm 0,005)$ cm

Solução B.4

Utilizando as variáveis A e B do exercício anterior, podemos contruir a seguinte tabela

Tabela 3: Determinação experimental do fator de finesse

A	B
3,950	0,611
7,250	0,812
7,250	0,950
3,950	1,000
1,750	0,950
0,707	0,812
0,338	0,612
0,076	0,389
0,010	0,189
0,010	0,050
0,088	0,000
0,338	0,049
0,941	0,188
2,094	0,388
3,950	0,611

Devemos selecionar os pontos antes dos dados começarem a se repetir(meio ciclo), para que seja possível linearizar eles para uma reta. A justificativa é que para $B = \sin^2(\frac{2\pi d}{\lambda})$, temos a função $\sin^2(\theta)$ que só existe no intervalo entre 0 e 1. Quando se gira o micrômetro no laboratório aumentando a distância d , a intensidade vai de um máximo (pico brilhante, onde $B = 0$), desce até um mínimo (onde $B = 1$) e depois sobe de novo para o máximo ($B = 0$). Para fazer o gráfico da reta $A = F \cdot B$, só são necessário pontos no eixo x entre 0 e 1. Um único meio período de onda(subida e descida) já é suficiente para o B varrer perfeitamente todos os valores de 0 até 1. Coletar mais dados depois disso, só vai fazer com que o seu B fique indo e voltando entre 0 e 1, plotando pontos em cima dos pontos que já foram plotados antes.

A nova tabela filtrada será:

Tabela 4: Determinação experimental do fator de finesse ajudasta

A	B
0,088	0,000
0,338	0,049
0,941	0,188
2,094	0,388
3,950	0,611

Realizando a regressão linear, obtemos que $y = 6,2x - 0,05$; $r = 0,991$. Perceba que $a \approx 0$, o que é esperado já que a função analisada é $A = FB$.

A incerteza, usando a formula da incerteza do coeficiente angular:

$$\sigma_F \approx 0,5 \implies F = (6,2 \pm 0,5)$$

Solução B.5

Dado que:

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}(1-2R+R^2)F = 4R \implies FR^2 - R(2F+4) + F = 0$$

Substituindo o valor de F encontrado no item **B.4**:

$$6,2R^2 - 16,4R + 6,2 = 0 \implies R^2 - 2,645R + 1 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$R = \frac{2,645 \pm \sqrt{(-2,645)^2 - 4(1)(1)}}{2} \implies R = \frac{2,645 \pm \sqrt{6,997 - 4}}{2}$$

$$R = \frac{2,645 \pm 1,731}{2}$$

Isso nos dá duas raízes:

$$R_1 \approx 2,188 \text{ (Descartamos, pois a refletância não pode ser maior que 1)}$$

$$R_2 \approx 0,457$$

Para o calculo da incerteza:

$$\sigma_R = \frac{4(1+R)}{(1-R)^3} \sigma_F \implies \sigma_R = \frac{0,47}{36,4} \approx 0,013$$

Por fim:

$$R = (0,46 \pm 0,01)$$

9.3.13 Efeito fotoelétrico

Solução A.1

Usando $|K| = |U| = qV$ no limite:

$$eV_0 = hf - \phi \implies V_0 = \frac{1}{e}(hf - \phi)$$

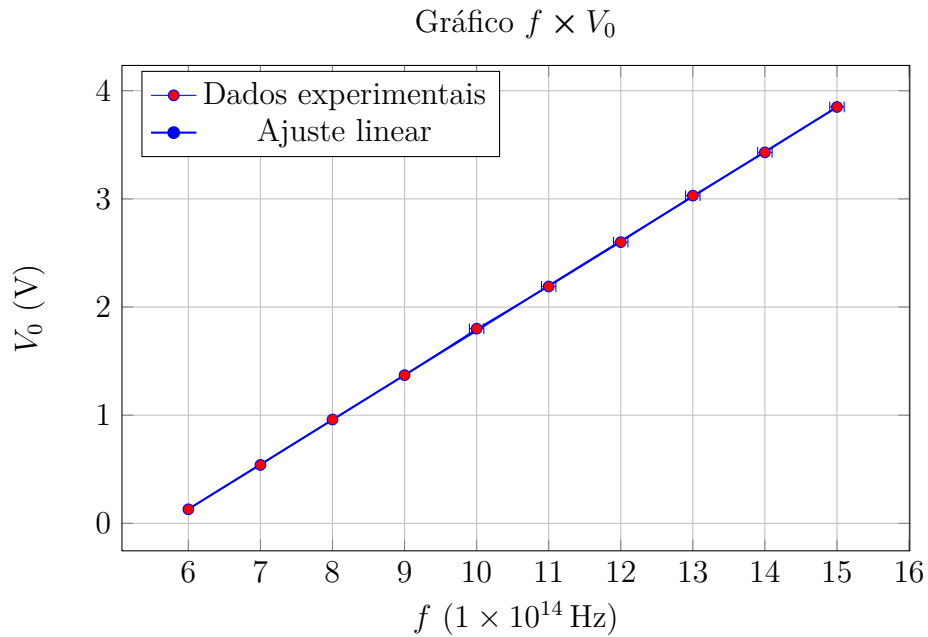
Solução A.2

Basta escolher um determinado comprimento de onda e verificar a tensão necessária para zerar a leitura do amperímetro. Para $\lambda = 400 \text{ nm}$, $V_0 \approx 0.75 \text{ V}$ para qualquer densidade. Assim, a tensão de corte **não** depende da densidade de fótons.

Solução A.3

Tabela 1: $f \times V_0$

$f \text{ (} 10^{14} \text{Hz)}$	$V_0 \text{ (}\pm 0.01 \text{ V)}$
15.0 ± 0.1	3.85
14.0 ± 0.1	3.43
13.0 ± 0.1	3.03
12.0 ± 0.1	2.60
11.0 ± 0.1	2.19
10.0 ± 0.1	1.80
9.00 ± 0.01	1.37
8.00 ± 0.01	0.96
7.00 ± 0.01	0.54
6.00 ± 0.01	0.13



O valor $R^2 = 0.99996$ foi obtido. Logo:

$$\sigma_B = B \sqrt{\frac{1/R^2 - 1}{N - 2}} \approx 9 \times 10^{-18} \text{ V s}$$

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \approx 0.010 \text{ V}$$

$$V_0 = -(2.346 \pm 0.010) \text{ V} + ((4.129 \pm 0.009) \text{ V Hz}^{-1} 10^{-15}) f$$

Solução A.4

Como a regressão é da forma $V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e}$, temos:

$$B = \frac{h}{e} \rightarrow h = (6.617 \pm 0.014) \text{ m}^2 \text{ kgs}^{-1}$$

$$A = -\frac{\phi}{e} \rightarrow \phi_{\text{Na}} = (2.346 \pm 0.010) \text{ eV}$$

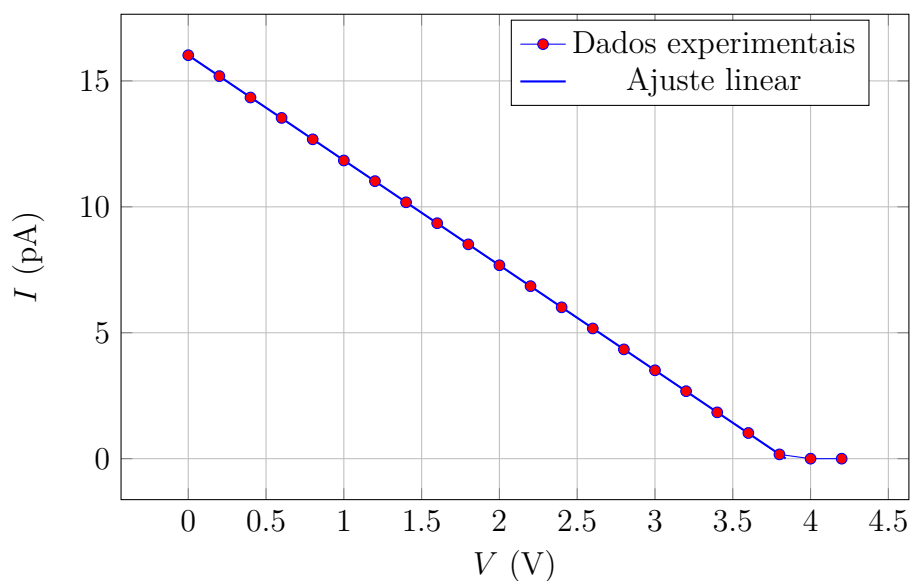
Solução A.5

Inicialmente, vamos fixar o metal, o comprimento de onda e a densidade de fótons para entender como I varia com V e V_0 . Os seguintes dados foram obtidos para o sódio com $\lambda = 200 \text{ nm}$ e $D = 1$:

Tabela 2: $V \times I$

$V (\pm 0.01 \text{ V})$	$I (\pm 0.02 \text{ pA})$
0.00	16.02
0.20	15.19
0.40	14.34
0.60	13.53
0.80	12.68
1.00	11.84
1.20	11.02
1.40	10.18
1.60	9.35
1.80	8.51
2.00	7.68

$V (\pm 0.01 \text{ V})$	$I (\pm 0.02 \text{ pA})$
2.20	6.85
2.40	6.01
2.60	5.17
2.80	4.34
3.00	3.51
3.20	2.68
3.40	1.84
3.60	1.02
3.80	0.17
4.00	0.00
4.20	0.00

Gráfico $V \times I$ 

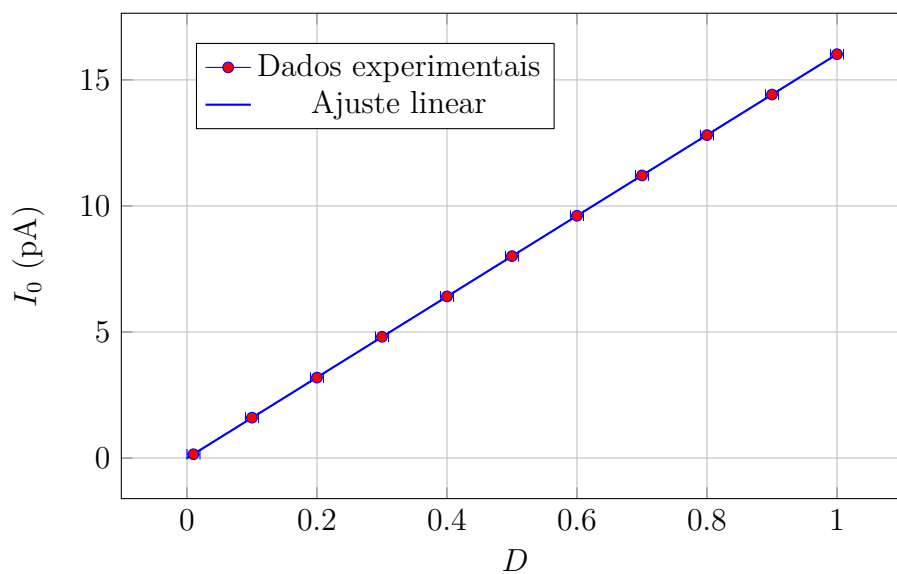
Para a parte não constante do gráfico, temos uma concordância excelente com uma reta ($R^2 \approx 0.999998$). Além disso, note que $I(0)$ praticamente não varia com o comprimento de onda ou metal escolhido (até atingir o corte). Sendo assim, podemos representar I da seguinte forma:

$$I(V) = \begin{cases} I_0(D) \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) & V \leq V_0, \quad I_0(1) = (16.019 \pm 0.005) \text{ pA} \\ 0 & V \geq V_0 \end{cases}$$

Por último, precisamos verificar a dependência de I_0 por D . Isso pode ser facilmente determinado fixando $\lambda = 200 \text{ nm}$ para o sódio com $V = 0$ e variando D :

Tabela 3: $D \times I_0$

$D (\pm 0.01)$	$I_0 (\pm 0.02 \text{ pA})$
0.01	0.15
0.10	1.60
0.20	3.19
0.30	4.81
0.40	6.41
0.50	8.01
0.60	9.61
0.70	11.21
0.80	12.81
0.90	14.42
1.00	16.02

Gráfico $D \times I_0$ 

Fazendo o ajuste linear ($R^2 \approx 0.9999991$), $\frac{I_0(D)}{1 \text{ pA}} = (16.026 \pm 0.005)D - (0.006 \pm 0.003)$
 Combinando ambos os resultados, podemos estimar $I(V)$ como:

$$I(V) = \begin{cases} I_k \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) D & V \leq V_0, \\ 0 & V \geq V_0 \end{cases} \quad I_k = (16.023 \pm 0.008) \text{ pA}$$

Solução A.6

Quanto menor for a função trabalho do metal, mais fácil será retirar um elétron,

o que está diretamente relacionado com a reatividade química. Assim, basta medir o comprimento de onda necessário para arrancar elétrons dos metais. Portanto, obtemos a seguinte ordem:

Césio > Cálcio > Potássio > Sódio > Magnésio > Urânio > Cádmio $\approx$ Alumínio > Chumbo > Nióbio $\approx$ Zinco > Mercúrio $\approx$ Ferro > Cobre > Prata > Carbono > Cobalto $\approx$ Berílio $\approx$ Níquel > Ouro $\approx$ Selênio > Platina.

O que é uma boa aproximação para a reatividade de metais estudada na química!

Apêndice A

Apêndice: Distribuição normal

No capítulo 1, foi feita, sem prova, uma afirmação sobre a probabilidade de que o valor real da grandeza esteja dentro do intervalo das incertezas. Nesse apêndice, demonstraremos que, se as fontes de erro forem aleatórias, a distribuição se aproxima de uma normal, além disso, exploraremos também suas principais propriedades.

A.0.1 Distribuição binomial

Antes de tudo, precisamos entender como os dados se distribuem quando há uma probabilidade conhecida de um evento ocorrer:

Exemplo 1

Tiago estava trabalhando em um simulador de "coin flipping": o programa aleatoriza os resultados de um número N de lançamentos de moeda e depois mostra o número de caras e de coroas.

Sabendo disso, ele gostaria de calcular a probabilidade de que entre 45 e 55 moedas caíam viradas em cara, sendo que a probabilidade desse evento ocorrer é de 50%.

Para isso, usou o seguinte raciocínio para 45 moedas: 45 moedas podem ser colocadas em várias ordens diferentes dentre os 100 lançamentos e qualquer uma têm a mesma probabilidade de ocorrer. Dessa forma, podemos usar o conceito de combinação (tomamos 45 elementos do conjunto de 100 elementos).

$$C_{45}^{100} = \frac{100!}{45! \times 55!}$$

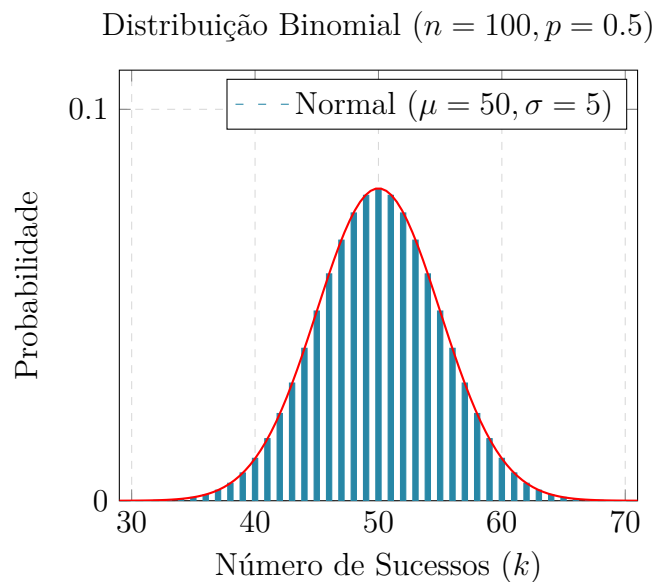
Agora, a probabilidade do evento ocorrer é a probabilidade individual de 45 moedas viradas em cara e 55 coroa ocorrerem em uma ordem específica vezes o número de ordens:

$$P_{45} = C_{45}^{100} \times (0,5)^{45} \times (0,5)^{55} \approx 4,677\%$$

Agora, basta somar para todas as probabilidades entre 45 e 55 para obter:

$$P_{45 \leq x \leq 55} \approx 72,87\%$$

Essa distribuição que acabamos de tratar é a **distribuição binomial**, usada para computar probabilidades de um certo número de eventos com probabilidade p ocorrerem. Ela é **discreta**, ou seja, seus valores são definidos apenas para números inteiros, por causa disso, a visualização fica mais clara quando usamos um histograma:



Aqui, podemos notar um comportamento curioso: **a distribuição binomial se aproxima à curva da distribuição gaussiana**.

A.0.2 Distribuição Normal/Gaussiana

Essa segunda distribuição é dada pela seguinte equação paramétrica:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ela rege a ocorrência de eventos aleatórios em torno de um valor esperado, como o que ocorre na realização de medidas com fontes de erros.

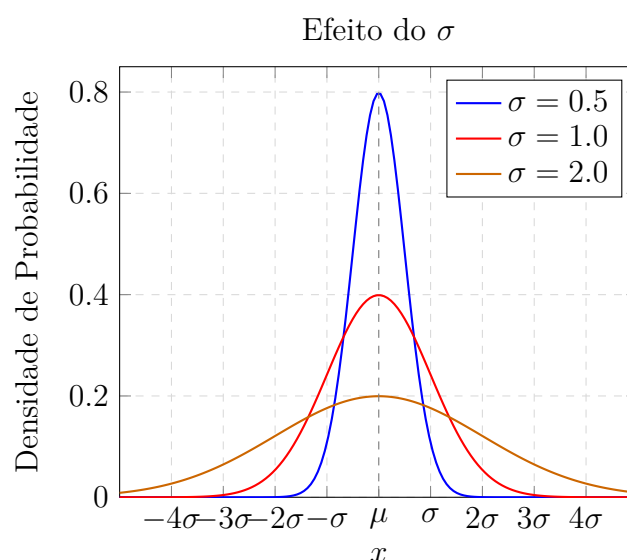
A origem desse comportamento decorre de um rigor matemático que está além do escopo desse livro, porém, podemos ter um insight sobre esse resultado, denominado **Teorema do Limite Central**:

- A Distribuição Binomial nos dá a probabilidade de obtermos um número k de sucessos dentre n tentativas, dado uma probabilidade p de ocorrência.
- As fontes de erro na realização de medições são também de natureza aproximadamente aleatória, além disso, seus efeitos são pequenos e independentes.
- Isso significa que, para um valor se distanciar muito da média, muitos desses erros devem flutuar na mesma direção simultaneamente, o que é um evento raro do ponto de vista estatístico. Em contraste, flutuações que se cancelam são bastante prováveis de ocorrer, o que condiz com a Binomial.
- Conforme n cresce, a aproximação se torna cada vez mais precisa, já que os intervalos relativos entre dois números de sucessos consecutivos se tornam cada vez menor, de forma que, para $n \rightarrow \infty$, ambas as curvas se igualam, independente de p .

Agora, podemos entender o que cada um dos elementos μ e σ significam, além de outras propriedades.

A.0.3 Propriedades

Observe o seguinte gráfico:



Nesse gráfico, foi introduzido um termo que pode não ser tão familiar, que é a **densidade de probabilidade**, há, porém, uma analogia muito parecida com a do histograma: ainda no exemplo de medidas, imagine que dividamos o intervalo de valores possíveis para uma medida de tempo em muitas pequenas faixas, a probabilidade de obtermos o resultado em cada faixa é dado pela altura do gráfico para tal valor; em outras palavras, ela quantifica a frequência com que um evento qualquer ocorre para um dado valor de x .

$\text{probabilidade de um evento ocorrer entre } x \text{ e } x + \Delta x \propto f(x)\Delta x$

Como fazemos se queremos descobrir qual a média para uma função como essa? Perceba como a resposta mais simples retorna à discussão sobre o caso discreto.

Suponha que queiramos calcular a média dos valores que um dado viciado deixa virado para cima, sabendo que 2 terços dos lançamentos são divididos igualmente entre números de 1 a 3, enquanto os demais se dividem igualmente entre 4 e 6. Os procedimentos são:

- Calcular as probabilidades individuais:

$$P(1, 2, 3) = \frac{2}{9} ; P(4, 5, 6) = \frac{1}{9}$$

- Multiplicar cada valor pela sua probabilidade para encontrar a contribuição de cada um pela média:

$$a_1 = P(1) \times 1 ; a_2 = P(2) \times 2 \dots$$

- Somar tudo para obter a média ponderada:

$$\bar{x} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = 3$$

Agora, note como os passos são semelhantes para uma distribuição contínua:

- Calcular a distribuição de probabilidades (encontrar $f(x)$)
- Multiplicar cada valor de x pela sua probabilidade para encontrar a contribuição de cada um pela média ($xf(x)dx$)
- Somar tudo para obter a média ponderada pelas probabilidades. Nessa hora, é preciso somar todos as pequenas contribuições, ou seja, integrar a função durante todo o intervalo analisado:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Mesmo sem conhecimento prévio de cálculo, é fácil de analisar pelo gráfico que μ define um eixo de simetria. Logo, do ponto de vista estatístico, esse valor define o **valor esperado** ou a **média** da grandeza.

Da mesma forma, perceba como a dispersão dessa distribuição aumenta conforme σ aumenta, esse valor é o **desvio padrão**. Aqui, fica claro o porquê de seu uso como estimativa de incerteza, já que a probabilidade de uma nova medida estar a menos de um

desvio padrão de distância da média é fixa, sempre igual a **68%**; um valor razoável para incluir a maior parte das medidas.

Mas ainda temos muitas dúvidas não respondidas: por que a média de um conjunto de dados é a melhor estimativa do valor real, e não a moda ou mediana, por exemplo? Qual a probabilidade da medida estar a n desvios padrões de distância da média? Por que adicionamos incertezas em quadratura e usamos derivadas parciais como pesos?

A.0.4 Média

Seja X a estimativa de valor real da grandeza, suponha, também, que realizemos i medidas resultando em um conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$, podemos calcular a probabilidade de obtermos cada um como sendo proporcional à densidade de probabilidade naquele ponto:

$$P(x) \propto \exp\left(-\frac{(x - X)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Multiplicamos, então, a probabilidade de obtermos cada uma das medidas para obter a probabilidade de obter o conjunto de dados, a menos de uma constante de proporcionalidade:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_i) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^i (x_j - X)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Agora que quantificamos o quão provável é que X seja o valor real da grandeza, precisamos encontrar qual valor faz com que essa probabilidade seja máxima, para isso, precisamos que o expoente seja máximo em relação a X , logo, precisamos que a seguinte função seja máxima:

$$f(X) = -\sum (x - X)^2$$

Expandindo cada quadrado:

$$f(X) = -\sum x^2 + 2X \sum x - NX^2$$

Onde N é o número de medidas, por fim, note como se trata de uma equação quadrática de X , com parâmetros:

$$a = -N; \quad b = 2 \sum x; \quad c = -\sum x^2$$

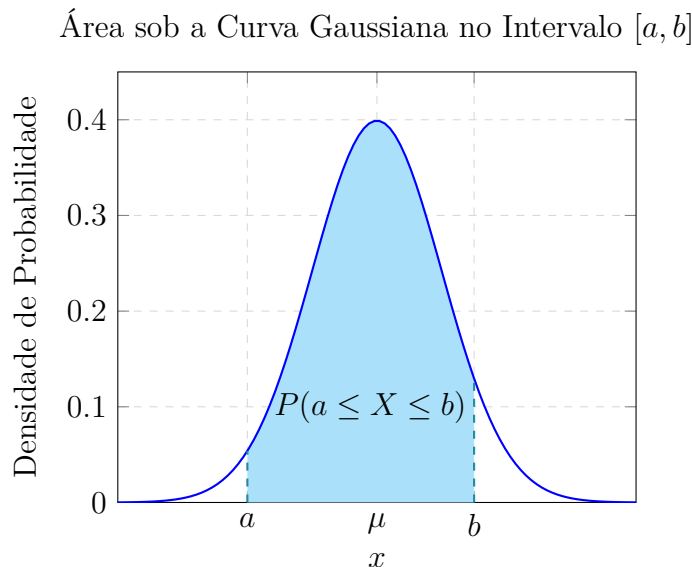
Como seu vértice se encontra em $-\frac{b}{2a}$, seu valor mínimo ocorre para:

$$X = \frac{\sum x}{N}$$

Que corresponde justamente à média, como queríamos demonstrar.

A.0.5 Função erro

Anteriormente, calculamos a probabilidade de um valor estar entre x e $x + \Delta x$ como sendo $f(x)\Delta x$, na prática, encontrar a probabilidade desse valor estar em um intervalo arbitrário como $[a, b]$ significa realizar a **integral** da função de densidade de probabilidade, que significa, também, encontrar a área entre o gráfico e o eixo x entre esse intervalo.



Infelizmente, essa área não pode ser calculada como uma expressão fechada em função de a e b , logo, não podemos encontrar a probabilidade de um dado estar a um número arbitrário n de desvios padrões da média a não ser de forma computacional.

A título de curiosidade, usamos a **função erro** para tal tarefa, aqui está uma tabela de valores para a probabilidade em função da quantidade de desvios padrões da média.

Note como é pouco provável ter valores acima de 3 desvios padrões de distância em relação à média. Entender o significado disso é imprescindível na hora de escolher descartar ou não um dado, pois sempre haverá dados bastante dispersos, mas nem sempre eles estão contribuindo para a aleatoriedade da amostra e podem se tratar de erros no procedimento experimental.

Tabela A.1: Probabilidade contida a até n desvios padrões da média em uma Distribuição Normal

Distância da Média ($n\sigma$)	Probabilidade (%)
1σ	68,27%
2σ	95,45%
3σ	99,73%
4σ	99,9937%
5σ	99,99994%
6σ	99,999998%

A.0.6 Soma de incertezas

Para finalizar nossa discussão, podemos provar que a melhor estimativa para a incerteza de uma função de um número arbitrário de variáveis é:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Conforme apresentado no capítulo 1.

Primeiramente, qual a incerteza de uma função qualquer de uma variável?

Tomemos como exemplo a função $f(x) = x^2$, note como uma pequena variação em x não corresponde, necessariamente, à uma mesma variação em x^2 , já que há pontos onde a taxa de crescimento da função é maior, como há pontos onde ela é menor. Se pensarmos na incerteza como um deslocamento muito pequeno tomado em relação a um valor central, o conceito de **propagar incertezas** se traduz em ponderar um erro pelo potencial que ele tem de causar mudanças no valor final da expressão.

Para qualquer função, podemos aproximar a variação que os valores de $f(x)$ teriam caso variássemos um pequeno valor Δx pelo conceito de **derivada**. Derivar uma função se traduz em, basicamente, encontrar a reta tangente em função de x , determinando a taxa de variação de f em cada ponto, sua representação típica é:

$$\text{derivada de } f \text{ em relação a } x \rightarrow \frac{df}{dx}$$

A regra que determina o resultado dessa operação, para funções exponenciais, é:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

Seu valor, então, para x^2 ($n = 2$):

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

Essa derivada é justamente o peso da propagação. A incerteza final será, então:

$$\sigma_f = 2x\sigma_x$$

Para um caso geral com n variáveis, a troca ocorre no tipo de derivada, usamos a **derivada parcial**, o que significa, basicamente, que tomamos as variações uma variável de cada vez, o que funciona apenas se elas forem não correlatas.

Na prática, então, isso explica por que ponderamos cada incerteza pelo expoente; Se dividirmos σ_f por f para um expoente n qualquer:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \frac{nx^{n-1}\sigma_x}{x^n} = n \frac{\sigma_x}{x}$$

O que prova que devemos usar os expoentes como pesos para propagar de incertezas em funções exponenciais.

Por outro lado, seja uma função $q(x', y')$ próxima do valor central $q(X, Y)$, onde as letras maiúsculas indicam os valores esperados e as letras com linha os desvios ($x' = x - X$ e $y' = y - Y$), usando o conceito de variáveis parciais:

$$\Delta q(X, Y, x', y') \approx \frac{\partial q}{\partial x} x' + \frac{\partial q}{\partial y} y'$$

Temos uma soma de duas funções, logo, como no exemplo da média, podemos calcular a probabilidade de que esses dois resultados ocorram aleatoriamente. Sejam $f_1(x')$ e $f_2(y')$ essas funções e σ_1, σ_2 as respectivas incertezas, já ponderadas pelas derivadas parciais:

$$P(f_1, f_2) \propto \exp\left(-\frac{f_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{f_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

Como o valor esperado das funções é 0, bem como o da sua soma, podemos reescrever dessa forma:

$$P(f_1, f_2) \propto \exp\left(-\frac{(f_1 + f_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} - g(f_1, f_2)\right)$$

Onde

$$g(f_1, f_2) = \frac{(\sigma_2^2 f_1 - \sigma_1^2 f_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Na prática, precisamos integrar a função P por todos os valores de g , mas isso apenas acrescenta mais uma constante de proporcionalidade, podemos repetir esse procedimento para uma quantidade qualquer de funções n para obter:

$$P(f_1, f_2, \dots, f_n) \propto \exp\left(-\frac{(f_1 + f_2 + \dots + f_n)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)}\right)$$

Ou seja, a incerteza correspondente é:

$$\sigma_q^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Cada uma das n incertezas, ponderadas por seus pesos, seguem a regra:

$$\sigma_i = \left. \frac{\partial q}{\partial x_i} \right|_{X_i} \sigma_{x_i}$$

Como queríamos demonstrar.
