

SIMEDIANAS

Por Rodolfo Rodrigues

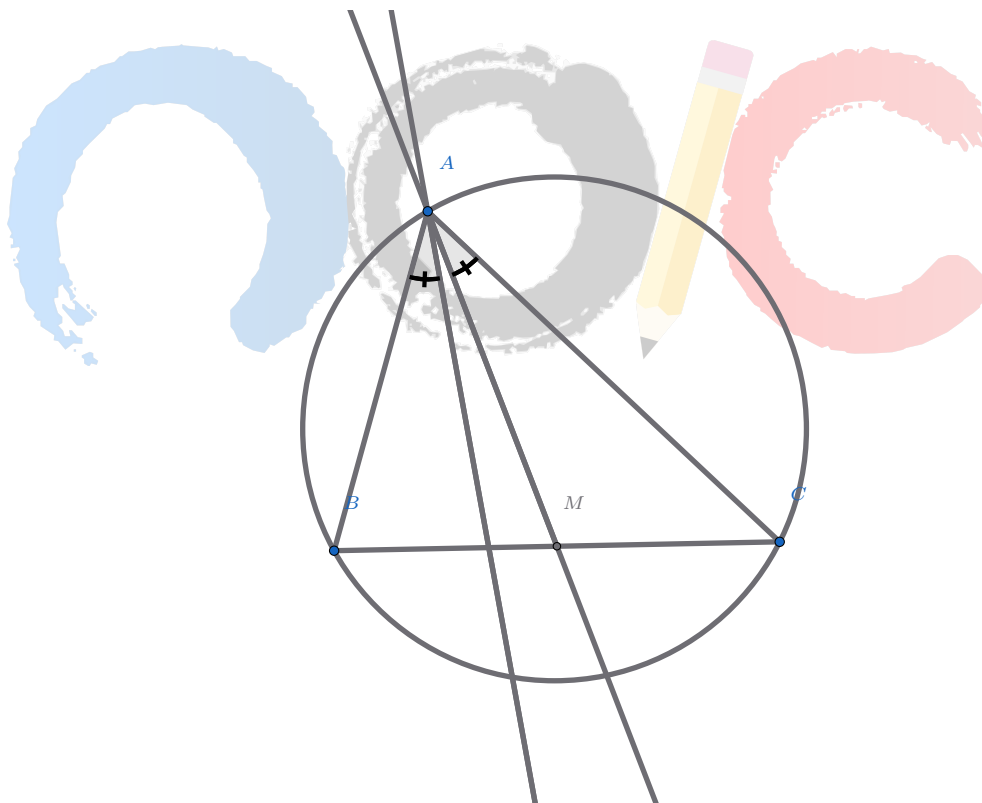
Introdução

As simedianas são uma das cevianas mais importantes da geometria, por que possuem diversas propriedades e aparecem em muitas configurações, auxiliando em marcações de ângulo, length bash ou até geometria projetiva.

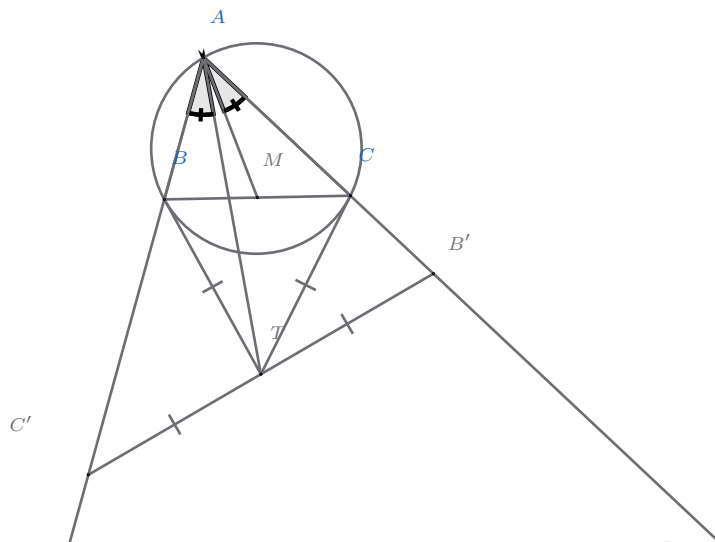
Teoria

Definição

Seja M o ponto médio de BC . A isogonal da reta AM em relação ao ângulo $\angle BAC$ (ou seja, a reflexão da reta AM pela bissetriz de $\angle BAC$) é chamada de A -simediana.



Teorema 1 (Simediana passa pela interseção das tangentes). Seja T a interseção das tangentes por B e C ao circuncírculo de $\triangle ABC$. Então AT é a A -simediana de ABC .



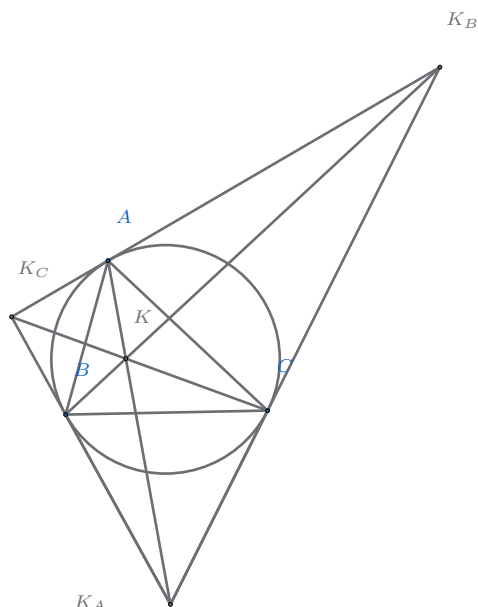
Prova. Seja B' e C' as interseções da circunferência de centro T e raio $TB = TC$ com o prolongamento das retas AC e AB . Marcando ângulo, é fácil provarmos $B'-T-C'$ colineares, em particular T é o ponto médio de $B'C'$.

Como $(BB'CC')$ cíclico, e $BC' \cap C'B = A$, podemos dizer que BC e $B'C'$ são retas anti-paralelas em relação ao ângulo $\angle BAC$.

Isso é só uma outra forma de dizer que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AB'C'$ são semelhantes, mas orientações refletidas com relação ao ângulo $\angle BAC$ (Tente verificar isso).

Portanto, como T é ponto médio de $B'C'$, devido a reflexão AT será a A -simediana de ABC . $\square$

Teorema 2 (Ponto de Lemoine). Seja ABC um triângulo, então suas três Simedianas, relativas aos vértices A , B e C são concorrentes em um ponto K chamado de ponto de Lemoine, que é o conjugado isogonal do baricentro.



Prova Seja K_A a interseção das tangentes por B e por C em relação a (ABC) e defina K_B e K_C similarmente. Pelo teorema anterior, basta provarmos que AK_A , BK_B e CK_C concorrem.

No entanto, podemos provar isso com ceva percebendo que tomando como referência o triângulo $K_A K_B K_C$, (ABC) será o incírculo e A , B e C os pontos de contato com os respectivos lados.

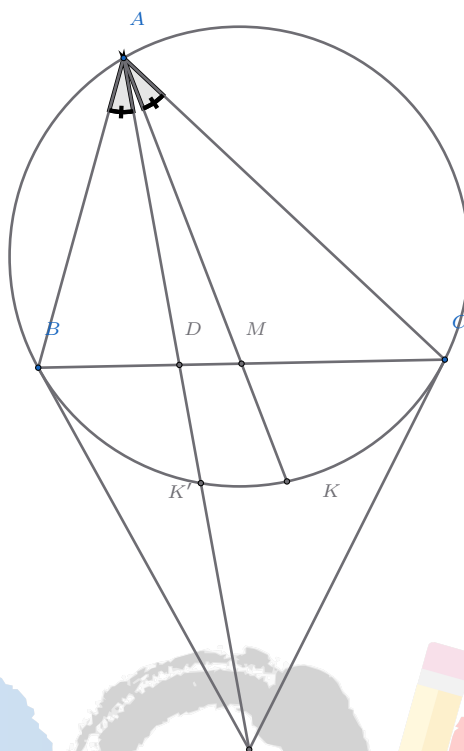
Também podemos provar um teorema mais geral. Dado um ponto X as isogonais das retas AX , BX e CX pelos ângulos $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$, respectivamente, concorrem em um ponto X' que é chamado conjugado isogonal de X em relação a ABC .

A existência desse ponto pode ser facilmente demonstrada por meio da ceva trigonométrica. (fica como exercício)

Teorema 3 (Simediana induz quádruplas harmônicas). Dado um triângulo ABC , D um ponto no seu circuncírculo e T a interseção das tangentes por B e por C em relação a (ABC) , então:

$$(A, K; B, C) = -1 \iff AK \equiv A - \text{simediana}$$

Um corolário muitas vezes útil para projeções é que $(A, K; AT \cap BC, T) = -1$



Demonstração Seja M o ponto médio de BC . Por semelhança de triângulos:

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AM}{MC} = -\frac{AM}{MB} = -\frac{AC}{KC}$$

A volta é análoga, pelas razões concluímos a semelhança que implica na simediana. $\square$

Teorema 4 (Lema da isogonal). Seja ABC um triângulo, D e D' pontos em BC . Então,

$$\angle BAD = \angle CAD' \iff \frac{BD}{CD} \frac{BD'}{CD'} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

. Em particular, se D é a interseção da A -simediana com BC então $\frac{BD}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

Demonstração.

Usando lei dos senos em BAD e CAD :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle CAD}$$

Analogamente, para BAD' e CAD' :

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB \sin \angle BAD'}{AC \sin \angle CAD'}$$

Multiplicando as equações e usando o fato de ser isogonal, os senos cortam e a relação segue.

Para o caso de ser o pé da simediana, segue por que o pé isogonal vai ser o ponto médio então $\frac{BM}{CM} = 1$. $\square$

Problemas exemplo

Exemplo 1 (P5 OBM N2 2020). Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O . Seja M o ponto médio de AB e $K \neq C$ o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos ABC e CMO . As retas CK e OM encontram-se em P . Prove que $\angle KAP = \angle MCB$.

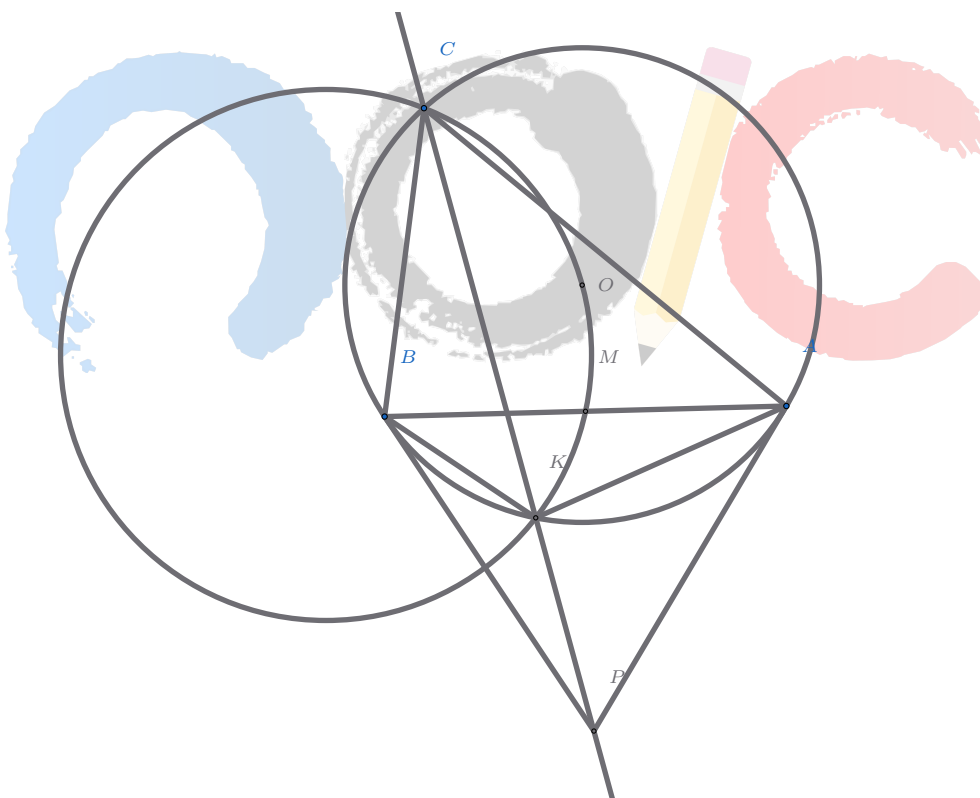
Uma parte muito importante desse problema, mais do que saber aplicar uma teoria necessária é saber como desenhar ele, que também é uma habilidade extremamente útil para resolver muitos outros problemas.

Observe que os pontos A e B tem papéis “simétricos”, por exemplo quando tomamos o ponto médio de AB , esse não é um ponto relativo exclusivamente a A ou exclusivamente a B , por isso é simétrico.

Agora, o contrário acontece pra C . O circuncírculo (CMO) e a reta CK são todas construções exclusivas pra C que não são feitas pra A e B , então C vai ser um ponto “especial”.

Nesse caso, já conseguimos concluir 2 fatos sem nem tentar o problema, só olhando pro enunciado.

- O desenho ficará melhor se posicionarmos C no topo do triângulo.
- A única parte que não é simétrica em A e B é o que o problema pede pra provar, então já podemos conjecturar que se trocarmos A e B essa propriedade vai continuar verdade, então também deve ser verdade que $\angle KBP = \angle MCA$.



Solução

Por um bom desenho podemos conjecturar que P será o encontro das tangentes por A e por B , se esse for o caso, pelo **Teorema 1**:

$$\angle MCB = \angle ACK = \angle KAP$$

Para provar isso vamos trabalhar com o problema ao contrário. Seja P' a interseção das tangentes e $K' \neq C$ a interseção de $P'C$ com (ABC) . Como CK' será a C – simediana de ABC e K – simediana de AKB ,

$$\angle OCM = \angle ACM - \angle ACO = \angle K'CB - \angle ACO = \angle K'AM - \angle ACO$$

e

$$\angle OK'M = \angle OK'A - \angle MK'A$$

Logo, para $\angle OCM = \angle OK'M$ basta que:

$$\begin{aligned} \angle K'AM - \angle ACO &= \angle OK'A - \angle MK'A \\ \iff \angle K'AM + \angle MK'A &= \angle OK'A + \angle ACO \\ \iff 180^\circ - \angle K'MA &= 90^\circ - \angle ACK' + 90^\circ - \angle ABC \\ \iff \angle K'MA &= \angle ACK' + \angle ABC \end{aligned}$$

Que é verdade.

Portanto, provamos que $(COMK')$ cíclico, que implica $K \equiv K'$. E assim P é a interseção das tangentes que, como já mostramos, acaba o problema.

Exemplo 2 (USA 2008). Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno, e sejam M , N e P os pontos médios de BC , CA e AB , respectivamente. As mediatrizes de AB e AC intersectam AM nos pontos D e E , respectivamente, e as retas BD e CE se intersectam no ponto F , no interior do triângulo ABC . Prove que os pontos A , N , F e P pertencem a uma mesma circunferência.

Seja O o circuncentro de ABC , e T a interseção das tangentes por B e por C veja que:

$$\angle BFC = \angle FDE + \angle FED = 2\angle BAD + 2\angle CAD = 2\angle BAC = \angle BOC$$

Assim, $(BFOC)$ é cíclico, que possui diâmetro OT , logo $\angle OFT = 90^\circ$. Por

$$\angle ONA = 90^\circ = \angle OPA$$

Então $ANOP$ cíclico de diâmetro AO .

Então basta que:

$$(AFNP) \iff \angle AFO = 90^\circ, \stackrel{(*)}{\iff} A-F-T \iff AF \text{ é a } A\text{-simediana}$$

Para provar isso, novamente vamos fazer o problema ao contrário. Seja $F' = (AO) \cap BD$, vamos mostrar que $C-E-F'$ colineares. Veja que:

$$\begin{aligned} \angle F'CA &= \angle C - \angle F'CB \\ &= \angle C - (180^\circ - 2\angle A - \angle F'BC) \\ &= (\angle C - 180^\circ + 2\angle A) + \angle F'BC \\ &= \angle A - \angle B + \angle B - \angle ABD \\ &= \angle A - \angle BAD \\ &= \angle CAE = \angle ECA \end{aligned}$$

□

Exemplo 3 (Reta de Schwatt). Em um triângulo ABC , o ponto médio da A -altura, o ponto médio de BC , e o ponto de Lemoine são colineares.

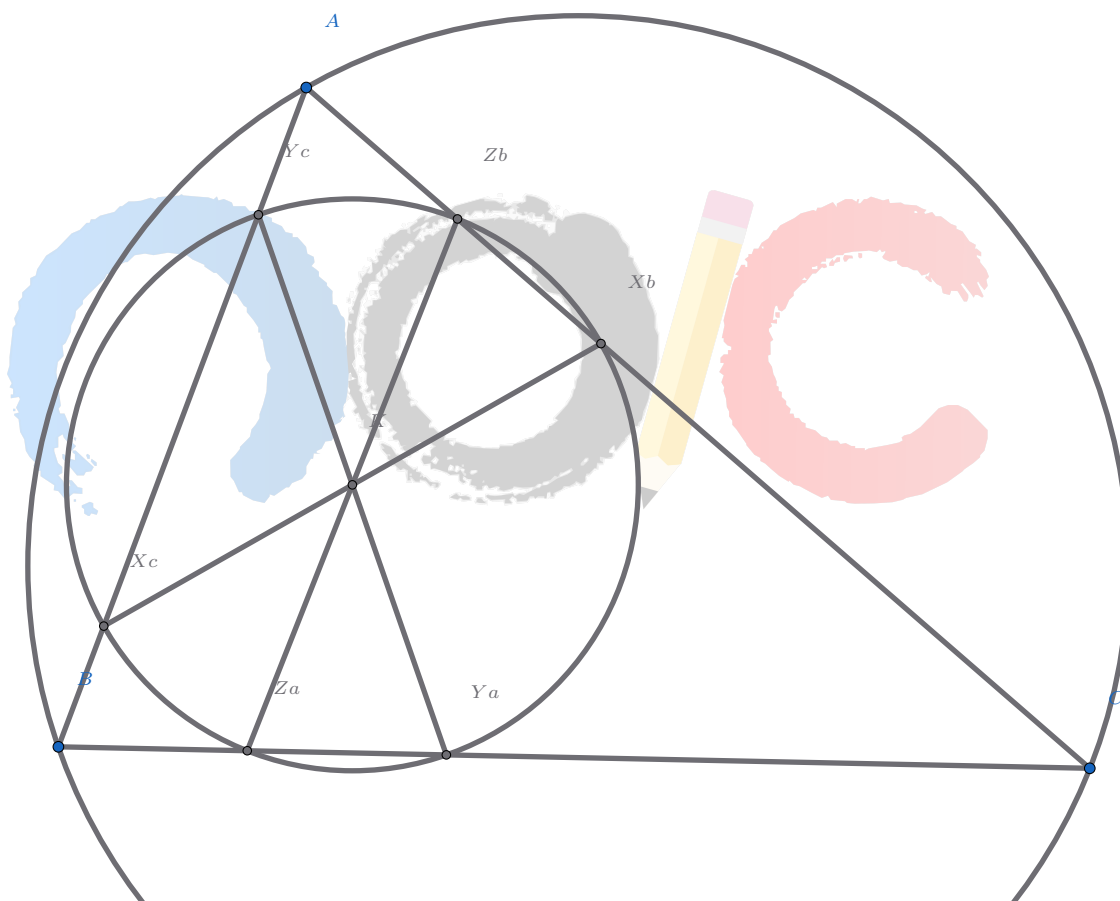
Pra fechar com chave de ouro, vamos exibir duas soluções usando técnicas diferentes, que mostra a versatilidade de trabalhar com simedianas.

Linda solução sintética

Essa solução é muito bonita pois ela nos dá uma explicação melhor do que está acontecendo nesse problema do que somente uma resolução. Antes de tudo, precisamos provar um lema.

Círculo de Lemoine

Sejam X_B e X_C pontos em AC e AB de modo que X_BX_C passa por K e (X_BX_CBC) cíclico, Defina Y_A, Y_C, Z_A, Z_B similarmente. Então $(X_BX_CY_AY_CZ_AZ_B)$ é cíclico.

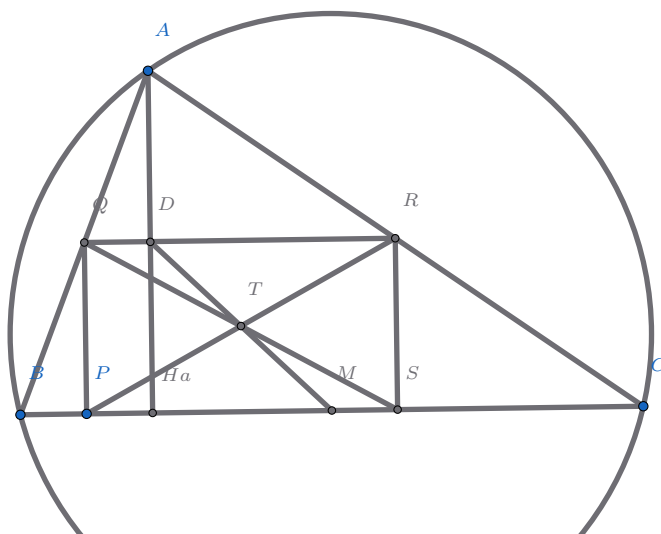


Prova. Por potência de ponto, veja que AX_BX_C e ABC são semelhantes, mas possuem orientações refletidas (Em outras palavras, X_BX_C e BC são anti-paralelas em relação a $\angle A$).

Portanto, como AK é simediana, refletindo, K será ponto médio de X_BX_C . E analogamente também será de Y_AY_C e Z_AZ_B .

Como KY_AZ_A são isóceles pela condição de ângulos, o tamanho dos segmentos será igual e a circunferência terá centro K . □

Agora vem a parte boa. Pega um ponto P em BC , entre B e o pé da A -altura H_A e define um retângulo a partir de P como na figura a baixo:



Repetindo esse processo várias vezes, vamos ter diferentes retângulos $PQRS$ com base em BC , vamos nos atentar a seus centros T . Como P varia linearmente no segmento BD , os seus centros também deverão variar linearmente por uma reta.

Perceba então que quando P se aproxima de B , isto é, $P \rightarrow B$, acontece que $T \rightarrow M$. Já quando $P \rightarrow H_a$, observe que $T \rightarrow D$.

Logo, o segmento DM é o lugar geométrico dos centros desses retângulos, e, por meio do nosso lema acima, K será um desses centros, o que conclui a demonstração. □

Solução por projetiva

Seja R o encontro das tangentes por B e por C em (ABC) . Como $MR \parallel AH_a$ e D ponto médio de AH_a , segue que:

$$-1 = (MA, MH_a; MD, MR) \stackrel{M}{=} (A, AR \cap BC; MD \cap AR, R)$$

Repare que

$$(A, AR \cap BC; K, R) \stackrel{B}{=} (A, C; B - \text{simediana} \cap (ABC), B) = -1$$

Onde a última igualdade segue do **Teorema 3** mas com B no lugar do A . □

Problemas Propostos

Problema 1 (Polônia 2000). Seja ABC um triângulo onde $AC = BC$. Seja P um ponto no interior de ABC de modo que $\angle PAB = \angle PBC$. Seja M ponto médio de AB . Mostre que $\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$.

Problema 2 (USA TST 2007). O triângulo ABC está inscrito na circunferência ω . As tangentes a ω por B e C se encontram em T . Ponto S está em BC de modo que $AS \perp AT$. Ponros B_1 e C_1 estão em ST , (com C_1 entre B_1 e S) de forma que $B_1T = BT = C_1T$. Prove que ABC e AB_1C_1 são semelhantes.

Problema 3 (Ponto de Mittenpunkt). Seja ABC um triângulo, I_A, I_B, I_C os excêntricos relativos aos vértices A, B e C , respectivamente. Sejam M, N, P os pontos médios dos lados BC, CA e AB respectivamente. Demonstre que I_AM, I_BN e I_CP são concorrentes.

Problema 4 (Parte da configuração do P2 do TST Ibero 2026). Seja ABC um triângulo, com incírculo I , ω a circunferência tangente aos lados AB, AC , e tangente internamente a (ABC) no ponto S . Seja W a reflexão de I por S . Demonstre que W está sobre (BIC) e que $(I, W; B, C) = -1$.

Problema 5 (USAJMO 2014). Seja ABC triângulo com incentro I , incírculo γ . Sejam M, N, P os pontos médios dos lados BC, CA e AB respectivamente, e E, F os pontos de tangência de γ com CA, AB , respectivamente. Sejam U, V as interseções de EF com MN, MP , respectivamente, e seja X o ponto médio do arco BAC de Γ . Prove que XI bissecta UV .

Problema 6 (BMO 2017). Considere ABC acutângulo, $AB < AC$ e seja ω seu circuncírculo. Sejam t_B e t_C as tangentes a ω por B e C respectivamente, e seja L a interseção. A reta por B paralela a AC intersecta t_C em D . A reta por C paralela a AB intersecta t_B em E . O circuncírculo de BDC intersecta AC em T onde T está no interior do segmento AC . O circuncírculo de BEC intersecta AB em S , onde B está no interior do segmento AS . Prove que ST, AL e BC concorrem.

Problema 7 (USA TST 2017). Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno com circuncentro O , e seja T na reta BC onde $\angle TAO = 90^\circ$. O círculo de diâmetro AT intersecta o circuncírculo de $\triangle BOC$ em A_1 e A_2 , onde $OA_1 < OA_2$. B_1, B_2, C_1, C_2 são definidos analogamente.

a) Prove que $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ são concorrentes.

Dicas

Problema 1 (Polônia 2000). Mostre que CA e CB são tangentes ao circuncírculo de (PAB)

Problema 3 (Ponto de Mittenpunkt). Reformule o problema tomando $I_AI_BI_C$ como o triângulo de referência

Problema 4 (Parte da configuração do P2 do TST Ibero 2026). Seja N o ponto médio do arco BAC primeiramente mostre que $S-I-N$, que é uma propriedade conhecida do ponto S , também chamado de A -Mixtilinear.

Com isso defina o ponto fantasma $W' = SI \cap (BIC)$, prove que $(I, W'; B, C) = -1$, e também consequentemente conclua S ponto médio de IW'

Problema 5 (USAJMO 2014). Use Iran Lemma para provar que U e V estão nas bissetrizes internas de C e B respectivamente.

Referências

- A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry, Stefan Lozanovski
- 'Muricaaaaaa, i3435
- Euclidean Geometry in Math Olympiads, Evan Chen
- Noic Matemática ideia 9, Brendon Borck

